MARCIO DORIGO

FUNÇÃO QUADRÁTICA: UM ESTUDO SOBRE AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
SÃO PAULO
2006

MARCIO DORIGO

FUNÇÃO QUADRÁTICA: UM ESTUDO SOBRE AS REPRESENTAÇÕES GRAFICAS

Monografia apresentada como exigência parcial para a conclusão do "Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores de Matemática do Ensino Médio", sob orientação do Prof. Ms. Rogério Ferreira da Fonseca.

PUC/SP
SÃO PAULO
2006

AGRADECIMENTOS

À Secretaria de Estado da Educação, por ter promovido juntamente com a Pontifica Universidade Católica o programa de Especialização em Educação Matemática para professores da rede estadual de ensino.

A todos os professores com os quais mantive contato e aprendizagem durante o programa de pós-graduação e que com seus conhecimentos e orientações contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A todos os colegas que com paciência e sabedoria enriqueceram as aulas com suas experiências.

Ao professor doutorando Rogério Ferreira da Fonseca que com muita paciência e dedicação orientou o trabalho.

À minha querida família por contribuírem na minha formação, minha linda esposa e filhos.

Não existe nada mais horrível do que gente que diz: “É impossível”

Com sua postura altiva

Reprovam qualquer tentativa;

Não vêem a menor validade

Na história da humanidade.

Por eles não haveria invenção

O carro, rádio, a televisão, o computador e sua memória;

Viveríamos na pré-história.

O mundo seria um lugar bem sem graça

Se a gente que diz “Impossível” governasse.

(William J. Bennett)

RESUMO

Esta pesquisa tem como um dos principais objetivos investigar e analisar o processo de ensino/aprendizagem do comportamento gráfico de uma função polinomial do segundo grau, no que diz respeito aos seus deslocamentos nos eixos cartesianos, com foco nas diferentes representações, fundamentando-se na teoria dos registros de representação de Raymond Duval.

Pretendemos mostrar que por meio de observações, de relações com outros conteúdos e com discussões em grupo, os alunos podem conseguir perceber que mudanças ocorridas na expressão algébrica acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

Para desenvolver a pesquisa, foi realizado um trabalho com oito alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual situada na periferia de São Paulo, onde esses alunos analisaram juntos, cinco situações de gráficos de funções do segundo grau já prontos e responderam algumas questões. Essa análise se realizou fora do período normal de aula, onde os alunos se apresentaram voluntariamente.

Utilizando como principal referencial teórico o conceito de registros de representação semiótica desenvolvida por Duval, foi possível perceber que os diferentes registros de representação descritos pelo pesquisador favoreceram o processo de aprendizagem na análise dos gráficos de funções polinomiais de segundo grau no que se refere à representação das funções dadas em forma incompleta e fatorada. Não foram analisadas situações de funções polinomiais de segundo grau completa na forma $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ apenas exploramos a forma canônica da expressão de segundo grau.

Palavras-chave: Função Polinomial do 2ºgrau, Registro de Representação, Análise de gráfico, Expressão Algébrica.

SUMÁRIO

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial dessa monografia por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________ Local e Data:______________________

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho de conclusão para o curso de especialização em educação matemática, abordei o assunto de função polinomial do segundo grau, no sentido de analisar o comportamento do gráfico na ótica dos alunos do ensino médio de uma escola estadual da periferia de São Paulo, usando com referencial teórico os estudos de Duval.

Lecionando no Ensino Fundamental e Médio, freqüentemente encontramos alunos que apresentam dificuldades na leitura e interpretação de gráficos das funções polinomiais do segundo grau, mesmo porque os livros adotados não abordam com a devida importância o aspecto analisado nesta pesquisa.

O presente trabalho aborda no primeiro capitulo o conceito de função, seu contexto histórico e as origens da parábola, no segundo capitulo as considerações sobre os parâmetros curriculares nacionais e pesquisas desenvolvidas na educação matemática sobre os estudos das funções, e no terceiro capitulo a proposta da atividade que é função quadrática, um estudo das representações gráficas, contendo ainda as considerações iniciais, a problemática, a fundamentação teórica, os objetivos das atividades, as atividades, a analise das atividade, finalizando com as conclusões gerais e as referencias bibliográficas.

O desenvolvimento da seqüência didática, ou seja, as atividades se deram nos dias de segunda-feira e quarta-feira das 14h00min às 17h00min horas, totalizando 8 encontros sendo 4 segunda-feira e 4 quarta-feira numa sala de aula cedida pela direção da escola. Para o analise das atividades contei com um grupo de 8 alunos do 1º ano do ensino médio, que após conversa se disponibilizaram em participar do trabalho em horário diferente das aulas.

CAPÍTULO 1

1.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO E SEU CONTEXTO HISTÓRICO

Para que o conceito de funções atingisse uma das formas que atualmente é apresentada nas instituições de ensino alguns séculos se passaram. Esta evolução aconteceu paulatinamente através de noções vagas e sem exatidão.

Para alguns pesquisadores (SÁ et al, 2003; COSTA, 2004) esta evolução teve início há 4000 anos, mas somente nos três últimos séculos é que houve um verdadeiro desenvolvimento da noção de função, apresentado com uma estreita ligação com problemas de Cálculos e Análise.

Os mesmos pesquisadores (SÁ et al, 2003; COSTA, 2004) concordam que o conceito de função parte do instinto de funcionalidade, quando o homem levado pela necessidade, passa a fazer associações entre uma pedra e um animal, onde esta relação de dependência demonstra a idéia de controle.

Sendo assim já se percebe através dos babilônicos que ao construírem tabelas em argila onde para cada valor na primeira coluna existia um número na segunda e que na multiplicação dos desses números havia um outro relacionado, percebemos a idéia de função. Semelhantes aos babilônicos, os egípcios construíram tabelas, na maioria das vezes em papiros, que apresentavam o resultado das hipóteses, generalizações que eram o resultado da indução incompleta de casos mais simples para casos mais complicados. (SÁ et al., 2003).

Dentre os gregos, poderíamos citar a contribuição de Ptolomeu. Em sua obra “Almagesto”, desenvolveu idéias funcionais. SÁ et al (2003) cita que ele “trabalhou na área da astronomia, e que, desenvolveu ferramentas matemáticas, entre elas a trigonometria” (p. 81).

No século XVI, tivemos um relativo avanço no que diz respeito à álgebra, onde François Viéte (1540-1603) inicia os estudos baseados em parâmetros e variáveis. E segundo MENDES (1994) “foi Viéte quem fez a distinção entre aritmética e álgebra, passando a analisar os problemas utilizando métodos mais gerais” (p.20).

KLINE (apud MENDES, 1994) apresenta Galileu Galilei como o que fez surgir o interesse em debater os axiomas, mensuráveis e que, portanto poderiam ser relacionados por fórmulas. Seu principal interesse era entender como os fenômenos ocorriam, com o intuito de descrever as mudanças da natureza. Foi o estudo do movimento que originou o conceito de uma função ou de uma relação entre variáveis. Porém Galileu não formalizou explicitamente a palavra função.

Já no século XVII, Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) deram inicio, separadamente, ao método analítico para a introdução do estudo das relações. Por causa deles foi dada uma especial atenção às equações indeterminadas (várias soluções) envolvendo variáveis contínuas, fundamental para o desenvolvimento do cálculo (COSTA, 2004).

Isaac Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) são os destaques do século seguinte (XVIII). Dentro do conceito de função acredita-se que a maior ajuda de Newton foi sua descoberta a respeito de umas séries de potências, introduzindo o termo de “variável independente” (SÁ et al., 2003).

Leibniz em um de seus escritos de 1694 emprega a palavra função com significado puramente geométrico. Ele a compreendia como sendo quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva (MENDES, 1994; SÁ et al., 2003; COSTA, 2004). KLINE (apud Mendes, 1994), fala ainda que Leibniz, na obra História, usou a palavra função para representar quantidades que dependem de uma variável.

Mas, segundo COSTA (2004), somente em 1718 é que surge a primeira definição de função apresentada por Bernoulli (1654-1705). Ele definiu função da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes” (p.22).

Foi somente no século XVIII, que o conceito de função surgiu explicitamente na matemática. Leonhard Euler (1707-1783) definiu funções no sentido analítico, segundo o qual uma função não necessitava unicamente de uma expressão analítica, introduzindo o símbolo **f(x)**. O mesmo matemático diferenciou as funções contínuas e descontínuas, levando em consideração a lei de formação de cada função. As que fossem definidas por apenas uma expressão analítica seriam definidas como contínua e caso essa lei mudasse em qualquer intervalo do domínio automaticamente se classificaria como descontínua ou mista.

Outro nome importante para a construção do conceito de função foi Lagrange (1736-1813). Segundo MENDES (1994) ele definiu função assim:

> "Chama-s função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber Todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aprecem combinadas a elas" (p.37).

Segundo a pesquisadora, Lagrange menciona também que uma função representava uma combinação de diferentes operações, as quais deveria ser efetuada em quantidades conhecidas para assim serem obtidos valores de quantidades desconhecidas.

Perto do final do século XVIII, segundo SÁ et al(2003), a idéia de função teve que ser esclarecida e noções como a de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas. Com isto, Cauchy (1789-1857) em 1821 definiu função como quantidades variáveis que estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável.

Um contemporâneo de Cauchy propôs uma função que ficou conhecida com seu nome "função de Dirichlet". Segundo BOYER (1997), Dirichlet (1805-1859) apresentou uma definição muito ampla de função:

> "Se uma variável **y** está relacionada com uma variável **x** de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a **x**, existe uma regra segundo a qual um valor único de **y** fica determinado, então diz-se que **y** é função da variável independente **x**" (p. 405).

No século XX, o nome de destaque é o de Nicolas Boubaki. Ele conceitua função de duas maneiras:

> “Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável **x** de E e uma variável **y** de F é dita uma relação funcional em **y**, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja **x**^{a} E, existe um e somente um elemento **y**^{a} F que esteja associados a **x** na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento **x**^{a} E e o elemento **y**^{a} F que se encontra ligado a **x** na relação dada; diz-se que **y** é o valor da função para o elemento **x**, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função” . MENDES (1994, p.53).

SÁ et al (2003) apresentam um quadro sinótico da evolução do conceito de função que consideramos importante citarmos nesta pesquisa:

Autor	Ano	Contribuição
René Descartes (1596-1650)	_	Chegou a definir função como qualquer potência de x, como $x^2, x^3, \ldots$
Isaac Newton (1643-1727)	_	Introduziu o termo “variável independente”.
James Gregory	1667	Na obra *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* , conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: “Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b ,... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável.”
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra *função* para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra História usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.
Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes”.
Leonhard Euler (1707-1783)	_	Introduziu o símbolo f(x)

In: SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, 2003; p.90.

Autor	Ano	Contribuição
D'Alembert (1717-1783)	–	equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1797	Na obra Théorie des Functions Analytiques, definiu: "Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas".
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des fuctions: "Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo."
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em La théorie analytique de la chaleur que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_N \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right]$

In: SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, 2003; p.91.

Autor	Ano	Contribuição
Benhard Bolzano (1781-1848)	1817	Publicou Functionlehre onde conceituou continuidade muito próximo do conceito atual. Demonstrou o teorema do valor médio
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	1821	Em Cours d'analyse definiu função: "Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável." Definiu continuidade através de infinitésimos.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	_	Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pela série de Fourier.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	1837	Definiu função como: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x."
Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	_	Definiu função : "A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x. o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida".

In: SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, 2003; p.92.

Autor	Ano	Contribuição
Bernhard Riemann (1826-1866)	_	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de "integral de Riemann"
Philipp Cantor (1845-1918)	_	Desenvolveu a teoria dos conjuntos
Karl Weierstrass (1815-1897)	_	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
Giuseppe Peano (1858-1932)	_	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.
Nicolas Bourbaki	1968	Em Théorie des Ensembles conceitou função de duas maneiras: "Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x ª E, existe um e somente um elemento y ª F que esteja associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x ª E o elemento y ª F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função." E: "Um certo subconjunto do produto cartesiano AxB".

In: SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, 2003; p.93.

Para concluir, de acordo com COSTA (2004), ao se fazer um levantamento histórico pode-se perceber três diferentes momentos no que se refere à evolução do conceito de função: (1) como dependência entre variáveis; (2) como expressão analítica; e (3) como uma relação entre conjuntos.

1.2 AS ORIGENS DA PARÁBOLA

Não há unanimidade sobre a curva plana conhecida como parábola foi introduzida na matemática. Segundo a versão mais difundida, ela teria surgido dos esforços de Menaecmo (c. IV a.C.), um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), para resolver o chamado “problema deliano”, cuja origem é muito curiosa.

Assolados por devastadora peste, os habitantes da ilha de Delos (os delianos) recorreram aos préstimos de seu oráculo, que sugeriu, para afastar o mal, que eles construíssem um altar cúbico cujo volume fosse o dobro do volume do já existente altar cúbico consagrado ao deus Apolo.

A solução tentada pelos delianos, que consistiu em dobrar as arestas, obviamente não é correta, pois octuplica o volume. Consta até que a intensidade da peste cresceu após essa tentativa. Então foi enviada uma delegação a Atenas a fim de se aconselhar com o filósofo Platão (428-348 a.C.), que possivelmente difundiu o problema na comunidade matemática grega, da qual era uma espécie de guia intelectual. Com isso, muitos matemáticos de grande talento da época se engajaram na tarefa de resolver a questão, destacando-se entre eles o brilhante Menaecmo. Pressentindo, talvez, como se sabe hoje, que essa tarefa é impossível com o uso de régua e compasso apenas, Menaecmo tentou novos caminhos, o que o levou à descoberta de uma família de curvas conhecidas como seções cônicas, das quais a parábola é um dos membros. Aliás, sua solução deriva da interseção de duas parábolas.

Para chegar a essas curvas, Menaecmo considerou superfícies cônicas dos três tipos possíveis quanto à seção meridiana, a saber, aguda, reta ou obtusa. Selecionando as então com um plano perpendicular a uma geratriz, obteve as curvas que mais tarde seriam chamadas, respectivamente, de *elipse, parábola e hipérbole.* Isso explica a razão pelo quais essas curvas são conhecidas como seções cônicas. O que certamente Menaecmo não imaginava é que num futuro bastante remoto seriam encontradas aplicações científicas e práticas da mais alta importância para essas curvas. Para a parábola, entre outras coisas, no estudo da trajetória de um tiro de canhão. Vale frisar que a importância deste problema não deriva de seu papel nas guerras, mas sim de sua contribuição indireta para o desenvolvimento de vários ramos da ciência, como a química, física e a metalúrgica.

Os canhões entraram em cena na Europa no século XIV. De início, eram armas tão precários – ofereciam risco até mesmo para os artilheiros – que seu efeito era principalmente psicológico, decorrente dos estrondos que produziam. Á medida, porém, que a construção dessa arma foi se aprimorando, e sua importância bélica crescendo, alguns problemas matemáticas envolvendo a trajetória de uma bala de canhão vieram á tona. Por exemplo: como conseguir o alcance máximo para um tiro?

A primeira contribuição significativa nas investigações do problema da trajetória de um tiro de canhão se deve ao matemático italiano Niccolo Tartaglia (1499? -1557) e se encontra em sua obra Nova Scientia ("Nova Ciência"), publicada em 1537. Mediante observações e cálculos matemáticos, Tartaglia concluiu que o alcance máximo de um tiro ocorre quando o ângulo de elevação do cano do canhão é de 45º em relação à linha do horizonte. Percebendo, também, que o alcance do tiro é função desse ângulo de elevação, ele inventou um quadrante, calibrado em 12 partes, que, acoplado ao cano do canhão, permitia achar o ângulo de elevação e, portanto, ajustar o alcance do tiro. Mas faltavam a Tartaglia conhecimentos mais sólidos de física para poder ir além.

Por volta da metade do século XVII, os canhões já eram tão potentes que seus tiros alçavam distâncias da ordem de quilômetros, o que requeria a elaboração de uma teoria da trajetória e do alcance muito mais precisa. Entre os que se dedicaram a essa tarefa então Galileu Galilei (1564 – 1642) e alguns de seus notáveis alunos. Por meio de cuidadosas experiências, Galileu observou que, colocando um canhão sobre uma plataforma plana elevada e atirando com o cano na horizontal, o alcance do tiro variava em função da carga de pólvora, mas sempre no mesmo período. Isso indicava a existência de uma velocidade horizontal, variável com a carga, e um a vertical, constante. Motivado por isso, Galileu realizou o seguinte experimento: fazer cair, em queda livre, bolas postas a rolar sobre uma superfície plana. Medindo as distâncias horizontais e verticais e3m posições diversas, deduziu a seguinte lei (aqui dada na simbologia moderna), relacionando a distância horizontal, x, e a distância vertical, y, percorrida por uma bola que cai: $y=k\,x^2$, em que K é uma constante. Segue então que a trajetória descrita por um corpo em queda livre ou um tiro de canhão disparado horizontalmente é uma semiparábola.

Galileu chegou a esses resultados em 1608, mas não os publicou imediatamente. Devido a isso, o crédito pela descoberta de que a trajetória de um projétil, no vácuo, é uma parábola costuma ser atribuído a seu discípulo Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), que publicou um trabalho sobre trajetórias em 1632, baseando-se na suposição de que um projétil é impulsionando por duas forças distintas: a propulsora e a gravidade. Galileu lamentou ter perdido essa primazia, o que mostra quanto ele valorizava o assunto. Como não era homem de se acomodar, reagiu com a dignidade de um grande cientista: em sua monumental obra, *Diálogos acerca de duas novas ciências* (1638), publicou uma teoria das trajetórias parabólicas mais detalhadas que as existentes então.

CAPÍTULO 2

2.1 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES, CONSIDERAÇÕES SOBRE OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Neste capítulo, analisaremos a inserção do conhecimento de funções no currículo da educação básica brasileira, apresentaremos de forma sucinta, considerações sobre algumas pesquisas desenvolvidas na Educação Matemática, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra e mais especificamente das funções. Tais pesquisas servirão de subsídios ao nosso trabalho, propiciando uma visão mais ampla sobre o nosso tema e também sobre as investigações desenvolvidas nessa área de conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio – PCNEM (1999) procuram dar ênfase ao processo de transformação do ensino.

Os PCNEM de Matemática propõem que os alunos percebam as aplicações da Matemática em variadas situações. A matemática como ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentos e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (PIRES, 2000).

O documento (BRASIL, 1999) enfatiza que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo ou instrumental, mas também deva ser visto como ciência, com características estruturais específicas, destacando a necessidade de o aluno perceber definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos, com a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros para servir de validação de intuições, dando sentido às técnicas aplicadas.

Em relação ao ensino de função que é o que nos interessa, o documento afirma que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 1999; p.44).

Em 2002, o mesmo ministério lançou uma nova versão, mais atualizada, com o nome de *PCN+EM: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*.

Nesta proposta, competências e conhecimentos são desenvolvidos em conjuntos e se reforçam reciprocamente. Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002).

Achamos pertinente elencar o apontamento e os detalhes apresentados por este documento referente ao estudo de funções, mostrando o sentido dessas competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar a compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área (BRASIL, 2002; p. 116).

Interações, relações e funções; invariantes e transformações	
Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.	• Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos eqüidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos. • Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria. • Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. • Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem. • Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou um sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.

O documento ainda proporciona ma análise específica sobre o estudo de funções deixando claro que este estudo “permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática” (p.121). Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Segundo o documento, tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares (BRASIL, 2002; p. 121).

O documento apresenta uma análise específica sobre aplicações, riquezas de situações que achamos melhor cita-lo integralmente:

> "Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas". (BRASIL, 2002; p. 121).

Recentemente foi divulgados pelo Ministério da Educação (MEC) outro documento com o objetivo de contribuir para o dialogo entre professor e escola sobre a pratica docente.

As *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (OCEM) vem apresentar um conjunto de reflexões que alimente a pratica docente e que levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, segundo o documento, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006; p. 69).

Diferente dos Parâmetros Curriculares Nacionais, as Orientações Curriculares do Ensino Médio apresenta uma nova divisão dos temas a serem desenvolvidas no Ensino Médio. O Estudo de Funções ganha um bloco exclusivo para suas análises. Neste documento, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.* Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles.

As Orientações Curriculares sugere que o estudo de funções seja iniciado “com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras” (p. 72).

Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, f(x) = 2 x + 3, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes (BRASIL, 2006; p.72).

O documento recomenda que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento como, por exemplo, os modelos linear, quadrático e exponencial. Lembrando que os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

Neste momento é interessante citarmos o que do documento apresenta sobre algumas considerações fundamentais para o estudo de funções:

> "As idéias de crescimento, modelo linear (f(x) = a.x) e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa (f(x) = a/x). O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação. Situações em que se faz necessária a função a. m (f(x) = a.x + b) também devem ser trabalhadas". (BRASIL, 2006; p. 72-73)

Dos documentos analisados, somente as Orientações Curriculares apresenta uma análise específica sobre a função quadrática:

> "O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coe. cientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada ($f(x) = a. (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz)". (p.73)

No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, o documento sugere destaque a um "trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio" (p.73). Apresenta uma análise interessante sobre este assunto:

> "A apresentação das leis dos senos e dos co-senos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola.

É preciso atenção à transição do seno e do co-seno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o co-seno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0º e 180º. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve f (x) = seno (x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e co-seno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico". (BRASIL, 2006; p.73-74)

Ao tratar sobre as funções polinomiais as Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirma:

"As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta, podem estar presentes no estudo de funções. Funções do tipo $f(x) = x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x, x^n) em relação à reta $y = x$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0 < x < 1$ ou $x > 1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico. Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os "zeros" da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número *c* é um dos zeros da função polinomial $y = P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x - c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por $(x - c)$". (BRASIL, 2006; p.74)

Para o trabalho com funções exponenciais é pertinente discutir o alcance do modelo linear na descrição de fenômenos de crescimento, para então introduzir o modelo de crescimento/decrescimento exponencial ($f(x) = a^x$). O documento acha interessante "discutir as características desses dois modelos, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante" (p.74). Ainda cita:

"Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia,

> Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos". (BRASIL, 2006; p.75)

Finalizando o bloco do estudo das funções, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio apresenta uma pequena análise sobre as progressões. Segundo tais orientações:

> "...as progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo...")". (BRASIL, 2006; p75)

2.2 ALGUMAS PESQUISAS DESENVOLVIDAS NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE O ESTUDO DE FUNÇÕES

O conceito de função é, certamente, um dos temas de grande importância devido, em parte, ao fato de ser amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento. Pode-se dizer que desde muito cedo acompanha a trajetória do aluno, procurando explicar ou modelar diversos fenômenos que o rodeia. Assim, por exemplo, no ensino infantil a criança começa a estabelecer correspondência entre conjuntos de certos objetos. Já no ensino fundamental ou médio, o assunto é abordado de forma mais sistematizada. Nesse momento, funções de 1º grau são geralmente, o ponto de partida para o desenvolvimento do tema, como temos visto em vários livros didáticos. Contudo, essa amplidão e precocidade, não são suficientes para garantir a aprendizagem.

Há pesquisas que salientam preocupações de educadores, apontando dificuldades ou problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do conceito de função. Podemos citar, CARNEIRO, FANTINEL e SILVA (2003) que realizaram um estudo no Rio Grande do Sul, com o intuito de identificar e descrever diferentes significados produzidos por estudantes para a noção de função. Em suas análises, os pesquisadores ressaltam que não se faz a relação entre transformação geométrica e função nas disciplinas de Geometria. Concluem, ainda, que a noção de função é considerada pelos discentes como uma correspondência, associação, relação, mas não como uma transformação.

Com o objetivo de avaliar os fenômenos didáticos ocorridos na resolução de problemas envolvendo a conversão do registro gráfico de uma função afim para o algébrico e vice-versa, LOPES (2003) desenvolveu uma seqüência didática onde revelou-se a importância da utilização de múltiplas representações no processo de conceituação de função favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico, e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico.

Em face de tantos estudos matemáticos, ABREU (2002) decidiu pesquisar sobre Álgebra, mais especificamente investigar uma seqüência didática para abordar a aprendizagem da “Representação Gráfica e da Leitura de Gráficos” de funções polinomiais de primeiro e de segundo graus. A autora verificou que o uso de diferentes esquemas representativos, que enfatizam diferentes tipos de inteligências pode ser útil e eficaz no ensino e no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Ao analisar essa pesquisa foi observado que os alunos ao realizarem as atividades utilizando os métodos convencionais, tiveram muita dificuldade para construir os gráficos, porém, utilizando a ferramenta tecnológica, permitiu-se que eles vissem o problema de uma perspectiva diferente.

O uso do computador possibilitou ao aluno uma visualização de como deveria ser a representação gráfica de funções de primeiro e segundo graus e os pontos notáveis, como as raízes, o vértice e a intersecção com o eixo y. Verifica-se que os objetivos propostos foram cumpridos satisfatoriamente por parte da pesquisadora, porém nem todos os alunos conseguiram bom desenvolvimento nas atividades devido a limitações pessoais. Os dados obtidos mostram que a compreensão do conteúdo ocorreu de maneira satisfatória somente após mudança de quadros, utilizando a ferramenta tecnológica. Porém, mesmo utilizando outros esquemas de representação, alguns alunos não conseguiram a total compreensão do conteúdo que foi apresentado.

SANTOS (2002) realizou uma pesquisa que procurou discorrer sobre a aquisição de saberes relacionado aos coeficientes da equação $y = ax + b$. O autor apresentou no decorrer da pesquisa as dificuldades encontradas pelos alunos em relação às representações gráficas e a na parte algébrica. E como uma forma de sanar os problemas de aprendizagem dos alunos, foi oferecido um software em formato de jogo. O programa oferece ao aluno uma representação gráfica, e pede que o aluno encontre a expressão algébrica, colocando ao aluno alguns itens de ajuda, mas a cada consulta, o aluno perde bônus. Quando acabam os bônus, o programa apresenta a função correta. Neste processo, o aluno constrói o seu conhecimento, pois realiza a construção de significados dos coeficientes da equação associados a uma reta.

O estudo apresentou algumas questões que foram discutidas no decorrer do trabalho, sendo essas separadas da seguinte forma:

- A ferramenta informática pode propiciar um ambiente de aprendizagem propicio para o aluno construir seu conhecimento?
- O uso de software do tipo jogo ajuda na aprendizagem dos conceitos matemáticos, de modo que esse conhecimento passe para um ambiente fora da sala de informática?

Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que, no pré-teste os alunos sentiram-se despreparados e ansiosos, já no pós-teste esta ansiedade foi modificada, e em sua maioria os alunos conseguiram obter sucesso nas atividades apresentadas.

O ambiente informático possibilitou o conhecimento dos alunos, isto é, os alunos conseguiram desenvolver a aprendizagem em relação a conversão do registro gráfico para o algébrico. Também auxiliou o educador no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que, foi possível realizar uma avaliação dos desempenhos dos alunos em um ambiente não-informatizado e outro informatizado.

Numa pesquisa realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola particular de São Paulo, FREITAS (2002) estudou os aspectos relativos aos procedimentos de resolução de equações do primeiro grau, referindo –se aos erros relacionados aos aspectos conceituais e aos métodos de resolução destas equações, importantes no estudo de funções. A análise dos procedimentos corretos e incorretos de resolução revelou uma forte influência da mecanização de técnicas associadas à utilização de frases como: “isolar o x”, “passar e mudar o sinal”. Ao analisar os erros dos alunos, este estudo procura apontar caminhos para novas abordagens sobre os métodos de resolução de funções no ensino fundamental e médio.

Pretendendo favorecer a utilização e conversão das diferentes representações simbólicas do conceito de função: algébrica, gráfica, numérica, linguagem natural, PELHO (2003), baseado na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval, pesquisou sobre a introdução do conceito de função por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes e do relacionamento entre elas. Após as análises das atividades e análises dos resultados, constatou-se que para a maioria dos alunos a aquisição desse conceito é de difícil apreensão. Através das seqüências empregadas, houve uma boa participação dos alunos em todas as sessões realizadas. A dinâmica de software Cabri-Géomètre propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas, que levou a concluir que o uso deste software é eficaz para introduzir o estudo de funções.

O fato que pode destacar-se é a compreensão por parte dos alunos do registro em linguagem natural. Conseguiram realizar uma articulação entre este registro e as demais, apesar de não estarem habituados a este tipo de atividade. Isto ocorreu após algumas intervenções, que permitiu relacionarem os dados dos textos apresentados com as variáveis dependentes e independentes das funções.

Considerou-se de um modo geral, que os alunos que participaram de todas as sessões desse trabalho, apresentaram um desempenho que apontou para um crescimento na compreensão do conceito de função.

Finalizando este capítulo, ressaltamos a importância de considerar as propostas dos documentos oficiais (PCN) e principalmente a articulação de tais propostas com as pesquisas e investigações sobre o ensino de funções, desenvolvidas na Educação Matemática. Tais estudos indicam as complexidades envoltas no processo de ensino e aprendizagem deste conceito e apontam algumas sugestões para o enfrentamento dessas dificuldades no ensino básico.

CAPITULO 3

FUNÇÃO QUADRÁTICA: ESTUDO DAS REPRESENTÇÔES GRÁFICAS

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.

O real não está nem na chegada nem na saída. Ele se dispõe pra gente no meio da travessia. João Guimarães Rosa

Observando alguns dos livros didáticos sugeridos para adoção nas escolas públicas do estado de São Paulo, verifiquei que esses livros apresentam os conteúdos de funções polinomiais do segundo grau com apenas a passagem da representação algébrica para a representação gráfica com a construção ponto a ponto, ou seja, os estudantes são rotineiramente solicitados a gerar tabelas de valores que satisfaçam equações algébricas com duas variáveis, marcarem pontos num plano cartesiano com escala adequada e a lerem coordenadas de pontos, e aplicando fórmulas esquecendo-se do estudo da passagem da representação gráfica para a representação algébrica muitas vezes utilizada e solicitada nos estudos de problemas em física, química, biologias, economia entre outras.

Mesmo com somente essa abordagem, freqüentemente encontramos alunos que apresentam dificuldades e mesmo falhas conceituais no que se refere à função e em especial função polinomial do segundo grau.

Nesse sentido procuramos desenvolver uma seqüência didática que permitisse ao aluno observar que mudanças ocorridas na escrita algébrica de uma função quadrática acarretam mudanças na sua representação gráfica e vice-versa, ou seja, privilegiando, o que Duval classifica de interpretação global das propriedades figurais. Duval sustenta que numa fase de aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na apreensão do conceito e que as conversões são as mudanças de registro mais eficazes para a aquisição de um conceito.

Temos diversos recursos para analisar a situação, porém vamos desenvolver a analise das funções polinomiais do segundo grau com gráficos de funções desenhado no winplot (Programa gratuito, elaborado por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy) e apresentado aos alunos para que façam as observações e respondam algumas questões sobre algumas situações.

3.2 PROBLEMÁTICA

Tendo em vista que os livros didáticos analisados não trazem a abordagem das funções polinomiais do segundo grau da representação gráfica para a representação algébrica e as dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Médio, no que diz respeito à interpretação de gráficos de funções, acredita-se ser possível fazer evoluir o conceito de "função quadrática" através desse estudo.

Para isso seguimos as orientações de documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, que destacam a importância do estudo das funções, num trecho citado.

> "Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas". (BRASIL, 2002; p. 121).

No intuito de atender a esses pressupostos, mas especificamente das representações gráfico-algébricos que questiono os seguintes problemas de pesquisa:

"*De que forma o estudo gráfico da função quadrática pode auxiliar o entendimento do conceito para o aluno?"*

"Será que o aluno percebe as mudanças que ocorrem com a variação dos coeficientes no gráfico?"

Ou seja, o interesse em analisar alguns modos de conceber o ensino da Matemática, se justifica na medida em que a maneira como vemos a Matemática influência de maneira determinante o modo como a ensinamos especialmente se considerarmos que nossas concepções são construídas em nossa prática pedagógica, pois.

> (...) a escola cumpre funções que lhe são dadas pela sociedade que, por sua vez, apresenta-se constituídas por classes sociais com interesses antagônicos (...). Fica claro, portanto, que o modo como os professores realizam seu trabalho, selecionam e organizam os conteúdos escolares, ou escolhem as técnicas de ensino e avaliação, tem a ver com pressupostos teórico-metodológicos, explícita ou implicitamente. (LIBÂNEO apud FIORENTINI, 1995, P.4)

Ao permitir que os alunos se expressem, oferecemos a eles a oportunidade de demonstrar os conhecimentos extrínsecos à matéria (La Taille, 2003). O aluno que consegue transpor os limites rígidos de um determinado conteúdo curricular irá encontrar satisfação, quando consegue aplicar determinado saber em sua vida cotidiana e relacionar com outros conteúdos.

3.3 PROCEDIMETOS METODOLÓGICOS

Devido à delimitação do estudo de análises gráficos da função polinomial do segundo grau nas salas de aulas e a pouca abordagem que os livros fazem sobre a análise dos gráficos é que desenvolvemos uma seqüência para tal análise.

Conversei com alguns alunos do ensino médio sobre a pesquisa a ser feita e como seria realizada.

A pesquisa é um trabalho de conclusão do curso de especialização em educação matemática, onde participaram professores do estado de São Paulo, e uma das exigências seria que todo professor tivesse trabalhando com salas do ensino médio, no intuído de aplicar algumas atividades e concluir uma monografia. As atividades seriam realizadas com um grupo de oito alunos do ensino médio, onde o professor irá apresentar uma folha com o desenho de alguns gráficos construídos no software winplot e numa outra folha algumas perguntas sobre o comportamento de cada função construída. Os alunos devem em grupo analisar e responder as questões, anotando na folha cedida pelo professor, podendo consultar livros de oitava série do ensino fundamental e primeira série do ensino médio. Se necessário o professor poderá fazer intervenções com a finalidade de esclarecer ou até mesmo indicar onde consultar.

Após as atividades serem concluídas pelo grupo, o professor fará uma analise dos conhecimentos aplicados e adquiridos pelo grupo de alunos em cada resposta das atividades aplicada, fazendo comparação entre a forma com que eles vêem, e como a matemática descreve.

3.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo apóia-se no procedimento classificado por Duval (1988) de interpretação de propriedades figurais. O uso da teoria de Duval, que tem sido cada vez mais utilizado quando as pesquisas concernem à aquisição de conhecimento, à organização de situações de aprendizagem. No ensino de matemática devemos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Segundo Duval (1988), o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um “objeto” descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação nestas imagens acarreta uma modificação na escrita da expressão algébrica correspondente, determinando uma variável visual pertinente para a interpretação do gráfico. Daí a importância da identificação de todas as possíveis modificações relevantes desta imagem, ou seja, ver conjuntamente as modificações ocorridas na imagem e na forma algébrica. Neste tipo de tratamento estamos associando variáveis visuais de representação com as unidades significativas da escrita algébrica. Um registro de representação é, segundo Duval (2003), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais em nível de funcionamento cognitivo consciente. As representações semiótica têm dois aspectos, sua forma e seu conteúdo. A forma muda segundo o sistema semiótico utilizado, ou seja, existem vários registros de representação para o mesmo objeto, correspondendo a cada um deles um tipo diferente de tratamento. Pode-se dizer, então, que quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Na elaboração e na transformação de representações semiótica, é necessário distinguir dois tipos de transformação: o tratamento e a conversão, o primeiro é estritamente interno ao registro, está voltado para a forma e não para o conteúdo, enquanto que o segundo se dá entre registros diferentes, mudando o conteúdo da apresentação.

Inspirados em seu artigo, propomos este mesmo estudo para a função polinomial de 2.º grau. Primeiramente, é necessária uma análise de congruência entre os dois registros de representação de um objeto, ou seja, entre a escrita algébrica e a representação gráfica. Segundo Almouloud (2000), esta análise de congruência vai determinar o caráter natural ou, ao contrário, arbitrário de uma conversão, isto é, a congruência corresponde ao fato de a representação de partida ser mais ou menos transparente em relação ao registro de chegada.

O que é observado de uma forma geral é a confusão da *representação o objeto matemático com o próprio objeto matemático.* Para melhor entendimento da matemática é de fundamental importância a distinção entre o objeto matemático tratado e sua representação. O objetivo esta na aquisição do conhecimento utilizando os registros de representação, então não vermos o porquê utilizar outra teoria que não seja a de Duval. Em diversas pesquisas em Educação Matemática se notou que o aluno possui uma dificuldade de passar de uma representação a outra. O que entendo e acredito é que a teoria de Duval vem de encontro com o objeto de estudo em questão e irá de maneira significativa dar uma boa compreensão do estudo de funções polinomiais do segundo grau, no que diz respeito ao deslocamento da função no eixo cartesiano. Trabalhar com funções usando somente as representações algébricas é o mesmo que trabalhar com objetos abstratos. Para que o conhecimento matemático seja mobilizado devemos utilizar os diversos tipos de representações. Neste caso utilizaremos a análise das representações gráficas para entender os conceitos algébricos. Assim estamos utilizando uma representação semiótica, onde converter uma representação é “mudar a forma pela qual um conhecimento é representado”. As representações semióticas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana.

3.5 OBJETIVOS DAS ATIVIDADES

O objetivo é trabalhar com um grupo de oito alunos de 1º ano do Ensino Médio de uma Escola do Governo do Estado de São Paulo capital, especificamente da periferia da zona sul de São Paulo, fora do período de aula, com alguns gráficos da função quadrática partindo da exploração de situações particulares para ao final estabelecer conclusões gerais registrando as considerações, dificuldades e comentários desses alunos. Vamos partir da função do segundo grau mais simples, $y=f(x)=x^2$, para conseguir entender aquela mais geral, $y=f(x)=ax^2+bx+c$, onde o coeficiente **a** deve ser diferente de zero. Veremos que o gráfico desta última função poderá ser entendido como uma translação, com mudanças ou não de “abertura”, do gráfico da primeira, na dependência dos parâmetros **a, b, c.** Em resumo podemos entender a concavidade da parábola como sendo voltada para cima ou voltada para baixo, a abertura da parábola como sendo de maior abertura menor abertura, a posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas podendo estar acima do eixo, na origem ou abaixo do eixo e finalmente a Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas, que também podem ser encontradas a esquerda do eixo, na origem ou a direita do eixo.

Quando a representação da função na sua forma canônica será explorada apenas a expressão, deixando o estudo para outra oportunidade de pesquisa sem ignorar a importância da representação. Nesse sentido o pesquisador deverá fazer uma revisão do estudo para melhor compreensão da análise do gráfico proposto.

Os gráficos serão construídos com auxilio do winplot e serão apresentados aos alunos para que sejam realizadas as observações.

Como material de apoio vamos consultar livros de 8ª séries do Ensino fundamental e 1º ano do Ensino médio na biblioteca da escola.

3.6 ATIVIDADES

Situação 1 : Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = 5x^2$ e) $f(x) = 9x^2$

Questões:

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser positivo cada vez maior?

2- Os gráficos possuem algum ponto em comum?Por quê?

3- Como varia o sinal da função dada?

4- O que garante, em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo?

Situação 2 : Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = -2x^2$ c) $f(x) = -5x^2$ d) $f(x) = -7x^2$ e) $f(x) = -10x^2$

Questões:

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser negativo, com valor absoluto cada vez maior?

2- As curvas obtidas possuem algum ponto em comum?Por quê?

3- O que se pode dizer a respeito do sinal dos valores de todas essas funções, conforme a variável independente x percorre o eixo real?

Situação 3: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2+1$ c) $f(x) = x^2+3$ d) $f(x) = x^2-2$ e) $f(x) = x^2-5$

Questões:

1- Observando os gráficos obtidos, conclua o que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$ quando se soma ou se subtrai uma constante, para se obter uma nova função.

2- Quando somamos uma constante, positiva ou negativa, temos alguma raiz?

3- Em cada caso quantas e quais?

Situação 4: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x+1)^2$ c) $f(x) = (x+2)^2$ d) $f(x) = (x+4)^2$ e) $f(x) = (x+10)^2$

Questões:

1- Comparando esses gráficos, o que podemos concluir?

2- Há alguma raiz para cada uma das funções?

3- Quantas e quais?

4- O que acontece com o gráfico, conforme o valor do número positivo somado à variável x vai aumentando?

Situação 5: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x-1)^2$ c) $f(x) = (x-5)^2$ d) $f(x) = (x- 7)^2$ e) $f(x) = (x-9)^2$

Questões:

1- Descreva o que acontece com o gráfico inicial, quando subtraímos uma constante positiva da variável independente x.

2- Cada uma das funções possui alguma raiz?

3- Quantas e quais?

3.7 ANÁLISE DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA EM SALA DE AULA

SITUAÇÃO 1

O grupo de alunos analisou todas as situações e juntos chegaram à conclusão que descrevo abaixo do modo com que eles escreveram:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = 5x^2$ e) $f(x) = 9x^2$

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser positivo cada vez maior?

- *É possível concluir que mesmo o número sendo maior e positivo ele se aproxima cada vez mais do eixo y, sendo assim quanto menor for o número se aproximará do eixo x.* Um aluno fez o comentário que se o valor de “a” for zero o gráfico passa a ser uma reta em cima do eixo x, acho que aí ela se torna uma função constante.

2- Os gráficos possuem algum ponto em comum?Por quê?

- *Sim, o ponto em comum deles é o zero, porque é uma única raiz.* Nesta situação eles citaram a questão do discriminante delta da equação do segundo grau ser zero, pois se ele for zero temos apenas uma raiz. Para tirar as dúvidas chegaram a resolver o delta.

3- Como varia o sinal da função dada?

- *Não varia, pois todos os gráficos não estão abaixo do eixo x , significando que todos eles estão do lado positivo de y.*

4- O que garante, em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo?

- *Garante que a concavidade esta virada para cima.*

Nesta situação eles chegaram às conclusões que satisfazem as expectativas, a curva analisada representa uma parábola, no que se refere ao coeficiente “a” ser maior ou ser menor que zero, nos garante informações a respeito da parábola, se voltada para cima ou para baixo, e da sua abertura. Neste sentido os alunos também fizeram comentários sobre a curva ser uma parábola e como poderiam verificar seus pontos à partir de uma tabela. Fizeram a relação do discriminante delta estudado na resolução das equações do 2º grau.

O comentário que chamou a atenção foi o fato de nunca terem trabalhado com análise de gráficos e de como a era mais fácil para eles apreender assim, e as relações que alguns fizeram recordando-se do estudo das equações.

SITUAÇÃO 2

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = -2x^2$ c) $f(x) = -5x^2$ d) $f(x) = -7x^2$ e) $f(x) = -10x^2$

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser negativo, cada vez menor?

- *Que cada vez mais ele se aproxima do eixo y,*

2- As curvas obtidas possuem algum ponto em comum?Por quê?

- *Sim, o número zero, pois é a mesma raiz de todos os gráficos.*

3- O que se pode dizer a respeito do sinal dos valores de todas essas funções, conforme a variável independente x percorre o eixo real?

- *Que todos possuem o mesmo sinal de negativo, pois eles estão abaixo do eixo x do lado negativo de y. E que as parábolas estão todas para baixo.*

As análises concluídas pelos alunos nesta situação também satisfizeram as expectativas no que diz respeito ao coeficiente ser negativo. A idéia das parábolas ficarem mais “estreitas” ou mais “fechadas” quando usamos números negativos cada vez menores, o sentido da concavidade para baixo e a idéia de todos terem a mesma raiz. Aqui também os alunos discutiram entre eles a questão do coeficiente “a” ser maior e se aproximar do eixo x.

SITUAÇÃO 3

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2+1$ c) $f(x) = x^2+3$ d) $f(x) = x^2-2$ e) $f(x) = x^2-5$

1- Observando os gráficos obtidos, conclua o que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$ quando se soma ou se subtrai uma constante, para se obter uma nova função.

- *O que nós concluímos é que quando soma um número o desenho da parábola se desloca para cima e quando tem um numero negativo ela se desloca para baixo no eixo y.*
- *O vértice da parábola se movimenta para baixo e para cima fazendo a translação no eixo y.*

2- Quando somamos uma constante, positiva ou negativa, temos alguma raiz?

- *No caso da função que só tem x ao quadrado a raiz é o numero zero e nos casos em que tem a soma a partir do x ao quadrado não tem raiz. Agora nos casos em que se subtraem todos tem raízes.*

3- Em cada caso quantas e quais?

- *No caso do x ao quadrado só tem uma o zero*
- *No caso do x ao quadrado menos dois é um numero irracional raiz quadrada de dois*
- *No caso do x ao quadrado menos cinco também é um numero irracional raiz quadrada de cinco*
- *As outras duas funções que estão com um número somando não têm raízes.*

Nesta analise os alunos conseguiram responder as questões com facilidade só observando os gráficos e fazendo a resolução da equação para determinar as raízes. Não foi preciso intervenção do professor nesta analise.

SITUAÇÃO 4

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x+1)^2$ c) $f(x) = (x+2)^2$ d) $f(x) = (x+4)^2$ e) $f(x) = (x+10)^2$

1- Comparando esses gráficos, o que podemos concluir?

- *Observando podemos concluir que todos os gráficos a partir do x ao quadrado estão sendo somados e estão do lado esquerdo do eixo y e em cima do eixo x em raízes negativas.*
- *Outra observação é que as parábolas cortam o eixo y bem no número em que o termo independente esta ao quadrado.*

2- Há alguma raiz para cada uma das funções?

- *Sim elas estão no deslocamento de cada função*

3- Quantas e quais?

- *Em todas as funções temos apenas uma, no x ao quadrado o zero, e nas outra são os próprios números só que com o sinal contrario.*
- *O menos 1, o menos 2, o menos 4 e o menos 10.*

4- O que acontece com o gráfico, conforme o valor do número positivo somado à variável x vai aumentando?

- *Ele se distancia do eixo y, e a parábola corta o eixo y no valor do quadrado de cada número que esta sendo somado.*

Neste analise eles sentiram dificuldades por a função esta entre parênteses. Perguntei como seria se ela estivesse desenvolvida e para minha surpresa eles desenvolveram e conseguiram visualizar além do esperado. Perceberam o termo independente, as raízes iguais em cada caso e a translação horizontal no eixo das ordenadas.

SITUAÇÃO 5

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x-1)^2$ c) $f(x) = (x-5)^2$ d) $f(x) = (x- 7)^2$ e) $f(x) = (x-9)^2$

1- Descreva o que acontece com o gráfico inicial, quando subtraímos uma constante positiva da variável independente x.

- *Observando podemos concluir que todos os gráficos a partir do x ao quadrado estão sendo somados e estão do lado direito do eixo y e em cima do eixo x em raízes positivas.*
- *Outra observação é que as parábolas cortam o eixo y bem no número em que o termo independente esta ao quadrado.*

2- Cada uma das funções possui alguma raiz?

- *Sim, todas ela são positivas a partir da função que esta x ao quadrado.*

3- Quantas e quais?

- *Neste caso são cinco raízes*
- *O zero, o um, cinco, sete e o nove.*

Nesta situação os alunos fizeram uma comparação com a situação anterior, mas mesmo assim sentiram a necessidade de desenvolverem a expressão e resolver a equação.

3.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Lembramos que essas atividades fazem parte de uma seqüência didática, cujo intuito é verificar a utilização do procedimento de interpretação global das propriedades figurais como facilitador na observação e entendimento de gráficos da função polinomial de 2º grau no que diz respeito aos objetos observados. Ou seja, pretendemos mostrar que por meio da observação, relações com outros conteúdos e a discussão em grupo permitam com que o aluno consiga perceber que mudanças ocorridas na expressão algébrica acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

> "Esperar que os professores se tornem pesquisadores, sem oferecer as necessárias condições ambientais, materiais, institucionais implica, por um lado, subestimar o peso das demandas do trabalho docente cotidiano e, por outro, os requisitos para um trabalho científico de qualidade".(André, 2002)

E nesta pesquisa pude perceber que todos conseguiram enxergar o que foi proposto, e que poucas intervenções foram feitas.

Bem, fazendo um parâmetro entre o estudo realizado e minhas experiências como professor de ensino médio que nunca tinha feito esse tipo de atividade, percebi que o trabalho com observação traz muita aprendizagem para os alunos e para o professor. A curiosidade é aguçada e a vontade de responder as questões é incontestável, alem da participação e a interação que aconteceu com o grupo.

Penso que pesquisar a prática cotidiana não é tarefa fácil para nenhum professor, considerando-se ainda que esta atividade de pesquisa despende, em sua análise, horas preciosas, nas quais o professor está engajado com tarefas rotineiras. Mas com todos os ocorridos não posso dizer que não ouve aprendizagem e muita vontade de continuar e aprimorar o trabalho.

Referência Bibliográfica

ABREU, K. Uma aplicação das inteligências múltiplas no aprendizado de matemática: representação gráfica de função de 1º e 2º graus. Dissertação de Mestrado: Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2002.

BOYER, C. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. . Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). PCN + Ensino médio**:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*.* Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Orientações curriculares para o ensino médio; v. 2

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias /. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

CARNEIRO, V,C.; FANTINEL, P.C.; SILVA, R.H. Funções:significados circulantes na formação de professores. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 16, nº 19, p. 37-57, 2003.

COSTA, A.C. Conhecimentos dos Estudantes Universitários sobre o Conceito de Função. Dissertação de Mestrado.PUC: SP, 2004.

FREITAS, M. A. Equações do 1º grau: Métodos de Resolução e Análise de Erros no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado: PUC/SP. São Paulo, 2002.

LOPES, W. S. A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado, PUC;SP. São Paulo, 2003.

MENDES, M.H.M. O Conceito de Função: Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. Dissertação de mestrado. PUC: RJ, 1994.

PELHO, E. B. B. Introdução ao conceito de Função: A importância da compreensão das variáveis. Dissertação de Mestrado: PUC/SP. São Paulo, 2003.

PIRES, C.M.C. Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, p.81- 94, 2003.

SANTOS, E. P. Função afim y = ax+b: A articulação entre os registros gráficos e algébricos com o auxílio de um software educativo. Dissertação de Mestrado: Puc/SP. São Paulo, 2002.

GELSON IEZZI, e outros. Matemática -Ciência e aplicações. V. 1, 2ª edição, S.P. Atual p 136 – 139, 2004

LIBÂNEO, J. C., *Democratização da escola pública: a pedagogia crítico-social dos conteúdos*, São Paulo: Loyola, 1985, p.19.

LA TAILLE, Y. *Limites:* três dimensões educacionais. São Paulo: Ática, 2003. 151 p.

ANDRÉ, M. *Pesquisa, formação e prática docente. In* ANDRÉ, M. (org.) *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores.* 2 ed. Campinas: Papirus, 2002. 143 p.

DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1, pp. 235-253, 1988.

Damm, R. Flemming, Educação Matemática – uma introdução – Regina Flemming Damm – registro de representação – serie trilhas – pp 135-153

Anexos

Atividades

Situação 1 : Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = 5x^2$ e) $f(x) = 9x^2$

Questões:

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser positivo cada vez maior?
2- Os gráficos possuem algum ponto em comum?Por quê?
3- Como varia o sinal da função dada?
4- O que garante, em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo?

Situação 2 : Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = -2x^2$ c) $f(x) = -5x^2$ d) $f(x) = -7x^2$ e) $f(x) = -10x^2$

Questões:

1- Analisando os gráficos obtidos, o que é possível concluir, a respeito do fato do coeficiente de x^2 ser negativo, com valor absoluto cada vez maior?

2- As curvas obtidas possuem algum ponto em comum?Por quê?

3- O que se pode dizer a respeito do sinal dos valores de todas essas funções, conforme a variável independente x percorre o eixo real?

Situação 3: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2+1$ c) $f(x) = x^2+3$ d) $f(x) = x^2-2$ e) $f(x) = x^2-5$

Questões:

1- Observando os gráficos obtidos, conclua o que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$ quando se soma ou se subtrai uma constante, para se obter uma nova função.

2- Quando somamos uma constante, positiva ou negativa, temos alguma raiz?

3- Em cada caso quantas e quais?

Situação 4: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x+1)^2$ c) $f(x) = (x+2)^2$ d) $f(x) = (x+4)^2$ e) $f(x) = (x+10)^2$

Questões:

1- Comparando esses gráficos, o que podemos concluir?
2- Há alguma raiz para cada uma das funções?
3- Quantas e quais?
4- O que acontece com o gráfico, conforme o valor do número positivo somado à variável x vai aumentando?

Situação 5: Observação das funções desenhadas num mesmo gráfico :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x-1)^2$ c) $f(x) = (x-5)^2$ d) $f(x) = (x- 7)^2$ e) $f(x) = (x-9)^2$

Questões:

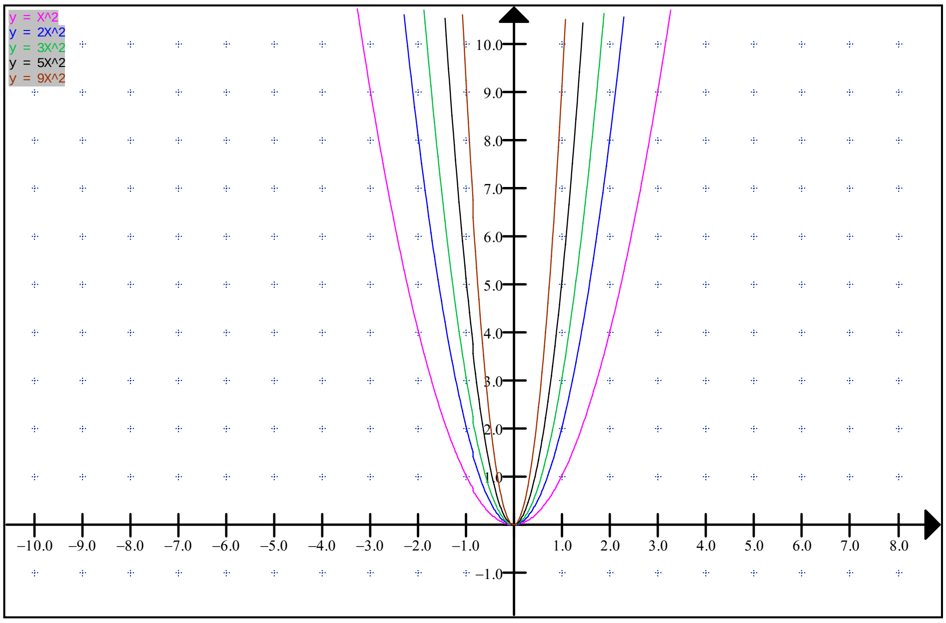
1- Descreva o que acontece com o gráfico inicial, quando subtraímos uma constante positiva da variável independente x.

2- Cada uma das funções possui alguma raiz?

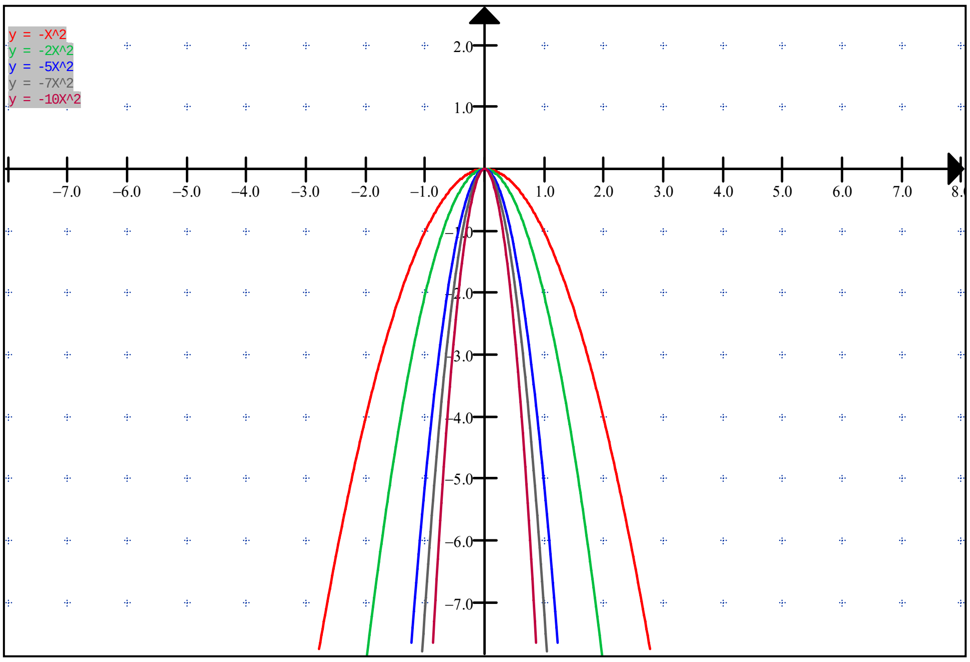
3- Quantas e quais?

Gráficos

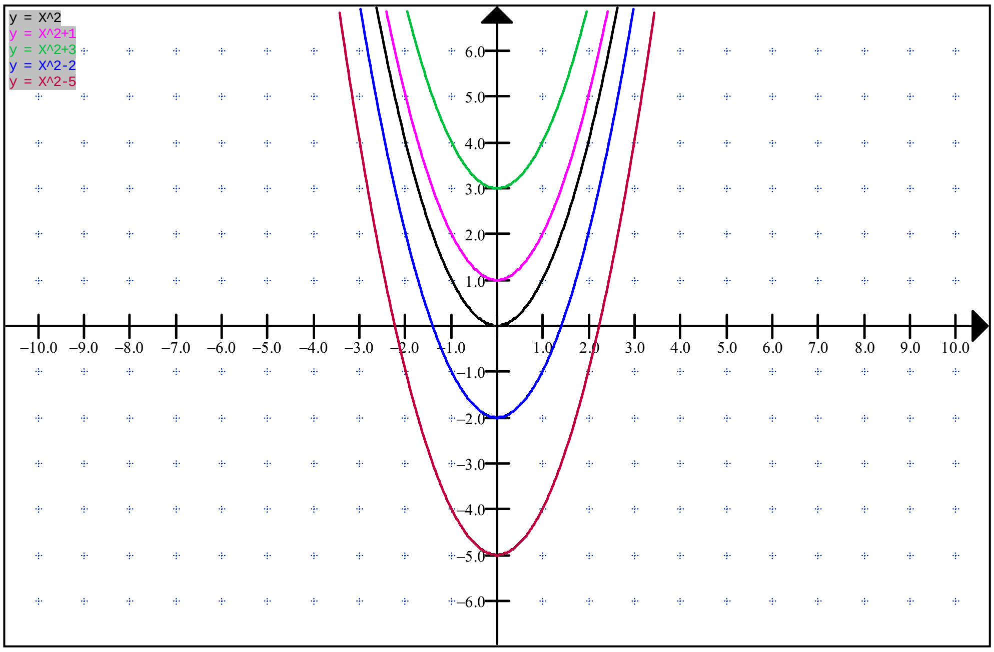
Situação 1



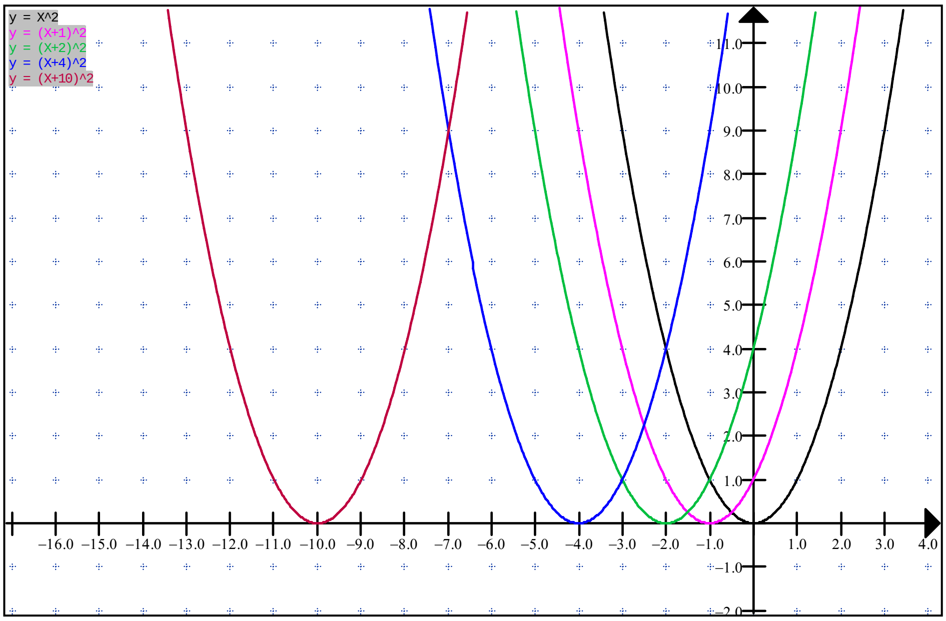
Situação2



Situação 3



Situação 4



Situação 5