

CELIA FINCK BRANDT

**CONTRIBUIÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA NA CONCEITUAÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO**

FLORIANÓPOLIS

2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA
CURSO DE DOUTORADO

CÉLIA FINCK BRANDT

CONTRIBUIÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA NA CONCEITUAÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Tese de doutorado apresentada no Programa de
Pós Graduação em Educação Científica e
Tecnológica da Universidade Federal de Santa
Catarina – UFSC

Orientador Professor Dr.: Mércles Thadeu Moretti

FLORIANÓPOLIS

2005

BRANDT, Célia Finck.

Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração decimal. 2005

246 f.

Tese (Doutorado em Educação Científica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina.

1. Registros de representação semiótica do número. 2. Sistema de Numeração. 3. Valor Posicional.

TERMO DE APROVAÇÃO

CÉLIA FINCK BRANDT

**CONTRIBUIÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
NA CONCEITUAÇÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO**

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora no Curso de Pós-Graduação em Educação – Educação Científica, da Universidade Federal de Santa Catarina, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Mércles Thadeu Moretti

Prof. Dr.

Prof. Dr.

Prof. Dr.

Florianópolis, de _____ de 2005.

*Só sei que o pranto não nega o riso,
Assim como a noite não nega o dia,
A neve não nega o sol,
E assim como o que termina
Não nega o que principia*

*Sei só que a sombra não nega a luz,
Assim como as chamas à chuva fria,
As terras aos oceanos,
E assim como o que não sei
Não nega o que aprenderia*

Daniel César, 2005

Dedico esse trabalho às crianças, do ensino fundamental, 1º e 2º ciclos, que com seus pés descalços ou com um simples chinelo, a 5 graus de temperatura, mostravam sempre o que é que vale a pena. E às professoras pela incansável batalha do dia a dia frente aos desafios colocados pelo ensinar/aprender.

AGRADECIMENTOS

A princípio parecia ser um sonho longínquo, distante, desafiante, instigador, mas que se chegasse a ser uma realidade seria não só a glória e sim a sensação do desafio vencido, das limitações ultrapassadas e muito mais, do sonho realizado.

Ah, meu grandioso sonho olímpico:

Quisera ser o eterno recordista

De mim mesmo...

Pois, se o peso da coroa

Repousasse em minha fronte,

Saberia todo o esforço

Não ser empregado a esmo.

E, se, aos olhos da História,

Desposasse o sonho à glória,

Livre, em êxtase e desperto

Finalmente eu estaria

[...]

Daniel César, 2005

Assim foi o doutorado para mim. Mas ele não seria possível não fossem os familiares, os amigos, os companheiros, os colegas, todos cúmplices e parceiros.

Especial agradecimento ao meu orientador, professor Mércles Thadeu Moretti que mais soube acreditar do que cobrar e com a tranquilidade que é seu maior dom, soube orientar no tempo e medida certos. Sua sabedoria apontou, desde o início, o caminho a ser trilhado que culminou numa produção acadêmica inovadora e relevante.

Aos cúmplices e parceiros coube a tarefa de compartilhar idéias, de fornecer a fonte para saciar a sede da fome e do conhecimento. São os autores, os coordenadores do curso de doutorado em Educação Científica e Tecnológica da UFSC,

Dr. José André Peres Angotti e José de Pinho Alves Filho, e seus professores, Dr. Arden Zylbersztajn (primeiro coordenador do curso), Dr. Demétrio Delizoicov, Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz, Dra. Nadir Ferrari, Dra. Sonia Maria da S. C. de Souza Cruz, Dra. Vivian Leyser da Rosa, à professora do Doutorado em Educação da UFPR, área Educação Matemática, Dra Maria Lúcia Faria Moro. Coube, principalmente, apontar como o dizer está distante do fazer e de mostrar que a palavra articulada nem sempre diz o que quer dizer: agradecimento especial às professoras Dra Cláudia Regina Flores, Dra Maria Tereza Soares Carneiro pelo aceite na participação da banca de qualificação que possibilitaram um direcionamento mais qualitativo e objetivo para a organização dos resultados da investigação e às professoras Neiva Ignês Grando e Tânia Maria Mendonça Campos pelas valiosas contribuições ao trabalho no momento da defesa da tese. A eles coube também o apoio institucional, sem o qual a árdua caminhada teria sido muito penosa. São os colegas do departamento de Métodos e Técnicas da UPEG, Setor de Ciências Humanas Letras e Artes, a PROPESP da UEPG e a CAPES. Também coube o incentivar e o acreditar, motivo pelo qual não posso deixar de lembrar e agradecer ao professor Dr Ademir José Rosso.

Aos familiares coube a tarefa mais árdua da espera, da presença ausente que teve seu sentido e seu valor, nem sempre percebido, e também a da paciência, da tolerância, da crença, frutos do amor. Obrigada mãe, Ana Paula, Ana Carolina, Ana Cláudia, João Marcelo, Desirée (minha nova filha) e Rose, sempre comigo. Obrigada Rui, por ter tido coração para irrigar e nutrir a família, e também cérebro para regular as engrenagens quando necessário, e, a seu modo, mostrou um jeito amável de ter coragem.

Aos amigos, a força, a solidariedade, a convivência e, principalmente, o conforto neste momento de caminhada solitária que é o doutorado. Estiveram presentes para ouvir, discutir, debater, criticar, vibrar e apoiar. Obrigada Tânia Bassoi, Marlene Perez, Joseli Almeida Camargo, Sydione Santos, Maristela Gonçalves Gomes

e Tânia Brandt Santos (in memorian) pelos momentos que hoje são passado remoto, lembrando o difícil da existência ao saber que na terra tudo passa. Comigo estiveram em busca da verdade, vivendo a amizade, dando as mãos.

Aos companheiros e colegas do doutorado coube a tarefa de estar juntos, aprender e se unir: Nilcéia, Vera, Neusa, Noemi, Karla, Maristela, João Alfredo, Paulo, Mikael, Marcos, Custódio e Elio. Doce lembrança de Idemar e Zé Maria.

A certeza maior: a presença Dele em todos os momentos para confortar, consolar, dar forças, sustentar e retribuir. Foi Deus que colocou outras portas em minha vida que foram abertas para novas descobertas e novos caminhos a serem seguidos, nesse eterno ir e vir, numa transformação contínua que sempre me torna um novo alguém. A Ele o meu maior agradecimento.

RESUMO

O estudo descreve momentos de investigação da compreensão do sistema de numeração decimal de origem indo-arábica (SND) por crianças de escolas estaduais dos estados do Paraná e Santa Catarina, a partir da aplicação de um instrumento composto por tarefas e atividades cujas respostas, obtidas em entrevista clínica, constituíram registros videografados dos dados que foram submetidos à análise. Apresenta também análise dos padrões de organização da palavra e do numeral arábico que constituem registros de representação do número e resultados de pesquisa que apontam a complexidade da aprendizagem, leitura e escrita de um sistema de numeração. Culmina numa proposta que compreende uma situação de ensino para a aprendizagem do SND, subsidiadas pelas incompreensões identificadas e pelas pesquisas desenvolvidas. Os fundamentos teóricos basearam-se nas proposições de Raymond Duval como mais adequadas para adentrar e enfrentar a problemática da incompreensão do SND pelas crianças. As tarefas da situação de ensino compreenderam registros de natureza monofuncional (a escrita arábica) e plurifuncional (a palavra escrita), as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, enfrentamento do fenômeno da não-congruência. Espera-se contribuir para a conceituação do sistema de numeração que constitui um objeto matemático. Este não só torna possível veicular uma forma de comunicar, matematicamente, observações do mundo real por meio de representações matemáticas, como também apresenta resultados com precisão, argumenta sobre conjecturas e hipóteses e faz uso da linguagem (oral e escrita).

PALAVRAS-CHAVE: registros de representação semiótica; sistema de numeração decimal ; valor posicional.

ABSTRACT

The present work describes investigation moments of the Hindu-Arabic Decimal Number System (DNS) understanding by children in public state schools in Paraná e Santa Catarina states, deriving from the application of an instrument composed of tasks and activities which answers, obtained during clinical interviews, constitute video records of the data that were submitted to the analysis. It also presents the analysis of the organization patterns of words and of the Arabic numeral that constitute records of the number representation and research results that point to the complexity of the learning, reading and writing of a numbering system. It culminates in a proposal that encompasses one teaching situation for the learning of the DNS, subsidized by the identified incomprehensions and by the developed research. The theoretical principals were based on the propositions of Raymond Duval the most suitable ones in order to approach and face the issue of the DNS incomprehension by children. Teaching situation encompassed records of monofunctional (the Arabic writing) and plurifunctional nature (the written word), the cognitive operations of production, treatment and conversion, the facing of the non-congruency phenomenon. One expects to contribute to conceptualize the numbering system which constitutes a mathematical object that enables not only to vehiculate a means to mathematically communicate real world observations through mathematical representations, but also to present precise results, arguing about conjectures and hypothesis, making use of language (oral and written).

KEY-WORDS: semiotics representation records ; decimal numeration system; positional value

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - FUNÇÕES M, N E P, ASSUMIDAS PELAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM OS NÚMEROS 83 E 810, NA LÍNGUA FRANCESA E NA LÍNGUA PORTUGUESA	27
FIGURA 2 - PALAVRA E NUMERAL ARÁBICO UTILIZADO PARA REPRESENTAR O NÚMERO 5625 NA LÍNGUA JAPONESA	30
FIGURA 3 - CARÁTER OPERATÓRIO DA ESCRITA ARÁBICA E SUA RELAÇÃO COM O CARÁTER OPERATÓRIO DA PALAVRA	49
FIGURA 4- ESCRITA DO NÚMERO 31 POR ANA COM NÚMEROS MAIÚSCULOS	58
FIGURA 5 - PLANO DOS OBJETOS, DOS CONJUNTOS, DOS CARDINAIS E DAS REPRESENTAÇÕES ESCRITAS: O NUMERAL ARÁBICO	68
FIGURA 6 - ESTRUTURA DA REPRESENTAÇÃO EM FUNÇÃO DA CONCEITUALIZAÇÃO	71
FIGURA 7 -: ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO. OPERAÇÃO DE TRATAMENTO POSSIBILITADA	76
FIGURA 8 - ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO SND. OPERAÇÕES DE TRATAMENTO POSSIBILITADAS	77
FIGURA 9 - ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO ÁBACO, COM UTILIZAÇÃO DO SND. OPERAÇÕES DE TRATAMENTO POSSIBILITADAS	77
FIGURA 10 – ESTRUTURA TRIÁDICA E DIÁDICA DA SIGNIFICÂNCIA	156

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - SISTEMAS DE PALAVRAS-NÚMEROS FRANCÊS, INGLÊS E CHINÊS	28
QUADRO 2 - COMPARAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DO N ^o COM UTILIZAÇÃO DO NUMERAL ARÁBICO E DA PALAVRA	31
QUADRO 3 - IDENTIFICAÇÃO DE UNIDADES COGNITIVAS EM CADA TIPO DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO	93
QUADRO 4 - ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA OU NÃO CONGRUÊNCIA ENTRE O NUMERAL ARÁBICO E A PALAVRA PARA ALGUNS NÚMEROS	101
QUADRO 5 - PADRÃO DE ORGANIZAÇÃO DAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM NÚMEROS EM SISTEMAS EUROPEUS (FRANCÊS E INGLÊS) E ASIÁTICOS (CHINÊS).....	125
QUADRO 6 - PADRÃO DE ORGANIZAÇÃO DAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM NÚMEROS, NA LÍNGUA PORTUGUESA	126
QUADRO 7 - TRANSFORMAÇÕES QUE CORRESPONDEM A UMA OPERAÇÃO DE TRATAMENTO NUMA OPERAÇÃO DE ADIÇÃO	189
QUADRO 8 -: TRANSFORMAÇÕES EFETUADAS PARA A REALIZAÇÃO DE UMA ADIÇÃO CORRESPONDENDO A UMA OPERAÇÃO DE TRATAMENTO	202
QUADRO 9 - PROCEDIMENTO DE CONTAGEM NA SEQÜÊNCIA PARA OBTENÇÃO DA ADIÇÃO DE 9 COM 6 SEGUNDO O ITINERÁRIO DOS DEDOS CARDINALIZADOS	230

SUMÁRIO

RESUMO	8
ABSTRACT	9
LISTA DE FIGURAS	10
LISTA DE QUADROS	11
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 JUSTIFICATIVA	16
1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	21
1.3 OBJETIVOS	21
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	22
CAPÍTULO 2 – SND	25
2.1 ESTRUTURA DA LINGUAGEM: ORGANIZAÇÃO DOS SISTEMAS VERBAIS	25
2.1.1 Estruturação da língua e do signo para representar e significar o número.	33
2.2 RESULTADOS DE PESQUISAS	46
2.2.1 As Dificuldades de Compreensão da Estrutura do SND – Dificuldades de Leitura	46
CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS SEGUNDO VERGNAUD E DUVAL	67
3.1 O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM SEGUNDO RAYMOND DUVAL	67
3.2 O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA COMPREENSÃO DA ESTRUTURA DO SND	74
CAPÍTULO 4 - SOBRE A PESQUISA	84
4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA SEGUNDO DUVAL	84
4.1.1 Distinção Cuidadosa sobre o que sobressai no Tratamento em um Registro e aquilo que Sobressai em uma Conversão	87
4.1.1.1 Consideração da natureza dos registros de representação.	87
4.1.1.2 Utilização da conversão como instrumento de análise: variáveis cognitivas próprias de cada tipo de registro de representação (a linguagem e a escrita arábica)	89
4.1.1.3 A congruência ou a não congruência semântica entre as palavras e os numerais que expressam os números	97
4.1.1.4 Critérios para categorização dos dados e interpretação dos resultados	102
4.2 INSTRUMENTO DE COLETA DAS INFORMAÇÕES QUALITATIVAS.....	103
4.2.1 Momento 1: a replicação das provas de Kamii (1992), Bernadz e Janviers (1982, apud KAMII, 1992) e Cauley (1988, apud Kamii, 1992) com adaptações.....	106
4.2.2 Momento 2: elaboração de novas provas, aplicação junto a um grupo de 8 crianças, análise dos procedimentos e encaminhamentos.....	107
4.2.2.1 Análise do valor dos procedimentos e das tarefas das provas	111
4.2.3 Momento 3: organização das provas e sua aplicação a 47 crianças de uma escola estadual de Ponta Grossa: a identificação dos tipos de respostas para uma mesma questão, das estratégias e procedimentos adotados, das explicações e argumentações apresentadas e a interpretação dos resultados.....	119

4.2.4	Descrição dos Procedimentos de Análise dos Dados.....	120
CAPÍTULO 5 – UMA SITUAÇÃO DE ENSINO		156
5.1 AS TAREFAS DA SITUAÇÃO DE ENSINO		158
5.1.1	Análise das Respostas das Atividades Desenvolvidas Com A La (9;2 E Bru(9;4)	170
5.1.2	Explicitação dos encaminhamentos e identificação de procedimentos, argumentos, explicações e justificativas e interpretação dos resultados	177
5.2 RESULTADOS ENCONTRADOS: ASPECTOS QUALITATIVOS		188
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	210
REFERÊNCIAS		233
ANEXOS		237

1 INTRODUÇÃO

Resultados de pesquisas¹ apontam que a compreensão do Valor Posicional (VP) presente no Sistema de Numeração Decimal (SND), de origem indo-arábica, não é de fácil apreensão pelas crianças. Apesar dos aspectos de natureza arbitrária, o VP não pode ser simplesmente transmitido, mesmo considerando as convenções que exigem transmissão, como por exemplo, os nomes dos números e a organização de uma estrutura de base e posição.

Porém, as compreensões essenciais das invariáveis² presentes no SND, apontadas por Nunes e Bryant (1997), não se estabelecem por simples transmissão, visto que elas se tornam presentes, mais ou menos explicitadas, nos diferentes registros de representação que são dotados de conteúdos próprios e distintos do objeto de conhecimento.

Existem também as dificuldades enfrentadas pelos professores na elaboração de propostas que permitam a realização de operações de adição, subtração, multiplicação e principalmente divisão por meio da utilização de algoritmos convencionais ou de cálculo mental, baseados na compreensão da estrutura do SND.

O resultado da pesquisa intitulada ‘O valor Posicional e suas implicações para o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino básico’, institucionalizada na Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), no período de 1998 a 2000, por esta pesquisadora, apontou que existem formas através das quais é possível identificar, a

¹ KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 1992. KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Campinas, SP: Papirus, 1995. NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

² Nunes e Bryant (1997), referem-se às invariáveis do SND como sendo: a composição aditiva e o valor relativo da unidades, isto é, 22 é igual à $2 \times 10 + 2$ (composição aditiva) e cada 2 do 22 possui um valor específico de acordo com a posição no numeral, sendo o 2 da esquerda igual a 20 unidades e o 2 da direita igual a 2 unidades.

partir das respostas apresentadas pelos sujeitos e dos argumentos, os entendimentos e não entendimentos das invariáveis presentes no SND.

Na referida pesquisa, participaram seis professoras de duas escolas da rede estadual de ensino de Ponta Grossa que acompanharam a aplicação de 14 provas³ às crianças de 3^a e 4^a séries do Ensino Fundamental no ambiente da sala de aula. As respostas dadas por um grupo de seis crianças selecionadas para amostra foram analisadas pelas professoras, pelos pesquisadores, pela coordenadora do Núcleo Regional de Educação de Ponta Grossa na busca das correlações entre os desempenhos nos testes⁴.

A partir das análises das respostas apresentadas pelas crianças, nas provas, houve a possibilidade da identificação de categorias mais amplas, que incluem procedimentos e estratégias diferenciados em cada categoria, e também argumentos e justificativas mais ou menos consistentes ou lógicos, o que propiciou verificar que as crianças compreendem alguns aspectos do SND por elas manipulado, mas, suas compreensões não são ainda completas o suficiente para lhes possibilitar ter esse objeto matemático como ferramenta de pensamento, capaz de ser evocado para dar conta de uma outra questão, em um outro problema. As análises possibilitaram, também, verificar que a manipulação do SND pode ser realizada de forma mecânica, sem compreensão, fato bastante evidente na manipulação dos algoritmos e na leitura e escrita dos numerais. Elas possibilitaram, igualmente, identificar que as incompreensões não são de todo incompletas e, que, em determinados contextos, a manipulação das invariáveis presentes no SND é manifestada para permitir às crianças

³ Os referidos testes encontram-se na pesquisa institucionalizada na UEPG de nome “O Valor Posicional e suas implicações... para o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino básico.” Foram 14 testes organizados e aplicados a 6 turmas de terceira e quarta séries, com acompanhamento das professoras regentes, das quais, 24 crianças foram retiradas do ambiente da sala de aula para entrevista. Desse grupo foi retirada uma amostra de 6 crianças cuja produção escrita e entrevista aos referidos testes foram objeto de análise por parte das professoras e pesquisadores.

⁴ O relatório com os resultados da pesquisa encontra-se na UEPG.

comporem totais solicitados. Foi o caso, por exemplo, da totalidade das crianças que foi capaz de utilizar 4 notas (uma de 10 e três de um) para compor R\$ 13,00 a ser pago por um objeto. Ao serem indagadas por que não utilizaram 13 notas, argumentaram convictamente que uma delas valia 10 e com as outras três perfaziam o total solicitado.

Neste estudo buscar-se-ão as formas adequadas de organização e elaboração de tarefas, com diversas atividades, as quais compreenderão os elementos invariantes presentes na estrutura do SND, e que objetivarão, no ambiente da sala de aula, a compreensão do SND enquanto forma de comunicação, de registro e de leitura, isto é, de registro de representação semiótica da medida de um conjunto. Outra proposta é ressignificar do SND a partir de uma proposta metodológica que vise ligar teoria, prática e significação. Tais tarefas com as diversas atividades estarão, neste estudo, incluídas numa situação de ensino a ser proposta no ambiente da sala de aula visando à aprendizagem.

Do mesmo modo se pretende que, ao explicitar as próprias representações a respeito do Valor Posicional e ao levantar hipóteses, possa-se, junto com os professores, propor questões e analisar resultados das produções dos alunos.

1.1 JUSTIFICATIVA

Um Sistema de Numeração não é universal e nem único. O que o caracteriza é ser resultado de produção humana. Sendo inventado, precisa-se entender a natureza arbitrária de sua estrutura que se apresenta nos diversos registros de representação dentre os quais se destaca o número arábico e os nomes atribuídos aos números. Em relação aos nomes dos números, Nunes (1997) evidencia que existem diferenças no padrão de organização, por exemplo, o sistema francês que utiliza *quatre-vingt* para oitenta e *quatre-vingt-dix-neuf* para noventa e nove ou o sistema japonês, que utiliza as palavras *ni* para dois, *ju* para dez e *ni ju* para vinte e *ju ni* para doze. O mesmo não acontece com o nosso sistema que utiliza as palavras onze, doze, treze, quatorze e

quinze e as palavras vinte, trinta, quarenta, cinquenta... para duas dezenas, três dezenas, quatro dezenas, cinco dezenas. Resultados de pesquisas apontam que sistemas mais transparentes, como o japonês, ajudam as crianças na compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal posicional, resultado da interferência dos rótulos verbais, além de outras questões presentes na estrutura de tal sistema dentre as quais, a composição aditiva e o valor relativo das unidades que têm de ser investigados na sua relação com a compreensão.

Existem também resultados de pesquisas (CARRAHER, 1995) que apontam que dependendo do contexto, como por exemplo em um contexto que envolve dinheiro, no qual se dá a utilização dos nomes dos números e da escrita, os desempenhos são lógicos e corretos e são diferentes de desempenhos em que a formalização é uma exigência, mais especificamente a resolução de problemas via utilização de algoritmos padronizados.

Porém, importante será entender as formas pelas quais tais experiências deverão ser propostas, investigando seus efeitos no desenvolvimento das noções essenciais. Tais propostas não poderão ser investigadas senão no contexto da sala de aula, que envolve os elementos essenciais presentes no processo de ensino e aprendizagem: os alunos, os professores, o conteúdo ou campo de saber e a prática pedagógica.

Os professores exercem um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática nas escolas, e este deve compreender as formas pelas quais as crianças constroem as noções essenciais presentes no Sistema de Numeração. Porém, suas próprias compreensões e representações interferem nas formas pelas quais as propostas didáticas são elaboradas, bem como a concepção de matemática dos professores que pode caracterizar um paradigma hegemônico de educação matemática,

tal como apontado por Miguel (1994)⁵.

Em relação à prática pedagógica, o professor deve propor, portanto, uma ação no ambiente da sala de aula que compreenda atividades a serem desenvolvidas pelas crianças, e ao mesmo tempo, interpretar e analisar os desempenhos destas e suas compreensões frente ao objeto matemático em questão. O professor deve aprender a dar lugar às formas de pensar e proceder dos alunos e entender como um conteúdo se traduz em conhecimento a ser aprendido.

Podemos tomar, como exemplo, o processo de ensino-aprendizagem do Sistema de Numeração visto as dificuldades dos professores em enfrentar as situações de sala de aula. Ao serem manipulados algoritmos já consolidados, os professores defrontam-se com as dificuldades dos alunos, principalmente com os algoritmos da divisão. Muitas são as ocasiões em que os professores solicitam projetos de capacitação docente que lhes permitam conduzir tal aprendizado com mais eficiência. O caminho, ao que parece, não pode começar pelo fim.

Há muito que se fazer para compreender o porquê das dificuldades das crianças, inclusive algumas vias possíveis precisam ser exploradas. Algumas delas podem ser caracterizadas por improvisações sem reflexões mais aprofundadas, que

⁵ Miguel (1994) analisa o paradigma de educação matemática hegemônico nas escolas de 1º, 2º e 3º graus nas dimensões epistemológica, didático-metodológica, psicológica e teleo-axiológica apontando que: na dimensão epistemológica predomina a ciência do anti-logos [...] que não duvida. Aceita. [...] Que não contesta. Impõe. [...] Que não tem processo e nem produtores. Apenas produtos. [...] Que não tem história. Surgiu pronta do nada e predestina-se ao nada e a ninguém. [...]. Na dimensão teleo-axiológica predomina uma concepção *light* que se caracteriza pela neutralidade e descompromisso da educação matemática em relação aos problemas e anseios das sociedades humanas do presente e do passado. Essa concepção faz apologia dos aspectos estritamente técnicos do conteúdo. É o conteúdo pelo conteúdo abrindo caminhos para outro, consolidando assim elos de uma interminável e monótona cadeia que vai do nada a lugar nenhum. [...] Na dimensão psicológica do ato educativo predomina uma concepção de mente-caixa registradora onde o professor é identificado com sua voz, isto é, pelos sons que emite através de sua fala e os alunos reduzem a um conjunto de olhos e ouvidos. Ensinar é sinônimo de falar e aprender é sinônimo de ver e ouvir.[...] Na dimensão didático-metodológica convivemos com uma concepção tecnicista do ato educativo. [...] Expõe. Não pergunta. Responde. Não dialoga. Não levanta e analisa contradições. [...]. A concepção tecnicista do método age às cegas pois não sabe onde quer chegar.

constituem, infelizmente, as vias escolhidas pela escola.

Porém, o enfrentamento das questões que advêm da compreensão do Sistema de Numeração requer o examinar de questões mais profundas com respeito a um número considerável de exigências dentre as quais algumas poderão estar relacionadas aos padrões de organização das palavras e dos numerais que representam os números, outras à identificação das dificuldades enfrentadas pelas crianças para compreender a estrutura do sistema de numeração e às formas de interpretação dessas dificuldades que podem envolver dimensões diferentes, ora psicológicas, ora neurológicas, ora metodológicas e ora tele-axiológicas, não esgotando todas as possibilidades.

Um dos caminhos poderá ser a organização de uma situação de ensino, compreendendo diversas tarefas, fundamentadas nas incompreensões dos alunos, nas suas dificuldades e nas suas formas de interpretação dos registros de representação de quantidades com utilização da palavra e da escrita arábica. para que se possa promover a aprendizagem da estrutura do SND que se torna presente em diversos registros de representação transpondo a barreira de uma utilização mecanizada e sem atribuição de significação.

No nível dos alunos, deve-se ter em conta que as dimensões psicológicas e epistemológicas⁶ estarão determinando, implicitamente ou explicitamente a natureza

⁶ Miguel (1993) se refere à dimensão psicológica do ato educativo como aquela que revela uma concepção de como se dá o acesso ao conhecimento matemático por parte de quem aprende, isto é, concepção da relação sujeito-objeto de conhecimento, apreendida em seu aspecto psicológico (p. 22). Esta dimensão estará explicitada ao considerar como o aprendiz adquire conhecimento matemático, ao considerar se este conhecimento é ou não inato, se é construído e se construído que fatores estariam condicionando essa construção, se ela é interativa ou solidária, se a interação é com o mundo social, físico ou ambos, que fatores intervêm no processo construtivo, se essa construção é cumulativa ou passa por mudanças qualitativas, se ela é progressiva, estrutural, se existe relação entre o processo de aquisição de conhecimento e o processo de aquisição da linguagem, ou entre este e a história ou ainda entre este e o contexto social. Em relação à concepção de matemática como aquela que responde: Qual é o objeto da matemática? Qual é o status do conhecimento, em que sentido se pode falar da existência de seres matemáticos? O conhecimento matemático é um reflexo fiel ou mesmo aproximado das leis do mundo físico, ainda que esse reflexo não seja total e imediato? O conhecimento matemático é falível (no sentido de que produz verdades retificáveis) ou infalível? Existem várias matemáticas ou uma única? O que garantiria a unidade da matemática? É aceitável a postulação da unidade da

do objeto matemático e a forma como se acredita ser possível ter acesso ao conhecimento.

As tarefas da situação de ensino deverão apresentar os desafios cognitivos que possibilitem aos sujeitos a retirada da estrutura presente no SND, transferindo-a para um patamar superior, encontrando-se com construções anteriores e reorganizando-se para dar conta dos novos desafios cognitivos.

Esse projeto se justifica por tentar avançar com reflexões de natureza teórica sobre o SND, propondo uma investigação de situações e atividades a serem propostas para as séries iniciais do ensino fundamental, 1^o e 2^o ciclos. Tais propostas compreenderão diferentes registros de representação do objeto matemático em questão, o SND, procurando contribuir tanto para a superação das dificuldades dos alunos quanto para a ressignificação dos registros de representação de quantidades. Segundo Vergnaud (1985) o sistema de numeração é um suporte de conceituação, porém a escrita do número é muitas vezes associada ao próprio número. O sistema de numeração utiliza registros de representação semiótica, em diversas formas, de representação da medida de um conjunto que é designada pelo número. Há que se fazer, portanto, a distinção entre número e sistema de numeração.

O tema também se justifica, visto que a compreensão de um Sistema de Numeração para representação de quantidades constitui uma das ferramentas de pensamento mais importantes no tocante à formação dos alunos que frequentam a escola. A formação dos alunos tem de ser compreendida e voltada para uma participação cidadã, o que não se concretiza se lhes faltam instrumentos de leitura e

matemática com base no ideal da sistematização dedutiva? O que garante a aceitação dos resultados obtidos pela matemática? O conhecimento matemático é universal (“objetivo” num primeiro sentido) isto é, válido para qualquer pessoa, de qualquer contexto social? O conhecimento matemático é “neutro” (objetivo num segundo sentido), isto é, o seu valor cognitivo independe do ponto de vista pessoal ou de classe? O conhecimento matemático é “neutro” (num segundo sentido), isto é, uma vez produzido pode ser utilizado para mistificar a realidade, ocultar a verdade ou para atender os interesses de uma minoria, ou ainda, para o atingimento de objetivos e execução de programas eticamente reprováveis (como por exemplo, promover a desigualdade, a injustiça, a exploração, a produção de meios de destruição da natureza, da vida, etc)? Poderiam esses mesmos fatores estar na base da própria produção do conhecimento matemático?

compreensão do mundo e da realidade. A representação de quantidades é uma das primeiras manifestações da conduta humana e conhece-se o árduo caminho trilhado pela humanidade para a invenção de um sistema apropriado para essas representações. Os diversos registros mostram essa caminhada difícil e conturbada, pontuada por idas e vindas até o alcance de um sistema eficaz e de notórias vantagens. Porém, tais vantagens podem ser desprezadas e desvalorizadas se forem simplesmente manipuladas de forma mecânica.

Com este projeto pretendemos traçar alternativas para uma proposta de ensino e aprendizagem da estrutura do SND voltadas para aspectos do modo representacional do número como medida de um conjunto.

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

As questões apontadas levam a indagar quais as formas de organizar e propor, no processo de ensino, situações que permitam aos alunos compreender o SND enquanto forma de comunicação e de registro da medida de um conjunto, expressa por um número, e atribuir sentido e significação aos registros de representação do número: escrita e numeral arábico que veiculam a estrutura do SND.

1.3 OBJETIVOS

Para o enfrentamento da questão acima procurou-se atingir os seguintes objetivos:

- a) analisar os padrões de organização da palavra e do numeral arábico que constituem registros de representação do número;
- b) investigar a evolução do sentido atribuído ao número e dos registros de representação do número, para analisar sua influência na aprendizagem no plano pedagógico;
- c) investigar e propor de forma a levar os alunos a atribuírem sentido e significação aos registros do número, por meio da organização de uma situação de ensino.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho foi organizado em 5 capítulos. Na introdução, que constitui o primeiro capítulo, apresenta-se a justificativa para a escolha do tema de investigação, a definição do problema e os objetivos.

O segundo capítulo está subdividido em 2 partes: na primeira é apresentada a análise da estrutura da linguagem e dos padrões de organização, tanto da palavra que expressa o número como a sua representação arábica, buscando evidenciar até que ponto as diferentes representações exprimem a numerosidade subjacente e ultrapassam uma lexicalização direta (que significa a atribuição de um nome para cada número); ainda nessa parte apresentam-se alguns aspectos da evolução do sentido atribuído ao número que culminou na criação de registros de representação de quantidades que foram, por sua vez, também, adquirindo sentido e significado e se tornaram um modo de se representar simbolicamente as quantidades constituindo os sistemas de numeração que adquiriram formas diversas em relação à estrutura, compreendendo ora uma base e ora uma base e o valor posicional possibilitando evidenciar as vantagens e desvantagens para cálculos com utilização de algoritmos.

Na segunda são apresentados os resultados de pesquisas que se referem às dificuldades de compreensão dessa estrutura e da leitura segundo perspectivas diferentes, tais como: a investigação (KAMII, 1992), que apresenta uma análise dessas dificuldades baseada numa teoria operatória e a de (TEIXEIRA, 1996) cuja análise se fundamenta na teoria de representações de Gérard Vergnaud; a investigação de (FUSON & KWON, 1991) que se volta para as relações entre contagem e cardinalidade e a utilização dos números na resolução de problemas; os estudos de (FAYOL, 1996) sobre procedimentos e princípios da contagem; a investigação de (SERON, DELOCHE & NOËL) sobre tipos de erros, lexicais e sintáticos, em ditados de números; a investigação de (FUSON & KWON, 1991) sobre os efeitos dos sistemas de palavras-números e outras ferramentas culturais nos cálculos das crianças;

o estudo de caso de (BRIZUELA, 1998) que ressalta a importância das invenções e os conhecimentos que as crianças elaboram a respeito da numeração escrita; as investigações de (SINCLAIR et al, 1990, 1994) sobre as primeiras manifestações da escrita infantil e sobre os esquemas da construção numérica; a investigação de (LERNER & SADOSVSKY, 1996) sobre as formas de aproximação do sistema de numeração como produto cultural pelas crianças.

O terceiro capítulo apresenta os fundamentos teóricos de Raymond Duval em relação ao papel e à importância das representações semióticas: tipos de registros de representação de natureza multifuncionais e monofuncionais, as operações de tratamento e conversão, o fenômeno da congruência e ao papel das representações semióticas na compreensão da estrutura do SND, enquanto linguagem e enquanto escrita arábica.

No quarto capítulo são contemplados os sujeitos da pesquisa subdivididos em 2 partes: na primeira é demonstrada a metodologia de pesquisa proposta por Raymond Duval compreendendo: distinção cuidadosa sobre o que se destaca no tratamento em um registro e aquilo que se destaca em uma conversão e consideração da natureza dos registros de representação. Ainda nessa parte, também serão citados os critérios para análise dos dados utilizando a conversão, que compreenderão as variações das variáveis cognitivas próprias de cada registro de representação (a linguagem e a escrita arábica). Por fim, os critérios para categorização e interpretação dos resultados. Na segunda parte, são evidenciados os instrumentos de coleta das informações qualitativas que compreendem as provas para investigação da compreensão do valor posicional, em 3 momentos: o primeiro momento apresenta a replicação das provas de Kamii (1992) e os procedimentos de coleta de dados por meio das provas para investigação do valor posicional; o segundo momento expõe a elaboração de novas provas, aplicação a um grupo de crianças, análises dos procedimentos e encaminhamentos; o terceiro momento demonstra a organização das provas, a aplicação a um grupo de crianças e a descrição dos procedimentos de pesquisa que incluiu: transcrição das fitas cassete, identificação de tipos de respostas

para uma mesma questão, identificação de estratégias e procedimentos adotados para as respostas apresentadas, identificação de estratégias de explicação e argumentação sobre as respostas apresentadas, categorização das respostas e identificação de tipos de respostas diferenciadas em cada categoria. Ainda nesse momento, apresenta-se a interpretação dos resultados (análise do significado) e os subsídios extraídos para a elaboração das tarefas da situação de ensino.

O quinto capítulo está subdividido em 2 partes. Na primeira é exibida uma situação de ensino compreendendo diversas tarefas, sua aplicação a uma dupla de crianças, a análise feita desta aplicação que resultou em complementações e reformulações (sendo a seguir apresentadas em anexo). Em seguida, são relatados os procedimentos, argumentos, explicação e justificativas para as respostas apresentadas por outros pares, aos quais foram propostas as tarefas da situação de ensino. Na segunda, a interpretação desses resultados destacando os aspectos qualitativos.

Por fim as considerações finais com o intuito de apontar caminhos para novas investigações e as contribuições para a prática educativa.

CAPÍTULO 2

O SND

2.1 ESTRUTURA DA LINGUAGEM: ORGANIZAÇÃO DOS SISTEMAS VERBAIS

A análise da compreensão do SND dar-se-á nos seguintes patamares: campo psicológico que apontará os aspectos ligados à psicogênese da quantificação e campo lingüístico que apontará a forma de organização dos sistemas verbais e da escrita arábica.

A medida de um conjunto, de natureza contínua ou discreta, passa pela quantificação e esta pode ser intensiva ou extensiva. Segundo Piaget (1981) a medida de um conjunto necessita, em primeiro lugar, da conservação que significa a permanência da totalidade, quaisquer que sejam as alterações introduzidas. Para as quantidades contínuas há a necessidade da unidade de medida e para as quantidades discretas pode-se obter a medida do conjunto por enumeração precisando o estabelecimento da correspondência biunívoca por parte do sujeito. Em se tratando, porém, da psicogênese da quantificação, Piaget (1981), alerta e mostra que a correspondência biunívoca por si só não garante a equivalência dos conjuntos, pois existem fases intermediárias pelas quais a criança passa e nas quais a avaliação ainda é fundada nas relações perceptivas, não existindo coordenação das relações de correspondência e mudança de forma, que exigem uma multiplicação de relações que é fonte de quantificação intensiva e de equalização de diferenças que implica a unidade, fonte de quantificação extensiva.

Segundo Piaget (1981), a quantificação intensiva reserva-se à capacidade de estabelecer se um conjunto tem mais, tem menos ou tem nada, e a quantificação extensiva reserva-se à capacidade de estabelecer quantos a mais ou a menos há nesse conjunto e, nesse caso é necessária a enumeração para as quantidades discretas e a unidade de medida para as quantidades contínuas.

Além das questões ligadas à psicogênese da quantificação é preciso, para estabelecer o valor cardinal de uma coleção de natureza discreta por enumeração, a criação de um sistema de denominação numérica que exprima a numerosidade subjacente da coleção. Segundo Fayol (1996) a solução mais simples para a criação desse sistema seria uma lexicalização direta, isto é, um nome para cada número, mas isto se torna limitado por razões de economia de tratamento. Sabe-se que esta limitação foi enfrentada com a criação de padrões de organização, tanto para a palavra como para o numeral arábico, compreendendo uma estrutura (no caso do SND de origem indo-arábica de base dez e posicional) para exprimir a numerosidade que expressará a medida. Importante será analisar como os sistemas de denominação numérica e de escrita numérica com utilização de algarismos são organizados, de modo a exprimir a numerosidade subjacente, para então investigar se estas formas de organização interferem na aprendizagem da estrutura do SND, pelas crianças.

A forma de organização dos sistemas de denominação numérica já foi objeto de estudo de pesquisadores (POWER e LONGUET-HIGGINS, 1978; FUSON e KWON, 1991)⁷.

Segundo os estudos de Power e Longuet-Higgins (1978), o sistema francês utiliza uma denominação numérica passível de uma decomposição em uma expressão aritmética baseada em soma e produto. As expressões verbais são organizadas em torno de uma sintaxe elementar precisando recorrer a 3 tipos de termos: os termos que entram nas composições aditivas (denominados p), os termos que entram nas composições multiplicativas (denominados m) e os termos que designam apenas o número (denominados n). Assim o termo *seize* (16) tem a função de designar o número 16 e entrar nas composições aditivas, da mesma forma que o termo *soixante* (60) tem as funções tanto de designar o próprio número 60 como de entrar nas composições aditivas no caso do *soixante treze* ($73 = 60 + 13$). Já o termo *vingt* tem as funções de

⁷ Os estudos de Power e Longuet-Higgins (1978) foram apresentados na obra de Fayol (1996). A referência completa citada na obra é: POWER, R. J. D.; LONGUET-HIGGINS, H. S. Learning to count: a computational model of language acquisition. *Proceedings of the Royal Society of London*, B 200, p. 391-417.

designar o próprio número 20, de entrar nas composições aditivas *vingt et un* ($21 = 20 + 1$) e de entrar nas composições multiplicativas *quatre-vingt* ($80 = 4 \times 20$).

Este estudo de Power e Longuet-Higgins (1978) já permite identificar algumas das diferenças da forma de organização da denominação numérica na língua portuguesa, como o termo vinte, que tem as funções de determinar o próprio número 20 e de entrar nas composições aditivas como vinte e um ($21 = 20 + 1$). Mas não tem a função de entrar numa composição multiplicativa, pois existe o termo oitenta na nossa língua. É o mesmo caso do termo *cent* que na língua francesa assume a função de exprimir o próprio número 100, tem a função de entrar nas composições aditivas, como, por exemplo, *cent et trois* ($103 = 100 + 3$), e de entrar nas composições multiplicativas, como por exemplo *trois cents* ($300 = 3 \times 100$). Na língua portuguesa o termo 100 só assume as funções de exprimir o próprio número 100 e de entrar nas composições aditivas, como por exemplo, cento e dezoito ($118 = 100 + 18$), não precisando assumir a função de entrar nas composições multiplicativas, pois existem os termos duzentos, trezentos, quatrocentos e assim por diante.

Se for usado um gráfico, tal como o apresentado por Power e Longuet-Higgins (1978), poder-se-á evidenciar a diferença acima apontada. Tome-se, por exemplo, os valores 83 e 810 apresentados na figura 1:

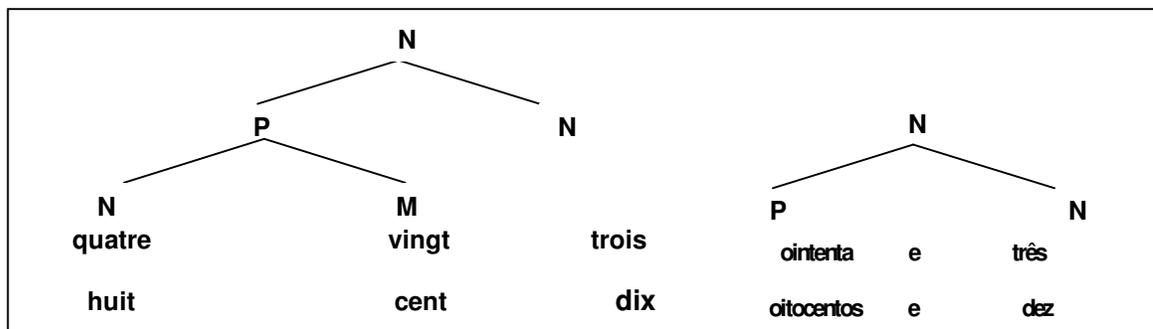


FIGURA 1 - FUNÇÕES M, N E P, ASSUMIDAS PELAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM OS NÚMEROS 83 E 810, NA LÍNGUA FRANCESA E NA LÍNGUA PORTUGUESA

Um outro estudo apresentado por Fuson e Kwon (1991) apresenta uma comparação entre os sistemas europeus de palavras-números que são irregulares até cem e sistemas asiáticos que são totalmente regulares e a maneira como são ligados aos números escritos.

Para citar alguns exemplos apresentam-se, no quadro 1, os números escritos utilizando a língua inglesa, francesa e chinesa.

NÚMERO	FRANCÊS	INGLÊS	CHINÊS
1	<i>Un</i>	<i>One</i>	<i>Yi</i>
2	<i>Deux</i>	<i>Two</i>	<i>Er</i>
3	<i>Trois</i>	<i>Three</i>	<i>Son</i>
4	<i>Quatre</i>	<i>Four</i>	<i>Si</i>
5	<i>Cinq</i>	<i>Five</i>	<i>Wu</i>
6	<i>Six</i>	<i>Six</i>	<i>Liu</i>
7	<i>Sept</i>	<i>Seven</i>	<i>Qi</i>
8	<i>Huit</i>	<i>Height</i>	<i>Ba</i>
9	<i>Neuf</i>	<i>Nine</i>	<i>Jiu</i>
10	<i>Dix</i>	<i>Ten</i>	<i>Shi</i>
11	<i>Onze</i>	<i>Eleven</i>	<i>shi yi</i>
12	<i>Douze</i>	<i>Twelve</i>	<i>shi er</i>
13	<i>Treize</i>	<i>Thirteen</i>	<i>shi son</i>
14	<i>Quatorze</i>	<i>Fourteen</i>	<i>shi si</i>
15	<i>Quinze</i>	<i>Fifteen</i>	<i>shi wu</i>
16	<i>Seize</i>	<i>Sixteen</i>	<i>shi liu</i>
17	<i>dix-sept</i>	<i>Seventeen</i>	<i>shi qi</i>
18	<i>dix-huit</i>	<i>Eighteen</i>	<i>shi ba</i>
19	<i>dix-neuf</i>	<i>Nineteen</i>	<i>shi jiu</i>
20	<i>Vingt</i>	<i>Twenty</i>	<i>er shi</i>
21	<i>vint-et-um</i>	<i>twenty-one</i>	<i>er shi yi</i>
30	<i>Trente</i>	<i>Thirty</i>	<i>son shi</i>
40	<i>Quarante</i>	<i>Forty</i>	<i>si shi</i>
50	<i>Cinquante</i>	<i>Fifty</i>	<i>wu shi</i>
60	<i>Soixante</i>	<i>Sixty</i>	<i>Liu shi</i>
70	<i>Soixante-dix</i>	<i>Seventy</i>	<i>qi shi</i>
80	<i>Quatre-vingt</i>	<i>Heiahtv</i>	<i>Ba shi</i>
90	<i>Quantre-vingt-dix</i>	<i>Ninetv</i>	<i>Jiu shi</i>
100	<i>Cent</i>	<i>Oe hundred</i>	<i>yi bi</i>

QUADRO 1 - SISTEMAS DE PALAVRAS-NÚMEROS FRANCÊS, INGLÊS E CHINÊS

FONTE: As informações presentes na tabela foram retiradas de FUSON, K. C.; KWON, Y. *Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant*. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC, C.; FISCHER, J.P. *Les chemins du nombre*. França: Presses Universitaires de Lille, 1991. p. 354.

Pode-se observar no quadro 1 que até o número dez, os sistemas francês e chinês, e o inglês até doze, não se diferenciam no sentido de ser necessário memorizar os nomes dos números a serem recitados numa seqüência pré-estabelecida. Porém, a partir destes pode-se perceber uma regularidade no sistema chinês que repete as palavras utilizadas para nomear os números até dezenove, seguindo a mesma ordem do sistema escrito com utilização de algarismos: da esquerda para a direita, a palavra da esquerda representa dez, a da direita um valor de 1 a 9, e a composição das palavras, através da soma, representa o número. Assim: *shi yi* ($11 = 10 + 1$), *shi er* ($12 = 10 + 2$), *shi son* ($13 = 10 + 3$), *shi si* ($14 = 10 + 4$), *shi wu* ($15 = 10 + 5$), *shi liu* ($16 = 10 + 6$), *shi qi* ($17 = 10 + 7$), *shi ba* ($18 = 10 + 8$) e *shi ju* ($19 = 10 + 9$). As mesmas palavras utilizadas para nomear do 1 ao 9 se colocadas à esquerda do 10 permitem a obtenção de um múltiplo de 10 através de uma multiplicação, isto é, *er shi* ($2 \times 10 = 20$), *son shi* ($3 \times 10 = 30$) e assim até *ju shi* ($9 \times 10 = 90$). Para as centenas cria a palavra *bai* ficando *yi bai* (1×100), *er bai* (2×100), *er bai ling yi* ($2 \times 100 + 1$, sendo a palavra *ling* para representar o zero), *yi bai er shi wu* ($1 \times 100 + 2 \times 10 + 5$).

Em relação à escrita arábica, os sistemas asiáticos não apresentam uma estrutura de base e valor posicional. Segundo Eves (1997), o sistema de numeração chinês-japonês, para a escrita arábica, compreende um sistema de agrupamentos multiplicativos. São criados um conjunto de símbolos para as potências de 10 e um conjunto de símbolos para os números de 1 a 9. A escrita arábica é realizada na vertical, cuja leitura deve ser feita de cima para baixo. Apesar de não ser posicional este sistema não exigia a repetição de símbolos criados para as potências de 10, pois eles eram acompanhados dos símbolos criados para os números de 1 a 9 que e a eles se ligavam por uma operação de multiplicação. Os resultados (produtos) eram então adicionados.

	Símbolos criados para os números de 1 a 9	Símbolos criados para potências de	Exemplo: 5625
1	一	10^1 十	五 → wu
2	二	10^2 百	千 → qian
3	三	10^3 千	六 → liu
4	四		百 → bai
5	五		二 → er
6	六		十 → shi
7	七		五 → wu
8	八		
9	九		

FIGURA 2 - PALAVRA E NUMERAL ARÁBICO UTILIZADO PARA REPRESENTAR O NÚMERO 5625 NA LÍNGUA JAPONESA

FONTE: Informações retiradas de EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 1997. p. 34.

Já não é o caso para as palavras usadas nos sistemas francês e inglês. No sistema francês, de onze a quinze, existem palavras específicas para nomear os números compostos de prefixos e sufixos ligados entre si por uma adição. Estas, ao serem ligadas, apresentam uma ordem inversa aos dígitos da representação com algarismos: *onze* (um mais dez), *douze* (dois mais dez), e assim até *seize* (seis mais dez). A partir do dezesseis a ordem inverte, o prefixo representa dez e os sufixos os números de 1 a 9 também ligados por uma adição: *dix-sept* (dez mais sete) e assim até dezanove que é *dix-neuf* (dez mais nove). A mesma estrutura está presente no sistema inglês, mas a partir do treze até o dezanove, no qual: *thirteen* (três mais dez), *fourteen* (quatro mais dez), *fifteen* (cinco mais dez), (seis mais dez) *seventeen* (sete mais dez), *eighteen* (oito mais dez) e *nineteen* (nove mais dez).

Já os números a partir de vinte até cem, representados pela palavra escrita e falada na língua francesa, não apresentam as mesmas regularidades do sistema chinês.

Assim temos *vingt-un* (com *vingt* representando duas vezes dez, mas não explicitado, mais um), *trente et cinq* (com *trente* significando três vezes dez, mas não explicitado, mais cinco), *soixante et sept* (com *soixante* significando sessenta, mas não explicitado, mais sete) e ainda *soixante-douze* (significando sessenta mais doze), *quatre-vingt* (significando quatro vintes ou vinte mais vinte mais vinte mais vinte) e *quatre-vingt-seize* (significando quatro vezes vinte mais dezesseis). Para os números de vinte até cem, expressos através da palavra escrita e falada na língua inglesa as mesmas irregularidades podem ser observadas. Assim, *twenty* (duas vezes dez ou dez mais dez, mas não explicitado), *forty* (quatro vezes dez, mas não explicitado) e assim por diante até *ninety* (nove vezes dez, mas não explicitado).

Diferentemente dos sistemas asiáticos, as palavras criadas para o sistema de numeração decimal de origem indo-arábica passam a compreender o princípio multiplicativo, mas não de forma tão explicitada. Como exemplo, alguns valores entre 10 e 90 podem ser comparados (Quadro 2).

chinês-japonês			inglês	francês	
十	10	shi 1 palavra 1 símbolo	ten	dix	1 sílaba 2 algarismos
二十	20	er shi 2 palavras 2 símbolos	twenty	vingt	sufixo e prefixo 2 sílabas 2 algarismos
三十	30	son shi 2 palavras 2 símbolos	thirty	trente	sufixo e prefixo 2 sílabas 2 algarismos
四十	40	si shi 2 palavras 2 símbolos	forty	quarante	sufixo e prefixo 3 sílabas 2 algarismos
五十	50	wu shi 2 palavras 2 símbolos	fifty	cinquante	sufixo e prefixo 3 sílabas 2 algarismos

QUADRO 2 - COMPARAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DO N^o COM UTILIZAÇÃO DO NUMERAL ARÁBICO E DA PALAVRA

Transportando a análise de Power e Longuet-Higgins (1978) para a organização dos termos que designam a numerosidade de uma coleção no sistema

chinês, verifica-se que os termos usados ora assumem função de adição, ora de multiplicação e ora representam o próprio número e isso acontece sempre, sendo uma regra única de formação dos termos. Portanto, a regra de formação das palavras números do sistema chinês vai exigir somente a formação de termos de 1 a 10 que assumem as três funções acima especificadas. Isso acontece para os números até 99. Esses termos oscilam à esquerda e à direita do 10, que é a base do sistema de numeração. Se, um dos termos é colocado à esquerda do 10 ele assume a função de multiplicação, como por exemplo, *er shi* que significa 20, isto é 2×10 . Se colocado à direita, ele assume a função de adição, como por exemplo, *shi er* que significa 12, isto é $10 + 2$. A regra de formação para as palavras segue a forma de organização dos números arábicos, só que a palavra na horizontal é lida da esquerda para a direita e a escrita arábica, na vertical, é lida de cima para baixo. Assim se explica a maior transparência e regularidade dos sistemas asiáticos explicando o menor grau de dificuldade de aquisição deste sistema pelas crianças, a associação com os números arábicos e a compreensão da estrutura do SND, conforme resultados de pesquisas.

Essas regras de formação não estão explicitadas para as palavras que designam os números de 11 a 19 e na formação das dezenas na nossa língua, da mesma forma que estão na organização das palavras-números dos sistemas de origem asiática. A palavra doze, por exemplo, dissílaba, não deixa explicitado que as duas sílabas correspondem às dezenas e unidades do número 12: “do” para 2 e “ze” para 10. A adição de sílabas breves e as mudanças nas sílabas obscurecem o sentido quantitativo e dificultam a identificação da estrutura do SND nas palavras-números e na ligação com os números arábicos.

A presente análise acha-se centrada na organização dos sistemas de palavras-números até 100 devido às diferenças existentes entre sistemas de origem européia e de origem asiática, principalmente no que diz respeito às irregularidades e regularidades. Para além de 100 os diversos sistemas são nomeados de maneira regular, conforme Fuson e Kwon (1991).

2.1.1 Estruturação da língua e do signo para representar e significar o número

Pode-se, também, tentar compreender a estrutura do SND no campo da história, enquanto conhecimento construído a partir de significados e sentidos e do modo de se comunicar simbolicamente as quantidades.

Deve-se começar referindo-se ao sentido dado ao número pelo homem e às necessidades sociais que, o levou a ultrapassar seu senso numérico natural e a necessidade de contagem ou outros procedimentos para obtenção da medida de um conjunto.

No princípio, segundo Ifrah (1989), o número era sentido, o que levava os homens a criarem, primeiramente, um nome de número para a unidade e outro para a dualidade. As demais quantidades eram difíceis de serem concebidas tanto quanto para nós é difícil de conceber uma quantidade como dois trilhões de bilhões. Segundo o autor “há verdade, o número não é concebido [...] sob o ângulo da abstração. Ele é “sentido”, de modo um tanto qualitativo, um pouco como percebemos um cheiro, uma cor, um ruído [...] O número se reduz [...] a uma noção global bastante confusa – a “pluralidade material” – e assume o aspecto de uma realidade concreta indissociável da natureza dos seres e dos objetos em questão” (p. 16). Esta é a marca do sentido do número atribuído pelo homem uma primeira distinção entre o singular, o dual e o plural. Nessa primeira distinção a pluralidade é indicada pela repetição em desenho de três objetos ou de três traços embaixo de um objeto. Assim, para se referir às árvores de uma floresta eram desenhadas três árvores ou então uma árvore e três traços embaixo dela⁸. Este procedimento é uma manifestação de abstração.

A ultrapassagem do senso numérico passa a exigir procedimentos mais abstratos que permitam, aos poucos, cada vez mais e com mais precisão, avaliar a medida de um conjunto. Esta primeira ultrapassagem constitui na associação de objetos a pontos, traços ou outros desenhos. Deste modo, as coleções passam a ser representadas por estes rabiscos e isto vai tornar possível, mais tarde, a abstração de que um grupo de cinco homens, cinco carneiros ou cinco canoas apresentam a mesma

⁸ Este tipo de inscrição pictórica é atribuída aos egípcios, de acordo com Ifrah (1989).

característica comum que é precisamente ser cinco. Os registros de representações adquirem sentido e significado para quantificar (intensivamente ou extensivamente) e contribuem para as invenções e descobertas de sistemas de numeração, com uma estrutura específica.

A utilização de rabiscos para representar as coleções leva aos agrupamentos visto que a um golpe de vista não é possível contabilizar um conjunto com mais de cinco elementos⁹. Será importante, porém, esclarecer que a utilização de rabiscos, entalhes, pedras ou outros objetos para a obtenção de uma quantificação não vai exigir num primeiro momento, uma abstração maior visto que os objetos são considerados como unidades idênticas e os recursos criados servem para serem utilizados num procedimento aritmético que é a correspondência biunívoca.

Esse mesmo procedimento é utilizado quando a associação às unidades de um conjunto é feita com partes do corpo. Se não houver uma abstração maior não será possível associar uma determinada quantidade a uma parte do corpo. Será necessário percorrer todas as anteriores até se atingir uma quantidade desejada. Para esclarecer esse raciocínio cita-se como exemplo, a utilização dos 5 dedos da mão direita para indicar uma quantidade de 5 unidades. Para se referir a 5 objetos não basta levantar o polegar mas sim percorrer um a um os cinco dedos até se atingir o polegar, que estará indicando 5 unidades. Ver-se-á mais adiante, que segundo resultados de pesquisas, os dedos são utilizados num primeiro momento sem o sentido cardinal, obrigando as crianças a levantarem um a um os dedos para a obtenção de uma determinada quantidade inferior a dez unidades. Só mais tardiamente é que os dedos adquirem um sentido cardinal, o que possibilita um procedimento de adição de contar na seqüência.

Essas considerações são importantes, pois permitem evidenciar de que forma

⁹ Segundo Fayol (1996), o termo “subitizing designa a enumeração rápida, exata e segura da numerosidade de uma coleção apresentada durante um período muito breve. Trata-se da apercepção global de uma quantidade sem recorrer à contagem.” (p. 44) [...] De acordo com o autor “O subitizing é, freqüentemente considerado como um mecanismo fisiológico automático, seria, portanto, uma capacidade adquirida e capaz de ser desenvolvida, permitindo um tratamento rápido de quantidades numéricas de baixas dimensões. Em consequência permitira enumerar mais rapidamente coleções relativamente mais importantes pela aplicação recursiva da contagem de blocos de dois a três elementos. [...] a partir daí ele se torna um meio colocado a serviço da enumeração dos conjuntos.” (p.48)

conjuntos podem ser quantificados, sem, necessariamente haver contagem, bastando a utilização do procedimento da correspondência biunívoca. Mas convém destacar que essa quantificação é intensiva o que significa, segundo Piaget (1981), estabelecer se um conjunto tem “mais” que o outro e não “quanto a mais”.

Mas outros sentidos foram sendo dados ao número a partir de observações empíricas advindas de necessidades. É o caso, por exemplo, do procedimento utilizado por uma aldeia para precisar a data de comemoração de uma cerimônia religiosa que acaba por conceber a ordem que significa a relação de sucessão. Esse procedimento significa considerar o nascimento de várias luas tantas vezes desde o dedo mindinho até o cotovelo do mesmo lado (que significará 7 luas, os 5 dedos da mão, o pulso e o cotovelo)  e após o nascimento da última lua, de vários sóis tantas vezes desde o dedo mínimo da mão direita até a boca (que significará 12 sóis, os 5 dedos, o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha, o olho, o nariz e a boca). A comemoração dar-se-á no 13^o dia da 8^a lua.

Pode-se constatar que esse procedimento significa um outro sentido atribuído ao número, o da ordem que serve para a denominação dos elementos de um conjunto. Assim como a correspondência serve para quantificar, a ordem serve para contar, oralmente, sem enumeração. Pode-se associar palavras ao 1^o, 2^o, 3^o, elemento de um conjunto e recitá-las sempre na mesma ordem. As representações semióticas começam a ser utilizadas para a atribuição de um dos sentidos e significação de um número. Como exemplo, cita-se um modo de contar de uma criança, citada por Ifrah (1989) que enumerava os seres e as coisas anunciando os nomes André, Jacques, Paul, Alan, Georges, François, Gerard, Robert que ocupavam o 1^o leito, 2^o leito, 3^o leito e assim por diante num dormitório.

Percebe-se, então, que para o estabelecimento da relação de sucessão também se pode recorrer a representações semióticas e estas acabam se tornando numéricas e abstratas. Estas representações tendem a se deslocar de seus contextos para se tornar aplicáveis a seres, objetos ou elementos de qualquer natureza.

O corpo humano constituiu, para nossos ancestrais, uma fonte de referência

para a relação de sucessão, levando-os a tomar consciência da noção de ordem e a adquirir a capacidade de contar, abrindo caminho para a compreensão de números abstratos.

Este sentido e significação dos números, tanto no que se refere aos procedimentos de equiparação como à relação de sucessão, passa, cada vez mais, a necessitar de representações semióticas que tornarão possível a comunicação da quantificação.

Os registros de representação semiótica adquirem uma importância capital na atividade de contagem que permitirá uma quantificação extensiva¹⁰. Segundo Ifrah (1989),

Contar os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo (uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico, por exemplo) correspondente a um número tirado da “seqüência natural dos números inteiros” começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos nesta coleção assim transformada em seqüência, cada um dos símbolos será, conseqüentemente, o número de ordem dos elementos ao qual foi atribuído e “o número de integrantes deste conjunto” será número de ordem do último de seus elementos. (p.44)

A contagem atribui ao número um novo sentido e significação, pois, “a pluralidade concreta se transforma em quantidade absoluta” (IFRAH, 1989, p. 45). É este sentido e significação que permite a quantificação de conjuntos muito grandes e leva à necessidade de sistemas de numeração visto que nomear cada número individualmente (uma lexicalização direta) torna-se muito dispendioso e de alto custo para a memória.

Os dois aspectos da noção de número, cardinalidade (baseado no princípio de equiparação) e ordinalidade (que exige o processo de agrupamento e sucessão) vai contar com as mãos, pois estas permitem evidenciar esses aspectos do número. Elas se tornam instrumento valioso para a contagem e para o cálculo e permitem a passagem insensível do número cardinal ao número ordinal. Tanto para mostrar uma coleção

¹⁰ Segundo Piaget (1975), a quantificação extensiva reserva-se à capacidade de estabelecer quantos a mais ou a menos e, nesse caso é necessária a enumeração para as quantidades discretas e a unidade de medida para as quantidades contínuas.

com n elementos ou para contá-la, basta levantar sucessivamente n dedos e este procedimento representa um modelo cardinal e serve como sistema ordinal (1º dedo, 2º dedo, ... enésimo dedo).

A partir da abstração do número, isto é, da apreensão dos aspectos cardinal e ordinal, há necessidade das representações semióticas para assimilar, guardar, diferenciar ou combinar números inteiros e para representar números maiores. Esta designação, tanto oral como escrita, deveria envolver um mínimo de símbolos para não exigir por demais da memória e se tornar mais simplificado. E foram essas as diversas formas de representação utilizadas que estão na base do SND hoje por nós utilizado.

Tais formas de representação exigiram, num primeiro momento, os agrupamentos que variaram em torno de 5, 10, 12 ou 20 ou combinação de dois deles. Para outras medidas, como por exemplo, em situações de comércio, a troca passa a exigir outro tipo de procedimento que é a unidade de medida.

A abstração do número nos seus aspectos ordinal e cardinal associada a procedimentos de contagem e medida que exigiram os agrupamentos e trocas, permitiu que o homem aprendesse a estimar, avaliar e medir grandezas e a conceber números maiores. Com o advento da escrita, a humanidade experimentou diversas soluções para o problema da representação e manipulação dos números antes de se deter naquela que seria a mais perfeita e mais eficaz possível. Os objetos que a princípio eram utilizados para a representação de agrupamentos e, conseqüentemente, das trocas foram substituídos por símbolos escritos.

Estes foram, a princípio, representações gráficas do conteúdo e se referiam a unidades singulares, agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos. Segundo Ifrah (1989) estas marcas são verdadeiros signos numéricos, pois cada uma delas é um símbolo gráfico que representa um número. Elas já constituem um verdadeiro sistema de numeração escrita: acabam de nascer os mais antigos algarismos da história” (p. 140).

Mesmo configurando unidades singulares, agrupamentos e, agrupamentos de agrupamentos, os desenhos,

não passam de “imagens-signos”, tendo por função significar o que representam visualmente, não se tratando ainda de uma escrita no sentido estrito da palavra. Na etapa seguinte estes signos passam a ter um valor pictórico mais amplo, não se limitando mais a sua simples significação visual direta. Eles podem também representar ações ou idéias vizinhas - é o que se chama de ideografia (IFRAH, 1989, p. 147).

Na análise da evolução do sentido atribuído ao número pôde-se compreender o papel e a importância das representações para o avanço do senso numérico a ponto de afirmar que é necessário compreender a noção de representação e sua natureza, principalmente no que se refere ao desenvolvimento dos conhecimentos científicos matemáticos que requerem registros de representação.

Peirce¹¹ formulou uma definição de representação como sendo “qualquer coisa que se tem (por qualquer um), no lugar de qualquer coisa por outro”. Esta definição permite de imediato distinguir a representação e o objeto ao mesmo tempo em que levanta duas questões importantes: qual é a relação entre o objeto e a representação e como não confundir o objeto com sua representação.

Segundo Peirce¹² é possível distinguir três tipos de relações entre o objeto e sua representação: relação de semelhança (os ícones, evocação do objeto ausente), exclusão de toda semelhança (os símbolos, sugestão por analogia) e relação de causalidade (os índices, definição axiomática). Elas dependem dos sistemas que produzem as representações e permitem compreender o funcionamento cognitivo do pensamento humano e as condições de uma aquisição individual dos conhecimentos. Isso significa que: representações de um mesmo objeto não têm o mesmo conteúdo; cada conteúdo vai ser comandado pelo sistema no qual foi produzido; cada representação não apresentará as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Esta questão é fundamental se forem considerados dois tipos de registros de representação do número: a representação pela palavra e sua representação arábica.

As representações contribuíram para a apreensão dos dois aspectos do número: o cardinal e o ordinal, ajudaram na contagem pela atribuição de nomes

¹¹ Peirce é citado na obra de Duval (1999) a qual não apresenta a referência bibliográfica.

¹² Idem.

específicos aos números e aos agrupamentos culminando em tipos de representações que geraram sistemas de numeração.

No caso da matemática, a relação de causalidade que se estabelece entre o objeto e a representação pode ser confundida com o próprio objeto matemático. Foi somente com a utilização de registros de representação que o senso numérico avançou e o número pôde ser concebido como uma abstração sem existência física. Dois risquinhos podem se referir a dois barcos, dois pássaros ou duas frutas. É por esta razão que se enfrenta a dificuldade de não confundir o objeto matemático com sua representação, visto que é ela que permite o acesso ao objeto. E é essa dificuldade que gera a incapacidade de converter a representação de um objeto em uma outra representação do mesmo objeto para a maioria dos alunos. Depara-se, segundo Duval (1999), com o fenômeno da conversão, que se torna um fenômeno técnico e cognitivo fundamental na matemática.

A diferença entre registro e código é fundamental para que no momento da aprendizagem não se pense que a conversão é uma transcodificação. O código não cumpre as funções de tratamento e objetivação (exemplo: código Morse).

Pode-se afirmar que as diversas tentativas de criação de sistemas de representação de quantidades centraram-se em torno de símbolos apropriados para as unidades consideradas unidades singulares e idênticas e símbolos apropriados para representar os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos destas unidades singulares idênticas.

A representação de quantidades constituiu e ainda constitui “às necessidades e preocupações de grupos sociais que precisavam recensear seus membros, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros, ao procurar datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias utilizando os meios disponíveis, às vezes empíricos, [...]” (IFRAH, 1989, p. 10). Segundo o autor, a história dos algarismos não é uma história abstrata e linear e nem uma sucessão impecável de conceitos encadeados.

Os diversos sistemas foram inventados dada à capacidade humana de ultrapassar seu senso numérico. As primeiras técnicas de contagem ou de controle e

registro de quantidades não compreenderam registros, mas sim a correspondência um a um. Este procedimento permitia estabelecer uma comparação entre dois conjuntos (quantificação intensiva)¹³ e também estabelecer quantidades sem a necessidade da contagem. Assim, pode-se pedir para alguém comprar 5 tomates sem necessariamente exigir o conhecimento de nomes de números ou procedimentos de contagem. A correspondência um a um permitirá que a pessoa adquira 1 tomate para cada ficha que se encontre em sua mão que deverá ser um total de 5.

Pode-se assim compreender historicamente como se desenvolveu o uso de representações do número.

Essa técnica, certamente libera o homem do número abstrato. Outras técnicas também podem ser evocadas para indicar que é possível quantificar sem necessariamente contar. É o caso, por exemplo, da atribuição de nomes de partes do corpo para determinadas quantidades. Apesar de útil e prático e de aumentar as possibilidades de representação de quantidades maiores, ainda se constitui em técnica ou procedimento limitado que acaba por exigir muito da memória.

Entretanto, o procedimento da correspondência biunívoca tornou possível, dentre outras, uma técnica de contabilidade: o entalhe. É a origem de uma abstração, isto é, as marcas independem dos objetos presentes e são capazes de exprimir uma característica comum a duas coleções. O entalhe passa a ser, então, um procedimento que pode se tornar limitado, dependendo da quantidade envolvida. Abre-se o caminho para outras formas de representação, nas quais os agrupamentos constituem uma primeira síntese.

Da mesma forma, a atribuição de partes do corpo para a quantificação constituiu uma técnica de contagem e, com o passar do tempo, acaba por tornar-se numérica e abstrata. As referências correspondentes passam a suscitar no espírito a idéia de uma certa série dos números. É desta forma que a pluralidade concreta se

¹³ Segundo Piaget (1975) a quantificação intensiva permitirá afirmar se um conjunto tem mais elementos que outro sem necessariamente determinar quantos a mais que seria uma quantificação extensiva.

transforma em quantidade absoluta. Qualquer conjunto pode ser quantificado, desde que cada elemento, se tomado uma única vez, independente da ordem ou da posição em que se encontre no conjunto, possa ser nomeado, atendendo a exigência de sempre repetir a os nomes numa mesma ordem. O último nome definirá quantidade.

Os dois procedimentos, a correspondência biunívoca e a ordenação que serve para a contagem, acabam por definir os dois aspectos do número: o cardinal e o ordinal. Eles passam a exigir, com o passar do tempo e de acordo com as necessidades do homem, técnicas específicas para a atribuição da quantificação extensiva (tem tantos a mais que o outro) entre as quais os dedos são utilizados para a contagem. Parece ser esta a origem das bases dos sistemas de numeração quando outras sínteses tornaram-se necessárias¹⁴.

Essas sínteses levaram os homens a procurar formas de representar a idéia de quantificar, de modo a utilizar símbolos em número reduzido. Os agrupamentos tornam possível uma primeira síntese e economia (constituindo as bases dos sistemas de numeração que foram inventados) e a posição uma segunda e definitiva síntese. Ao destacar as especificidades de alguns sistemas de numeração, criados e inventados, será possível evidenciar como a estrutura específica de cada um se reflete na dificuldade ou facilidade de realizar operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) com utilização de algoritmos, ábacos, dedos, fichas, etc.

O sistema egípcio, por exemplo, só utilizou a base criando 9 símbolos diferentes para as 9 primeiras unidades, um símbolo para um grupo de 10, compondo-os entre si através de adições para representar números até 99, um novo símbolo para as centenas que se constituem agrupamentos de agrupamentos, dez grupos de dez, um

¹⁴ Na língua ali, da África Central, os números 5 e 10 são chamados de *moro* e *mbouna*; o sentido etimológico do primeiro é “a mão”, e o segundo é derivado de uma contração de *moro*, “cinco”, com *bouna*, que significa “dois” (logo: 10 = duas mãos). Na língua bugilai, da Nova Guiné, os nomes dos cinco primeiros números trazem também o mesmo vestígio digital: 1 é *tarangésa* (literalmente, “da mão esquerda, o dedo mindinho”), 2 é *méta kina* (“o dedo seguinte”), o 3 é chamado de *guigméta-kina* (“o dedo do meio”), o 4 de *topéa* (“indicador”) e o 5 de *manda* (que significa “polegar”) (IFRAH, 1989, p. 50)

novo símbolo para os milhares que constituem também agrupamentos de agrupamentos, dez grupos de 100, e assim sucessivamente. Essa síntese possibilita uma flexibilidade em termos de representação, mas dificulta quando se trata de quantidade de algarismos. Assim, por exemplo, posso representar cento e trinta e dois de diferentes maneiras:


 Não esgotando todas as possibilidades

Mas para representar a quantidade de novecentos e noventa e nove são necessários 27 símbolos:



Já o sistema inventado pelos babilônios constituiu um avanço em termos de síntese e economia de símbolos com a utilização de uma base sessenta e da posição. Somente dois símbolos foram utilizados: uma cunha em pé que representa uma unidade e uma cunha deitada que representa dez unidades. A primeira posição à direita é reservada para as unidades até 59. Os símbolos são compostos entre si através de adições e multiplicações. Assim, para o cento e trinta e dois temos:



$$2 \times 60 = 120$$

Nessa posição cada unidade, representada por uma cunha em pé, vale 60 unidades.



$$10 + 2 = 12$$

Nessa posição cada cunha deitada vale 10 unidades e as cunhas em pé valem 1 unidade cada uma

O grande problema que se apresentou aos babilônios foi a identificação da posição em que se encontravam os símbolos, o que gerou a necessidade de um símbolo

para a ausência ou o zero. Esta invenção demorou 900 anos e a mesma cunha em posição oblíqua passou a ser usada com tal fim. De qualquer forma o zero babilônico é considerado o mais antigo da história. (IFRAH, 1989, p. 243).

Outros sistemas inventados apresentavam diferentes dificuldades, como por exemplo, o sistema romano, que também era de base e não posicional, mas com regras específicas para a utilização dos símbolos criados para a representação de quantidades, como: não repetição do símbolo por mais de três vezes, a retirada ou o acréscimo do valor do símbolo se este fosse colocado à esquerda ou à direita de um símbolo de valor superior. Criou símbolos intermediários para múltiplos de 5, considerado como uma base auxiliar. Foram estabelecidas convenções para unidades de milhar (uma barra em cima de um símbolo ou um conjunto de símbolos designados para as unidades simples) e também para as centenas de milhar. O sistema também era regido pelo princípio da adição, isto é, a justaposição dos algarismos indicava a soma dos valores correspondentes aos símbolos (respeitando-se a ordem do símbolo em relação à superioridade). De acordo com essas regras e convenções, somente sete símbolos foram criados para a representação de quantidades: I (uma unidade), V (5 unidades), X (10 unidades), L (50 unidades), C (100 unidades), D (500 unidades) e M (mil unidades). A representação do 132 no sistema romano fica: CXXXII. Apesar do reduzido número de símbolos criados, esse sistema foi considerado complexo e ainda insuficiente, além de não tornar possível qualquer técnica operatória. Por essa razão, segundo Ifrah (1989), esse sistema foi considerado uma regressão em relação a todas as numerações da história.

Dentre outros, cabe ainda destacar o sistema maia, também posicional e de base, que apresenta a especificidade de combinar duas bases: vinte e múltiplos de 360 para os algarismos posicionados na terceira posição. Os símbolos criados eram pontos e traços (de 1 a 4 pontos para as quatro primeiras unidades e um traço horizontal para o cinco) que combinavam-se entre si por adições e multiplicações. A posição destes símbolos era feita na vertical de baixo para cima. A primeira posição indicava as unidades até 19, na segunda posição os múltiplos de 20 sem exceder 20 x 20. Na

terceira posição múltiplos de 360 e a partir do quarto novamente cada patamar passa a representar vinte vezes mais que o patamar inferior. Assim no primeiro patamar a multiplicação é por 20^0 , na segunda posição por 20, na terceira por 360, na quarta por $20 \times 360 = 7200$, na quinta por $20 \times 7200 = 14400$ e assim sucessivamente. No sistema maia o número 132 seria assim representado:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} \quad 6 \times 20 = 120$$

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \hline \hline \end{array} \quad 5 + 5 + 2 = 12$$

O sistema de numeração utilizado hoje é conhecido como indo-arábico, pois foi descoberto pelos hindus e divulgado pelos árabes. Esse sistema, a princípio, expressava os números por extenso utilizando nove nomes criados para expressar os nove primeiros números inteiros seguido de uma palavra utilizada para expressar uma dezena ou uma de suas potências (*dasa* para 10, *sata* para 100, *sahasra* para 1000, *ayuta* para 10000 entre outros)¹⁵. Esse procedimento esteve na base da estrutura do sistema de numeração de quantidades por algarismos, pois, com o decorrer do tempo, essas palavras foram suprimidas e a posição do algarismo no numeral indicava por qual potência de dez ele seria multiplicado. Como exemplo cita-se: 3425 seria expresso no começo por “cinco dois dasa quatro sata e três sahara” e posteriormente por “cinco. dois. quatro. três.” e foi desta forma que “ao operar tal simplificação, os sábios hindus tinham elaborado uma verdadeira numeração oral de posição, recebendo desse modo os nomes, em sânscrito, das nove unidades simples um valor variável dependente de sua posição na enunciação do número” (IFRAH, 1989, p. 269). Essa regra determinou de imediato o problema da ausência e exigiu a criação de uma palavra peculiar e dessa forma, esse obstáculo foi contornado com a criação da palavra

¹⁵ Informações retiradas de Ifrah, 1989, p. 268.

vazio. Assim o número 103 seria expresso “três. vazio. um.” A seguir os algarismos substituíram as palavras tornando possível os cálculos.

Porém, mesmo ao conceber o zero e aplicar o princípio de posição ainda restava um último avanço: aperfeiçoar o conceito eminentemente abstrato do zero e fazer dele um número como os outros. Isto significava enriquecer este conceito atribuindo-lhe a significação de vazio ou nada, isto é, enriquecendo-o pela aquisição do sentido que atribuímos na atualidade à “quantidade nula” ou “número zero”. Segundo Ifrah (1989) os matemáticos da Índia conseguiram preencher esta lacuna em menos de meio século.

A vulgarização e estabilização definitiva dos algarismos arábicos enfrentou a resistência por parte da igreja que assumira de fato o controle da ciência e da filosofia na época do Renascimento na Europa “exigindo que sua evolução se submetesse estritamente à fé absoluta em seus dogmas e que seu estudo se harmonizasse inteiramente com a teologia” (IFRAH, 1989, p. 315). Boatos ligando o cálculo à Satanás foram espalhados e uma reação das autoridades católicas diante dos métodos de cálculos indo-arábicos e dos algarismos foi concretizada. Para a igreja, uma democratização do cálculo ocasionaria a perda do monopólio em matéria de ensino e, como conseqüência, perda de poder.

Porém, este procedimento por parte das autoridades eclesiásticas não impediu o avanço e a expansão junto ao povo, mesmo às escondidas ou em rabiscos na areia, tornando-se superior aos métodos de cálculo nas tábuas ou por meio de fichas (ábacos).

Apesar de longa, essa história pode ainda não estar concluída. Pode ser que um dia algo mais brilhante surja. Mas no momento, essa síntese constitui umas das mais brilhantes invenções do homem e para ser compartilhada tem que ser compreendida. Nesse sentido todos os esforços que sejam depreendidos nessa direção merecem as devidas reflexões, os devidos cuidados, os necessários encaminhamentos, considerando as demais dimensões do ato educativo.

2.2 RESULTADOS DE PESQUISAS

2.2.1 As Dificuldades de Compreensão da Estrutura do SND-Dificuldades de Leitura

Segundo Fuson e Kwon (1991), tanto a dificuldade de aprendizagem de uma seqüência de números expressos por palavras como a natureza dos erros que se produzem, na sua recitação, dependem das características da formação dessas palavras. Os autores apontam que nessa formação, muitos sistemas europeus obscureceram a estrutura do SND pelo fato de omitirem certas palavras e trocarem certas consoantes por consoantes de sílabas breves, a fim de facilitar a pronúncia de certas palavras, servindo de suporte aos números de 11 a 19 e a 20, 30 ... 90. Esta omissão e troca fizeram a palavra, que representa o número, perder o sentido que tinha em sua origem, tornando difícil para uma criança ver que nela está subjacente a estrutura do SND que é composta de x dezenas e y unidades. Como exemplo os autores citam o emprego de "thir", em *thirteen* e em *thirty*, no lugar de *three* (três), e o emprego de "teen", de 13 a 19, e de "ty", de 20 a 90, no lugar de *ten* (dez). Seus estudos mostram que estas "trocas fonéticas e seu sentido quantitativo" (Fuson e Kwon, 1991, p. 355) não são compreendidas, levando os estudantes a repetir a seqüência numérica sem associar as sílabas "teen" e "ty" com dez. Essas trocas estão também presentes em sistemas de outras línguas.

Fuson e Kwon (1991) apresentam ainda uma análise¹⁶ que compreende o sentido quantitativo das palavras utilizadas na seqüência. Essa análise compreende a organização de nomes para as palavras que designam os números. O sistema inglês nomeia os números até doze (*one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten, eleven, twelve*), altera as sílabas que compõem as palavras de treze e quinze (*thirteen e*

¹⁶ Nesta análise os autores apresentam a forma de organização das palavras na base dez, no sistema alemão, Kilenge e Yaruba que possuem especificidades bastante distintas dos sistemas tratados acima. Para maiores informações ver Fuson, 1991, p. 357.

fifteen). Compõe as palavras de 16 a 19 e 14 (com as sílabas das palavras já criadas para 6, 7, 8, 9, 4 e com a sílaba alterada para dez (teen), ***sixteen***, ***seventeen***, ***eighteen***, ***nineteen***, ***fourteen***). Compõe as palavras para as dezenas de 20 a 50 com a sílaba alterada para a dezena (“ty”) e com as sílabas alteradas para 2, 3, 4 e 5 (***twenty***, ***thirty***, ***forty***, ***fifty***) e as palavras de 60 a 90 com a composição de sílabas das palavras já criadas para 6, 7, 8 e 9 e com a sílaba alterada para a dezena (“ty”), (***sixty***, ***seventy***, ***eighty***, ***ninety***). Cria uma palavra para designar as centenas (*hundred*) compondo-a com as palavras já criadas para os números inferiores a cem como, por exemplo: 100 (*one hundred*), 200 (*two hundred*), 125 (*one hundred twenty five*). Cria uma palavra para designar as unidades de milhar (*tousand*) compondo-a com as demais palavras já criadas para os números inferiores a mil, como por exemplo, 4313 (*four thousand, three hundred and thirteen*).

O sistema francês nomeia os números até dez (*un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix*), altera as sílabas que compõem as palavras de 11 a 16 (***onze***, ***douze***, ***treize***, ***quatorze***, ***quinze***, ***seize***). “Ze” é uma deformação do “dix”. Compõe as palavras para os números 17 a 19 com sílabas das palavras já criadas para 7, 8, 9 e 10 (***dixsept***, ***dixhuit***, ***dixneuf***). Cria palavras para 20 e 30 (***vingt***, ***trente***). Compõe as palavras para o número 40, 50 e 60 (***quarante***, ***cinquante***, ***soixante***) com as sílabas alteradas das palavras já criadas para 4, 5, 6 e 10. Para o número 70 utiliza as palavras já criadas para 60 e 10 (***soixante dix***) e as combina através de uma adição. Para o número oitenta utiliza as palavras já criadas para 4 e 20 (***quatre vingt***), combinando-as através de uma multiplicação, e para o número 90 com as palavras já designadas para o 80 e o 10 (***quatre vingt dix***). Cria uma palavra para designar as centenas (*cent* ou *cen*) e a compõe com as demais palavras já designadas para os números inferiores a cem, como por exemplo, 196 (*cen quatre-vingt-seize*) ligando-as através de adições e multiplicações. Cria uma palavra para designar as unidades de milhar (*mille*) e a compõe com as demais palavras já designadas para os números inferiores a mil, como por exemplo, 3175 (*trois mille cen soixante-quinze*). A composição das palavras ou das sílabas envolve as operações de adição e multiplicação.

O sistema chinês cria palavras para os números de 1 a 10 (*yi, her, san, si, wu, liu, qi, ba, jiu, shi*) e a partir de onze até cem compõe as palavras com sílabas das palavras já criadas de 1 a 10 como, por exemplo, 12 (*shi her*), 20 (*her shi*), 21 (*her shi hi*), 85 (*ba shi wu*).

Fuson e Kwon (1991), concluem que,

Certas linguagens incluem, para um número particular, uma palavra que tem um sentido quantitativo – como “mão” para cinco ou “homem” para vinte. Tais sentidos podem ser ignorados na aprendizagem inicial da seqüência. Mas, assim que a seqüência é utilizada para fins cardinais, elas podem facilitar a ligação entre o sentido quantitativo e as palavras concernentes. Assim, a facilidade com a qual as palavras individuais e os padrões são religados a um sentido cardinal pode diferenciar segundo as línguas. Isto tem implicações importantes para a adição e subtração (p. 356).

A análise de Fuson e Kwon (1991) é muito importante tanto para entender os erros dos alunos ao escrever um número com utilização de algarismos, como por exemplo, 200305 para designar duzentos e trinta e cinco, como as dificuldades para fazê-los compreender o sentido quantitativo dos números escritos com algarismos e atribuir significação aos dígitos da representação, associando-os às unidades, dezenas, centenas [...] que eles representam. Esses erros e essas dificuldades devem-se ao fato da irregularidade da formação das palavras que representam os números, que não trazem em si as mesmas características comuns aos números escritos em algarismos e não explicitam as centenas, dezenas e unidades. A seqüência numérica é aprendida sem ligação com seu sentido cardinal que só é tomado por meio da contagem: o último número indica quantos têm. Sem o sentido cardinal dos algarismos que compõem o número, as quantidades representam uma composição de objetos singulares idênticos e não, x dezenas e y unidades.

Fayol (1996) mostra outras abordagens a respeito da aprendizagem da seqüência dos números, escritos em palavras e com a utilização de algarismos e a ligação entre as duas formas, que foram desenvolvidas, ora numa perspectiva lingüística, ora psicológica.

Na perspectiva lingüística, os estudos voltaram-se para a organização dos sistemas verbais e a forma como exprimem a numerosidade subjacente, revelando que

a quantidade a ser expressa deve ser objeto de uma decomposição em uma expressão aritmética, envolvendo adições ou produtos, ou ainda os dois combinados juntos. A figura 3 ilustra esse caráter operatório da escrita arábica e da palavra com a análise de alguns exemplos:

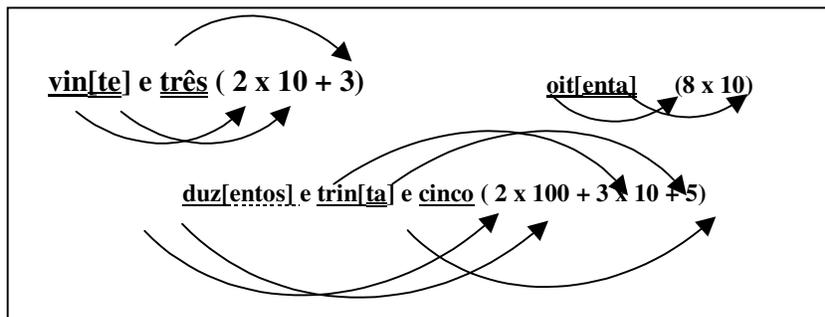


FIGURA 3 - CARÁTER OPERATÓRIO DA ESCRITA ARÁBICA E SUA RELAÇÃO COM O CARÁTER OPERATÓRIO DA PALAVRA

Isto porque a lexicalização direta (um nome para cada número) se tornaria limitada e dispendiosa enquanto que uma sintaxe elementar, conforme estudos de Power *et al.* (1978) permite elaborar as expressões verbais aceitáveis para uma numerosidade. Essa abordagem não leva em conta as formas de aquisição desses sistemas por sujeitos, que seria de responsabilidade de uma abordagem psicológica.

O autor aponta os defensores de uma outra concepção que consiste na abordagem do problema através de estudos de caso e que considera a organização cognitiva comportando três módulos de base:

[...] um sistema de compreensão (C), um sistema de produção (P), e um sistema de cálculo (CA). Os dois primeiros subdivididos em dois subsistemas: um relativo aos números arábicos, o outro às denominações verbais ou orais (fonemas) ou escritas (grafemas). O terceiro comporta três componentes (um que diz respeito ao conhecimento dos símbolos das operações, o segundo que concerne aos procedimentos de cálculo e o último relativo aos fatos numéricos estocados na memória a longo prazo (FAYOL, 1996, p. 24-25).

Essa dissociação entre os diversos aspectos é importante para analisar os erros dos alunos, pois pode haver compreensão e não haver produção. Um sujeito pode enumerar corretamente a cadeia verbal de forma oral e errar na escrita (dissociação oral/escrita), ou pode compreender o valor relativo e absoluto dos números e ser capaz de efetuar as operações, mas manifestar dificuldades sobre o acesso aos fatos

numéricos na memória.

Outra contribuição para a análise das condutas numéricas das crianças é, segundo Fayol (1996), oriunda dos resultados de pesquisas¹⁷ com pacientes com problemas cerebrais numa perspectiva lingüística. Dois tipos de problemas foram categorizados: a substituição, em tarefas de cópia ou de transcodificações, de números ou partes de números por outros (como por exemplo, doze para 20, dez mil e noventa para 10019; a conservação dos itens lexicais, mas sem respeito à posição (como por exemplo, 700040 para 7040).

Fayol (1996) apresenta os resultados dos estudos de Deloche e Seron¹⁸ em relação aos erros cometidos por diversos pacientes também com distúrbios cerebrais em tarefas de transcodificação (passagem do código alfabético para o verbal e vice versa) interpretando-os no quadro de um modelo cognitivo de transcodificação. Tais erros foram classificados como sintáticos por envolverem a posição dos números (como, por exemplo, 1000 9 100 para mil e novecentos, ou 102 1000 para cento e dois mil) e como lexicais que consistem em confusões de elementos que vêm da mesma pilha (os autores consideram três pilhas: as unidades de um a nove, os números de

¹⁷ Os resultados de pesquisas apresentados em Fayol (1996) correspondem às seguintes referências: MC CLOSKEY, M.; SOKOL, S. M. e GOODMAN, R. A. Cognitive processes in verbal-number production: inferences from the performance of brain damaged subjects. *Journal o experimental psychology*. General, v. 115, n. 4, p. 307-330, 1986. MC CLOSKEY, M., CARAMAZZA, A.; BASILI, A. Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*. v. 4, n. 171, p. 196, 1985.

¹⁸ Os trabalhos de Seron. e Deloche citados em Fayol possuem as seguintes referências DELOCHE, G.; SERON, X. From one to 1: na analysis of a 3: A differential analys of a transcoding process by means of neuropsychological data. *Cognition*, 12, 119-149, 1982;

_____. Form three to 3: A differential analysis of skills in transcoding quantitis between patients with Broca's and Wernicke's aphasia. *Brain*. v. 105, p. 719-733, 1982.

_____. Semantic errors reconsidered in the procedural light of stack concepts. *Brain and Language*, v. 21, p. 59-71, 1985.

_____. Syntatic knowledge in a case of agrammatism. Evidence from transcoding romn and Arabic numerals. *Brain and Language*, v. 25, p. 234-245.

SERON, X.; DELOCHE, G. From 4 to four: a supplement to 'From trhee to 3'. *Brain*, v. 106, p. 735-744, 1983.

_____. From 2 to two: na analysis of a transcoding process by aphasics and children: A maner of lexical processes. In: DELOCHE, G.; SERON, X. (Eds.), *Mathematical disabilines*. Hillsdale: Erlbaum, 1984.

onze a quinze e as dezenas) como, por exemplo, a troca de 12 por 11, ou 30 por 60, entre outros.

A importância desses resultados diz respeito à evidência dos aspectos lingüísticos no emprego da numeração e a distinção léxico/sintaxe, a ser levada em consideração na análise das condutas numéricas por sujeitos sem problemas cerebrais, visto que esta modelização leva em conta tanto o processo como os aspectos lingüísticos.

A importância da análise da aprendizagem da estrutura do SND para expressar a medida de um conjunto, seja da forma escrita, verbal ou com utilização de dígitos, deve-se ao fato de que uma aprendizagem decorada de uma corrente numérica verbal, além de exigir um demasiado esforço, seria limitada para a enumeração de uma coleção qualquer de cardinal desconhecido. Segundo Fayol (1996),

[...] o armazenamento dos princípios de construção lingüística da cadeia numérica, às vezes, alivia a tarefa e autoriza a etiquetagem verbal de todo o conjunto numérico, seja qual for o seu tamanho e a frequência de sua ocorrência. Portanto, para a criança, o problema está em descobrir estas regras – em suma, do mesmo tipo daquelas que regem o conjunto dos fatos da linguagem – e, para a pesquisadora ou professor, em colocar em evidência como e quando elas são isoladas e utilizadas (p. 33).

De acordo com Fayol (1996), muitos estudos e pesquisas foram desenvolvidos sobre a aprendizagem da cadeia numérica verbal, mostrando que existem etapas pelas quais as crianças passam para ir da enumeração decorada para a associação dos números com a cardinalidade da coleção. Estes estudos mostram, também, que existem etapas pelas quais as crianças passam para fazer o registro da numerosidade das coleções.

Em relação à cadeia numérica verbal, existe um primeiro momento de recitação de cor sem que os números possuam uma individualidade, encontrando-se inseridos na seqüência. Depois, os termos numéricos passam a ser compreendidos com uma certa significação cardinal e ordinal, permitindo alguns procedimentos de adição (contar tudo e contar em seqüência). Começa a se manifestar a capacidade de contar até n , passando para a capacidade de contar a partir de n . A cadeia terminal se

completa quando os próprios números que a constituem, podem ser tratados como entidades distintas. Duas novas capacidades se manifestam: contar n a partir de x e contar de x a y .

Os aspectos acima apontados dizem respeito à abordagem da cadeia numérica e ao uso que o sujeito passa a fazer dela. Existem, depois, as etapas para atribuição de significação da organização e das regras de formação das expressões aritméticas verbais e escritas baseadas na estrutura do SND.

Fuson e Kwon (1991) abordam o sentido cardinal das palavras-números. Os autores apontam que em certos sistemas, esse sentido se impõe para certos números¹⁹, pelo fato de que certos sistemas não oferecem uma ajuda para o sentido cardinal da quantidade representada. Os autores conduzem uma investigação na qual buscam identificar de que forma o sentido cardinal é atribuído aos números expressos em palavras, apontando a forma através da qual as crianças fazem, pela primeira vez, a conexão entre o sentido da contagem e o sentido cardinal das palavras que expressam os números. A investigação aponta que, em um primeiro momento, a seqüência numérica é repetida sem sentido cardinal. Somente após a identificação desse sentido é que as crianças são capazes de realizar adições ou subtrações com números de um algarismo. Esse sentido cardinal pode demorar mais, segundo o sistema de palavras que expressam os números. Para o sentido cardinal dos números até 10 os autores apresentam itinerários diferenciados, identificados em culturas diferentes. Um dos itinerários compreende as próprias palavras correspondendo aos cardinais; um segundo itinerário compreende a utilização dos dedos como nomes de contagem, atribuindo aos números um sentido cardinal; um terceiro itinerário corresponde aos dedos cardinalizados que são utilizados para formar os números de 1 a 10 e reagrupados para formar os números de 11 a 19. Nesse itinerário “os dedos ajudam a construir métodos de adição baseados sobre a estruturação dos números por dezenas” (FUSON e KWON,

¹⁹ Fuson e Kwon (1991) comentam sobre o sistema Kilenge no qual as palavras mão e homem significam 5 e 20, respectivamente. Estas palavras têm significação quantitativa.

1991, p. 367).

Esses itinerários identificados são importantes no sentido de permitirem compreender as condutas adotadas pelas crianças para trabalhar com quantidades numéricas (em situações problemas ou realização de operações com algoritmos), a sua compreensão da estrutura do SND, e, a identificação dessa estrutura na palavra que designa o número e no número expresso por algarismos (e também a ligação entre as duas formas de expressar o número que representa a quantidade). São importantes, também, no sentido de que possibilitam identificar se os dígitos da representação são interpretados como unidades isoladas ou como agrupamentos, de acordo com a posição que ocupam na representação do número através de algarismos.

Kamii (1995) investigou as compreensões concretas das crianças, entrevistando 32 alunos de duas classes de segunda série e 40 de duas classes de terceira do Ensino Fundamental, em duas escolas públicas num subúrbio de Birmingham, Alabama. Essas crianças manipulavam a escrita e leitura de números e também realizavam operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, com utilização de algoritmos. Kamii (1995) investigou a atribuição de significados por crianças aos dígitos da representação dos números 16 e 25. Apresentou a elas conjuntos de objetos, pediu para que contassem e escrevessem o numeral representativo para então relacionar as quantidades de objetos com os algarismos utilizados na representação. A maioria das crianças atribuem o sentido de um objeto para o 1 do dezesseis e de dois objetos para o 2 do 25. Os resultados apontaram para a fragilidade das compreensões e que os alunos, apesar de terem sido ensinados na escola, não haviam compreendido o valor posicional.

Os sujeitos gostam de contar, ler e escrever numerais e, geralmente, não encontram dificuldades em adquirir este tipo de conhecimento social. Podem chegar a números bastante grandes como 99 bastando aprender a ordem dos algarismos de 0 a 9. A partir de então encontram mecanismos para assimilar que o 1 seguido do 1, 2, 3, 4, ...9 formam os algarismos de 11 a 19, o mesmo valendo para o 2 seguido de 1, 2, 3, ...9 que permite a formação dos algarismos de 21 a 29, e assim por diante. Porém,

entender que o 3 do 34 representa 30 é uma questão que não compreende somente um conhecimento social, mas também um conhecimento lógico matemático no caso do valor posicional.

Kamii (1990; 1992; 1995; 1996; 2002) conclui que o valor posicional é muito difícil de ser aprendido por sujeitos de 1^a, 2^a e até 3^a séries. As conclusões da autora são de que “[...] agrupar objetos e lidar com grandes quantidades é um problema, mas coordenar quantidades agrupadas e o sistema de numeração é outro problema totalmente diferente” (KAMII, 1990, p. 90). O entendimento de que o numeral de vários algarismos separados e o numeral como um todo representam o valor cardinal do todo, é diferente de entender a relação que as partes têm com o todo. Mesmo que na escola os sujeitos sejam orientados para agrupar, representar e decodificar os algarismos da representação (unidades, dezenas, centenas), isto não é garantia que tenham compreendido a estrutura do sistema de numeração decimal posicional de origem indo-arábica. O manuseio de técnicas não garante a compreensão e provoca uma falsa ilusão de que este é o encaminhamento metodológico adequado para conduzir os sujeitos à compreensão do valor posicional.

A estratégia de contar todos compreende colocar objetos em relações e isto é feito mentalmente. Segundo Kamii (1990), “para adicionar dois números a criança tem de - mentalmente - fazer um todo [...], depois outro todo [...], depois colocar tudo mentalmente num todo novo e homogêneo no qual os todos anteriores desaparecem num sentido, mas continuam a existir no outro” (p. 104).

Teixeira (1996) replicou a prova de Kamii e encontrou resultados idênticos, apesar de interpretação diferenciada. Kamii interpreta os resultados com base na capacidade do sujeito de estabelecer relações entre parte e todo (interpretação piagetiana) e Teixeira (1996) os interpreta à luz de uma teoria de representações (conceituação e representação). De qualquer forma ambos os resultados revelam que o 1 e o 6 não tem significação quantitativa em torno de seu sentido, dez e seis (o mesmo valendo para o 25 e para outros números).

A experimentação foi feita com 39 crianças (que já haviam recebido ensino

sobre valor posicional) de um curso preparatório da região parisiense. Suas conclusões, após análise das respostas em termos de fazer e saber-fazer, ultrapassam as conclusões de Kamii ao colocar o problema em termos de inclusão, de relação parte todo, consideradas insuficientes. Para a autora, o problema da dificuldade de compreensão do sistema de numeração está situado entre a conceituação e a representação.

Teixeira (1996), ao analisar as representações construídas pelas crianças de 3^a e 4^a séries, conclui que elas as constroem a partir de situações vivenciadas dentro ou fora da escola. Essas vivências não trazem significações idênticas e demoram a ser interconectadas entre si, constituindo sistemas independentes. O que Teixeira (1996) aponta é que a dificuldade para conectar essas diferentes significações deve-se ao fato de que a tradução de um modo de representação a outro não se dá automaticamente. Os resultados encontrados são interpretados pela teoria de representações de Gérard Vergnaud. Este autor afirma ser “índispensável distinguir entre o plano dos significantes (linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebra) e dos significados (invariantes, inferências, regras de ação, predições)” (VERGNAUD, 1985)²⁰. Esses planos vão colocar em jogo vários conhecimentos e invariantes operatórios que se encontram no nível do significado. Nessa perspectiva, a autora aponta que os erros cometidos pelas crianças devem ser “analisados levando-se em conta que o significante exprime somente uma parte do significado e que um significado não se exprime também facilmente e da mesma forma por todos os significantes” (VERGNAUD, 1985)²¹.

Algumas pesquisas apontam que as formas como os sistemas de numeração são utilizados por diversas culturas podem, ou não, interferir na memorização necessária quando estas se referem aos nomes de numerais específicos. É o caso, por

²⁰ A obra de Vergnaud (1985) referenciada em Teixeira (1996, p. 200), apresenta como referências: VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, v. 33, n. 314, p. 245-252, 1985.

²¹ Citado em Teixeira, 1996, p. 202.

exemplo, em nosso sistema de numeração, das palavras treze, quatorze, quinze, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, entre outras, quando se referem a números.

Mesmo que o número de palavras a serem memorizadas não seja tão elevado, no início da aprendizagem elas interferem significativamente se comparadas à aprendizagem desse mesmo sistema em outras culturas. É o caso, por exemplo, do desempenho de sujeitos que devem aprender sobre sistemas de numeração decimal e utilizam palavras na língua francesa ou chinesa: “quatre-vingt” tem muito mais significado que oitenta assim como “yi” que significa 1, “shi” que significa 10 e “shi yi” que significa 11, na língua chinesa.

Estes resultados vêm ao encontro das afirmações de Teixeira (1996), de que os agrupamentos de unidades que representam os agrupamentos efetuados se traduzem de diversas maneiras na língua.

Segundo Fayol (1996), as crianças em geral não efetuam uma estruturação do sistema verbal numérico em torno da base 10. Na língua francesa o nome “seize” (16) não pode ser elaborado por uma combinatória lingüística, e sua decomposição só é possível de uma maneira retrospectiva, isto é, assim que a organização das dezenas (e da escrita) tenha sido compreendida. Estes estudos revelam que o problema da aquisição da numeração escrita deve ser levantado, pois o léxico da numeração tem uma forma de organização diferente da representação numérica e muda de acordo com a língua, interferindo na compreensão da estrutura do sistema de numeração.

Segundo Fayol (1996), dentre os procedimentos que permitem avaliar quantos elementos um conjunto comporta, a contagem aparece como procedimento base que permite avaliar, de maneira bem precisa, as coleções, independente do tamanho. Porém, segundo o autor, constatam-se numerosos erros dos sujeitos neste tipo de tarefa. O caráter tardio de resultados exitosos pode ser analisado no desempenho dos sujeitos e isto implica competências que segundo Gelman (1983)²², estão relacionadas aos princípios:

²² Citado em Fayol (1996) cuja referência completa é: GUELMAN, R. Les bébés et le calcul. *La recherche*, 14 (149), p. 1382-1389, 1983.

[...] da estrita correspondência termo a termo entre os objetos contados e os nomes dos números [...]; da ordem estável de acordo com a qual a ordem dos nomes dos números corresponde a uma seqüência fixa [...]; da cardinalidade em virtude do qual, quando da atividade de enumeração, o último número fornecido [...] corresponde ao cardinal da coleção; [...] de abstração que estipula a heterogeneidade da coleção avaliada; [...] de não pertinência da ordem, que corresponde ao fato de que o resultado da enumeração não se encontre modificado se desmembrarmos a seqüência a partir de uma das extremidades do conjunto ou de outro elemento qualquer (p. 56).

As dificuldades levantadas por Potter e Levy (1968)²³ podem existir, pois para o bom desempenho da tarefa, o sujeito necessita, antes de tudo, do conhecimento dos nomes na ordem correta, da indicação direta de cada elemento tomado um a um, até que todos tenham sido levados em conta exatamente uma vez, e da coordenação dessas duas habilidades.

A aprendizagem da estrutura do SND também compreende o papel das convenções e das invenções na construção do conhecimento. Isto ocorre principalmente porque a estrutura do SND é uma convenção, de natureza arbitrária, cuja aprendizagem exige tanto a transmissão de aspectos convencionais, que é antes de tudo social, como a construção pelo próprio sujeito das operações inerentes a esta estrutura. Como conhecimento social, os sujeitos lidam com a seqüência numérica e, de uma forma ou de outra, passam a atribuir significações às representações com as quais lidam, associando-as às quantidades. Essas significações estão relacionadas, por vezes, à estrutura do SND, que se torna explicitada.

É o que apontam os estudos de Brizuela (1998), revelando o papel das convenções e das invenções como inter-relacionados com o conhecimento e a sua complementaridade. Neste sentido, em se tratando do sistema de numeração, seriam uma convenção o quadro valor lugar e o próprio sistema de notação numérico.

Suas afirmações baseiam-se na análise dos protocolos de entrevistas clínicas prolongadas desenvolvidas com Ana (5 anos), nos quais a criança explicita a sua compreensão de certas convenções de escrita de números, isto é, os dígitos da representação de quantidades por meio de algarismos, de acordo com a posição que

²³ Citado em Fayol (1996) cuja referência completa é: POTTER, M. C.; LEVY, E. F. Spatial enumeration without counting. *Child Development*, n. 39, p. 265-272, 1968.

ocupam, ou seja, o valor relativo.

A autora analisa como estas convenções e as invenções interferem na construção do conhecimento desta criança. A criança teve oportunidade de lidar com moedas, dados e cartões com números impressos e responder a questões relacionadas ao sistema de numeração e aos aspectos notacionais de valor-lugar. A criança, num primeiro momento, mostrou como usou informações provenientes de seu meio ambiente para resolver certas situações problemáticas, como escrever o número 34 e identificar o número 100. Seu conhecimento prévio de números, advindo de uma transmissão social, foi integrado e transformado, indicando que a informação não foi copiada, mas, sim, assimilada e reconstruída. Outros números que não lhe eram ainda familiares foram apresentados e isto fez com que a criança lançasse mão de invenções para resolver os problemas. Ela, por desconhecer o valor posicional na escrita dos números e por identificar pelo som que os dígitos da representação não correspondem à mesma quantidade, inventa os “números maiúsculos”.

Assim, para escrever 33 ela pensa em dois três e argumenta que um deles é escrito em número maiúsculo (o mais da esquerda). Explica o mesmo para o número 31 como apontado na figura 4.

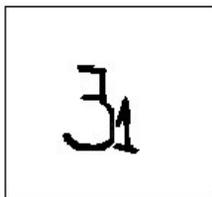


FIGURA 4 - ESCRITA DO NÚMERO 31 POR ANA COM NÚMEROS MAIÚSCULOS

FONTE: BRIZUELA, B. Invenções e convenções: uma história sobre números maiúsculos. In: Carraher, D.; Schlickeamann, A. (organizadores). **A compreensão de conceitos aritméticos: ensi e pesquisa.** São Paulo: Papirus, 1998. p. 44.

Assim procede com suas hipóteses para o 33, 36, 48, 46, entre outros. Ela argumenta sobre sua invenção dizendo “Trinta e três. Trinta é o número maiúsculo de

três. E aquele é o outro jeito para escrever o três (apontando para o 3 na casa das dezenas na figura 4).

Essa ferramenta por ela construída permitiu-lhe fazer uma leitura dos numerais convencionais, assim como escrevê-los e encontrar um padrão no modo como os números são escritos. Essa ferramenta não foi de imediato transportada para os números de 1 a 10 e nem de 11 a 20, mas, segundo Brizuela (1998), “quando ela detectar o problema e descobrir que a ferramenta que inventou não pode ajudá-la a encontrar os ‘números maiúsculos’ para todos os dígitos, ela provavelmente experimentará um conflito cognitivo que a levará a melhorar sua invenção e a compreender convenções” (p. 49).

A autora sustenta que muito pouco valor é dado ao que os aprendizes inventam no processo de construção do conhecimento. Seu estudo aponta a cooperação, colaboração e interação que existem entre as convenções e invenções, que elas são complementares e que as convenções são, antes de tudo, invenções, havendo entre elas uma relação de continuidade.

Segundo a autora, as invenções são importantes no desenvolvimento do conhecimento e as convenções acabam por desempenhar um papel importante nas invenções e são a elas subordinadas, assegurando seu desenvolvimento.

Segundo Brizuela (1998), “às invenções precisam ser analisadas no contexto da situação que está sendo assimilada e da problemática que está sendo enfrentada para poderem ser compreendidas por aqueles que não são seus criadores” (p. 46). Se não houver esta análise, a invenção da criança poderia ser interpretada como uma confusão entre letras e números e não como a criação de um instrumento que iria torná-la capaz de dominar e escrever dígitos de múltiplos números.

Os estudos de Sinclair *et al.* (1994), apontam que as atividades de escrever, ler e manipular números escritos, comportando numerosos algarismos, não podem repousar sobre a estrutura multiplicativa e recursiva de nosso sistema de numeração. Os autores investigam como as crianças interpretam e compreendem números escritos, sem passar por uma atividade de explicitação do valor de cada algarismo escrito e sem

exigir, da parte das crianças, alguma verbalização. Investigam sobre o que possa estar em torno de uma compreensão verdadeira, quais hipóteses, princípios ou regras as crianças constroem para fazer sentido desse material gráfico particular. Os resultados encontrados apontam que as respostas das crianças, ao comparar números de diferentes algarismos entre si, têm referência a argumentos do tipo: figural, sobre a quantidade de algarismos ao interior de dois números; que expressa uma apreensão dos números escritos na sua cardinalidade ou na sua ordinalidade; em que a criança efetua comparações das partes sem levar em conta a ordem ou a posição dos algarismos; em que criança compara partes levando em conta a posição ou a ordem dos algarismos.

Segundo as autoras,

Na evolução observada, parece que a apreensão dos números escritos repousa em grande parte para as crianças de 5 – 6 anos, sobre a utilização do esquema da correspondência termo a termo, esquema de natureza lógico-matemática, expressa de argumentos portando sobre a quantidade de algarismos. Progressivamente, este tipo de argumento não é mais utilizado para explicar as respostas de igualdade, desde os 6 7 anos, dois números comportam o mesmo número de algarismos mais compostos de algarismos diferentes não podendo significar a mesma coisa. (p. 247).

As autoras consideram que a evolução da apreensão escrita não é seguida do desenvolvimento aritmético ou mesmo matemático. As crianças dispõem de um repertório variado de condutas frente a um material gráfico particular e os diversos procedimentos que elas utilizam, dependem do tipo de número apresentado. Elas não constroem intuições da significação dos algarismos nos números escritos, representando pequenos números, para depois estender esta compreensão progressivamente a números maiores. As estratégias empregadas pelas crianças repousam sobre conhecimentos de transcodificação oral-escrita dos conhecimentos concernentes à seqüência numérica, assim como, sobre hipóteses específicas, como por exemplo, a hipótese aditiva, inferidas ou construídas por elas.

Os estudos de Sinclair *et al.* (1990), voltam-se para a representação escrita e visam ao esclarecimento da construção progressiva do nosso sistema de numeração. Os autores acreditam que a compreensão da estrutura do sistema de numeração influencia na construção de conceitos matemáticos. O objeto de estudo desta

investigação foi as notações das crianças sobre quantificações. Seis grandes categorias de notações foram distinguidas e não são mutuamente exclusivas:

1. Notação global da quantidade (barras, ganchos, etc) que não correspondem nem à natureza, nem à forma do objeto e nem à cardinalidade da coleção.
2. Uma só figura que já apresenta certas características do objeto.
3. Correspondência termo a termo, entre o número de objetos e o número de grafias, com formas gráficas de diferentes tipos e seguindo uma ordem da direita para a esquerda, de cima para baixo ou vice-versa.
4. Grafismos icônicos que significavam a utilização de formas semelhantes aos objetos.
5. Grafismos abstratos, cujas grafias não têm relação com a forma e representam a coleção inteira, enquanto coleção; aparecimento dos algarismos, de forma que a grafia escrita corresponde a um dos objetos da coleção e há o mesmo número de grafias que de objetos, e estas grafias estão sempre alinhadas onde o 1 é a primeira, o 2 é a segunda, etc; cardinal sozinho, sem acréscimo de outras grafias, para precisar a natureza dos objetos apresentados.
6. Cardinal acompanhado do nome dos objetos.

Os resultados levaram os autores a concluir que: a criança pode usar vários sistemas de notação, o que implica estar excluída a idéia de uma filiação direta entre esses tipos de notação tomados isoladamente; que vários tipos dessas notações são complementares ou são variações de um mesmo princípio ou, ainda, exploram aspectos do sistema numérico.

Os resultados mostram a relação clara entre a idade e a utilização de um tipo de notação. Em relação ao aparecimento das notações com algarismos, os autores levantam a questão do conhecimento das formas convencionais, que de uma forma geral é complexa. O conhecimento dos algarismos não é suficiente para utilizar grafias de maneira apropriada. O conhecimento destas formas deve ser combinado com elementos cognitivos que permitam a compreensão e a utilização do sistema da numeração escrita. O fato de que a propriedade do modelo a marcar reteve mais a atenção das crianças, revela que está presente a idéia de pluralidade. Quanto ao tipo de notação 2 (uma única grafia), essa representa uma tentativa de escrever o nome dos objetos. E o que está representado é uma pluralidade de objetos idênticos. A notação do tipo 3 (correspondência termo a termo), parece estar ligada à força e à adequação de

correspondência termo a termo que assegura sua sobrevivência e a sua precocidade na criança. A notação 4 (algarismos), representa a cardinalidade e a ordinalidade da coleção. Nesta notação, a centração na posição de um objeto particular continua a predominar e cada algarismo é escrito para cada objeto particular. Por exemplo, numa coleção de quatro objetos escreve 4444. Existe um desejo de conservar uma correspondência termo a termo entre grafias e objetos.

Os autores concluem que o desenvolvimento da numeração escrita é complexo, no qual diferentes tipos de conhecimentos e idéias entram em jogo. E que se trata de um vaivém entre o estabelecimento progressivo de ligações e diferentes aspectos do conceito de número, tais como: a compreensão do sistema dos números naturais; a contagem; a conceitualização de certas características do sistema representativo escrito.

Lerner e Sadovsky (1996) desenvolveram uma investigação que busca entender como é que as crianças se aproximam do sistema de numeração como produto cultural e objeto de uso cotidiano, de modo que possibilite projetar situações didáticas que permitam às crianças elaborar hipóteses e conceitualizações, descobrir lacunas e contradições, elaborar procedimentos e explicitar argumentos, e lhes oferecer elementos para que possam detectar seus próprios erros e reformular idéias, tendo por objetivo fazê-las aproximar-se progressivamente da compreensão da notação convencional. Um estudo preliminar foi desenvolvido para identificar que aspectos do sistema de numeração as crianças consideram relevantes, que idéias elaboram sobre os números, que problemas formulam, que soluções constroem e que conflitos podem gerar. As regularidades identificadas, tendo em vista as respostas, argumentos e procedimentos, nortearam a elaboração das atividades didáticas. Dentre as regularidades identificadas destacam-se os critérios de comparação utilizados, que não envolvem os conceitos de unidades, dezenas, centenas, mas baseiam-se em hipóteses que dizem respeito à magnitude do número, relacionada ora à quantidade de algarismos, ora à posição do algarismo (o primeiro é quem manda). O estudo permitiu identificar que “as crianças manipulam em primeiro lugar a escrita dos ‘nós’ – quer

dizer, das dezenas, centenas, unidades de mil [...], exatas – e só depois elaboram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre esses nós” (LERNER e SADOVSKY, 1996, p. 87).

O estudo mostrou também que a escrita dos números é conceitualizada a partir da enumeração falada e os dígitos são colocados seguindo a ordenação dos termos na numeração falada. O estudo apontou também que essas conceitualizações entram em conflito, levando as crianças a conceitualizar a notação convencional. A partir dos resultados do estudo preliminar, a investigação foi conduzida de forma a elaborar as situações didáticas que compreendessem o que as crianças estabelecem de hipóteses e a organização do sistema de numeração. As situações compreenderam a comparação de números, a produção e a interpretação e a busca de regularidades vinculadas à relação de ordem e também das centradas nas operações aritméticas. As autoras concluem que

cada categoria de situações constitui um âmbito no qual se coloca em relevo algum aspecto particular do sistema de numeração escrita. [...]; o que importa é que as propostas de trabalho reúnam determinadas condições: partir dos problemas formulados pelo uso da numeração escrita, contemplar diferentes procedimentos, admitir diferentes respostas, gerar alguma aprendizagem a respeito do sistema de numeração em todos os membros do grupo, favorecer o debate e a circulação de informação, garantir a interação com a numeração escrita convencional, propiciar uma crescente autonomia na busca da informação, aproximar – na medida do possível – o uso escolar ao uso social da notação numérica. (p. 150-51).

A investigação de Seron, Deloche e Noël (1991) voltou-se à passagem do código fonológico para o código numérico dos algarismos, isto é, como as crianças passam de um código para outro. Foram examinadas 60 crianças de 2^o e 3^o anos que aprendem números de 0 a 100 e de 100 a 1000, no 2^o e 3^o ano, respectivamente. Um ditado de números foi feito 3 vezes consecutivas, com intervalo de 2 meses entre um e outro. O primeiro ditado compreendeu 72 números, escolhidos em relação às suas especificidades: unidades de 0 a 9, as dezenas simples, os particulares de 11 a 16, as centenas exatas, os milhares exatos, alguns números inferiores a 100 e de estrutura simples (dezena/unidade), cem e mil numa relação de soma (por exemplo 1200) ou

numa relação de produto (por exemplo dois centos), mil precedido de um (por exemplo um mil, cento e um mil, cinquenta e um mil) a dezena complexa “quatre vingt” (oitenta) sozinha ou integrada noutras seqüências e números apresentando zeros intercalados. Nos outros dois ditados foram apresentados 116 itens dentre os quais um número maior de estruturas simples foi apresentado a fim de examinar as performances e facilitar a interpretação dos erros. Para essas baterias acrescentaram-se itens do tipo centena/unidade (101), centena/dezena (120), centena/particular (116), unidade/centena (200), mil/unidade (1004), mil/dezena (1025), mil/particular (1012), dezena/mil (10000, 20000). As análises basearam-se nos critérios elaborados para descrever os erros de transcodificação apresentados por adultos afásicos. Outra particularidade importante é que os números escolhidos, além de apresentarem particularidades, composição de soma e produto, e zeros intercalados, eram também números ainda não aprendidos para examinar se as crianças utilizam regras que elas já dominam para generalizar, ou se elas aplicam outras que não foram ensinadas.

As análises foram feitas em relação à estrutura lexical das formas verbais apresentadas e foi feita uma distinção entre erros lexicais e erros sintáticos.

Os resultados encontrados referem-se a erros do tipo lexical: um algarismo isolado ou uma palavra isolada, como, por exemplo, quatro mil e vinte e cinco ser escrito 3025; erro de posição na mesma pilha, como, por exemplo, vinte ser transcodificado 30, erro de pilha, como por exemplo, vinte ser transcodificado 2, três ser transcodificado 13; e erros do tipo sintático: (como por exemplo quatro mil e vinte e cinco ser escrito 400025 ou 4000205).

Os erros lexicais foram percebidos como decrescendo à medida que as questões iam sendo colocadas para as crianças. Os erros desse tipo que recaíram sobre o “80” (420, 820, 84, 48, 20) e sobre o “mil” (100), foram evidenciados, visto que a dezena “80” é mais complexa na língua francesa *quatre vingt* e o mil, apesar de não ser ensinado na segunda série, é acertado pela maioria das crianças. Para os demais números, os erros, desse tipo, identificados foram erros de pilha (20 transcodificado como 2) e erro de posição na pilha (20 transcodificado como 30).

Foram também identificados erros que violam tanto a posição como a pilha. Nos erros na pilha, uma primitiva é trocada por outra e ambas pertencem à mesma categoria lexical e nos erros de pilha, a primitiva produzida pertence a uma outra categoria lexical.

Os erros sintáticos, encontrados, foram analisados de acordo com as séries às quais pertencem: DU (dominada pela maioria das crianças); séries contendo “cem” e séries contendo “mil”.

Nas séries contendo cem, os erros sintáticos foram classificados como: as “lexicalizações” que consistem em transcrever cada primitiva lexical por seu valor em algarismos (por exemplo, cento e nove, 1009); os 10x que consistem em produzir um zero entre o 1 e os algarismos da primitiva lexical (como por exemplo cento e trinta, 1030, cento e dezesseis, 1016). Esse tipo de erro parece ser uma generalização (errônea) da regra válida para CU: 101, 102, 103 109. Os autores identificam uma sucessão de etapas para o domínio das séries contendo “cem”. Os autores encontraram como resultados, que as séries contendo “cem” que incluem relações de soma (CU, CD e CP) são bem mais entendidas que as que contêm produtos (UC) pelas crianças do 2^o ano.

Esses tipos de erros se situam, segundo os autores, no nível do componente sintático do tratamento dos números: “não são erros lexicais, pois não há confusão entre primitivas lexicais, mas o mecanismo sintático de integração dos diversos elementos do número em um todo não funciona, cada elemento da série ditada é transcrito como um número isolado” (p. 313).

Para os pares, compreendendo “mil”: erros também de lexicalizações, como, por exemplo, sete mil é transcodificado 71000 e mil e noventa 100090; erros do tipo 100x que consiste em fazer seguir o 1 correspondendo a mil de dois zeros, como por exemplo, mil e vinte 10020; erro do tipo P00 ou D00 que consiste em fazer seguir os algarismos correspondentes às dezenas ou aos particulares por dois zeros, como por exemplo, vinte mil ser transcodificado 2000 ou quatorze mil 1400; erros do tipo P10 ou D10, que consiste em fazer a dezena ou o particular ser seguido pelo 10, como por

exemplo, vinte mil ser transcodificado 2010 ou quatorze mil, 1410.

Os autores concluem que o exame dos erros produzidos permite identificar uma generalização abusiva de regras corretamente construídas para o caso de figuras para as quais elas não têm aplicação. O fato que essas generalizações se estendem seletivamente às relações soma e produto não significa, entretanto, que as crianças sejam sensíveis ao valor semântico (mais ou vezes) dessas relações e é também plausível que sejam as regularidades posicionais de cem e mil por relação às outras primitivas lexicais nas relações de soma e produto que servem de guia à extensão das regras.

Acredita-se ter refletido sobre questões essenciais compreendidas na construção do sistema de numeração e suas formas de utilização: oral e escrita. Mesmo assim, não se esgotaram todas as possibilidades de investigação da questão desta pesquisa. Porém, novos caminhos serão delineados e permitirão a leitura das condutas dos alunos em situações de aprendizagem sobre o sistema de numeração.

Os resultados de pesquisas permitirão a leitura das condutas dos alunos nas provas do instrumento de coleta das informações qualitativas e nas tarefas propostas para a situação de ensino, também na elaboração e organização das tarefas propostas para a situação de ensino.

As pesquisas que se voltaram para a organização das palavras que expressam os números e da escrita arábica subsidiarão a elaboração das tarefas da situação de ensino que estarão voltadas para enfrentar o fenômeno da congruência de acordo com a proposta de Duval (1995) sobre a aprendizagem e as representações semióticas: a relação noésis/semiósis. Elas subsidiarão também o fenômeno da produção, conversão e do tratamento de acordo com uma teoria de representações de Duval (1995).

É dessa forma que buscou-se um trabalho inovador para a proposta de uma situação de ensino composta por diversas tarefas voltadas para a aprendizagem do SND pelas crianças.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS TEÓRICOS SEGUNDO DUVAL

3.1. O Papel das Representações Semióticas na Aprendizagem segundo Raymond Duval

De acordo com Duval (1995) a distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz dele, é de extrema relevância no funcionamento cognitivo sendo necessário, no ambiente de ensino e aprendizagem, estar atento para esta diferenciação, investigando de que forma está havendo compreensão dos objetos matemáticos ou das possíveis representações desses objetos a que se pode lançar mão para aplicá-las na resolução de problemas.

Podemos citar como exemplo a afirmação de Vergnaud (1985) em relação ao número e à sua representação escrita. O autor se refere ao número nove e algumas representações possíveis: 9 em escrita árabe, IX em escrita romana, 21 na base 4, etc, significando que o número é um conceito que comporta vários sistemas de representação possíveis, dentre os quais o Sistema de Numeração Decimal. Ao mesmo tempo o autor ressalta que essas diversas escritas não representam o mesmo número com as mesmas propriedades (cardinal de um conjunto com nove elementos, número ímpar, múltiplo de três, sucessor de oito, etc).

Em contrapartida, o Sistema de Numeração também é um suporte de conceitualização e desta forma possibilitará falar de números grandes e de números decimais. Mesmo nos primeiros anos da escola elementar, onde se fazem as primeiras aquisições das estruturas numéricas, a escrita do número é colocada imediatamente associada ao número, de tal maneira que um é confundido com o outro. O autor analisa as diferentes operações em jogo na aquisição da adição dos números inteiros em quatro planos: o plano dos objetos, o plano dos conjuntos de objetos, o plano dos cardinais dos conjuntos e o plano das representações escritas destes números. Esses mesmo planos podem ser identificados para a quantificação de um conjunto de

natureza discreta cuja medida é expressa por um número.

Na figura 5 apresenta-se um diagrama que permite apontar tais planos:

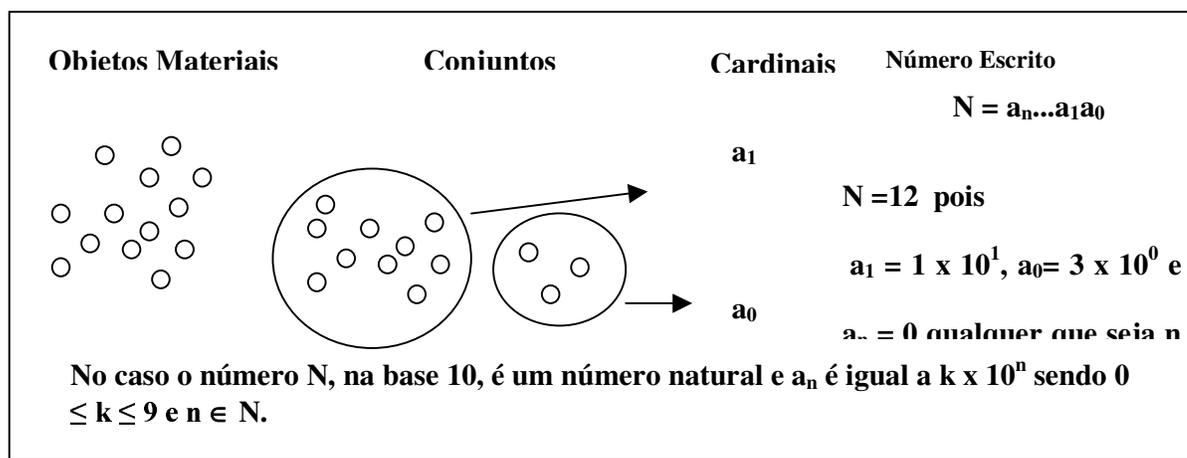


FIGURA 5 - PLANO DOS OBJETOS, DOS CONJUNTOS, DOS CARDINAIS E DAS REPRESENTAÇÕES ESCRITAS: O NUMERAL ARÁBICO

O número nove, citado no início, situa-se no plano dos cardinais, enquanto que a escrita nove se situa no plano das representações escritas ($a_0 = 9$, $a_n = 0$ qualquer que seja $n \geq 1$). Na base quatro o número nove seria escrito 21 ($a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_n = 0$ qualquer que seja $n \geq 2$).

A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um objeto matemático deve-se ao fato de que eles não têm existência física e não estão diretamente acessíveis na percepção. Na dimensão psicológica do ato educativo, essa questão está relacionada ao funcionamento cognitivo do pensamento. Segundo Duval (1995) muitos registros devem ser mobilizados para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações passando a ser reconhecidos em cada uma delas.

“Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza” (DUVAL, 1995, p.17).

Segundo o autor a questão mais difícil a ser enfrentada é verificar se os

sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações, visto que eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos.

Essa questão vai exigir duas operações cognitivas ligadas ora, à representação do objeto matemático, ora, ao próprio objeto matemático. Uma delas, segundo Duval (1993), é a “semióse” que vai significar a produção e a apreensão de uma representação, e a outra é a “hoésis” que significa apreensão conceitual do objeto. Ambas mobilizarão diferentes atividades cognitivas que as constituem, sendo necessário tanto examiná-las como ligá-las entre si.

Um registro de representação vai depender, segundo o autor, de um sistema semiótico que não pode ser de qualquer natureza, pois deve permitir: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Para a formação de uma representação, pode-se lançar mão da língua materna, desenhos, figuras ou fórmulas com signos próprios de uma ciência. Mas esta não acontece independente do conteúdo a representar nem deve deixar de respeitar as regras.

Para o tratamento devemos considerar a transformação da representação no interior do mesmo registro que pertence ao sistema semiótico mobilizando apenas um só registro de representação.

A conversão estará compreendendo a transformação de uma dada representação em outra, em outro sistema semiótico, de modo a conservar a totalidade ou parte da representação inicial, sendo necessária a coordenação pelo sujeito que a efetua.

Duval (1995) alerta que, das três atividades cognitivas ligadas a semióse, somente as duas primeiras (a de formação e a de tratamento) são levadas em conta no ensino no qual se observa a passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de muitos registros de representação, como se isto fosse evidente para a maior parte dos alunos. O que se verifica, porém, é que estes não reconhecem o mesmo objeto através de diferentes sistemas semióticos de representação: escrita algébrica de uma relação e sua representação gráfica, escrita

numérica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta, um plano, etc. Uma outra questão apontada pelo autor é que, geralmente, as atividades de tratamento e de conversão das representações não são distinguidas.

De acordo com o autor, não é somente o tratamento que se deve privilegiar, pois estar-se-á reforçando a importância da forma, como se ela fosse responsável pela descrição de uma informação. É na conversão das representações, de um sistema semiótico a outro, que haverá uma operação cognitiva que pode ser descrita como uma mudança de forma. “Traçar a curva correspondente a uma equação do segundo grau ou passar de um enunciado de uma relação à escrita literal desta relação será equivalente a encontrar a forma pela qual um conhecimento é representado” (DUVAL, 1995, p. 17). No que diz respeito à forma, as representações semióticas são importantes por evidenciar: resposta ao conteúdo representado, possibilidade de uma diversidade das formas de representação para um mesmo conteúdo representado ou possibilidade por uma mudança das formas de representação por razões de economia de tratamento.

A operação de conversão tem que ser privilegiada visto que ela não é nem trivial nem cognitivamente neutra colocando tanto a questão do papel da semiósis no funcionamento do pensamento quanto o das condições de uma diferenciação entre representante e representado. A complexidade da conversão de representações só pode ser compreendida desde que os sistemas semióticos sejam vistos por relação às representações ou, mais exatamente ao par (conhecimento, representação).

A diversidade de tipos de representação apresenta outras vantagens que podem ser destacadas: economia de tratamento, a complementaridade de registros e a conceitualização que implica a coordenação dos registros de representação.

A economia de tratamento permite a superação dos limites de uma representação e a rapidez na representação das relações entre objetos, visto que diversos tipos de representações são utilizados, como por exemplo: proposições ou teoremas descritos em língua materna e descritos por meio de representações figurais ou linguagem algébrica, o recurso a uma figura para resolver um problema de geometria podendo ser economia de custo de memória ou de ordem heurística.

A complementaridade de registros compreende os elementos informativos ou

comunicacionais que a representação torna possível: as figuras só podem representar estados, configurações ou produtos de operações e não ações ou transformações, enquanto que a língua natural ou algébrica permite representar as operações. Por outro lado, as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem um objeto ou uma situação.

Um exemplo a ser evocado refere-se aos procedimentos utilizados por um aluno na resolução do problema “A soma de dois números é 10 e a diferença entre eles é 2. Quais são os números?”. Não conseguindo resolver o problema com a utilização de uma linguagem algébrica, utiliza um tratamento aritmético e encontra a solução explicando-a por meio da língua natural: “Se os números fossem iguais, cada um seria 5, mas como existe uma diferença de 2, somo 1 ao primeiro, portanto 6, e diminuo 1 do segundo, portanto 4. Os números são 4 e 6.” A língua natural era o registro de representação que o sujeito possuía com mais significação para argumentar sobre a solução encontrada. O mesmo sujeito não sabia efetuar tratamentos com significação com utilização da linguagem algébrica que permitiria resolver o problema a partir da resolução do sistema de equações:

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

$$2x = 12 \rightarrow x = 6 \rightarrow x + y = 10 \rightarrow 6 + y = 10 \rightarrow y = 4$$

No tocante a conceitualização Duval (1993), apresenta uma estrutura por meio da qual o funcionamento da representação semiótica é compreendido (Figura 6):

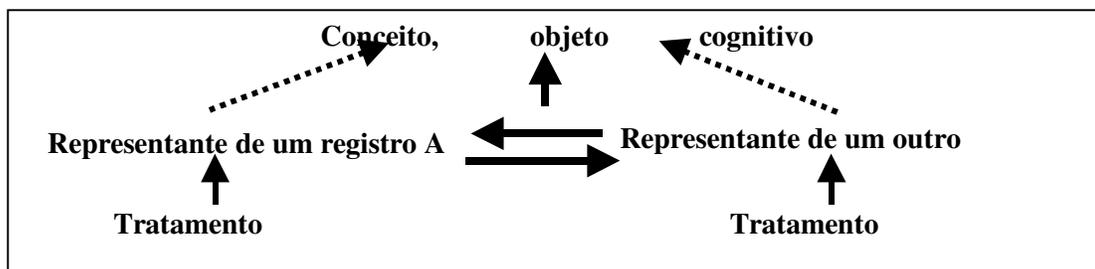


FIGURA 6 - ESTRUTURA DA REPRESENTAÇÃO EM FUNÇÃO DA CONCEITUALIZAÇÃO

FONTE: DUVAL, R Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993, p. 51.

Essa estrutura se baseia na crença de que a compreensão conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação.

As flechas estarão compreendendo tanto transformações internas como externas. No caso de transformações internas são aquelas necessárias e específicas de cada tipo de registro e as externas estarão compreendendo as conversões de um registro a outro. A conceitualização estará compreendendo a coordenação entre os dois tipos de registro, que não é natural, tendo que ser provocada levando à distinção entre o representante e o representado impedindo o enclausuramento de um único registro de representação.

Segundo Duval (1995) a conversão que é necessária para a conceitualização não deixa de enfrentar o fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que originam-se de sistemas semióticos diferentes. É esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou não-congruência. Por outro lado, essa passagem se faz espontaneamente quando eles são congruentes. Existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes:

- a) correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
- b) mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;
- c) conversão de uma unidade significativa da representação de partida a uma só unidade significativa na representação de chegada.

Alguns problemas aditivos apresentados por Vergnaud foram utilizados por Duval para ilustrar a congruência e a não-congruência entre dois sistemas semióticos de representação; um na língua materna e a sua conversão para um outro que utiliza a escrita da equação aritmética.

Problema 1: Ganho 3 bombons e ganho 6. Fico com 9 bombons.
 (ganha) 3 + (ganha) 6 = (ganha) 9

Nesse caso há correspondência semântica (ganhar \rightarrow +), mesma ordem de

apreensão das unidades nas duas representações (ganha3, ganha6, ganha 9 \rightarrow 3,6,9) e conversão de uma unidade significativa na representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada (ganha 3 \rightarrow +3, ganha6 \rightarrow +6, ganha 9 \rightarrow +9).

Já não é o caso do problema: Ganha 3 bombons e perde 6 bombons. Perde 3.
(ganha) 3 + (perde) 6 = (perde) 3

Nesse caso os verbos portadores de informação semântica são antônimos (ganhar/perder) e, portanto, não há mais identidade semântica terminal, o que vai significar que as duas representações semióticas não serão congruentes, pois uma das condições não foi verificada. Esse segundo problema é mais difícil para os alunos quando se tratar de conversão.

Ou o caso do problema ‘Ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8. A ordem tem que ser invertida: (ganhou) 8 ? (ganhou) 3 =

Se esse problema for resolvido por um procedimento da diferença a ordem tem que ser invertida e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para o mesmo.

Se o problema for resolvido pelo procedimento do complemento a ordem também tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência: (ganhou) 3 + (ganhou) ... = (ganhou) 8.

Nos dois últimos exemplos não existe congruência entre os dois sistemas semióticos de representação e, segundo resultados de pesquisas, as taxas de sucesso ou insucesso dependem do maior ou menor grau de não-congruência.

Em relação ao fenômeno da congruência ou não-congruência, Duval (1995) levanta que dois sistemas semióticos podem ser congruentes num sentido e não o ser no sentido inverso.

Duval (1995) ressalta sobre a necessidade de um trabalho: de aprendizagem específica centrado na diversidade de sistemas de representação, na sua utilização e nas traduções mútuas de um no outro; na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas

ao raciocínio.

Este trabalho é importante em virtude de três fenômenos:

- a) da diversidade de registros de representação semiótica que pertencem a sistemas de representação muito distintos entre si e como consequência, possuem questões específicas de aprendizagem;
- b) da diferenciação entre representante e representado e também da diferenciação entre forma e conteúdo de uma representação semiótica;
- c) da coordenação entre os diferentes registros de representação semióticas disponíveis.

Segundo Duval (1995), ‘Para os sujeitos, uma representação pode apenas funcionar como representação, isto é, lhes dar acesso ao objeto representado, quando duas condições forem preenchidas: que eles disponham ao menos de dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação ou de um processo e que eles possam converter “espontaneamente” um sistema semiótico em outro’ (p. 22).

3.2 O Papel das Representações Semióticas na Compreensão da Estrutura do SND

Proceder-se-á, a seguir, com a análise dos registros de representações semióticas utilizados para a representação de quantidades, que se apóiam num sistema de numeração com uma determinada estrutura. Essa análise voltar-se-á também para a relação entre a apreensão conceitual desta estrutura.

Como apontado anteriormente, a distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz dele é essencial para a conceitualização. Para esse estudo, é necessário distinguir o objeto a ser conceitualizado, isto é, a estrutura do sistema de numeração decimal, dos registros de representação semiótica utilizados para representar essa estrutura, isto é, as palavras e os numerais arábicos. Iniciar-se-á com a primeira distinção.

Em relação à conceitualização da estrutura do sistema de numeração

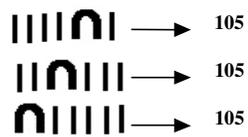
podemos comparar alguns sistemas inventados de modo a evidenciar os aspectos essenciais dessa estrutura: base e valor posicional.

O sistema de numeração inventado pelos egípcios ao apresentar um símbolo para cada grupo de 10 possui uma estrutura que envolve uma base, mas não o valor posicional. Esta estrutura abre possibilidades para mais de uma representação de um mesmo número num mesmo registro de representação. Por exemplo o 105 pode ser representado por  ou .

Propor atividades envolvendo esse sistema pode se revelar de extrema importância e significação enquanto conceitualização da estrutura do sistema de numeração decimal (objeto matemático em questão). Poder-se-á dizer que atividades dessa natureza estarão contemplando o plano das representações escritas e a operação cognitiva de tratamento de um registro de representação, que neste primeiro momento já compreende um aspecto do nosso sistema de numeração, ou seja, a base dez.

A utilização de um outro registro de representação exigirá a assimilação, pelo sujeito, de uma nova regra específica do novo sistema. No caso do sistema de numeração decimal posicional de origem indo-arábica, os mesmos agrupamentos serão exigidos e, no plano das representações escritas, intervêm as novas regras específicas desse sistema exigindo o conhecimento de que cada grupo de dez formado pode ser representado por um dos dez símbolos estabelecidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e a identificação do grupo de dez formado (dezenas, centenas, ...) será feita pela posição do símbolo na representação. Essas mesma regras se aplicam quando a operação cognitiva de tratamento estiver sendo realizada.

Importante será a conversão de uma representação à outra para a conceitualização deste objeto matemático. Assim, ter-se-á que 105, no novo sistema, exigirá a colocação do 1 na terceira casa à esquerda, um zero representando a ausência na segunda casa e o símbolo 5 colocado à direita do zero. O tratamento, nesse sistema, evidenciará que a troca de posição significará uma outra quantidade representada. Assim 501, 051, 510, 015 serão representações de outras quantidades, o que não acontece no sistema egípcio, pois:


 $\rightarrow 105$ representam o mesmo número que expressa a medida de um conjunto e é representado por sistemas de numeração com estruturas diferentes.

Mas será importante a conversão do registro de representação em um sistema num registro de representação em outro sistema para que a significação seja atribuída aos significantes, tendo por referência o mesmo número .

Uma operação de adição, nas duas representações permitirá evidenciar a operação de tratamento que inclui a mudança de forma no mesmo sistema semiótico de representação.

Por exemplo: $128 + 88$. No sistema Egípcio teremos as possibilidades de transformação que corresponderão à atividade de tratamento, conforme apresentado na figura 7.

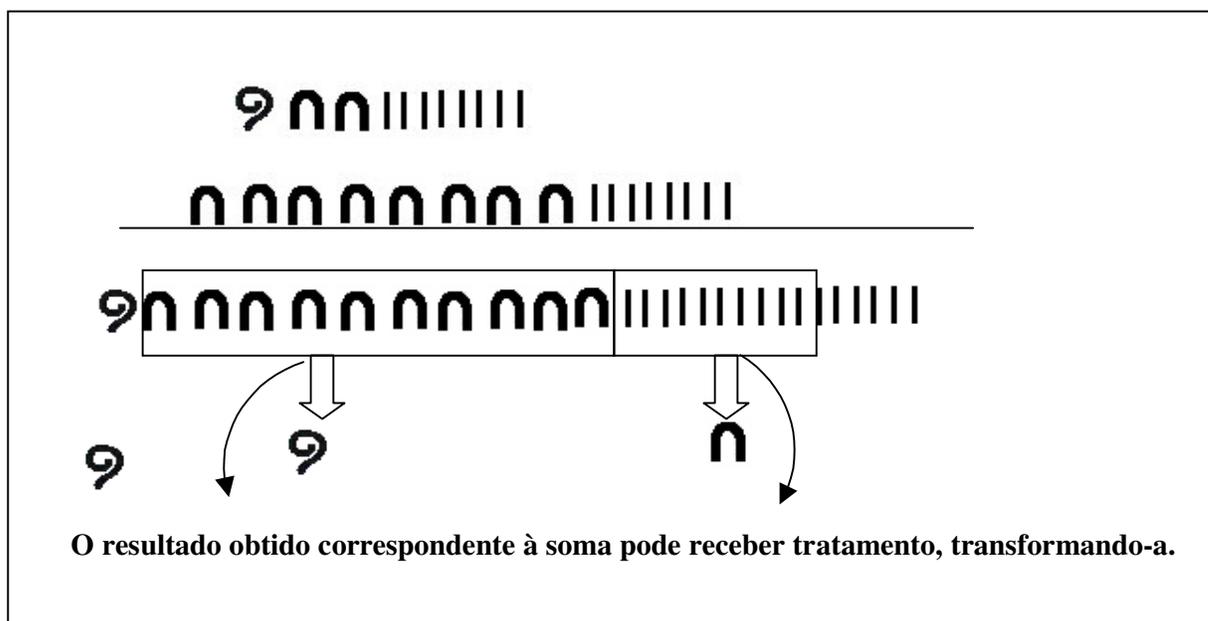


FIGURA 7 - : ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO. OPERAÇÃO DE TRATAMENTO POSSIBILITADA

O tratamento nesse sistema já permite evidenciar a base presente em sua estrutura.

Na adição de 128 com 88 utilizando o SND o tratamento se efetua quando a reserva é colocada, ora em cima da coluna das dezenas e ora em cima da coluna das centenas, e isso pode ser visualizado na figura 8:

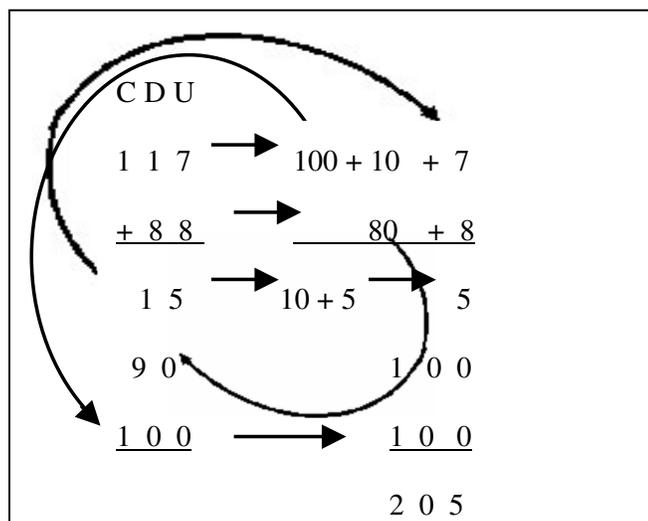


FIGURA 8 - ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO SND OPERAÇÕES DE TRATAMENTO POSSIBILITADAS

O tratamento nesse sistema vai exigir a compreensão das invariáveis presentes em sua estrutura: o valor posicional e a base 10.

É necessário não esquecer, porém, a necessidade de conversão de uma representação à outra e a coordenação dessa conversão a ser efetuada pelo próprio sujeito.

Com a utilização do ábaco, a estrutura do SND também é evidenciada, e, portanto corresponde à operação de tratamento proposta por Duval (1995). Neste caso, na adição de 117 com 88 podemos visualizar as transformações possibilitadas na figura 9:

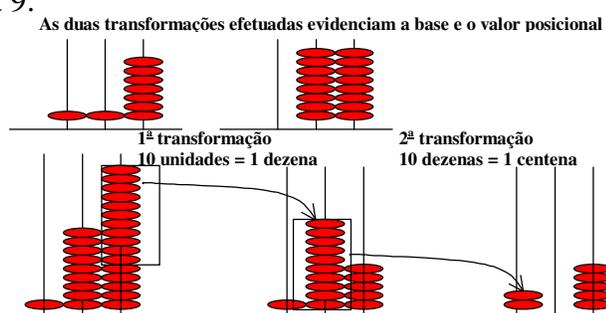
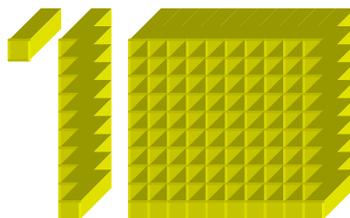


FIGURA 9 - ADIÇÃO DE 128 COM 88 NO ÁBACO, COM UTILIZAÇÃO DO SND. OPERAÇÕES DE TRATAMENTO POSSIBILITADAS

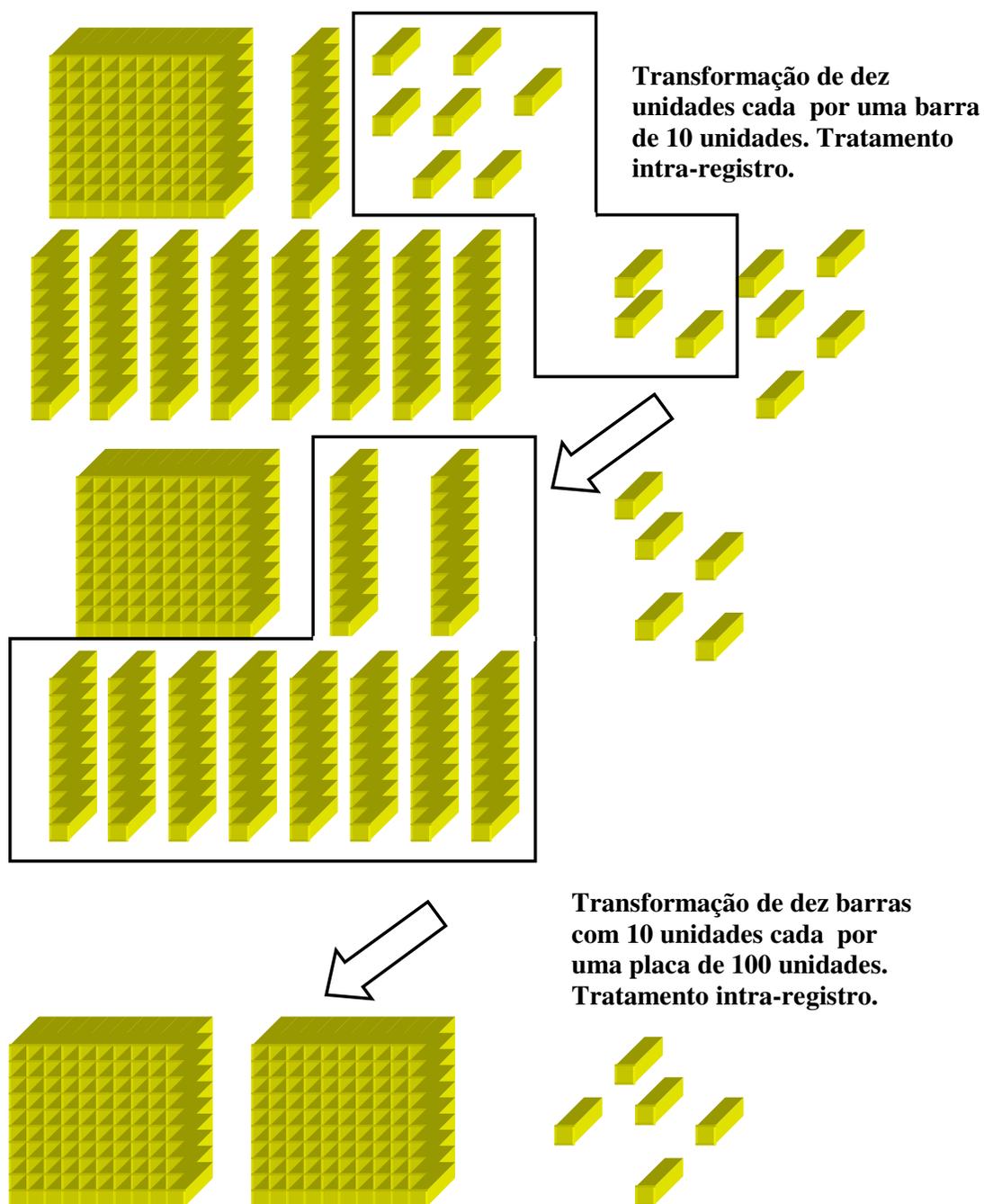
A utilização do ábaco estaria contemplando as operações efetuadas sobre os grupos de objetos e o tratamento no algoritmo estaria contemplando as ações, operações e transformações efetuadas no sistema de numeração. No caso do ábaco, ao passar para o plano da representação escrita, teremos um registro de representação congruente ao registro que utiliza o SND pois, existe a mesma correspondência semântica, mesma ordem e mesma unidade semântica significativa na representação de partida e na representação de chegada. Cada grupo de dez no algoritmo ou na representação na linguagem algébrica é representado por um símbolo que representa uma potência de 10, conforme a posição.

No ábaco, cada grupo de 10 é representado por uma argola em uma determinada posição. Se forem dois grupos daquela natureza, então o numeral 2, ou duas argolas.

Analisemos o caso do trabalho com o SND utilizando o material multibase. Para a representação do 111 utilizamos uma placa de 100, uma barra de 10 e um cubinho solto.



Seja a adição de 117 com 88 utilizando o material multibase para verificar o tratamento que se efetua.



Pode-se observar que o tratamento nessa representação não exige o valor

posicional, pois os cubos e as placas resultantes da adição podem estar situados em qualquer lugar. Esta representação não é congruente nem à representação no ábaco e nem à representação algébrica. Ela é congruente, porém, ao sistema de numeração egípcio e evidencia a base do sistema de numeração. Em relação aos planos de Vergnaud (1981), essa representação e o tratamento sobre ela, que constitui as transformações internas sobre o registro, bem como as transformações externas em se tratando de conversão de um registro a outro, estará voltada para o plano dos agrupamentos e dos cardinais dos agrupamentos. Há 2 grupos de 100 (ou duas placas) e cinco unidades (ou cinco cubos). Se essa quantidade for representada com utilização do sistema egípcio passará a haver 2 grupos de 100 e 5 unidades (ou dois signos  e cinco signos | para representar as unidades). No plano das representações escritas registrar-se-á  ou placa placa cubo cubo cubo cubo cubo.

As representações semióticas começam a exercer o seu papel, visto que a enumeração dos elementos do conjunto exige um conjunto de signos com significado próprio, isto é, que carregam consigo a cardinalidade e a ordinalidade. Isto significa que o numeral dois é o cardinal de um conjunto de dois objetos e é diferente de “segundo” que significa o segundo objeto do conjunto contado ou o último elemento de um conjunto de dois objetos. Aqui é que se manifesta o primeiro paradoxo com o qual se tem de lidar: o sujeito pode não ter construído o número e já estar recitando, com utilização de um conhecimento social, ao invés de um conhecimento lógico matemático que será estabelecido por abstração reflexiva.

A representação da medida de um conjunto, por sua vez, exigirá um sistema de numeração, com uma estrutura. Esse sistema surgiu e evoluiu através dos tempos e hoje se utiliza o sistema de numeração decimal posicional, de origem indo-arábica. Tal sistema possui em uma estrutura: composição aditiva e valor relativo das unidades. A composição aditiva significa compreender que a quantidade 22 equivale a $2 \times 10 + 2$ e que, cada um dos 2 da representação possui um valor diferente, dependente da posição em que se encontra: o 2 à esquerda vale 20 unidades e o 2 à direita vale 2 unidades. Os dois valores são somados: $20 + 2$.

Por outro lado, um sistema de numeração, representativo de quantidades pode valer-se da linguagem oral, matemática ou valer-se da utilização de materiais didáticos tais como ábacos, material multibase, quadro valor lugar, entre outros. Em se tratando de sistemas semióticos de representação cada um destes registros possui especificidades próprias e interfere de forma distinta no funcionamento cognitivo.

Nesse estágio depara-se com o lugar atribuído à semióse nos sistemas semióticos de representação, pois deve-se estar atento às formas de apreensão e às formas de produção das representações utilizadas e ao papel dos diversos tipos de registros semióticos no funcionamento cognitivo.

Pode-se observar o papel das representações semióticas em cada um dos planos e sobre as operações em cada um dos planos. Segundo Vergnaud (1985) no plano dos objetos e dos agrupamentos, o reagrupamento, e no plano do cardinal do conjunto, a contagem que exige a utilização de signos específicos, isto é, numerais recitados numa seqüência fixa e pré-estabelecida, de natureza arbitrária, que exigem transmissão social. No plano das representações escritas o reconhecimento de uma estrutura presente num sistema de numeração utilizado tanto na palavra como no numeral arábico.

De acordo com Duval (1995) deve-se analisar a estrutura de tal sistema em relação às três atividades cognitivas fundamentais da semióse. Em relação à formação de uma representação identificável, pode-se admitir que o sistema de numeração de origem indo-arábica apresenta notórias vantagens em relação aos demais sistemas que foram inventados pela humanidade. Ele carrega uma notável capacidade de síntese, e com apenas dez dígitos, permite a representação de quantidades muito grandes. As representações na língua materna, no entanto, com a utilização de signos pode apresentar dificuldades em fase de aprendizagem.

Os rótulos verbais se diferenciam de uma língua para outra e, podem, ou não, facilitar a identificação da estrutura presente em tal sistema. Por essa razão é importante analisar essa atividade cognitiva da semióse. Cita-se, como exemplo, a numeração de onze a quinze na língua portuguesa, inglesa, francesa e a comparação

com a enumeração na língua chinesa, na qual *yi* vale um, *shi* vale dez, *shi yi* vale onze. Pesquisas apontam um progresso maior em crianças japonesas, em comparação a crianças inglesas e francesas, na compreensão da estrutura do sistema de numeração. Isso evidencia a importância de uma representação identificável à utilização da língua materna como atividade cognitiva fundamental.

Em relação ao tratamento e a conversão, outras duas atividades fundamentais da semióse, pode-se considerar os planos e as diferentes operações entre os planos, em jogo, apontados por Vergnaud (1985), para a aquisição da adição, passando em primeiro lugar pela medida dos conjuntos envolvidos nessa adição. Por essa razão, Vergnaud (1985) aponta que nada é mais fecundo que os exercícios de passagem de um material a outro ou de uma representação a outra. Passar de um material ou número escrito correspondente e, reciprocamente, passar de um desenho a um material A, de um material A a um material B ou número escrito, e de um número escrito ao desenho é um meio de levar as crianças a compreender o sistema de numeração sem dificuldade.

Cada uma dessas representações carrega uma especificidade própria que será pesquisada, mas o que se evidencia é o que Duval (1995) esclarece em relação ao tratamento que compreende a transformação da representação e a conversão, que é a transformação de uma representação em outra.

Cada um dos tipos de registro possibilitados, utilizando diversas formas de representação, desde as mais visuais até as mais abstratas, carrega suas especificidades, que têm de ser levadas em conta no momento da aprendizagem.

Quando se utiliza o material multibase e os palitos amarrados, deve-se ter consciência que esse carrega de uma maneira direta a base dez, presente na estrutura do sistema de numeração. Já o ábaco traz presente tanto a base dez como o valor posicional, desde que não sejam utilizadas argolas de cores diferentes, pois as mesmas eliminam o valor posicional presente na estrutura do SND. Já a numeração arábica carrega em outra linguagem, agora não mais visual, a composição aditiva e o valor relativo das unidades. Logo, uma quantidade representada na forma escrita, com

utilização do SND, carrega uma especificidade própria da utilização de uma linguagem específica, no caso, a matemática.

É na conversão de uma representação a outra que se propõe um caminho para transpor o limite dos números de dois algarismos, que constitui mais um entrave que um auxílio à compreensão do princípio fundamental da numeração, sabendo-se que um mesmo algarismo representa um número n vezes maior que a coluna das unidades, em base n , se ele for colocado na segunda coluna da esquerda, n vezes maior que essa, se ele for colocado na terceira coluna e n^2 que a coluna das unidades, e assim sucessivamente.

O intercâmbio entre os diversos materiais e entre os diversos tipos de registros é fundamental para a noésis, pois essa evidencia o papel da criação e do desenvolvimento de sistemas novos e específicos para o progresso do conhecimento. Ao mesmo tempo, estar-se-á ressaltando a importância da diversidade de tipos de representação em relação tanto à economia que permite a superação dos limites e a rapidez na representação das relações entre objetos como à complementaridade que destaca os aspectos informativos comunicacionais de cada tipo de representação.

Além disso, em cada um dos planos existe uma representação semiótica da medida do conjunto. Cada uma dessas representações apresenta seus embaraços próprios. No plano dos objetos só existe a contagem se uma lógica intrínseca for considerada: contar todos, contar apenas uma vez e recitar os números numa ordem convencionalmente estabelecida. No plano dos agrupamentos, a convenção que estabelece o número de elementos por grupo e os grupos de ordem superior que se forma. No plano dos cardinais dos agrupamentos, a identificação de que a medida é a medida de todo o conjunto (cardinalidade) e não dos objetos isolados, o que subentende a relação de inclusão hierárquica. No plano das representações escritas, a compreensão de que uma quantidade Q pode ser representada na forma $a_n a_{n-1} \dots a_0$, em que a_n é igual a $k \times 10^n$, $0 \leq k < 10, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ e $Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

CAPÍTULO 4

SOBRE A PESQUISA

4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA SEGUNDO DUVAL

Duval (2003) procura descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que a ele são propostos em situação de ensino. Duval (2003) se reporta à especificidade da complexidade do funcionamento cognitivo subjacente à atividade matemática e em relação às exigências metodológicas quando se trata de pesquisa sobre a aprendizagem da matemática. São essas exigências metodológicas sugeridas e as orientações necessárias que estarão sendo levadas em conta no desenvolvimento desta investigação.

Em se tratando da atividade cognitiva requerida pela matemática, deve-se considerar a importância das representações semióticas pelos seguintes motivos: em relação às possibilidades de tratamento (não é qualquer tipo de registro de representação que permite um determinado tipo de tratamento) pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente observáveis, visto que eles não têm existência física e sua apreensão só é possível por meio de registros de representação; igualmente pelo fato de que existe uma grande variedade de representações semióticas possíveis para serem utilizadas em matemática (língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras).

Para desenvolver e aprofundar a atividade cognitiva requerida pela matemática, Duval (2003) aprofunda as análises em relação aos diferentes registros de representação semióticas, uma vez que eles são de naturezas distintas. Tal natureza é importante como objeto de análise visto que estará no centro do processo de conversão de registros de representação. Segundo o autor, existem os registros multifuncionais cujos tratamentos não são algoritmizáveis, caracterizados como uma representação discursiva, a língua natural, ou não discursiva, as figuras geométricas. Existem os

registros monofuncionais, cujos tratamentos são algoritmizáveis e também são de natureza discursiva como no caso dos sistemas de escrita (numéricas, algébricas ou simbólicas) ou não discursiva, como no caso dos gráficos cartesianos.

São essas questões que levam Duval (2003) a apresentar a hipótese de que a compreensão em matemática supõe a coordenação, de ao menos, dois registros de representação. Esta coordenação estará presente na atividade de conversão e é de natureza mais ou menos complexa em se tratando de registros de representação de mesma natureza (ambos multifuncionais ou monofuncionais) ou de naturezas distintas (um multifuncional e outro monofuncional). A atividade de conversão colocará em evidência o fenômeno da congruência ou da não congruência. Isto acontece porque dois registros de representação serão congruentes se obedecerem aos três critérios seguintes: correspondência semântica das unidades de significado, univocidade semântica terminal, mesma ordem das unidades de significado no registro de partida e no de chegada. A congruência ou não congruência entre dois registros de representação pode tornar a atividade de conversão mais ou menos complexa. Além do mais, os registros de representação podem ser congruentes num sentido e não o serem no sentido inverso. É o caso, por exemplo, das funções: pode-se ter congruência na passagem da linguagem algébrica para o gráfico cartesiano e não ter congruência na passagem inversa.

Outra atividade importante para a compreensão em matemática é o tratamento que é de natureza diferente da atividade de conversão. O tratamento é uma transformação da representação em uma outra representação de mesma natureza. É uma transformação interna, no próprio registro. A conversão é uma transformação de um registro de representação em uma outra representação de outra natureza. É uma transformação externa ao registro. Segundo Duval (2003) esta é uma distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão.

Para o autor a atividade de conversão não deve ser considerada como uma simples codificação. A atividade de conversão exige uma apreensão global e qualitativa que não é possibilitada pela atividade de codificação. É esta habilidade que

torna possível relacionar os valores escalares (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1) de uma função apresentada em linguagem algébrica com os pontos de interseção com os eixos ou com a inclinação, no caso de uma reta representada no plano cartesiano. Quando esta relação for estabelecida significa que as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros estão sendo articuladas. Isso significa que ambos os registros de representação são compreendidos no que diz respeito às unidades de significado.

Os diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático não têm o mesmo conteúdo. Essa afirmação, ao ser levada em consideração no caso da estrutura do SND (objeto matemático), já deixa indícios da importância do reconhecimento desta nos registros de representação em forma escrita e em escrita arábica. São dois tipos de registros de representação de naturezas distintas (um é multifuncional e o outro monofuncional), com seus conteúdos próprios: a escrita em língua natural vai exigir a compreensão dos sufixos e prefixos e da forma como estão articulados entre si através de operações de adição e multiplicação; a escrita arábica vai exigir a compreensão do valor relativo das unidades de acordo com a posição dos algarismos no numeral e da potência de 10 que ele estará representando. É este objetivo que tem que ser perseguido: o reconhecimento da estrutura do SND na escrita em língua natural e na escrita arábica.

Duval (2003) propõe um método para pesquisar processos de aprendizagem e que procura responder sobre o que é necessário observar nas produções dos alunos e qual o modelo pertinente para analisar e interpretar as observações e dados da experiência. Este método estará nos dando as condições segundo as quais a pesquisa estará se desenvolvendo pois, os dados da experiência são constituídos dos desempenhos ou procedimentos adotados nas questões do teste piloto. Também pelos procedimentos e estratégias adotados na situação de ensino composta por várias tarefas.. Este método é importante visto que buscamos as contribuições dos registros de representação semiótica para a conceituação do SND, sendo necessário remeter-se a ele neste momento. Os passos sugeridos pelo autor são apresentados a seguir.

4.1.1 Distinção Cuidadosa sobre o que sobressai no Tratamento em um Registro e aquilo que sobressai em uma Conversão

Segundo o autor, do ponto de vista cognitivo, esta distinção deve ser levada em consideração, pois o tratamento e a conversão que se efetuam num registro não são operações de mesma natureza, ainda que elas sejam duas formas possíveis de transformações das representações semióticas. Outra questão fundamental diz respeito ao fato de que cada registro de representação é indissociável de um tipo de tratamento e este só pode ser feito de maneira eficaz e econômica num tipo de registro determinado. Um tipo de tratamento depende das possibilidades de funcionamento representacional de um registro. Cada registro favorece um tipo de tratamento. Já a conversão tem como característica conservar a referência ao mesmo objeto, mas sem conservar a explicitação das mesmas propriedades deste objeto significando que o conteúdo da representação muda. Esta mudança de conteúdo ou dos aspectos do objeto vai depender da natureza do registro.

Nas tarefas organizadas para comporem a situação de ensino existem as que estão voltadas para privilegiar o tratamento ao mesmo tempo em que procuram explicitar a estrutura do SND num tipo de registro de representação e as que estão voltadas para privilegiar a conversão. Ambas estarão requisitando ações que visam a identificação do conteúdo da representação e a sua referência ao objeto matemático representado. Nas provas que compuseram o instrumento de coleta das informações qualitativas houve também a preocupação de apresentar questões envolvendo os dois tipos de operações para identificar a compreensão da criança em relação ao conteúdo da representação e do objeto matemático. Mais adiante são apresentadas tarefas da situação de ensino e as provas do referido instrumento, momento em que se explicitar-se-á as operações por elas privilegiadas.

4.1.1.1 Consideração da natureza dos registros de representação

Na matemática são utilizados diferentes tipos de registros de representação

que não são de mesma natureza no que diz respeito ao tratamento, às possibilidades de cálculo algorítmico e às propriedades e relações explicitadas. Duval (1999), apresenta os quatro tipos de registros mobilizados pela atividade matemática, descrevendo as suas características e possibilidades. Os registros de representação podem ser discursivos ou não discursivos, podendo ambos serem plurifuncionais ou monofuncionais. Os registros discursivos utilizam uma língua e os não discursivos mostram formas ou configurações. A característica dos registros plurifuncionais é que eles são utilizados em todos os domínios da via cultural e social e no caso dos registros monofuncionais eles são registros derivados e especializados em algum tipo de tratamento e apresentam uma característica formal.

Neste estudo, a análise dos resultados encontrados e a elaboração e organização das tarefas da situação de ensino e das provas do instrumento de coleta das informações qualitativas estarão levando em consideração a natureza dos registros de representação de quantidades: a língua natural com suas características próprias oriundas das regras de organização das palavras (prefixos e sufixos e as operações que os unem) de natureza plurifuncional e os algarismos arábicos, também com suas regras de formação dos numerais nos quais os dígitos, que de acordo com sua posição no numeral expressam uma potência de dez, portanto uma operação de multiplicação e a operação de adição que os ligam entre si de acordo com o valor relativo, de natureza monofuncional. Ambos são registros de representação discursivos.

Segundo Duval (1999) a passagem de um registro monofuncional para um registro plurifuncional indica dificuldades quando se trata de uma operação de conversão. Esta afirmação é de extrema importância visto que, priorizar-se-á as operações de conversão nas tarefas da situação de ensino e, como consequência, defrontar-se-á com dificuldades que podem ser oriundas da natureza dos registros de representação. Portanto, serão explicitados nas tarefas da situação de ensino os tipos diferentes de registros de representação envolvidos e também as operações de tratamento e de conversão compreendidas. Ao fazer isto, estar-se-á explicitando de que forma a situação de ensino se volta para a compreensão do conteúdo do registro de

representação e do objeto matemático investigado. Esta explicitação fornecerá os critérios para as análises dos resultados. No instrumento de coleta das informações qualitativas, procurar-se-á identificar de que forma a diferença entre os tipos de registros permitiu reconhecer se a criança não tinha domínio do conteúdo do registro de representação e do objeto matemático em questão.

4.1.1.2 Utilização da conversão como instrumento de análise: variáveis cognitivas próprias de cada registro de representação (a palavra e a escrita arábica)

Para discriminar as unidades cognitivas pertinentes no conteúdo de uma representação é necessário, segundo Duval (1999) duas condições: submeter esta representação a todas as variações possíveis sendo que as representações formadas, após as variações devem ainda ter sentido; tomar dois registros de representação associados entre si, e submeter um deles as variações que provoquem variações no outro registro. As variações serão cognitivamente pertinentes quando uma variação D2 num registro D provoque uma variação D3 no registro associado D1 tendo como referência objetos diferentes. Nem sempre as variações num registro provocam variações no registro associado. Neste caso estas variações não são cognitivas e sim neutras. Este princípio de variação é baseado sobre a atividade de conversão. Uma variação cognitiva sempre vai consistir numa mudança de sentido. Por vezes podemos ter registros que sofreram variações, mas, não provocam variações nos registros que lhes são associados. Isto provoca uma “decalagem” entre registros com sentidos diferentes e seus associados. Certas variações não levam a outro objeto. Na matemática isto acontece com frequência, isto é, podemos ter diversos registros de representação do mesmo objeto matemático como, por exemplo, 0,5 e $\frac{1}{2}$. Duval (1999) afirma que a compreensão do sentido provoca automaticamente a compreensão do objeto. A título de exemplo pode-se relacionar 3 (A, B, C) pessoas entre si por intermédio de verbos que indicam ações. Esses verbos podem ser representados graficamente por flechas, ora pontilhadas e ora cheias:

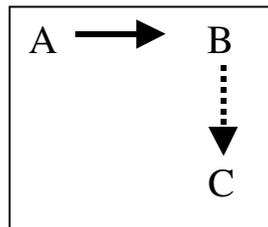
Olhar: 

Chamar: 

A olha B que chama C

C é chamado por B que é olhado por A

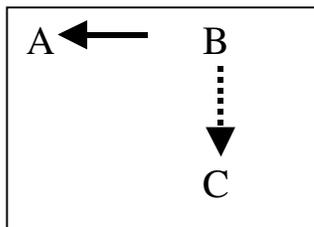
B que é olhado por A chama C



Nas três frases, as pessoas trocam de posição, mas como há uma mudança no verbo e a inclusão do pronome relativo, é possível uma única representação utilizando as flechas.

Uma outra troca, sem alteração dos tempos dos verbos provocará uma mudança de sentido e exigirá uma nova representação:

B que chama C olha A



Nesse caso, só acontecerão as variações cognitivas se as ações forem mantidas intactas e as pessoas trocarem de lugar.

Segundo Duval (1999) um dos problemas maiores da aprendizagem é a discriminação das unidades que são cognitivamente pertinentes. Fazendo as variações estruturais, verifica-se qual delas provoca variações cognitivas e qual não provoca e desenvolve-se a capacidade de efetuar esta discriminação. É possível, também, observar para um mesmo esquema todos os enunciados possíveis.

A seguir, demonstram-se as unidades que são cognitivamente pertinentes nos dois registros de representação do número: a palavra e o numeral arábico para que se possa, nas tarefas propostas na situação de ensino, propor variações cognitivas para provocar a compreensão do objeto matemático. As unidades cognitivamente pertinentes destes dois tipos de registro de representação têm que ser feita em

separado, já que as regras de formação da palavra e do numeral arábico que expressam o número são diferentes apesar de ambas compreenderem a estrutura do SND. Após essa identificação, deve-se submeter um dos registros a variações e verificar se elas produzem registros que têm como referência outros objetos matemáticos. Se isto acontecer, estará sendo identificada uma unidade cognitivamente pertinente, ao mesmo tempo, nos dois registros de representação: no próprio e no seu associado. Essas unidades estarão evidenciando a estrutura do SND nos dois registros de representação. Se houver uma variação num dos tipos de registro que não provoque uma associação a outro objeto matemático, então ter-se-á um tratamento no interior do próprio registro e também estarão sendo envolvidas as unidades cognitivamente pertinentes obedecendo as regras específicas e próprias do registro de representação, de acordo com sua natureza.

Por exemplo: na adição de 17 com 28, somam-se as 7 unidades com as 8 unidades obtendo-se 15 unidades. Dessas 15 unidades, 1 dezena é deslocada, portanto provocando uma transformação no registro: $15 = 10 + 5 = 1 \text{ d} + 5 \text{ u}$, mas ainda tendo por referência o mesmo objeto matemático. Esse tipo de transformação corresponde a um tratamento que envolve as unidades cognitivamente pertinentes (o valor posicional), uma vez que, as dezenas deverão ocupar uma outra posição, não podendo ficar na posição ocupada pelas unidades que não devem exceder a 9.

O mesmo ocorre numa adição proposta utilizando os dedos cardinalizados: em 7 mais 8 contam-se as 7 unidades levantando os dedos da mão esquerda e prosseguindo com os da mão direita. Continua-se a utilizar os dedos para acrescentar as 8 unidades, logo só poderão ser levantados mais 3 dedos. Os dez dedos que foram abaixados voltam a ser erguidos para indicar as 5 unidades que restam para acrescentar as 8 unidades. A soma pode ser anunciada como dez (do dez dedos abaixados) e cinco (dos cinco que restaram erguidos). Esse registro “dez e cinco” é substituído pela palavra quinze, sofrendo, portanto, uma transformação que não tem por referência outro objeto matemático. Esse tipo de transformação também envolve as variáveis cognitivamente pertinentes que no caso da palavra são os prefixos e os sufixos.

Na língua portuguesa, o padrão de organização das palavras que designam os

números segue uma regra que torna possível identificar as potências de dez (sufixos), o número de vezes que essas potências de dez (prefixos) estão representadas e o conectivo “è” que está associado à operação de adição. Num determinado intervalo numérico a regra muda. Tornar possível a identificação não significa, por sua vez, que está explicitado, uma vez que os mesmos sufixos e prefixos sofrem deformações das palavras criadas para os números de 1 a 10, escondendo a numerosidade subjacente. Mas esse fato não deve ser alvo das atividades que privilegiarão a operação de conversão ou da identificação das variáveis cognitivas pertinentes, e sim, das atividades que privilegiarão a operação de tratamento e de reconhecimento.

Por sua vez, o numeral arábico também tem sua regra de formação que compreende as potências de dez (logo a base do sistema de numeração) que pode ser identificada na posição ocupada pelo algarismo no numeral (logo o valor posicional). Essa regra de formação foi criada pelos hindus que adotaram um procedimento que fazia o algarismo ser acompanhado pela palavra que expressava a potência de dez, sendo com o tempo, suprimida. Essa expressão fez com que o algarismo adquirisse um valor relativo de acordo com a posição por ele ocupada no numeral.

Então serão provocadas variações nesses dois tipos de registros de representação do número para identificar as unidades cognitivamente pertinentes para serem o alvo das atividades que envolverão a operação de conversão.

Essa análise vai compreender os seguintes intervalos numéricos: as unidades simples de 1 a 10 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), os particulares de 11 a 15 (11, 12, 13, 14, 15), as dezenas simples (20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90), as centenas exatas (100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900), os milhares exatos (1000, 2000), itens do tipo dezena/unidade (16, 17, 18, 19, 21), centena/unidade (102), centena/dezena (118, 169), centena/particular (112), unidade/centena (200).

Variações em cada tipo de registro, separadamente envolvendo alguns números do tipo: particulares, dezenas exatas, itens do tipo D/U (Quadro 3).

Numeral arábico	Palavra
11 Variação no algarismo da direita 12 (referência a outro objeto) Variação no algarismo da esquerda 21 (referência a outro objeto)	Onze Doze (mesma pilha) Vinte e um (outra pilha)
12 Inversão da posição dos algarismos 21 (referência a outro objeto). O mesmo acontecerá para os demais particulares (13, 14 e 15) e para os itens tipo dezena/unidade compreendidos no intervalo [16; 99]	Doze Vinte e um (outra pilha)
20 Inversão dos algarismos 02 (referência a outro objeto) O mesmo acontecerá para o 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90	Vinte Dois (outra pilha)

QUADRO 3 - IDENTIFICAÇÃO DE UNIDADES COGNITIVAS EM CADA TIPO DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO

A escrita arábica admite variações na posição dos algarismos do numeral e no valor absoluto dos algarismos. A variação de posição provoca a referência a outro objeto (outro número) que pode ou não pertencer à mesma pilha (20 e 02 ou 32 e 23), e a variação do valor absoluto do algarismo também provoca uma referência a outro objeto que pode ser ou não da mesma pilha (11 e 12 ou 11 e 21). Isso significa que a posição e o valor absoluto dos algarismos são as unidades cognitivamente pertinentes que se sofrerem variações passam a ter por referência outro objeto.

Já a palavra escrita que representa o número vai sofrer variações nos sufixos e prefixos. Por exemplo: variação do prefixo "on" (referência a outro objeto) da mesma pilha: do, tre, quator ou quin. A partir do dezesseis, a variação é no sufixo para que não haja mudança de pilha. Se houver uma mudança no prefixo "dez" para "enta" deverá haver uma deformação do sufixo e uma inversão indicando múltiplos de 10. Se a inversão for para "entos" ou "entos" este provocará alteração na potência de 10. De qualquer forma, na palavra a alteração dos prefixos e sufixos criarão novos objetos que ora pertencem a mesma pilha e ora não pertencem. Mas, a alteração dos prefixos e

sufixos provocarão não somente trocas como na escrita arábica, mas também deformações e inversões. Logo sufixos e prefixos são as unidades cognitivamente pertinentes na palavra que expressa o número que ao sofrer variações têm por referência outro objeto matemático. Analisar-se-ão as variações dessas unidades identificadas nos dois registros, concomitantemente.

1) **Particulares:** A variação do valor absoluto do algarismo que representa as unidades provoca uma variação no prefixo em se tratando dos particulares

12 **Doze**

13 **Treze**

2) **Itens do tipo D/U**

a) A variação do valor absoluto do algarismo que representa as unidades provoca uma variação no sufixo em se tratando dos números compreendidos no intervalo [16 19]

16 **Dezesseis**

17 **Dezessete**

b) Já a variação do valor absoluto do algarismo que representa as dezenas provocará outras variações no registro associado.

12 **Doze**

16 **Dezesseis**

22 **Vinte** e dois

26 **Vinte** e seis

32 **Trinta** e dois

36 **Trinta** e seis

42 **Quarenta** e dois

46 **Quarenta** e seis

Em se tratando de um particular (do 11 ao 15), há uma variação no sufixo e uma inversão. Há também uma deformação, “do” para “dois”. No outro intervalo (do 16 ao 19) há uma variação no prefixo e não há deformação do sufixo. Para os dois casos há também a variação do número de palavras associados aos algarismos da escrita arábica. Para os números compreendidos entre 11 e 19 uma única palavra de forma que as sílabas (representadas pelos prefixos e sufixos) é que serão associadas aos algarismos. Quando esses numerais sofrem variações algumas dessas levam a

números compreendidos no intervalo [21; 99] que são representados por duas palavras ligadas pelo conectivo “e”, com exceção das dezenas exatas que serão an alisadas à parte.

3) Dezenas exatas

20 **vinte**

02 **dois**

30 **trinta**

03 **três**

40 **quarenta**

04 **quatro**

Os sufixos desaparecem com a inversão visto que eles deixam de representar múltiplos de 10 e passam a representar unidades singulares absolutas. Os prefixos por sua vez sofrem deformações.

4) Centenas exatas

100 cem 200 duzentos 300 trezentos 400 **quatrocentos**

010 dez 020 vinte 030 trinta 040 quarenta

001 um 002 **dois** 003 **três** 004 **quatro**

Nas centenas exatas há a possibilidade de duas variações compreendendo a mudança de posição do algarismo no numeral. Ambas provocam deformações dos prefixos e os sufixos sofrem variações ora representando grupos de cem, ora de dez e por fim nenhum tipo de agrupamento e sim unidades absolutas.

5) Numerais que compreendem C/U (centenas e unidades), C/P (centena com particular), C/D (centena com dezenas exatas) e C/D/U (centenas com dezenas não exatas)

101 **Cento e um**

110 **cento e dez**

011 onze

107 **cento** e sete
 071 setenta e um
 017 dezesete
 170 **cento** e setenta
 701 setecentos e um
 710 setecentos e dez

113 **cento** e treze
 131 **cento** e trinta e um
 311 trezentos e onze

150 **cento** e cinquenta
 105 **cento** e cinco
 015 quinze
 051 cinquenta e um
 510 quinhentos e dez
 501 quinhentos e um

162 **cento** e sessenta e dois
 126 **cento** e vinte e seis
 261 duzentos e sessenta e um
 216 duzentos e dezesesseis
 621 seiscentos e vinte e um
 612 seiscentos e doze

Todas as variações dos algarismos em relação à posição provocam um outro número, ora composto por dezenas e unidades e ora composto por centenas e dezenas (exatas ou não exatas). Na palavra pode-se identificar em que momento a mudança de

posição faz o algarismo assumir outro valor relativo. Esta identificação pode ser feita verificando os destaques em negrito (os grupos de cem), sublinhados duplamente (os grupos de dez) e sublinhados (as unidades). Pode-se observar que ora o algarismo representa unidades simples, ora grupos de dez e ora grupos de cem. O número de palavras em relação ao número de algarismos do numeral vai depender do tipo de número que se forma após a variação: C/U 2 palavras e 3 algarismos, C/D (exata) 2 palavras e 3 algarismos, C/D (não exata) 3 palavras e 3 algarismos, D/U (acima de 20) duas palavras e 2 algarismos e D/U (de 11 a 19) 1 palavra e 2 algarismos. Porém, mesmo que o número de palavras não seja igual ao número de algarismos é possível identificar os grupos de dez, cem e as unidades, ora nas palavras por inteiro, ora nas sílabas (sufixos e prefixos) que compõem uma das palavras.

Após essa análise, é possível focar as unidades cognitivamente pertinentes nas atividades que vão compreender as operações de conversão e de tratamento. Em cada uma das operações elas desempenharão desafios cognoscitivos diferentes, mas que estarão voltados para a aprendizagem da estrutura do SND, dos conteúdos das representações e para a diferenciação entre representante e representado.

4.1.1.3 A congruência ou a não congruência semântica entre as palavras e os numerais que expressam os números

Para entender as dificuldades das crianças em compreender a estrutura do SND presente na forma de organização dos numerais e das palavras que expressam os números, é necessário, em primeiro lugar, identificar a relação de congruência existente entre as duas redes semânticas, visto que ambas têm a mesma referência, que é a estrutura do sistema. Diferente da cardinalidade ou da ordinalidade compreendida nos números, a estrutura do SND pode ou não ser identificada nas palavras e nos numerais que expressam os números e pode ser identificada somente em uma das formas de representação ou em ambas. Uma das operações importantes em situações de aprendizagem deve compreender a conversão que significa passar de uma forma de

representação à outra. Dependendo da relação de congruência existente essa operação não tem um custo cognitivamente neutro. As duas formas de representação podem ter significados diferentes, mesmo se referindo ao mesmo objeto, o número, e mesmo fazendo referência à estrutura do SND: na palavra, essa estrutura pode estar, ou não, explicitada nos prefixos e sufixos e, nos numerais, ela estará explicitada na posição ocupada pelo algarismo.

Segundo Duval (1988) ‘entre duas representações de informação, há duas relações independentes a considerar: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica. Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes’ (p. 8).

Na matemática está presente, em todos os momentos, a substituição de uma forma de representação por outra. Passa-se da linguagem natural para a linguagem algébrica e dela, para a representação por gráficos ou figuras geométricas; converte-se uma relação expressa aritmeticamente para uma expressão algébrica ou geométrica e assim por diante. Existe também o tratamento numa mesma forma de representação que altera essa forma da representação. Segundo Duval (1988) ‘a conduta em matemática implica uma substitutividade tanto inter-registro como intra-registro com base numa invariabilidade de referência’ (p. 8). Ao mudar de registro é necessário respeitar certos procedimentos de codificação e enfrentar as dificuldades inerentes às diferenças entre as redes semânticas.

A importância da identificação da congruência e não-congruência entre dois registros de representação reside no fato de que a natureza das dificuldades pode ser devido à manipulação de dados que pertencem a redes semânticas diferentes, com diferentes tipos de procedimentos, que pode ser bem ou mal sucedida. O sucesso dependerá da maior ou menor congruência das formas de representação.

Na escrita verbal, há os sufixos e os prefixos que expressam as potências de dez e as quantidades básicas e temos também a forma como estes prefixos e sufixos se articulam entre si, através de operações de adição e multiplicação.

Na escrita numérica também há os algarismos que, de acordo com a posição,

expressam potências de dez, de acordo com a quantidade expressam um produto por uma potência de dez e também se articulam entre si através de uma adição.

Nas atividades de conversão há de se analisar o fenômeno da congruência a fim de verificar o grau de complexidade para que essa possa ser coordenada pelo sujeito conhecedor. Essa análise vai exigir a segmentação dos dois registros de representação em suas unidades significantes respectivas, a colocação em correspondência destas unidades significantes e a verificação dos três critérios de congruência: a possibilidade de uma correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a mesma ordem das unidades componentes de cada um dos registros de representação. Ela vai exigir também a identificação dos tipos de registros de representação e a atividade cognitiva de conversão entre dois registros de representação que envolve as relações entre cada representante e o representado (expressão e tratamento) e as relações entre os representantes (conversão).

Analisar-se-á, então, o grau de congruência dos dois registros de representação: um tipo de registro multifuncional que não permite tratamentos algoritmizáveis, no caso da representação do número por meio da língua natural; um tipo de registro monofuncional que permite tratamentos algoritmizáveis, no caso da representação do número através de algarismos arábicos.

Analisar-se-ão os números de acordo com intervalos específicos e de acordo com as especificidades decorrentes das irregularidades do sistema verbal: as dezenas exatas, os particulares de 11 a 15, as centenas exatas (100, 200 ...), os milhares exatos (1000, 2000,), alguns números inferiores a cem e de estrutura simples Dezena- Unidade, DU (16, 21, 47, ...), centenas, dezenas e unidades numa relação de soma e produto (105, 112, 117, 123..) (Quadro 4).

Número expresso por meio da palavra e por algarismos	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Mesma ordem das unidades de significado
10 dez	Não (dois algarismos e uma só palavra)	Não	Não
20 <u>vinte</u>	Sim, (a palavra vinte pode ser decomposta em duas unidades de significado: o prefixo ‘vin’ e o sufixo ‘te’). Essa análise vale para o 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90.	Não, porque o prefixo ‘vin’ é uma deformação da palavra dois e o sufixo ‘te’ da palavra dez. Essa análise vale para o 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90.	Sim. O ‘vin’ corresponde ao 2 e o ‘te’ ao 0.
11 onze 12 doze 13 treze 14 quatorze 15 quinze	Sim, (a palavra onze pode ser decomposta em duas unidades de significado: o prefixo ‘on’ e o sufixo ‘ze’). Essa análise vale para o 12, 13, 14 e 15.	Não, porque o prefixo ‘on’ é uma deformação da palavra ‘um’ e o sufixo ‘ze’ uma de formação da palavra ‘dez’. Essa análise vale para o 12, 13, 14 e 15.	Não, pois no numeral arábico há o 1 da esquerda valendo dez, e o 1 da direita valendo um, e onze representa $10 + 1$. Na palavra o prefixo ‘on’ vale um e o sufixo ‘ze’ vale 10 e onze significa $1 + 10$, portanto em ordem inversa. Essa análise vale para o 12, 13, 14 e 15.
100 cem	Não, pois existem 3 algarismos na representação arábica para serem colocados em correspondência com uma única palavra.	Não	Não
200 duzentos 300 trezentos 400 quatrocentos 500 quinhentos 600 seiscentos 700 setecentos 800 oitocentos 900 novecentos	Não, pois existem 3 algarismos na representação arábica para serem colocados em correspondência com um prefixo ‘duz’ e um sufixo ‘entos’. Essa mesma análise vale para o 300, 400, 500, 600, 700, 800 e 900.	Não, pois o prefixo ‘duz’ é uma deformação da palavra ‘dois’ e o sufixo ‘entos’ uma deformação da palavra ‘cem’ e também porque existem 3 algarismos na notação arábica e duas sílabas na palavra com significados diferentes. Essa mesma análise vale para o 300, 400, 500, 600, 700, 800 e 900.	Sim, pois o 2 representa 2×100 e na palavra temos 2 (duz) $\times 100$ (entos). Essa mesma análise vale para o 00, 400, 500, 600, 700, 800 e 900.
1000 mil	Não, pois há 4 algarismos na representação arábica para serem colocados em correspondência com uma única palavra.	Não	Não
2000 dois mil	Não, pois 4 algarismos	Não, pois a palavra ‘mil’	Sim, pois o 2

<p>3000 três mil 4000 quatro mil 5000 cinco mil 6000 seis mil 7000 sete mil 8000 oito mil 9000 nove mil</p>	<p>na representação arábica para serem colocados em correspondência com as palavras “dois” e “mil” sendo que a palavra “mil” tem que ser colocada em correspondência com 3 dígitos na representação arábica. Essa análise vale para o 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 e 9000.</p>	<p>tem que ser associada a três zeros da notação arábica. Essa análise vale para o 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 e 9000.</p>	<p>representa 2×1000 e na palavra 2(dois) $\times 1000$ (mil). Essa análise vale para o 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 e 9000.</p>
<p>25 vinte e cinco</p>	<p>Não, (o conectivo “e” explicita uma adição) e essa operação não é explicitada por nenhum sinal específico na representação arábica. Essa análise vale para os números compreendidos no intervalo [21; 99] com exceção das dezenas exatas.</p>	<p>Não, pois a palavra vinte apresenta um sufixo e um prefixo a serem associados ao algarismo da escrita arábica, que por sua vez é $2 \times 10 = 20$, mas que está atrás do 5 no 25. Essa análise vale para os números compreendidos no intervalo [21;99] com exceção das dezenas exatas com as especificidades das palavras trinta, quarenta,... noventa..</p>	<p>Sim, pois vinte é 2×10 somado ao cinco por meio do conectivo “e”, na representação arábica, o dois vale 2×10 e é somado ao 5, portanto, mesma ordem. Essa análise vale para os números compreendidos no intervalo [21;99] com exceção das dezenas exatas com as especificidades das palavras trinta, quarenta,.. noventa.</p>
<p>105 cento e cinco</p>	<p>Não, pois as três palavras não são associadas aos três algarismos, visto que o conectivo “e” será associado a uma adição. Essa análise vale para os números compreendidos [101; 199].</p>	<p>Não, pois são três algarismos 100, associados a uma única palavra “cento”, escondidos atrás do 5. Essa análise vale para os números compreendidos [101;199] com as especificidades das unidades e dezenas que estão sendo somadas à centena.</p>	<p>Sim, pois a palavra cento significa 1×100 e o algarismo 1 da esquerda significa 1×100 sendo ambos somados com cinco. Essa análise vale para os números compreendidos [101;199] com as especificidades das unidades e dezenas que estão sendo somadas à centena.</p>

QUADRO 4 - ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA OU NÃO CONGRUÊNCIA ENTRE O NUMERAL ARÁBICO E A PALAVRA PARA ALGUNS NÚMEROS

As tarefas propostas para vencer a barreira e os obstáculos colocados pela não congruência na situação de ensino, serão mais adiante apresentadas e as condições

impostas serão explicitadas. No instrumento de coleta das informações qualitativas, estas variações foram levadas em consideração para analisar as dificuldades dos alunos e também serão explicitadas.

4.1.1.4 Critérios para categorização dos dados e interpretação dos resultados

- a) observação do sucesso dos alunos numa seqüência de itens;
- b) organização das tarefas das situação de ensino de modo a considerar os dois sentidos da conversão;
- c) organização das tarefas das situação de ensino de modo a considerar casos mais ou menos complexos de não congruência;
- d) organização das tarefas das situação de ensino de modo a considerar tarefas de produção e de reconhecimento.

Para cada uma das provas do instrumento de coleta das informações qualitativas foram identificados os diferentes tipos de respostas dadas, argumentos ou justificativas apresentadas, estratégias utilizadas ou heurísticas das quais foram lançado mão. Foi possível, desta forma, verificar o sucesso do aluno ao resolver a questão proposta ou se ele aproximou-se da compreensão do objeto, mostrando-se inconsistente do ponto de vista lógico. Após essa identificação foi possível interpretá-los segundo as seguintes categorias:

a) Em relação ao objeto: a estrutura do SND

1. Identificação da estrutura do SND na palavra: sufixos, prefixos e caráter operatório que os ligam;
2. Identificação da estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral;
3. Não identificação da estrutura do SND na palavra: lexicalização direta;
4. Não identificação da estrutura do SND no numeral arábico numa atividade de reconhecimento.

b) Em relação ao conteúdo da representação

1. Identificação do padrão de organização da escrita arábica $abc...x \rightarrow a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + c \times 10^{n-2} + \dots \times 10^0$;
2. Identificação do padrão de organização da palavra: deformações das palavras criadas para os números de 1 a 9, presentes em sufixos e prefixos, deformações da palavra dez, presentes em sufixos ou prefixos, e a composição dessas através de adições e multiplicações;
3. Não identificação de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nos prefixos e sufixos das palavras;
4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica.

c) Numa operação de conversão

1. Não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência:
 - Plano dos objetos \rightarrow representação arábica
 - Representação arábica \rightarrow plano dos objetos
 - Plano dos objetos \rightarrow escrita
 - Escrita \rightarrow plano dos objetos
 - Representação arábica \rightarrow escrita
 - Escrita \rightarrow representação arábica

Com base na interpretação dos resultados, foi possível organizar e elaborar as tarefas da situação de ensino que procuraram considerar casos mais ou menos complexos de não congruência, os dois sentidos da conversão e tarefas de produção e reconhecimento. Elas serão apresentadas mais adiante e essas questões apontadas serão explicitadas.

4.2 INSTRUMENTO DE COLETA DAS INFORMAÇÕES QUALITATIVAS

Também buscou-se informações qualitativas que pudessem subsidiar as tarefas a serem propostas para a situação de ensino elaboradas para propiciar compreensão do SND, por parte das crianças. Para tanto, elaborou-se um instrumento

de coleta de informações qualitativas composto por algumas provas compreendendo algumas tarefas. Essas provas foram testadas em grupos menores de sujeitos a fim de refinar o instrumento em relação às compreensões buscadas. Para composição desse instrumento elaborou-se, primeiramente, dois instrumentos pilotos, propostos em dois momentos distintos. Num primeiro momento, o instrumento contou com a replicação de uma prova de Kamii (1992) e de outras duas de outros pesquisadores apresentadas em sua obra, com algumas alterações. As diversas tarefas das 3 provas foram propostas a dois sujeitos do ensino fundamental, sendo um de uma escola estadual de Ponta Grossa, Paraná, e outro de uma escola estadual do Balneário de Camboriú, Santa Catarina. Num segundo momento, outras provas foram elaboradas e aplicadas a 8 sujeitos de 3ª série de uma escola estadual de Navegantes em Santa Catarina. Após a aplicação, procedeu-se a uma análise a respeito dos procedimentos adotados, também com o objetivo de refinar o instrumento para fornecer informações qualitativas mais profundas sobre a compreensão do SND pelas crianças. Num terceiro momento, foi organizado o instrumento final, de coleta de informações qualitativas, com as provas e as tarefas das duas aplicações pilotos e foram propostas a 47 crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Ponta Grossa no Paraná. Utilizamos o método clínico-crítico²⁴ para conduzir as provas e proceder com a análise interpretativa dos desempenhos e condutas dos sujeitos. A opção pelo método clínico é importante por possibilitar a pesquisadora estar atento, não só às respostas dadas isoladamente, mas também aos argumentos e contra-argumentos que os sujeitos da pesquisa utilizam para comparar ou refutar suas hipóteses.

A aplicação das provas foi feita pela pesquisadora. As entrevistas foram filmadas para que as verbalizações, os argumentos e as realizações práticas dos entrevistados pudessem ser obtidas com mais fidelidade e precisão.

²⁴ Face a limitação deste trabalho, não descrevermos o método clínico-crítico proposto por Piaget, no entanto sugere-se a leitura das obras de Delval (2002), Carraher (1994). A leitura de algumas obras de Piaget permitem identificar a caracterização do método e as reformulações que sofreu no desenvolvimento das diversas pesquisas por ele desenvolvidas.

Após essa aplicação, procedeu-se à identificação de tipos de respostas para uma mesma questão, das estratégias e argumentos utilizados e das argumentações e explicações apresentadas. Em seguida, as respostas foram categorizadas e as diferentes respostas para uma mesma categoria foram identificadas. Finalmente, realizou-se a interpretação dos resultados obtidos. A partir dessa interpretação, num quarto momento foram elaboradas as tarefas a serem propostas para a situação de ensino e, num primeiro momento, propostas a uma dupla de crianças de 4^a série. A partir dessa aplicação, foi possível analisar as tarefas propostas compreendidas nas diversas atividades, reformulá-las ou adequá-las em relação aos encaminhamentos, complementá-las com itens, perguntas, argumentos ou contra-exemplos. As atividades foram então propostas a outras duplas.

Estes quatro momentos serão, a seguir, apresentados de modo a expor a trajetória percorrida, na qual buscou-se refinar o instrumento de levantamento de informações qualitativas a respeito da compreensão da estrutura do SND, por parte das crianças cujo objetivo foi subsidiar a elaboração de uma situação de ensino. Mais especificamente, estes momentos são: a aplicação de provas aos dois sujeitos, um de Ponta Grossa e outro de Camboriú (momento 1); a aplicação de outras provas às oito crianças de Navegantes (momento 2); a organização do instrumento de coleta das informações qualitativas e sua aplicação às 47 crianças de Ponta Grossa, a identificação de tipos de respostas, estratégias e procedimentos utilizados, explicações e argumentações apresentadas, categorizações com base em critérios previamente estabelecidos e a interpretação dos resultados (momento 3); a organização das atividades e sua aplicação às duplas de crianças de 3^a e 4^a séries, a análise dos procedimentos e encaminhamentos, as reformulações e adaptações e a aplicação a outras 4 duplas, a identificação dos resultados encontrados e sua interpretação (momento 4).

4.2.1 Momento 1: a replicação das provas de Kamii (1992), Bernadz e Janviers (1982, apud Kamii, 1992) e de Cauley (1988, apud Kamii, 1992) com adaptações

Esse momento compreendeu a aplicação de um instrumento composto por 3 provas com diversas tarefas.

Na primeira prova, os sujeitos tinham que contar fichas, anotar o valor num papel e circular, na escrita arábica, o número de fichas correspondentes a cada dígito da representação de acordo com seu valor relativo. Para valores apresentados em escrita arábica, num cartão, separavam o número de objetos correspondentes e os circulavam de modo a representarem os algarismos da escrita arábica de acordo com seu valor relativo. Também, a partir de contagem de figuras desenhadas numa folha, ora dispostas linearmente ora dispostas aleatoriamente ou em forma retangular, procedendo da mesma forma: circular figuras desenhadas para cada algarismo da escrita arábica de acordo com seu valor relativo.

Na segunda prova, os sujeitos tinham de realizar uma operação de adição mental, com reserva, envolvendo números de dois algarismos e uma subtração no papel, também com reserva. Para ambas os sujeitos deveriam justificar a necessidade do empréstimo e a sua transformação em 10 unidades (no caso da subtração) e para o procedimento adotado para a soma que ultrapassa 10 unidades (no caso da adição).

Numa terceira prova, os sujeitos recebiam cartões nos quais estavam escrito: 1 unidade, 2 unidades... 5 unidades, 10 unidades, 11 unidades, 12 unidades, 3 dezenas ... 5 dezenas, 40 dezenas, ...45 dezenas, 51 dezenas, 3 centenas e 5 centenas. Um número, determinado pelo sujeito, pertencente ao intervalo]402;513[deveria ser escolhido e os cartões representativos da quantidade deveriam ser separados.

Um dos estudos da pesquisadora²⁵ revelou a insuficiência dos dois numerais

²⁵ Realizado em Ponta Grossa, institucionalizado na UEPG, Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Setor de Ciências Humanas Letras e Artes, como projeto de pesquisa intitulado “O valor posicional e suas implicações ... para o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino básico”.

(16 e 25) utilizados por Kamii para a investigação da compreensão do valor posicional presente na estrutura do SND. Por esta razão foram incluídos valores com zero intercalado (105), dezenas exatas (30 e 70), outros valores que poderiam sofrer a influência de rótulos verbais, a exemplo de 37 e 54 e o número 16 foi substituído pelo 15.

O mesmo estudo revelou que a disposição linear dos objetos poderia induzir à contagem correta sem necessidade do respeito aos princípios lógicos da contagem. Buscava-se a certificação do domínio das técnicas de contagem pelos sujeitos para nos deter na sua compreensão do valor posicional, quando da escrita de números, motivo pelo qual as diversas configurações para a disposição dos objetos.

Por essa razão outras adaptações foram efetuadas: os objetos apresentados foram dispostos de forma linear e não linear; foi apresentado o numeral escrito em cartão para separação dos objetos correspondentes à quantidade; foram incluídos outros numerais (15, 25, 37, 54, 30, 70 e 105).

4.2.2 Momento 2: elaboração de novas provas, aplicação junto a um grupo de 8 sujeitos, análise dos procedimentos e encaminhamentos

A partir da aplicação das provas aos sujeitos, algumas alterações foram feitas para compor um novo instrumento piloto para coletar informações qualitativas a respeito da compreensão do SND e subsidiar a elaboração da situação de ensino. Uma das alterações diz respeito aos valores numéricos compreendidos na prova 1, que foram substituídos pelos numerais: 12, 22, 38, 17, 30 e 108. Essa alteração não provocou nenhuma alteração significativa nas tarefas da prova, pois os valores tinham as mesmas características dos apresentados na aplicação piloto. O número doze, compreendido entre 10 e 15, o 22 e o 38, como os que explicitam as dezenas, o 17 explicitando a dezena na palavra, uma dezena exata e uma centena com zero intercalado. No teste piloto esses valores correspondem respectivamente a: 12 ao 15, 22 ao 25, 38 ao 37. Os demais permaneceram inalterados, com exceção do valor 17,

que foi incluído visto que entre os valores compreendidos entre 10 e 20 julgou-se necessário apresentar um valor que trouxesse mais explicitado na palavra a dezena, e um outro que não trouxesse explicitado a dezena na palavra que o expressa (no caso do 12).

Foram efetuadas outras modificações relativas à prova 2. Para as operações a serem realizadas com lápis e papel julgamos necessário acrescentar uma adição junto com uma subtração, ambas com reserva. Esta prova constituiu uma prova separada do instrumento.

Para as operações mentais julgou-se adequado apresentar os valores envolvidos através de problemas aditivos para que estratégias diferentes pudessem ser utilizadas, porque a apresentação de valores para uma adição, sem um contexto específico, levou os alunos a recorrerem ao algoritmo de cabeça para encontrar a soma. A apresentação dos valores envolvidos nas adições, através de problemas aditivos, levou os sujeitos da investigação a lançarem mão dos dedos, possibilitando a identificação de procedimentos diferenciados que revelavam o tratamento do valor a partir de sua decomposição em dezenas e unidades, ou a partir de sua localização numa série específica. Com esta modificação ficou organizada uma nova prova para o instrumento.

A prova 3 não foi incluída no instrumento e foi substituída por outras duas. Uma primeira que solicitava a identificação das centenas, dezenas e unidades que compunham o número, e a outra que solicitava a identificação da palavra nos algarismos do numeral que expressava a quantidade.

As novas provas, com suas diversas tarefas foram propostas a oito crianças de uma escola da rede estadual de ensino, da cidade de Navegantes, Santa Catarina, do 2º ciclo da educação fundamental escolhidas por sorteio.

A seguir será realizada a descrição dessas provas acompanhadas de uma análise dos procedimentos e encaminhamentos que permitiram identificar reformulações necessárias e elaborar o instrumento definitivo de coleta de informações qualitativas a respeito da compreensão do SND.

PROVA 1: Identificação das centenas, dezenas e unidades nos dígitos da representação do número por algarismos.**DESCRIÇÃO**

Tarefa 1: Foi apresentado, por escrito, com utilização de algarismos, o número 12 e foi perguntado às crianças quantas unidades e quantas dezenas esse número tem. Foi também perguntado quantas unidades têm a dezena que compõe o número.

Tarefa 2: Foi desenvolvida a mesma tarefa compreendendo os números 17, 25, 38, 60, 106, 118 e 169.

PROVA 2: Identificação da relação entre o número expresso pela palavra e com a utilização da algarismos**DESCRIÇÃO**

Tarefa 1: Foi apresentado às crianças o número treze, escrito em linguagem natural. Solicitou-se que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Em seguida foi pedido para que as crianças identificassem, no número escrito com algarismos, a palavra escrita treze.

Tarefa 2: Foi apresentado às crianças o número 23 escrito por extenso (vinte e três). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi perguntado qual dos algarismos correspondia à palavra vinte e qual dos algarismos correspondia à palavra três.

Tarefa 3: Foi apresentado às crianças o número 48 por extenso (quarenta e oito). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi perguntado qual dos algarismos correspondia à palavra quarenta e qual dos algarismos correspondia à palavra oito.

Tarefa 4: Foi apresentado às crianças o número 50 por extenso (cinquenta). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi pedido para que as crianças identificassem, no número escrito com algarismos, a palavra escrita cinquenta.

Tarefa 5: Foi apresentado às crianças o número 107 por extenso (cento e sete). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi pedido para que as crianças identificassem, no número escrito com algarismos, a palavra cento e a palavra sete.

Tarefa 6: Foi apresentado às crianças o número 116 por extenso (cento e dezesseis). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi pedido para que as crianças identificassem, no número escrito com algarismos, a palavra cento e a palavra dezesseis.

Tarefa 7: Foi apresentado às crianças o número 169 por extenso (cento e sessenta e nove). Foi solicitado que elas escrevessem o número utilizando algarismos. Foi perguntado qual dos algarismos correspondia à palavra cento e qual dos algarismos correspondia à palavra sessenta e qual dos algarismos correspondia à palavra nove.

PROVA 3: Resolução mental de problemas com estrutura aditiva

DESCRIÇÃO

Tarefa 1: Foi pedido para as crianças resolverem, mentalmente, o problema "Um objeto custa 38 reais. O preço aumentou em 7 reais. Quanto custa agora o objeto?"

Em entrevista clínica foi solicitado que as crianças descrevessem como procederam para encontrar a solução.

Tarefa 2: Foi pedido para as crianças resolverem, mentalmente, a seguinte questão: "Num aquário há 15 peixes azuis e 18 peixes vermelhos. Quantos peixes há ao todo no aquário?"

Em entrevista clínica, foi solicitado que as crianças descrevessem como procederam para encontrar a solução.

Tarefa 3: Foi pedido para as crianças encontrarem, mentalmente, a solução para o seguinte problema: "Eu tinha 27 figurinhas e ganhei do meu amigo 24. Com quantas figurinhas fiquei?"

Em entrevista clínica, foi solicitado que as crianças descrevessem como procederam para encontrar a solução.

Tarefa 4: Foi pedido para as crianças encontrarem a solução, mentalmente, para a seguinte questão: "Eu tinha 50 figurinhas na minha coleção e dei 23 repetidas para o meu amigo. Com quantas fiquei?"

Em entrevista clínica, foi solicitado que as crianças descrevessem como procederam para encontrar a solução.

Tarefa 5: Foi pedido para as crianças encontrarem a solução, mentalmente, para a seguinte questão: "Eu tinha 66 reais na minha carteira e gastei 37 reais para comprar um tênis. Quanto tenho ainda na minha carteira?"

Em entrevista clínica, foi solicitado que as crianças descrevessem como procederam para encontrar a solução.

PROVA 4: Realização de adições e subtrações com utilização do algoritmo.

DESCRIÇÃO

O entrevistador apresentou às crianças três adições e quatro subtrações para serem resolvidas com utilização do algoritmo, por escrito. As adições e subtrações foram dispostas na vertical. As adições e subtrações compreenderam os números a seguir (14 + 9; 17 + 19; 26 + 28; 70 – 47; 86 – 49; 105 – 67, 327 - 149)

14	17	26	70	86	105	327
<u>+9</u>	<u>+19</u>	<u>+28</u>	<u>-47</u>	<u>-49</u>	<u>-67</u>	<u>-149</u>

Em entrevista clínica, o entrevistador solicitou que as crianças justificassem, no momento da manipulação do algoritmo, os seguintes procedimentos: em $4 + 9 = 13$ porque o 1 foi para cima do 1 do 14; em $7 + 9 = 16$ porque 1 do 16 foi para cima do 1 do 17; em 7 não dá para tirar de zero, então empresta 1 do sete, se este 1 vale 1 mesmo (em caso afirmativo, perguntou-se porque não ficou 7 para 1); em 9 não dá para tirar de 6, então empresta 1e se este 1 vale 1 mesmo (em caso afirmativo perguntou-se porque não ficou 7 ao invés de 16).

4.2.2.1 Análise do valor dos procedimentos e das tarefas das provas

Após aplicação das provas com suas diversas tarefas, foi possível avaliar a consistência e adequabilidade das perguntas feitas, dos valores propostos e da quantidade de itens em relação ao tempo de duração das provas. Também foi possível avaliar a forma de conduzir a prova junto às crianças.

PROVA 1

Em relação à prova 1, procurou-se investigar de que forma a criança identifica os agrupamentos e os agrupamentos de agrupamentos nos diversos números propostos. Em virtude disso, contemplou-se os números compreendidos entre 11 e 15 (no caso 12), entre 16 e 19 (no caso 17), dezenas exatas (no caso 60) e não exatas (no caso 25 e 38) e centenas com zeros intercalados ou não (no caso 106, 118 e 169). Para cada valor apresentado, perguntava-se se no número escrito em algarismos a criança

identificava as unidades, dezenas e centenas que o compunham e, ao mesmo tempo, investigava-se se a criança sabia que numa dezena há dez unidades e numa centena há cem unidades.

Esta prova compreendeu a investigação da atribuição de significação ao conteúdo do registro de representação do número com utilização da escrita arábica. Este conteúdo compreende um padrão de organização de forma a dispor os algarismos, da direita para a esquerda. Tais algarismos representam o número de vezes que potências crescentes de dez puderam ser organizados. Estas potências de dez recebem nomes específicos (unidades, dezenas, centenas,...).

As perguntas feitas e os valores considerados mostraram-se adequados para a explicitação de três aspectos distintos: a identificação de unidades, dezenas e centenas nos dígitos isolados que compõem o número (oriundas de uma aprendizagem escolar), a identificação de dezenas e centenas como agrupamentos de unidades e dezenas, respectivamente, e a não atribuição de significação a isto que se denomina unidades, dezenas e centenas.

Foram identificadas diferentes respostas para a pergunta: "heste número tem unidades?" Algumas crianças respondiam 12, 17, 25, 38, 60, 106, 118 e 169 unidades, e outras identificavam as unidades somente no último dígito da direita. (2,7,5,8,0,6,8 e 9) O mesmo aconteceu para a pergunta: "Neste número tem dezenas?" Algumas crianças responderam, 1 dezena para os valores 12 e 17, 2 dezenas para o 25, 3 dezenas para o 38, 6 para o 60 e 10 para o 106, 11 para o 118 e 16 para o 169 (significando nesses 3 últimos valores a identificação das dezenas nas centenas), enquanto outras só identificaram as dezenas e no segundo algarismo da direita para a esquerda.

Nos números de dois algarismos (salvo as crianças que não atribuíam significado a estas palavras, identificando-as de forma invertida), todas as crianças identificavam corretamente as dezenas. Esse fato significou a adequabilidade das perguntas feitas para a explicitação por parte da criança da identificação dos agrupamentos e dos agrupamentos de agrupamentos que ela é capaz de enxergar no

número escrito com algarismos. Isso foi identificado em respostas como: no 60 tem zero unidades; no 106 tem 1 centena, zero dezenas e 6 unidades. Sugere-se acrescentar à prova as perguntas; "Nesta parte do número tem unidades?" e "Nesta parte do número tem dezenas?"; apontando para os dígitos isolados da representação, em substituição às perguntas "Numa dezena tem quantas unidades?" e "Numa centena tem quantas unidades?" para ter certeza da identificação por parte das crianças dos agrupamentos e dos agrupamentos de agrupamentos presentes nesta forma de representação.

Em relação aos números, julgou-se que as quantidades 12 e 17, enquanto escrita em algarismos, não carregam a irregularidade das palavras escritas doze (dois mais dez), e dezessete (dez mais sete) o mesmo acontecendo para as dezenas não exatas 25 (vinte mais cinco) e 38 (trinta mais oito). Conclui-se que a prova pode dispensar um desses números.

PROVA 2

Com a proposta da prova 2, buscou-se investigar a identificação das palavras escritas nos dígitos da representação do número expresso por algarismos e a relação entre o número expresso por palavras e o número expresso por algarismos. Para tanto, foram escolhidos números expressos por uma única palavra correspondente a um número expresso por dois algarismos (no caso treze, 13, e sessenta, 60); números expressos por duas palavras (sem considerar o conectivo "e") correspondentes a números expressos por dois algarismos (no caso vinte e três, 23 e quarenta e oito, 48); números expressos por duas palavras e correspondentes a números expressos por três algarismos (no caso cento e sete, 107 e cento e dezesseis, 116); números expressos por três palavras correspondentes a números expressos por três algarismos (no caso cento e sessenta e nove). O objetivo da prova foi investigar as especificidades que carregam as representações dos números por meio da palavra e por meio de algarismos. Também, as ligações que os sujeitos são capazes de fazer entre essas duas representações, identificando a palavra escrita nos dígitos que compõem a representação do número através de algarismos. Os números escolhidos apresentam maior ou menor grau de

não-congruência, conforme análise apresentada anteriormente. Existem números que não atendem a duas das três condições necessárias para a congruência, e os que não atendem a uma das três condições.

Considerou-se que as diversas tarefas que compuseram essa prova mostraram-se adequadas, com exceção dos dois números correspondentes às dezenas não exatas (23 e 48), Um deles pode ser eliminado. Seria adequado incluir algum número entre 16 e 19 (dez mais seis, dez mais sete, dez mais oito e dez mais nove) pelo fato de que as palavras que os representam, apresentam uma regularidade maior em relação às palavras que expressam os números de 11 a 15 (um mais dez, dois mais dez, três mais dez, quatro mais dez e cinco mais dez).

A prova possibilitou identificar formas de visualização da palavra nos dígitos do numeral arábico, como, por exemplo, uma criança que enxergava as palavras nos dígitos isolados acompanhadas de zero (por exemplo: no vinte e três “a palavra vinte está no dois e zero”, isto é, se no lugar do três estiver um zero).

A prova possibilitou também identificar erros classificados como de sintaxe, pois uma criança poderia escrever 205 para 25 ou 1007 para 107, traduzidos como a conservação dos itens lexicais, mas sem o respeito à posição. Isso porque na prova os números foram ditados.

Uma das tarefas da prova revelou-se intrigante. O número cento e dezesseis, apesar de expresso por duas palavras correspondentes a três dígitos não apresentou dificuldades para todas as crianças investigadas. O cento era associado ao 1 e o dezesseis ao 16 (apesar de uma única palavra, ao 16 com dois dígitos). Essa associação não era feita para as palavras treze e sessenta. Julgou-se interessante testar uma outra hipótese: apresentar um número expresso por uma palavra e por dois dígitos (13, treze) e o mesmo valor presente na centena (por exemplo, cento e treze), voltar à pergunta inicial após o questionamento envolvendo o valor cento e treze.

Avaliou-se também como mais conveniente apresentar os mesmos números para as provas 1 e 2. Cada uma das provas ficaria com suas tarefas e perguntas

específicas

Identificou-se, também uma outra possibilidade para a prova 2, que complementaria as provas 1 e 2: pedir para a criança identificar na palavra escrita as unidades, dezenas e centenas. Nessa questão identificar-se-ia com que peso as palavras que expressam os números explicitam os agrupamentos, os agrupamentos de agrupamentos e as operações de adição e subtração presentes na regra de formação do SND. Pediríamos para a criança identificar nas palavras as unidades, dezenas e centenas. Seguramente essas complementações estariam dando indícios das dificuldades e barreiras a ultrapassar para a compreensão da estrutura do SND na formação das palavras e das irregularidades presentes.

PROVA 3

A prova 3 possibilitou identificar, a partir dos procedimentos e condutas apresentadas pelas crianças para a resolução dos problemas, envolvendo adições e subtrações, a forma de decomposição das quantidades expressas de forma oral e a associação dessa forma de decomposição com a explicitação pela criança da compreensão da estrutura do SND. Nesses procedimentos. “à contagem na seqüência”, o “contar todos” e o algoritmo imaginado, foram identificados nas crianças que não decompunham os números em suas partes constituintes, trabalhando com as cardinalidades estabelecidas pelas palavras que expressavam os números.

As estruturas dos problemas não constituíram nenhuma dificuldade para a identificação das operações de adição e subtração que tinham sentido próprio de retirada, acréscimo ou reunião. As quantidades envolvidas também não apresentaram dificuldades e nem esforço demasiado para as crianças que não decompunham os numerais em suas partes constituintes. Os dedos eram utilizados para a estocagem das unidades idênticas, e também fatos numéricos estocados na memória.

Os problemas apresentados na prova 3 apresentam as estruturas de transformação e de parte-todo. São problemas classificados por Vergnaud (1985) com estrutura aditiva por envolverem adições ou subtrações. Segundo resultados de

pesquisas (VERGNAUD, 1985; FAYOL (1996) esses problemas são mais fáceis, pois as subtrações e as adições apresentadas são *sui generis* e não supõem, de maneira alguma, a introdução prévia da adição. Dar, perder, descer, diminuir, etc, são transformações que tem um significado próprio. Elas são evidentemente da mesma categoria que as transformações opostas, receber, ganhar, subir, aumentar, etc, mas elas não lhes são de maneira alguma subordinadas. A subtração não exige ser definida como o inverso da adição, ela tem um significado próprio.

Porém, há de se evidenciar que os sentidos de números presentes nas situações não são os mesmos: os problemas envolvem medidas estáticas ou medidas de transformação e esse fato vai colocar em jogo conceitos em ação, diferenciados na resolução dos problemas pelas crianças. Esses sentidos são, segundo Vergnaud (1990), constitutivos das estruturas aditivas e envolverão o conceito de cardinal e de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (ganhar, perder) e de composição binária (quanto em tudo).

Fayol (1996) apresenta como resultados de sua pesquisa que buscou evidenciar a organização semântica subjacente aos problemas aritméticos, que não são as operações (adição, subtração) que diferenciam os problemas e sim as situações estáticas ou dinâmicas, sendo que as situações dinâmicas são resolvidas com mais sucesso que as estáticas. Como exemplo, ele cita os dois tipos de problemas: “Jean deve preparar hambúrgueres. Ele tem quatro hambúrgueres no grill e seis no refrigerador. Quantos hambúrgueres ele tem? “è” Jean deve preparar hambúrgueres. Ele tem quatro no grill, tira seis do refrigerador e os coloca sobre o grill. Quantos hambúrgueres ele tem?“. Os dois problemas apresentam dificuldades diferentes, pois envolvem sentidos de grandezas distintas: grandezas estáticas e medidas de transformação, respectivamente.

Os problemas da prova 3 foram propostos considerando resultados de pesquisas no tocante a aspectos semânticos, conforme apontado por Fayol (1996). Segundo o autor, “as características semânticas dizem respeito aos conhecimentos conceituais relativos aos aumentos, diminuições, combinações e comparações de

conjuntos de elementos” (p. 125). Essas relações semânticas encontram-se presentes nos problemas desta prova, que são: uma transformação temporal aplicada a um estado inicial que resulta num estado final com o valor do estado inicial e da transformação conhecidos; uma composição estática que envolve a pesquisa do todo, sendo conhecidas as partes.

Outra questão importante, que foge ao aspecto puramente conceitual de uma classificação dos problemas, diz respeito às ações e operações em jogo. Segundo Fayol (1996) é Vergnaud quem distingue o cálculo numérico, que remete às operações aritméticas no sentido trivial desse termo, do cálculo relacional, que faz referência às operações de pensamento. Na presente pesquisa, prestar-se-á atenção ao cálculo relacional envolvido nos problemas, mas, sobretudo para a investigação das condutas numéricas apresentadas pelas crianças e na significação que elas atribuem às quantidades envolvidas nas suas representações (escrita em palavras e com algarismos) compreendidos nos problemas e em relação aos procedimentos adotados para efetuar tais cálculos numéricos.

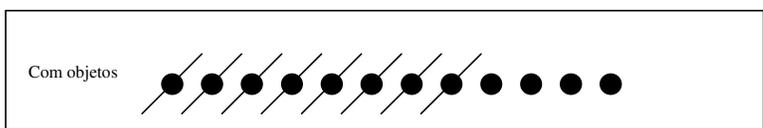
Os problemas escolhidos para as tarefas da prova 3 levam em consideração os resultados de pesquisas que apontam ser grande o número de sucessos pelas crianças, em problemas com essa estrutura.

Os problemas da prova 3 poderão suscitar procedimentos distintos por parte das crianças. Segundo Fayol (1996), três grandes grupos de procedimentos foram identificados para a resolução de problemas que envolvem adições: reunir os objetos das duas coleções e contar todos (os dedos podem ser utilizados para a representação dos objetos da coleção); contagem a partir do cardinal do primeiro conjunto, pelo maior (os dedos são utilizados para controlar o desenvolvimento da contagem); recuperação direta na memória dos fatos numéricos armazenados. Para os problemas que envolvem subtrações, Fayol (1996) também apresenta tipos diferenciados de procedimentos: “**separar de**” que consiste em formar o maior conjunto e retirar desse o conjunto menor e contar o que resta e pode, também, ser utilizado pela contagem sem objeto que consiste em “**contar para trás a partir de**”, do maior dos termos,

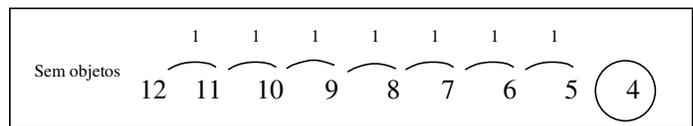
diminuindo de um em um até ser retirado o menor dos termos; **“separar até”** que consiste em retirar objetos do maior conjunto até deixar subsistir somente o número que corresponde ao menor dos dois termos fornecidos e pode ser utilizado pela contagem sem objeto que consiste em **“contar para trás até”** a partir do maior dos termos até atingir o menor, enumerando os elementos da seqüência obtida; **adição** a partir da menor das quantidades ir até a maior, aumentando de um em um, e o número de elementos acrescentados fornece a resposta (**procedimento do complemento**); recuperação direta em memória a longo prazo de fatos numéricos ($6 - 4 = 2$ ou $17 - 8 = (16 - 8) + 1 = 9$).

Exemplo: Para $12 - 8$

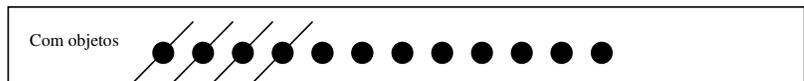
Separar de



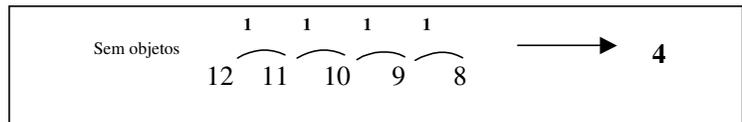
Contar para trás a partir de



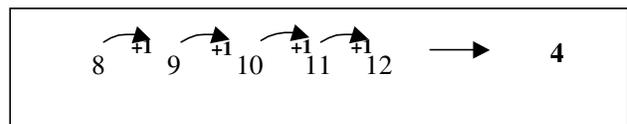
Separar até



Contar para trás até



Procedimento do complemento



Esses procedimentos de resolução de problemas que envolvem adições e subtrações são importantes, visto que os sujeitos estarão lidando com quantidades numéricas que permitirão identificar se as crianças lançaram mão da estrutura presente no sistema de numeração para lidar com elas ou trataram as quantidades como cardinais absolutos, compostos de unidades idênticas.

Os problemas da prova 3 foram apresentados oralmente e as crianças não puderam utilizar lápis e papel para encontrar a solução.

PROVA 4

Nas adições e subtrações a serem resolvidas com utilização dos algoritmos, os valores numéricos envolvidos não apresentaram nenhum tipo de dificuldade. As perguntas feitas foram importantes porque permitiram que as crianças explicitassem tanto a significação atribuída à reserva nas adições e aos empréstimos nas subtrações, como a invenção de uma hipótese que pudesse fazer sentido. Essa invenção só foi possibilitada em virtude da pergunta feita à criança que a levou a um conflito cognitivo.

Quanto aos valores numéricos propostos para as parcelas das adições, três adições, (no caso $14 + 9$, $17 + 19$ e $26 + 28$) foram consideradas irrelevantes, pois em todas elas a soma fica compreendida no intervalo de 10 a 19 que resulta na reserva de 1 dezena.

Para os valores numéricos das subtrações propostas, considerou-se adequados para investigar, a partir dos argumentos e justificativas das crianças, a significação atribuída para o valor numérico do empréstimo.

A prova foi importante por permitir identificar condutas e procedimentos algoritmos automatizados, com e sem atribuição de significados para os procedimentos adotados e sua relação com a identificação da estrutura do SND, pela criança.

4.2.3 Momento 3: Organização das provas e sua aplicação a 47 crianças de uma escola estadual de Ponta Grossa: a identificação dos tipos de respostas para uma mesma questão, das estratégias e procedimentos adotados, das explicações e argumentações apresentadas e a interpretação dos resultados

As provas que compuseram o instrumento de coleta de informações qualitativas com as diversas tarefas e as perguntas a serem feitas aos sujeitos em entrevista individual, foram então organizadas a partir das reformulações advindas das

aplicações piloto.

As reformulações foram: na prova 1 foram propostos os números 12, 22, 100, 30, 108, 118 e 169; na prova 2, os mesmos valores da prova 1; na prova 3, somente os problemas 1 e 5; na prova 4, somente as operações $15 + 29$ e $86 - 49$. O instrumento contou com a prova 1, da prova aplicada aos sujeitos de Ponta Grossa e Camboriú e, neste instrumento ficou designada como prova 5 porém, com os mesmos valores das provas 1 e 2 ora apresentados como objetos a serem contados, ora apresentados através de um numeral arábico ou de uma palavra escrita e ora apresentados através de desenhos de figuras, em disposição linear, não linear.

4.2.4 Descrição dos Procedimentos de Análise dos Dados

As tarefas foram propostas aos sujeitos em entrevista individual e houve filmagem em fita de vídeo e gravação das sessões de trabalho em fita cassete.

Os protocolos constituídos pelas transcrições das fitas em vídeo e pelas fitas cassete referentes às respostas dadas pelos sujeitos para as tarefas das provas, compuseram os dados que foram submetidos à análise.

O procedimento adotado para a análise dos dados compreendeu duas formas distintas: tanto a identificação das respostas dadas, dos procedimentos e estratégias adotados e das explicações e argumentações como a inclusão nas categorias estabelecidas de acordo com critérios prévios; a interpretação dos resultados.

Dessa forma, pôde-se identificar as significações dadas pelos sujeitos aos significantes e à identificação da estrutura do SND nesses significantes, situando a análise no plano da representação e da conceituação.

Prova 1: Tipos de resposta apresentadas, estratégias e procedimentos utilizados ou explicações e argumentações apresentadas

A prova esteve voltada para o reconhecimento da estrutura do SND nas palavras e nos numerais arábicos que expressam os números, isto é, para a identificação dos padrões de organização da escrita arábica e das palavras que

expressam os números, portanto, para o conteúdo dos registros de representação. Enquanto palavra, a base dez que faz parte dessa estrutura, pode ser encontrada nos sufixos e prefixos das palavras, portanto em suas sílabas, e o caráter operatório que compreende multiplicações e adições na forma como esses sufixos e prefixos são ligados e como as diversas palavras que expressam o número são ligadas entre si. Enquanto numeral arábico, a base dez pode ser identificada na posição ocupada pelo algarismo no numeral. Esse algarismo indicará uma potência de dez e estará também representando o caráter operatório que compreende adições e multiplicações nas potências de dez que estes algarismos estão representando de acordo com a posição e o número de vezes que elas estão presentes. Toda a operação estará explicitada no valor absoluto desse algarismo que indica o número de vezes das potências de dez presentes, culminando com a adição de todos os valores relativos de cada um dos algarismos.

É uma prova que envolveu também a operação de conversão, pois as variações nas unidades cognitivamente pertinentes sempre levaram a uma referência a um outro objeto, no caso, outro número. Essas variações compreenderam o número de algarismos do numeral no caso da escrita arábica e o número de palavras associadas aos algarismos do numeral. Foi também uma prova de reconhecimento do conteúdo dos dois tipos de registro de representação.

1. As palavras que designam os números são identificadas nos algarismos do numeral que expressa o número.
2. As palavras que designam os números são identificadas em um dos algarismos do numeral que expressa o número quando o número de palavras é diferente do número de algarismos.
3. Os prefixos e sufixos das palavras não são associados às potências de dez e ao número de vezes que elas aparecem representadas no numeral arábico.
4. Os algarismos do numeral não são identificados nos sufixos e prefixos das palavras que representam os números enquanto potências de dez.

Categorização das respostas

- a) Em relação ao objeto
 - 3. Não identificação da estrutura do SND na palavra: sufixos, prefixos e caráter operatório que os ligam (lexicalização direta.);
 - 4. Não identificação da estrutura do SND no número arábico em uma atividade de reconhecimento.

b) Em relação ao conteúdo da representação

3. Não identificação de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nos prefixos e sufixos das palavras;

4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica.

c) Numa operação de conversão

1. Não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência:

Representação arábica → escrita

Escrita → representação arábica

Interpretação dos resultados

As respostas apresentadas no item 1 foram do tipo “a palavra doze está nos dois algarismos, no 1 e no 2”. Pode-se então concluir que esse tipo de resposta se enquadra nos itens 3a e 4a, pois o prefixo “do” e o sufixo “ze” não são associados às potências de 10, isto é, “ze” não é associado a 10 e “do” não é associado a 2. Da mesma forma, os algarismos 1 e 2 do numeral não são associados às sílabas da palavra que constituem os prefixos e os sufixos que representam as unidades ou as potências de 10, conforme o intervalo numérico.

As respostas do tipo “a palavra doze está no “1” do 12 ou no “2” do 12, ou “a palavra trinta está no “3” do 30, que constituem as respostas do tipo 2, também se encaixam nas categorizações 3a e 4a, uma vez que não há identificação da estrutura do SND, nem na palavra, nem no numeral arábico, no que diz respeito ao objeto matemático (a estrutura do SND) e nas categorias 3b e 4b, pois não há identificação de agrupamentos de “10” nos algarismos do numeral arábico, pois não houve associação do algarismo “1” do 12 ao sufixo “ze” e nem do algarismo “2” ao prefixo “do” da palavra doze. O mesmo vale para o 30, pois o “3” não é associado ao prefixo “trin” da palavra trinta.

É possível identificar, ainda, que essas respostas se enquadram na categorização 1c, pois não há reconhecimento das variáveis cognitivas nas duas representações quando o sujeito tem que associar os algarismos do numeral arábico às palavras ou às sílabas das palavras. Neste caso, o sentido da congruência é da escrita

para a representação arábica e a análise apresentada anteriormente mostra que não há congruência entre o numeral arábico e a palavra que o representa para nenhum dos números trabalhados, mesmo que eles apresentem especificidades diferentes.

A organização das palavras que expressam os números é feita de maneira diferente nas diversas línguas e podem ou não ocultar a numerosidade subjacente vinculada à estrutura do SND organizada em torno da base 10 e do valor posicional dos algarismos na representação por meio de algarismos arábicos. Investigar de que forma os sujeitos compreendem essa organização e a identificam numa outra forma de representação através dos algarismos arábicos ajudaram na interpretação dos resultados encontrados. Algumas das diferenças entre as duas formas de organização das diferentes maneiras de representação de um número que expressa a medida de um conjunto, podem ser destacadas: o número de palavras utilizada para expressar o número pode, ou não, ser igual ao número de algarismos utilizados na representação arábica. Assim uma palavra pode expressar um número de um, dois ou três algarismos, como por exemplo: dois (2), trinta (30) cem (100); pode ter duas palavras expressando números com dois ou três algarismos como, por exemplo: vinte e dois (22), cento e oito (108), cento e dezoito (118) e assim por diante. A abordagem lingüística permite que se identifique as leis que regem a forma de organização das palavras que expressam os números e, ao mesmo tempo, identificar se estas leis estão voltadas para a expressar a numerosidade subjacente ou para explicitar a estrutura do sistema de numeração decimal presente nos algarismos arábicos.

Para iniciar esta análise convém estabelecer 3 classes de números: os números de 0 a 10, os números de 11 a 19 e os números de 20 até 99. Importante será também analisar a organização dos sistemas europeus (como o inglês e o francês) e dos asiáticos (como, por exemplo, o sistema chinês).

Nos sistemas europeus existem diferenças para a organização das palavras que expressam os números até 19 e convém evidenciá-las:

Sistema inglês:

Uma palavra para cada número até 12: *one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten, eleven, twelve*; palavras de duas sílabas que combinam as demais

palavras até nove e alteradas, (*three* passa a ser *thir*, *five* passa a ser *fif*, *eight* que passa a ser *eigh*) com o dez, mas que já sofre alterações: *ten* passa a ser “teen”: *thirteen*, *fourteen*, *fifteen*, *sixteen*, *seventeen*, *eighteen* e *nineteen*. Cada uma das palavras após o 12, traz em ordem invertida à dos algarismos arábicos, a soma das unidades e dos agrupamentos de 10 que compõem o numeral arábico: *thirteen* (3 + 10) para 13 (10 + 3), *fourteen* (4 + 10) para 14 (10 + 4) e assim até *nineteen* (9 + 10) para 19 (10 + 9). A partir do 20, o sistema se torna regular com a criação de palavras para as dezenas exatas combinadas com as palavras também já criadas de 1 a 9: *twenty* para 20, *thirty* para 30, *forty* para 40, *fifty* para 50, *sixty* para 60, *seventy* para 70, *eighty* para 80 e *ninety* para 90. A organização das palavras combina sílabas da palavra criada para o 10 com alterações (*ten* passa a ser *ty*) com as palavras criadas de 1 a 9. A ordem segue a mesma que a dos algarismos arábicos: *twenty* (dois dez) para 20 (2 x 10), *twenty-one* (dois dez mais um) para 21 (2 x 10 mais 1) e assim sucessivamente. As palavras criadas para as dezenas são de duas sílabas que constituem deformações das palavras já criadas do 2 ao 10: *twenty* (“twe” constitui uma deformação de “two” e “ty” uma deformação de “ten”).

Sistema francês

Uma palavra para cada número até 16: *un* (1), *deux* (2), *trois* (3), *quatre* (4), *cinq* (5), *six* (6), *sept* (7), *huit*(8), *neuf* (9), *dix* (10), *onze* (11), *douze* (12), *treze* (13), *quatorze* (14), *quinze* (15) e *seize* (16). As palavras de 11 a 16 possuem duas sílabas que são deformações das palavras já criadas para os números compreendidos no intervalo de 1 a 6 e para o 10: *onze* (“bn” que constitui uma deformação de “un” e “ze” que constitui uma deformação de “dix”). Do 17 ao 19 combina as palavras criadas de 7 a 9 com a palavra criada para 10, na mesma ordem dos algarismos arábicos: *dix-sept* (10 + 7) para 17 (10 + 7), *dix-huit* (10 + 8) para 18 (10 + 8) e *dix-neuf* (10 + 9) para 19 (10 + 9). A partir de 20 a organização do sistema escrito muda criando palavras específicas para as dezenas exatas 20, 30, 40, 50 e 60 : *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*. Para o 70 combina, através de uma adição, as palavras criadas para o dez e o sessenta: *soixante dix*. Para o oitenta combina, por meio de um produto, as palavras criadas para o quatro e o vinte: *quatre-vingt*. Para o noventa,

combina, por meio de adição e multiplicação as palavras criadas para o oitenta e o dez: *quatre-vingt-dix*. Há uma outra especificidade na organização das palavras para os números compreendidos nos intervalos das dezenas exatas. Assim, existe a combinação, através da adição, das palavras criadas para as dezenas exatas e para os números compreendidos de 1 a 9: *vingt et un, vingt-deux,...*, *trente et un, trente-deux,...* Para os números compreendidos nos intervalos]70 ; 80[e]90 ; 100[, a combinação, pela adição, se dá através das palavras criadas para *soixante* (60) e *quatre-vingt* (80) e para os números de 11 a 19: *soixante et onze* (71), *soixante-douze* (72)..., *quatre-vingt onze* (91) e, *quatre vingt douze* (92),.... e assim sucessivamente

Sistema chinês

Uma palavra para cada número de 1 a 10: *yi* (1), *er* (2), *son* (3), *si* (4), *wu* (5), *liu* (6), *qi* (7), *ba* (8), *jiu* (9), *shi* (10). De 11 a 19 essas palavras são combinadas, através da adição com a palavra criada para o 10 (*shi*) e seguindo a mesma ordem da estrutura do sistema de numeração para a escrita dos algarismos arábicos: *shi yi* (10 + 1) para 11 (10 + 1), *shi er* (10 + 2) para 12 (10 + 2) e assim até 19 que é *shi jiu* (10 + 9). Para as dezenas exatas existe a combinação, por meio do produto, das mesmas palavras já criadas de 1 a 10, seguindo também a mesma ordem da estrutura do sistema de numeração decimal posicional: *er shi* (2 x 10) para 20 (2 x 10), *son shi* (3 x 10) para 30 (3 x 10) e assim sucessivamente. As palavras criadas para os números de 1 a 9 oscilam, à esquerda e à direita, da palavra criada para o 10, combinando-as através de produto e adição, respectivamente.

O quadro 5 apresenta os padrões dos diferentes sistemas de palavras-números:

Nº	Inglês	Francês	Chinês
1	A (one)	a (un)	a (yī)
2	B (two)	b (deux)	b (èr)
3	C (three)	c (trois)	c (sān)
4	D (four)	d (quatre)	d (sì)
5	E (five)	e (cinq)	e (wǔ)
6	F (six)	f (six)	f (liù)
7	G (seven)	g (sept)	g (qī)
8	H (eight)	h (huit)	h (bā)
9	I (nine)	i (neuf)	i (jiǔ)
10	J (ten)	j (dix)	j (shí)
11	K (eleven)	km (onze)	ja (shí yī)
12	L (twelve)	lm (douze)	jb (shí èr)
13	mn (thirteen)	nm (treze)	jc (shí sān)
14	dn (fourteen)	om (quatorze)	jd (shí sì)
15	on (fifteen)	pm (quinze)	je (shí wǔ)
16	fn (sixteen)	qm (seize)	jf (shí liù)
17	gn (seventeen)	ig (dix-sept)	ig (shí qī)
18	hn (eighteen)	ih (dix-huit)	ih (shí bā)
19	in (nineteen)	ii (dix-neuf)	ii (shí jiǔ)
20	pq (twenty)	r (vingt)	bj (èr shí)

30	rq (thirty)	t (trente)	cj (son shi)
40	dq (forty)	uv (quarante)	dj (si shi)
50	oq (fifty)	ev (cinquante)	ej (wu shi)
60	fq (sixty)	wv (soixante)	fj (liu shi)
70	gq (seventy)	wvj (soixante-dix)	gj (qi shi)
80	hq (eighty)	dr (quatre-vingt)	hj (ba shi)
90	lq (ninety)	drj (quatre-vingt-dix)	ij (jiu shi)
100	ar (one hundred)	x (cent)	ak (vi bay)
108	arh (one hundred huit)	xh (cent-huit)	Aklh (vi bay ling qi)
118	arhn (one hundred eighteen)	xih (cent dix-huit)	Akih (vi bay shi ba)
169	Arfq (one hundred sixty nine)	Xwvi (cent soixante-neuf)	akfji (yi bay liu shi jiu)

QUADRO 5 - PADRÃO DE ORGANIZAÇÃO DAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM NÚMEROS EM SISTEMAS EUROPEUS (FRANCÊS E INGLÊS) E ASIÁTICOS (CHINÊS)

FONTE: Informações extraídas de Fuson e Kwon, 1991, p. 357.

O quadro 6 a seguir apresenta o padrão das palavras que designam os números na língua portuguesa:

Número	Português
1	a (um)
2	b (dois)
3	c (três)
4	d (quatro)
5	e (cinco)
6	f (seis)
7	g (sete)
8	h (oito)
9	i (nove)
10	j (dez)
11	km (onze)
12	lm (doze)
13	nm (treze)
14	om (quatorze)
15	pm (quinze)
16	jsf (dezesseis)
17	jsg (dezessete)
18	jh (dezoito)
19	jsi (dezenove)
20	r (vinte)
21	rsa (vinte e um)
29	rsi (vinte e nove)
30	t (trinta)
40	Uv (quarenta)
50	Ev (cincoenta)
60	wv (sessenta)
70	Zv (setenta)
71	Zvsa (setenta e um)
80	Xv (oitenta)
81	Xvsa (oitenta e um)
90	Yv (noventa)
91	Yvsa (noventa e um)
100	O (cem)
101	Osh (cento e oito)
118	Osh (cento e dezoito)

QUADRO 6 - PADRÃO DE ORGANIZAÇÃO DAS PALAVRAS QUE REPRESENTAM NÚMEROS, NA LÍNGUA PORTUGUESA

A análise realizada da organização das palavras que expressam os números e a relação dessa organização com a escrita arábica, por meio de algarismos em torno de uma estrutura de base dez e posicional permite identificar a possibilidade, em maior ou menor grau, da identificação da estrutura do SND na palavra escrita para os números maiores que dez.

As crianças aprendem tanto os números arábicos como as palavras para quantificar coleções de natureza contínua ou discreta. O sentido de um número pode

ser um sentido cardinal ou o sentido de uma seqüência. Enquanto número de uma pequena série (menores que 10), esse sentido é mais evidente, mas não o é para os números maiores que dez. Isso acontece porque as crianças ainda não têm o sentido cardinal de uma coleção grande e por essa razão tanto as palavras como os números arábicos podem somente adquirir o sentido de um lugar na seqüência. Isto significará que a representação da medida de um conjunto por intermédio de palavras ou de números arábicos pode estar sendo feita através da contagem de unidades idênticas e não em torno de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos.

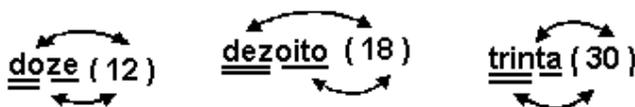
Para que ambas as representações possam explicitar os agrupamentos e os agrupamentos de agrupamentos é necessário investigar como a associação entre elas pode ser facilitada em virtude dos padrões que regem a organização das palavras que expressam os números.

Os quadros anteriormente apresentados podem ser usados como referência: a palavra onze (no português), onze (no francês) e *eleven* (no inglês) está nos dois algarismos do número arábico 11, mas as palavras *shi yi* (no chinês) estão nos algarismos 1 da esquerda e 1 à direita do 11, respectivamente. Na língua portuguesa o prefixo “on” e o sufixo “ze” dizem respeito ao 1 da direita e ao 1 da esquerda do 11, respectivamente. A palavra doze (no português), *twelve* (no inglês) e douze (no francês) está nos dois algarismos do número arábico 12, mas as palavras *shi er* (no chinês) estão nos algarismos 1 da esquerda e dois da direita do 12, respectivamente. Na língua portuguesa temos o mesmo fato ocorrido para o 11, isto é, o prefixo e o sufixo correspondem aos algarismos da escrita arábica em ordem invertida. A mesma associação prossegue até o número 15 na língua portuguesa, até o 16 na língua francesa e até o 12 na língua inglesa. A partir do 16, na língua portuguesa, do 17 na língua francesa e do 13 na língua inglesa os prefixos passam a representar a dezena e os sufixos para representar as unidades. Para o 21, existem as palavras vinte e um (no português), *vingt et un* (no francês), *twenty-one* (no inglês) que são associadas aos algarismos 2 da esquerda e 1 da direita, respectivamente, porém a palavra vinte não explicita o agrupamento em torno da base dez (duas dezenas), pois este agrupamento

não é indicado de forma explícita no prefixo “vin” e no sufixo “te” através de uma operação de multiplicação que os estaria unindo, mas sim como a quantificação de vinte unidades idênticas. Por sua vez, as palavras *er shi yi* (no chinês) são identificadas nos algarismos 2 e 1 do 21 da seguinte forma: *er shi* está no algarismo 2 e *yi* está no algarismo 1. Nesse caso *er shi* explicita dois grupos de dez, diferentemente das palavras vinte, *vingt* e *twenty*.

Na prova, foram apresentadas as palavras doze, vinte e dois, cem, trinta, cento e oito, cento e dezoito e cento e sessenta e nove. Essas palavras foram escritas através de numerais arábicos pelas crianças e foram identificadas nos algarismos da representação. As respostas apresentadas, argumentos e explicações utilizadas pelas crianças apontam que as palavras são identificadas nos dígitos dos algarismos de diversas maneiras:

- uma palavra em dois ou três dígitos (mas não nos sufixos e prefixos dessas palavras, em alguns casos), como por exemplo as palavras cem (100),



- duas palavras em três algarismos, como por exemplo



- uma palavra para cada algarismo em correspondência biunívoca (não considerando os prefixos e sufixos), como por exemplo



A identificação da palavra nos algarismos não significa a identificação dos agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nelas, visto que os padrões de

organização das palavras não os deixam explicitados. É o caso, por exemplo, das palavras cem, vinte, trinta, doze e sessenta. A palavra dezoito é a que mais explicita um grupo de dez somado a oito unidades, mas percebeu-se que, pelo fato dela ser uma palavra única, seu sentido se aproxima mais de um lugar na seqüência. Como lugar na seqüência, o sentido cardinal é adquirido em primeiro lugar em torno de unidades idênticas contadas uma a uma.

A aprendizagem das palavras que designam os números pode se dar a partir dos seus padrões de organização e da associação com os padrões das escritas numéricas. Se a aprendizagem das palavras que designam os números for mecânica, garante-se somente o sentido cardinal ou a sua posição numa seqüência numérica o que compromete a compreensão da estrutura do SND nos algarismos arábicos. Em virtude dos padrões de organização das palavras nas línguas européias, a organização de situações didáticas para vencer estas dificuldades é muito mais complexa.

Essa análise acima indica pistas das barreiras a enfrentar e da importância da associação das palavras que designam os números com as escritas numéricas arábicas. Esta associação tem que estar em torno dos padrões de organização das palavras-números e da estrutura do SND presente nos algarismos arábicos que combina base e posição e as operações de adição e multiplicação.

Prova 2: respostas apresentadas, estratégias e procedimentos utilizados, explicações e argumentações apresentadas

A prova 2 buscou a identificação, por parte dos sujeitos, dos tipos de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos representados pelos algarismos do numeral arábico. Ela também esteve voltada para a mudança de forma de registro de representação, já que o número era apresentado pela palavra escrita. Solicitava-se a sua escrita em forma de numeral arábico. Uma vez mudada a forma de registro, buscou-se o reconhecimento do conteúdo da representação, mais especificamente do numeral arábico, do valor relativo dos algarismos, da nomenclatura atribuída a cada algarismo

de acordo com posição e da identificação, tanto de unidades singulares presentes em cada algarismo do numeral, como de grupos de dez (dezenas) e de cem (centenas) presentes, quando fosse o caso.

1. A criança não tem a mínima idéia sobre o que seja unidades, dezenas e centenas. Não sabe também identificar as centenas dezenas e unidades nos algarismos da representação arábica e inventa hipóteses como por exemplo: no 118 tem 3 dezenas porque tem 3 números.
2. A criança não sabe o que significa centenas, dezenas e unidades, mas sabe identificar o lugar das centenas, dezenas e unidades nos dígitos da representação por algarismos, como por exemplo: no 118 tem 1 centena, 1 dezena e 8 unidades; no 100 tem 1 centena, 0 dezenas e 0 unidades,; no 30 tem 0 unidades e 3 dezenas, e assim sucessivamente para qualquer número.
3. A criança sabe o que significa centenas e dezenas, isto é, que numa centena tem 100 unidades e 10 dezenas e que numa dezena tem 10 unidades, sabe identificar o lugar das centenas, dezenas e unidades nos dígitos da representação por algarismos, mas não enxerga nos dígitos da representação por algarismos, os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos, como por exemplo: no 118 tem 1 centena, 1 dezena e 8 unidades; no 30 tem 3 dezenas e 0 unidades e assim sucessivamente.
4. A criança sabe que numa centena tem 100 unidades, mas não sabe dizer quantas dezenas têm; sabe também identificar as centenas, dezenas e unidades nos dígitos da representação por algarismos e enxerga parcialmente os agrupamentos, como por exemplo: no 30 tem 3 dezenas e 30 unidades, no 100 tem 1 centena, 0 dezenas e 100 unidades, no 108 tem 1 centena, 0 dezenas e 108 unidades, no 169 tem 1 centena, 6 dezenas e 169 unidades e assim sucessivamente.
5. A criança sabe o que significa centena, dezenas e unidades, isto é, que numa centena tem 100 unidades e 10 dezenas e que numa dezena tem 10 unidades sabe identificar as centenas, dezenas e unidades nos dígitos da representação por algarismos e consegue identificar os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nestes dígitos, como por exemplo: no 108 tem 1 centena, 10 dezenas e 108 unidades; no 118 tem 1 centena, 11 dezenas e 118 unidades; no 169 tem 1 centena, 16 dezenas e 169 unidades e assim sucessivamente.

Categorização das respostas

a) Em relação ao objeto:

2. Identificação da estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral;
4. Não identificação da estrutura do SND no numeral arábico numa atividade de reconhecimento.

- b) Em relação ao conteúdo da representação
1. Identificação do padrão de organização da escrita arábica $abc\dots x \rightarrow a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + c \times 10^{n-2} + \dots \times 10^0$;
 4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica
- c) Numa operação de conversão
1. Não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência:
 - Representação arábica \rightarrow plano dos objetos

Interpretação dos resultados

As respostas do tipo 1, 2, 3 e 4 se enquadram nas categorias 4a e 4b e as respostas do tipo 5 se enquadram na categoria 2a e 1b.

Quando a criança não sabe que uma dezena representa 10 objetos e uma centena representa 100 objetos, ela não reconhece as variáveis cognitivas da representação arábica e isto acontece quando ela transita do plano da representação escrita para o plano dos objetos.

Quando a criança está nessas condições, mas identifica e atribui o nome correto para o algarismo de acordo com a posição por ele ocupada, significa que não existe atribuição de significação ao conteúdo do registro de representação nem à identificação da estrutura do SND no numeral arábico, em uma atividade caracterizada como de reconhecimento.

Porém, quando a criança está em outra condição, sabendo que numa centena tem 100 unidades ou 10 dezenas e que em 1 dezena tem 10 unidades, ainda não significa a identificação dos agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nos algarismos do numeral arábico, significando que ela não atribui significação ao conteúdo da representação. É o caso, por exemplo, das crianças que dizem que em 30 há 3 dezenas e zero unidades ou que em 118 tem 1 centena, 1 dezena e 8 unidades.

Entretanto as crianças ainda podem se encontrar numa condição intermediária, isto é, sabem identificar o número de unidades em dezenas e centenas, mas não sabem identificar o número de dezenas em centenas. Estas crianças

apresentam respostas que também se enquadram na categoria 4b de não identificação de do valor relativo das unidades na escrita arábica e isso diz respeito ao conteúdo do registro de representação. Mas também se enquadram na categoria 4a de não identificação da estrutura do SND no que diz respeito ao objeto matemático.

Por fim, a criança que apresentou resposta do tipo 5 se enquadra na categoria 2a de identificação do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral.

Como foi mostrado anteriormente, o sistema de numeração e sua estrutura não ficam evidenciados nos nomes dos números quando a cadeia verbal é utilizada para a obtenção da medida de um conjunto. A irregularidade do sistema no que tange às palavras que designam os números já foi identificada como uma das causas da dificuldade das crianças em enxergar nos dígitos da representação por algarismos os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos (KAMII, 1992; TEIXEIRA, 1996). Outra fonte que pode estar na base de suas dificuldades é a não compreensão do fenômeno da mudança de unidade e das competências em fazer agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos (BEDNARZ e JANVIER, 1982).

As respostas apresentadas, argumentos e justificativas dadas mostram que a maioria das crianças não é capaz de identificar nos dígitos da representação por algarismos, o valor relativo das unidades de acordo com a posição que ocupam. Os resultados encontrados estão de acordo com os apresentados por Teixeira (1996), ou seja, a maioria é capaz de apresentar uma resposta convencional ao apontar nos dígitos as centenas, dezenas e unidades, como por exemplo: em 169 tem 1 centena, 6 dezenas e 9 unidades. Algumas dessas crianças, porém, não são capazes de identificar as dezenas que compõem as centenas (agrupamentos de agrupamentos) e as unidades que compõem as dezenas e as centenas (agrupamentos). Também houve respostas relativas ao número de algarismos do numeral, como por exemplo, em 12 tem 2 dezenas, em 169 tem 3 dezenas. Isso significa que elas não identificam os dígitos de acordo com o valor relativo das unidades e não apresentam as competências básicas de enxergar nas centenas e dezenas que compõem o numeral, nem os agrupamentos e os agrupamentos

de agrupamentos. Por essa razão levantam hipóteses e as aplicam como se fossem verdades.

Poucas crianças foram capazes de enxergar nos dígitos da representação por algarismos os agrupamentos e os agrupamentos de agrupamentos, como, por exemplo, afirmar que em 169 há 16 dezenas e 169 unidades, em 108 tem 10 dezenas e 108 unidades, em 118 tem 11 dezenas e 118 unidades.

Essa identificação compreende o reconhecimento de invariantes operatórios de diferentes ordens que se encontram no nível do significado (a estrutura do sistema de numeração), e as complexas relações ao sistema de significante que é a representação por algarismos em torno de base e posição.

As mesmas orientações para a elaboração das tarefas da situação de ensino têm de ser levadas em consideração para a compreensão dos aspectos que esse tipo de significante engaja do significado.

Prova 3: respostas apresentadas, estratégias e procedimentos utilizados, explicações e argumentações apresentadas

Esta prova compreendeu uma operação de produção que envolveu o reconhecimento do conteúdo do registro de representação de acordo com a estratégia utilizada para encontrar a solução dos problemas apresentados. Compreendeu também uma operação de conversão, uma vez que o registro de representação utilizava a palavra, não escrita, mas falada, que exigia a atribuição de sentido cardinal ao número, considerando que esse sentido poderia ainda estar associado a um valor de uma seqüência, portanto uma lexicalização direta, ou estar associado à estrutura do SND que rege o padrão das palavras ou dos numerais arábicos. Isso pôde ser observado nos procedimentos ou estratégias utilizados com a ajuda dos dedos que poderiam seguir o itinerário dos dedos cardinalizados ou dos dedos como nome de contagem. Esses itinerários, por sua vez, estão associados aos procedimentos apontados por Fayol (1996) para a resolução de problemas de adição que compreende a contagem a partir de uma das parcelas ou recuperação de fatos estocados na memória. Para o problema de subtração, também, pode-se observar essa associação aos procedimentos de ‘contar

para trás a partir de” ou “contar para traz até”. Foi de fato a estratégia utilizada que revelou o tipo de registro de representação do qual o sujeito lançou mão (a palavra ou o numeral arábico) e de que forma ele reconheceu ou não a estrutura do SND em uma delas (nos sufixos e prefixos ou na posição ocupada pelo algarismo e seu valor relativo).

<p>1. A criança adota o procedimento de decompor o numeral em suas partes constituintes, isto é: 28 é igual a $20 + 8$ e 15 é igual a $10 + 5$, 37 é igual a $30 + 7$, para efetuar as adições e as subtrações que compreendem retiradas. Utiliza como estratégia os dedos (cardinalizados ou como nome de contagem) como apoio para as adições não memorizadas ou para as retiradas. Até os valores compreendidos no intervalo 0 a 9 são decompostos, como por exemplo: $7 = 6 + 1$. Pode acontecer dela errar invertendo as retiradas como por exemplo: 66 é $60 + 6$; 37 é $30 + 7$ e 60 é $30 + 30$, logo $60 - 30$ é 30, e $7 - 6$ é 1, então, 31.</p>
<p>2. A criança adota o procedimento de contar na seqüência a partir da primeira parcela. Pode acontecer dela conseguir controlar, ou não, o valor da segunda parcela. Ela pode recorrer à estratégia dos dedos cardinalizados ou como nome de contagem para as adições e subtrações e pode acontecer dela não conseguir controlar o valor da segunda parcela nos dedos ou de não conseguir efetuar a retirada do subtraendo por não controlar nos dedos esse valor. Pode acontecer dela recorrer à utilização de procedimentos de diferença ou complemento para as subtrações. Podem acontecer, nesse caso, erros advindos da não memorização das parcelas envolvidas ou nas retiradas das unidades relativas, como por exemplo $16 - 7$ é 8. Pode acontecer também dela recorrer a um procedimento de partir de n até chegar em m (com $n < m$) e não conseguir controlar nos dedos a diferença entre m e n. A criança também pode considerar umas das parcelas como a soma e encontrar a diferença entre m e n, partindo de n até m. Pode acontecer dela utilizar o procedimento da diferença, isto é, retirar a partir de, conseguindo controlar o valor do subtraendo nos dedos.</p>
<p>3. A criança adota o procedimento de recorrer ao algoritmo na cabeça para efetuar as adições e subtrações presentes nos problemas. Pode acontecer da criança não conseguir realizar a subtração ao lançar mão do algoritmo na cabeça. Pode acontecer que ela faça as retiradas em ordem inversa como em $66 - 37$: $7 - 6$ dá 1 e $6 - 3$ dá 3, logo, 31. Pode acontecer dela encontrar a solução correta. Pode acontecer dela não conseguir resolver o problema envolvendo a subtração.</p>
<p>4. Pode também acontecer da criança não apresentar resposta para o problema que envolve uma subtração mental, ou de ela não conseguir elaborar uma estratégia para poder solucionar o problema que envolve uma subtração.</p>

Categorizações

a) Em relação ao objeto

1. Identificação da estrutura do SND na palavra: sufixos, prefixos e caráter operatório que os ligam;
2. Identificação da estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral;

3. Não identificação da estrutura do SND na palavra: lexicalização direta;
4. Não identificação da estrutura do SND no numeral arábico numa atividade de reconhecimento.

b) Em relação ao conteúdo da representação

3. Não identificação de agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos nos prefixos e sufixos das palavras;
4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica.

c) Numa operação de conversão

1. Não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência:

- Plano dos objetos → representação arábica
- Representação arábica → plano dos objetos
- Plano dos objetos → escrita
- Escrita → plano dos objetos
- Representação arábica → escrita
- Escrita → representação arábica

Interpretação dos resultados

As crianças que apresentaram os procedimento do tipo 1 podem ser enquadradas nas categorias 1a e 2a, pois são capazes de identificar a estrutura do SND na palavra por meio dos sufixos, prefixos e das operações que os ligam, que define o caráter operatório da estrutura do SND e também no numeral arábico.

Já as crianças que apresentaram o procedimento do tipo 2 podem ser enquadradas nas categorias 3a e 4a de não identificação da estrutura do SND na palavra, caracterizando uma lexicalização direta, ou no numeral arábico numa atividade de reconhecimento. Em se tratando do conteúdo da representação, ocorre a não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica, fato que permite enquadrá-las também na categoria 4b.

Já as crianças que apresentaram o procedimento do tipo 3 podem ser enquadradas nas categorias 3a, 4a e 4b ou 1a e 2a, mesmo cometendo erros oriundos de fatos estocados na memória ou de inversões dos algarismos do numeral para efetuar as retiradas (7-6 ao invés de 6 - 7), ou mesmo a troca de operação (7 + 6 ao invés de 6 - 7).

Para termos certeza de que essas crianças se enquadram nas categorias 1a e 2a é necessário cruzar os procedimentos com as argumentações ou explicações apresentadas para resolver as operações de adição e subtração com reserva, com utilização do algoritmo. Isto é necessário porque nesta prova questionou-se as crianças sobre a forma de proceder para obter a solução do problema apresentado, o que permitiu identificar o procedimento utilizado e algumas estratégias (como, por exemplo, a utilização dos dedos para controle das unidades singulares, etc), mas não permitiu identificar se esse procedimento é mecanizado ou se as reservas são compreendidas em função da estrutura do SND.

Da mesma forma, as crianças que apresentaram procedimentos do tipo 1 e 2 podem também ser enquadradas na categoria 1c, pois elas não reconhecem as variáveis cognitivas na representação escrita ou no numeral arábico. Na operação de conversão utilizam os registros de representação como nomes de números, e os associam a objetos singulares e idênticos aos dedos), caracterizando uma lexicalização direta. Por essa razão, esse procedimento se torna custoso e provoca o erro fazendo a criança não conseguir controlar o valor das parcelas ou do subtraendo, nos dedos, nem em procedimentos de complemento e nem em procedimentos de diferença.

Os problemas envolvidos nessa prova apresentam uma estrutura das mais simples em nível de complexidade. Tratam-se de problemas classificados por Vergnaud (1990) como de transformação com o estado inicial e o valor da transformação conhecidos, devendo-se obter o estado final. O valor da transformação é positivo para um dos problemas e é negativo para o outro. Para a resolução de tais problemas, o sujeito tem que lançar mão de conceitos tais como: conceito de cardinal e

de medida, conceito de transformação temporal por aumento ou diminuição, e também de teoremas, tais como: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ desde que $A \cap B = \emptyset$ e também $F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$.

Segundo Vergnaud (1985), o cálculo relacional que implica a solução dos problemas é o mais simples, pois basta aplicar uma transformação direta a um estado inicial, e a adição e subtração compreendidas nos problemas são *sui generis*, pois estão diretamente ligadas às transformações ganhar e gastar, respectivamente.

A complexidade de um problema pode também estar vinculada aos valores compreendidos, nos problemas, quantidades compreendidas no intervalo [10; 100] de modo a permitir aos sujeitos a decomposição dos valores em suas partes constituintes para obtenção da solução mental dos problemas. Mas essa decomposição pode ser facilitada se o sujeito compreender a estrutura do SND. Nesse sentido, ele poderá trabalhar com os valores a partir de sua decomposição em dezenas e unidades. Para os valores envolvidos teremos: $15 = 10 + 5$, $28 = 20 + 8$, $66 = 60 + 6$ e $37 = 30 + 7$. Isso só será possível se o sujeito atribuir corretamente o valor relativo das unidades de acordo com a sua posição na representação por algarismos.

Os resultados apontaram que as crianças lidam com as representações de quantidades como unidades idênticas, contadas uma a uma ao lançarem mão do procedimento de contar na seqüência com o apoio dos dedos. Por essa razão, os procedimentos utilizados pelas crianças de contar a partir do primeiro termo 16, 17, 18, ...43 (contando nos dedos as 28 unidades) ou a partir do termo maior 28, 29, ...43 (contando nos dedos as 15 unidades) que foram identificados por BAROODY e GINSBURG (1986)²⁶ como do tipo *counting on from the first addend* (C.O.F.) e *counting on from the larger term* (C.O.L.) respectivamente. Em se tratando da gênese da adição, os autores apontam que os sujeitos tendem a iniciar por procedimentos do tipo C.O.F. para,

²⁶ Citado em Fayol, 1996, cuja referência completa é BAROODY, A. J.; GINSBURG, H. P. The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In: HIEBERT, J. (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale: Erlbaum. 1986.

depois, lançarem mão do procedimento do tipo C.O.L que exige a comutatividade-emoção. Esses procedimentos também foram identificados pela criança quando lançou mão do algoritmo na cabeça para as adições dos algarismos, quando esta soma não podia ser resgatada na memória. Foi possível identificar esses procedimentos porque a entrevista clínico-crítica e a gravação em fita cassete e filme, utilizadas como método de coleta de dados, permitiu que se perguntasse à criança como é que ela tinha obtido aquele resultado e ela apresentava os procedimentos acima apontados tanto para a contagem na seqüência como para a o resgate do algoritmo na cabeça.

Da mesma forma para a subtração envolvida num dos problemas, pôde-se constatar que as crianças lidaram, na sua maioria, com o numeral como composto por unidades idênticas. Elas adotaram procedimentos que vem ao encontro dos resultados obtidos por Wood, Resnick e Groen (1975)²⁷ que mostram que as crianças, quando confrontadas com a resolução mental de subtrações procedem tanto por acréscimos (procedimento do complemento) quanto por decréscimos (procedimento da diferença). Svenson e Sjöberg (1982)²⁸ apresentam um estudo que permite apontar uma certa evolução em procedimentos apresentados para a resolução de subtrações mentais. Dentre eles a utilização dos dedos e a contagem como apoio para a obtenção da solução em virtude de não terem estes resultados de memória. Desta forma, encontram-se procedimentos como partir do 37 para chegar ao 66 (acrécimo) ou partir do 66 e retirar (separar de), uma a uma, as 37 unidades. A utilização do algoritmo na cabeça também revelou estes procedimentos para os algarismos: 7 não dá pra tirar de 6, então empresta 1 do 6 e fica 9 para 16 e logo dois procedimentos: 7,8,9...16 (por acréscimo) ou 16,15,14...7 (por retirada).

A utilização dos dedos e da contagem para a resolução da adição e da subtração compreendidas nos problemas é reveladora de que o sentido quantitativo dos

²⁷ Autores citados em Fayol (1996), mas, não referenciados.

²⁸ Citado em Fayol (1996) cuja referência completa é SVENSON, O.; SJÖBERG, K. *Solving simple subtractions during the first three school years. Journal of Experimental Education*. 1982.

numerais não é interpretado a partir das dezenas e unidades que os compõem. A falta deste sentido significa um caminho mais árduo a percorrer para a obtenção da solução dos problemas. Ela é oriunda do sentido muito forte de unidade nas palavras que designam os números em virtude das irregularidades nos padrões de organização nos sistemas europeus.

Segundo Fuson e Kwon (1991), os números compreendidos nos problemas do tipo aditivo, quer representados por palavras ou por algarismos, devem tomar uma significação cardinal, indicando quantos objetos há. Essa significação cardinal pode ser compreendida em termos de unidades singulares idênticas ou em termos da estrutura do SND de base e posição. Como apresentado anteriormente, sabe-se que os padrões que regem a organização das palavras que representam os números até 20 não explicitam essa estrutura e são compreendidas como uma série linear de pilhas de entidades que aumentam de uma unidade, e de 20 a 100 uma série de pilhas verdadeiramente altas que sugerem ao menos uma composição de uma pequena e de uma grande pilha, mas todas interpretadas como unidades singulares idênticas.

Os procedimentos identificados nas condutas das crianças revelam que elas fazem a conexão entre a contagem e o sentido cardinal utilizando os dedos como apoio à contagem, mas já com um grau de abstração. Os mesmos itinerários identificados por Fuson e Kwon (1991) foram utilizados pelas crianças para realizar a adição e a subtração compreendidas nos dois problemas. Dessa forma é que se pôde perceber que as quantidades envolvidas são tratadas como unidades idênticas e não são decompostas em suas partes constituintes em torno das dezenas e das unidades. Identificou-se o itinerário de contagem com a seqüência no qual as próprias palavras representam os termos da adição. O primeiro termo da adição é escolhido (pode ser o 15 ou o 28) e a contagem começa a partir deste primeiro termo: 16, 17, ... 43 ou 29, 30, ...43. O problema para a criança consiste em controlar o valor da segunda parcela. Nesse itinerário, os dedos não são utilizados como suporte perceptual, pois não é possível visualizar nem os termos da adição e nem a soma. Eles são utilizados para controle do

valor da segunda parcela, isto é, eles servem para controlar o número de palavras que já foram enunciadas. Como não havia a decomposição do numeral em suas partes constituintes, esse controle não foi conseguido por algumas crianças no caso da adição. Para a subtração este itinerário levou a um número maior de insucessos, pois a seqüência tinha que ser repetida em ordem inversa, o que ocasionava duas tarefas simultâneas: o controle do valor do subtraendo e a repetição correta da seqüência em ordem inversa.

Um outro itinerário identificado por Fuson e Kwon (1991) também foi observado: a dos dedos utilizados como nomes de contagem. Era o caso, por exemplo, das crianças que realizavam a adição e a subtração lançando mão do algoritmo na cabeça. Os dígitos da representação por algarismos eram invocados ao utilizarem os dedos para a adição e a subtração. Esses dígitos eram considerados como unidades simples e não eram associados a grupos de 10 unidades no caso das dezenas. Para o caso da adição ($15 + 28$), inicialmente, a criança colocava sobre as mãos os 8 dedos e partia contando os outros cinco nomeando os dedos. Ao final tinha 3 dedos levantados o que significava 13 como sendo $10 + 3$, pois duas mãos já tinham sido usadas. Para o caso da subtração partiam do 7 até chegar no 16 (obtido a partir do empréstimo de 1 do 6 à esquerda do 86): 7, 8...16 obtendo 9 dedos levantados. Nesse caso os dedos são utilizados como nome de contagem e sempre estarão ligados à palavras de 1 a 10 para o primeiro termo da adição e para a soma. Eles mudam para o segundo termo da adição e nesse caso, segundo Fuson e Kwon (1991), eles se tornam “uma série de dedos cardinalizados nos quais a palavra que designa o segundo termo da adição possui um valor cardinal pelo fato que ela é o número de dedos contados após o primeiro termo”. (p. 366) O controle do segundo termo da adição pode levar as crianças a cometer erros como, por exemplo: 7 **prá** chegar no 16 dá 8 ou 5 mais 8 dá 13 ou 14.

O que se pode concluir é que estes itinerários permitem o cálculo das somas

e subtrações de números com dois dígitos, compreendidos entre 10 e 99, mas permitem também que seja feita a contagem de unidades idênticas e singulares nas quais o 10 não desempenha um papel especial.

Para que esses procedimentos compreendam itinerários com a ajuda dos dedos, nos quais o 10 possa desempenhar um papel essencial, é necessário organizar tarefas que compreendam tais itinerários. Mais adiante, quando se estiver organizando as tarefas serão explicados os itinerários referidos. Um destes itinerários será o dos dedos cardinalizados, identificado por Fuson e Kwon (1991) que permite trabalhar com somas superiores a dez em torno do 10. Nesse caso será preciso, em primeiro lugar, trabalhar com a decomposição dos números até 9 em termos de $5 + x$ e de $m + n = 9$. Pode-se, então, com a ajuda do itinerário dos dedos cardinalizados efetuar as adições que ultrapassam 10 colocando o primeiro termo nos dedos das duas mãos e fazer a decomposição do segundo termo em duas partes, de modo que uma das partes complete dez e a outra parte seja colocada nos dedos da mão que, num primeiro momento, ficam fechados e passam a ser abertos. O resultado da adição será então obtido a partir de duas parcelas: os dez dedos abaixados e os que ficaram levantados. Dessa forma, combinando com os padrões de organização da palavra que representa o número, leva-se a criança a ler os números de 11 a 19 como combinações de $10 + x$.

Prova 4 respostas apresentadas, estratégias e procedimentos utilizados, explicações e argumentações apresentadas

Esta prova compreendeu a operação de tratamento que envolve uma transformação do registro e representação no interior do próprio registro. Essa operação vai exigir o reconhecimento do conteúdo de registro de representação que é a representação do número em numeral arábico. Esse reconhecimento, por sua vez, vai exigir a compreensão da estrutura do SND que envolve a base e a posição. Enquanto resposta apresentada, mesmo que correta, não será possível identificar se esse reconhecimento existiu, sendo necessário centrar a análise nos argumentos e

explicações utilizadas para justificar as reservas: no caso da adição por que vai ‘um’, e no caso da subtração qual o valor, em unidades, do algarismo 1 que ocupa a segunda posição no numeral, da direita para a esquerda ao ser emprestado para possibilitar a retirada das 9 unidades que não era possível enquanto havia apenas 6 unidades.

<p>A reserva não é justificada nem na adição e nem na subtração e diversos tipos de justificações ou explicações são apresentadas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $9 + 5$ é 14, deixa o 4 aqui embaixo e põe o 1 lá em cima (explicação). 2. O 1 não cabe ali por isso vai para cima (explicação). 3. Não pode colocar o resultado inteiro ali (explicação). 4. Tem de colocar o número maior embaixo e o menor em cima (explicação). 5. O 1 do quatro não dá para pôr ali embaixo, porque à esquerda é o lugar do resultado da adição dos numerais que representam as dezenas, tratados como unidades simples sem considerar o valor relativo (justificação). 6. Porque tem dois números, então um fica embaixo e o outro em cima (explicação) 7. O 1 vale 1 mesmo (resposta). 8. Não sabe explicar porque fica 16 após o empréstimo. 9. Porque se ficar 7 não dá pra tirar 9 (explicação da necessidade do empréstimo). 10. O 1 ficando ao lado do 6 transforma-o em 16, ou ainda que, juntando-o com o 6 (por justaposição) fica 16, ou ainda fica 16 porque soma 10 com 6, mas aquele 1 vale só 1 mesmo, mas vindo do lado do 6 fica 16. (justificação).
<p>Procedimentos</p> <ol style="list-style-type: none"> 11. Na realização da subtração com o algoritmo realiza duas operações: adição e subtração ao verificar que não é possível a retirada. 12. Ou ainda em 9 para 6 diz que dá zero, pois nove não dá para tirar do 6. 13. Ou ainda diz 9 para 6...9,8,7,6 dá 3. 14. Ou ainda que 9 tira 6 fica 6 pois tem que tirar 3 do 9 para ficar 6. 15. Na adição faz 5 mais 9 igual a 4, pois conta na seqüência a partir do 5 e quando alcança 9, pára.
<p>A reserva é justificada tanto na adição como na subtração</p> <ol style="list-style-type: none"> 16. Em 9 mais 5 dá 14, deixa o 4 ali e põe o 1 lá em cima, pois este 1 é 10, ou ainda que o 1 do 14 não pode ficar embaixo porque a casa das unidades já foi ocupada pelo 4 e o 1 é uma dezena, ou ainda, que este 1 é 10, mas não sabe dizer porque é que ele foi para cima (casa das dezenas). 17. Em 9 não dá para tirar de 6, então empresta 1 do 8 e fica 9 para 16 justificando que este 1 fica valendo 10 para se juntar ao 6, ou ainda que, na posição do 8, ele vale 1 dezena, mas vindo para junto do 6 ele vale 10, ou ainda que ele vale 10.

a) Em relação ao objeto

2. Identificação da estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral;
4. Não identificação da estrutura do SND no numeral arábico numa atividade de reconhecimento.

b) Em relação ao conteúdo da representação

4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica.

Interpretação dos resultados

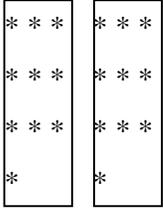
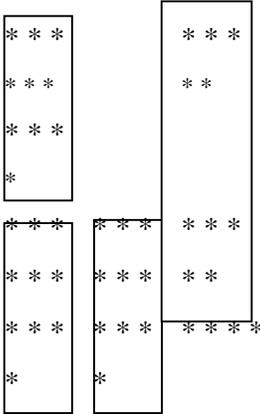
Somente as crianças que apresentaram as justificações 16 e 17 podem ser enquadradas na categoria 2a.

Todas as demais justificações ou explicações apresentadas ou procedimentos adotados enquadram as crianças na categoria 4a em se tratando do objeto, isto é, não reconhecem a estrutura do SND no numeral arábico. Na categoria 4b, em se tratando do conteúdo do registro de representação também não identificam agrupamentos nos algarismos do numeral arábico.

Esses procedimentos adotados, ou as justificações e explicações apresentadas, também podem ser analisados tendo por referências o quadro de uma teoria de representação e as relações entre significantes e significado.

Quando se trata das operações necessárias referentes ao significado, há aplicações que levam os conjuntos de conjuntos ao conjunto dos cardinais e o conjunto dos cardinais ao conjunto das representações escritas. É esse homomorfismo composto que é utilizado para a regra de adição de acordo com Vergnaud (1985). As parcelas têm que ser identificadas segundo os grupos de dez (dezenas) e as unidades que as compõem. As dezenas e as unidades já representam a aplicação do plano dos cardinais dos conjuntos no plano das representações escritas, mesmo que isto não seja feito fisicamente. Por sua vez, os cardinais também já representam a aplicação que leva o plano dos conjuntos ao plano dos cardinais (quantos grupos de dez e quantas unidades soltas). Se essa aplicação composta for efetuada com as operações que as acompanham, o significante (representação arábica do número) engaja o significado de forma pertinente possibilitando justificar a reserva.

Para explicitar este homomorfismo composto, utilizar-se-á um exemplo: a adição proposta na prova: $15 + 29$.

Conjuntos	Cardinais dos conjuntos	Representações escritas	
	1 conjunto de 10 e 5 objetos	Dezenas 1	Unidades 5
	2 conjuntos de 10 e 9 objetos	2	9
<p>Adicionando</p> 		1 + 2	5 + 9 = 14 que significa 1 grupo de 10 e 4 unidades
		1 + 1 + 2	4

É a aplicação composta que permite justificar porque o 4 é deixado na casa das unidades e o 1 é somado junto com as dezenas.

No caso das tarefas da prova há que se considerar que as crianças não trabalharam nos diversos planos e lidam somente com um tipo de representação. Esse tipo de ação corresponde ao que Duval (1995) denominou de tratamento. “O tratamento é a transformação de uma representação tomada como dado inicial em uma representação considerada como terminal por resposta a uma questão, ou a um problema ou a uma necessidade” (DUVAL, 1995, p. 39).

Nesse caso, constata-se que a obtenção da adição das unidades vai colocar em jogo uma transformação, visto que o resultado obtido ultrapassa 10 unidades que já forma 1 dezena. Por essa razão a soma 14 obtida, tem de ser transformada em 10 + 4

significando uma transformação interna ao registro. Da mesma forma essas 10 unidades são representadas por 1 dezena: $1d + 4$.

Mas a análise das dificuldades das crianças tem que ser feita, segundo Duval (2003), em termos de conversão. Isso significa que quando a criança soma 9 com 5 e obtém 14 ela está utilizando dois tipos de registros de representações semióticas: a palavra falada (quatorze) e a representação por algarismos (14). Esses dois tipos de registros são de naturezas diferentes: a palavra é um tipo de registro multifuncional cujos tratamentos não são algoritmizáveis e a representação por algarismos é um tipo de registro monofuncional cujos tratamentos são algoritmizáveis. Ambos são tipos de registros que se referem a representações discursivas. Segundo Duval (2003), para passar de um tipo de registro a outro é necessário articular as variáveis que são específicas do funcionamento de cada um dos registros. São essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes que devem ser levadas em consideração em cada um dos dois registros.

As respostas dadas, justificativas e argumentações apresentadas podem ser analisadas de acordo com essa coordenação de dois registros efetuada pela criança. Quando ela argumenta que o 1 deve ir para cima e o 4 do 14 deve ficar embaixo, é necessário identificar em que critérios se baseia seu argumento. É nessa análise dos dados que se pode identificar como ela efetua os dois tipos de transformações semióticas que são diferentes: os tratamentos e as conversões.

Quando a criança permanece no mesmo sistema, ela efetua uma transformação que corresponde a um tratamento e o procedimento de deixar o 4 embaixo e colocar o 1 em cima é justificado de acordo com a compreensão que ela tem desse tipo de registro. Se ela não faz a leitura dos algarismos do numeral de acordo com o valor relativo das unidades, ela argumenta que tem que fazer assim porque senão “à conta não vai dar certo”, “porque a tia ensinou”, “porque ali não pode por dois números” e que o 1 que vai para cima vale 1 mesmo. Do mesmo modo ela empresta 1 dezena das 8 dezenas do 86 para retirar as 9 unidades que não foram possíveis de serem retiradas das 6 unidades. Mas ela não sabe porque, ao emprestar

essa dezena, ela se junta às 6 unidades transformando-as em 16 unidades. Afirma que este 1 vale 1 mesmo e que se torna 16 pois “senão não dá pra tirar o 9” ou porque “juntou no lado do 6 e fica 16” ou ainda “que a professora ensinou assim”.

Quando a criança efetua uma transformação que corresponde a uma conversão, significa que ela coordena os dois tipos de registros (a palavra quatorze e o numeral arábico 14) ao mesmo tempo em que enfrenta o fenômeno da não congruência. No caso, os dois registros de representação não são congruentes pelos seguintes fatores:

- a) não existe correspondência semântica das unidades de significado pois quatorze é a combinação das palavras quatro e dez, que sofreram alterações “quator” ao invés de “quatro” e “ze” ao invés de “dez” e no registro de representação através dos algarismos arábicos 1 é 1 dezena ou 10 unidades e 4 é 4 unidades;
- b) não existe conservação da ordem das unidades: quatorze significa quatro mais dez e 14 significa 1 d + 4 u ou $10 + 4$.

Essa coordenação permite que ela justifique a ida do 1 para cima em virtude dele corresponder a 10 unidades ou uma dezena e ao mesmo tempo justificar que o 1 emprestado do 8 significa 10 unidades, pois se trata de 1 dezena emprestada.

O que se pode concluir dessa análise é que os fracassos dos alunos são devido à falta da mobilização de dois registros diferentes que lhes possibilite reconhecer o mesmo objeto através de duas representações. Está-se falando do objeto matemático que compreende a estrutura do SND e não do número em si que é reconhecido nos dois tipos de registros e quem sabe até confundido com eles. A estrutura do SND tem que ser reconhecida tanto no algarismo arábico como na palavra escrita.

A organização das tarefas da situação de ensino tem de contemplar a mobilização de vários registros de representação, a articulação das variáveis significativas de cada registro e a conversão de um registro de representação em outro para enfrentar os bloqueios as operações de tratamento e de conversão e a natureza dos

registros assim como o fenômeno da congruência ou não-congruência.

Prova 5: Respostas dadas, justificativas e argumentações apresentadas, procedimentos e estratégias utilizados.

A prova 5 compreendeu o plano dos objetos, o plano dos cardinais e o plano das representações escritas. Foi uma prova que exigiu o reconhecimento do conteúdo do registro de representação de quantidades com a utilização do numeral arábico e da escrita. Esse reconhecimento exige a identificação da estrutura do SND nos dois tipos de registros, portanto o reconhecimento do objeto.

1. Número de fichas separadas para cada algarismo do numeral de acordo com o valor absoluto das unidades. Não atribuiu significado para as fichas que sobraram ou disse que elas não foram circuladas porque não tem mais algarismos no numeral. Seu argumento não é abalado frente a um outro ponto de vista.
2. Número de fichas separadas de acordo com o valor relativo dos algarismos do numeral.
3. Número de fichas separados de acordo o valor absoluto das unidades, mas alteração de procedimento frente ao ponto de vista do outro.
4 Número de fichas separadas sem considerar o valor relativo das unidades para os valores 12 e 17 e de acordo com o valor relativo para os números 22 e 38.
5. Número de fichas separadas sem considerar o valor relativo das unidades e auto-correção após a leitura pausada dos numerais 22 e 38.

a) Em relação ao objeto

1. Identificação da estrutura do SND na palavra: sufixos, prefixos e caráter operatório que os ligam.
2. Identificação da estrutura do SND no numeral arábico: valor relativo do algarismo no numeral.
3. Não identificação da estrutura do SND na palavra: lexicalização direta.
4. Não identificação da estrutura do SND no numeral arábico numa atividade de reconhecimento.

b) Em relação ao conteúdo da representação

1. Identificação do padrão de organização da escrita arábica $abc\dots x \rightarrow a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + c \times 10^{n-2} + \dots \times 10^0$.
4. Não identificação do valor relativo das unidades na escrita arábica.

b) Numa operação de conversão

1. Não reconhecimento das unidades cognitivamente pertinentes nas duas representações de acordo com o sentido da congruência:

- Plano dos objetos → representação arábica
- Representação arábica → plano dos objetos
- Plano dos objetos → escrita
- Escrita → plano dos objetos

Interpretação dos resultados

O procedimento de número 1 adotado pelas crianças as enquadram nas categorias 3a e 4a quando se trata do objeto de conhecimento, isto é, a estrutura do SND, e na categoria 4b quando se trata do conteúdo do registro de representação. Esse procedimento não é abalado, nem frente ao ponto de “vista do outro” e nem frente a leitura pausada de outros numerais, pertencentes a outros intervalos que trazem mais explicitada a estrutura do SND em torno da base 10 e da posição ocupada pelo algarismo conforme a potência de 10 que ele representa.

O procedimento de número 2, por sua vez, enquadra as crianças nas categorias 1a e 2a que significa tanto o reconhecimento do objeto, isto é, a estrutura do SND na palavra e no numeral arábico, porque para os números 12 e 17 foram apresentadas figuras desenhadas linearmente e não linearmente. Já para os números 22 e 38 foi apresentado o numeral arábico 22, com pronúncia vagarosa das palavras e em escrita o número 38, também com leitura vagarosa das palavras.

Já os procedimentos de números 3, 4 e 5 enquadram as crianças na categoria 3a de não identificação da estrutura do SND na palavra, isto é, atribuição de significação aos sufixos e prefixos e ao caráter operatório que os unem, mas sim uma lexicalização direta por identificação de unidades singulares e idênticas representadas nas palavras que designam os números. Em relação ao conteúdo do registro de representação, elas se enquadram na categoria 4b por não identificação de agrupamentos num dos algarismos do numeral arábico.

Na operação de conversão, elas não reconhecem as unidades cognitivamente pertinentes nem na representação arábica e nem na escrita por palavras através dos

sufixos e prefixos que as compõem e do caráter operatório que os unem. Sempre circularam 30 objetos ou 20 objetos e não 3 e 2 grupos de 10 objetos ao transitar do plano da representação arábica ou escrita para o plano dos objetos. Da mesma forma ao transitar do plano dos objetos para o plano da representação arábica, houve a contagem das unidades singulares idênticas e sua associação ao numeral arábico.

Essa prova constitui uma replicação da prova de Kamii (1992), já replicada por outros pesquisadores no mundo (ROSS²⁹, 1986 na Califórnia, Silvern e Kamii³⁰, 1988 no Alabama; Kamii, 1987 no Alabama; Teixeira, 1996, em Paris) com algumas alterações quanto aos valores numéricos propostos para as crianças: 12, 22, 38, 17 e 30. As interpretações dos resultados obtidos também foram diferenciadas. Kamii (1992) busca interpretar os resultados frente à teoria operatória piagetiana e Teixeira (1996) interpreta os resultados frente à uma teoria de representações de Gerard Vergnaud.

Os procedimentos de aplicação da prova 5 diferem, em alguns aspectos, dos procedimentos utilizados pelos demais pesquisadores. Houve a preocupação de apresentar coleções cujos desenhos, para serem contados estavam, dispostos ora linearmente, ora de forma irregular. Também se verificou se a criança era capaz de compor coleções a partir de numerais apresentados. Procurou-se incluir um número compreendido no intervalo 11 a 15, um número compreendido no intervalo 16 a 19, outro no intervalo 20 a 40. Esses valores foram escolhidos em virtude de explicitar de uma forma mais ou menos acentuada, a estrutura do SND (no caso 12 e 17) ou o número de unidades mais claro nas palavras que os representam (no caso 22, 30 e 38).

Para uma interpretação melhor das respostas dadas, justificativas e

²⁹ Citado em Kamii (1992), cuja referência completa é ROSS, S. (1986, abril). *The developmental of children's place-value numeration concepts in grades two through five*. Trabalho apresentado no encontro anual da American Educational Research Association, São Francisco. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 273 482).

³⁰ Citado em Kamii (1992), cuja referência completa é SILVERN, S.; KAMII, C. *Place value and commutativity: their role in double-column addition*. Manuscrito não publicado. 1988.

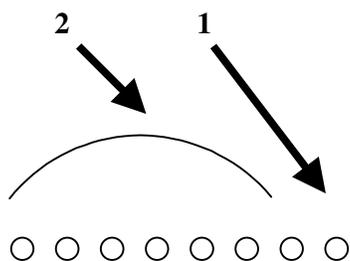
argumentações apresentadas e com o intuito de identificar a compreensão da estrutura do SND pelas crianças, convém resgatar as análises feitas para a identificação das regras de organização do numeral arábico para a representação de quantidades.

Essas regras foram analisadas em relação ao caráter operatório da notação arábica e confrontadas com as regras de formação das palavras que expressam os números. Também em relação ao caráter operatório que pode estar mais ou menos explicitado, dependendo da(s) palavra(s) que representa(m) o(s) número(s).

Para coleções com até 9 elementos basta utilizar um dos dez algarismos existentes, criados especialmente para isto: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Quando a coleção atinge dez objetos, os mesmos dez algarismos, eles passam a ser combinados agora para representar os grupos de dez que se pode formar, os grupos de 100 (dez grupos de dez, portanto um agrupamento de agrupamento). Essa combinação segue uma regra: os algarismos são justapostos da direita para a esquerda, conforme a potência de dez que ele representa em ordem crescente. O plano das representações escritas pode ser assim descrito: $a_n \dots a_0$ em que a_n o número de conjuntos de 10^n objetos que a coleção comporta. Dessa forma, representar 21 objetos com a notação arábica, nesse sistema de base dez e posicional significará ter um numeral do tipo $a_1 a_0$ no qual a_0 estará representando 1 conjunto de 10^0 elementos (logo $1 \times 10^0 = 1$ objeto) e a_1 , 2 conjuntos de 10^1 elementos (logo $2 \times 10^1 = 20$ objetos). A justaposição dos algarismos estará compreendendo uma soma dos tipos de grupos que se pode formar: $2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$.

Imaginando um sistema diferente, de base 4 e posicional a ser utilizado para representar uma coleção com 9 objetos, ter-se-ia, da mesma forma, a notação $a_n \dots a_0$, só que nesse caso a_n representaria o número de conjunto de 4^n objetos que se pode formar. Essa justaposição dos algarismos 1 e 2, nesse sistema, estaria indicando 1 conjunto com 4^0 objetos (logo $1 \times 4^0 = 1$ objeto) e 2 conjuntos de 4^1 objetos (logo $2 \times 4^1 = 8$ objetos).

Imagine-se, então, que se pedisse a um sujeito que, na coleção que segue, circulasse o número de objetos correspondentes ao 2 e ao 1 do 21, num sistema de base 4 e posicional.



Isso significa que um sistema posicional e de base x é estruturado na forma $a_n \dots a_0$ em que a_n representa o número de conjuntos x^n que se pode formar. A quantidade N de objetos de uma coleção qualquer seria obtida pela soma dos produtos dos algarismos a_n por x^n : $N = \sum a_n x^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Este é o caráter operatório das regras que regem o sistema de numeração arábica: a composição aditiva e a composição multiplicativa. Numa versão simplificada, o numeral que representa o número, no nosso sistema de base dez e posicional, só é composto de algarismos que representam os operadores das potências de 10: Assim $523 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

Essa análise permite, portanto, interpretar que quando a criança separa o número de objetos de acordo com o valor relativo das unidades, ela está identificando os algarismos da representação arábica como operadores de potências de 10 significando compreensão da estrutura do SND.

Quando a criança muda seu ponto de vista a partir do ponto de vista do outro pode haver um significado diferente em relação à compreensão da estrutura do SND na representação do número por algarismos. Pode significar a identificação do caráter operatório presente na representação do número por palavras: vinte e dois traz explicitada uma soma a partir do conectivo “e” significando vinte unidades idênticas (e não dois grupos de 10) somadas a duas unidades idênticas. Tal leitura acontece porque as regras de formação das palavras que representam os números são irregulares para os números compreendidos entre 10 e 20, e para as dezenas vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.

A mesma interpretação pode ser aplicada quando a criança identifica o número de objetos da coleção de acordo com o valor relativo das unidades a partir da pronúncia pausada das palavras que expressam o número: vinte e dois, trinta e oito. Os vinte ou os trinta objetos da coleção circulados não são identificados como 2 ou 3 grupos de 10, respectivamente.

As interpretações acima vêm de encontro às interpretações de Teixeira (1996) sobre as dificuldades de compreensão do sistema numérico, situando-as entre conceituação e a representação. Procurou-se identificar de que forma as representações dos números através da palavra e por algarismos utilizadas pelas crianças informam a conceituação do número e da própria estrutura do SND em torno da base e posição. Os diferentes significantes (as palavras e os dígitos da representação por algarismos) veiculam sentidos diferentes que não se articulam de imediato.

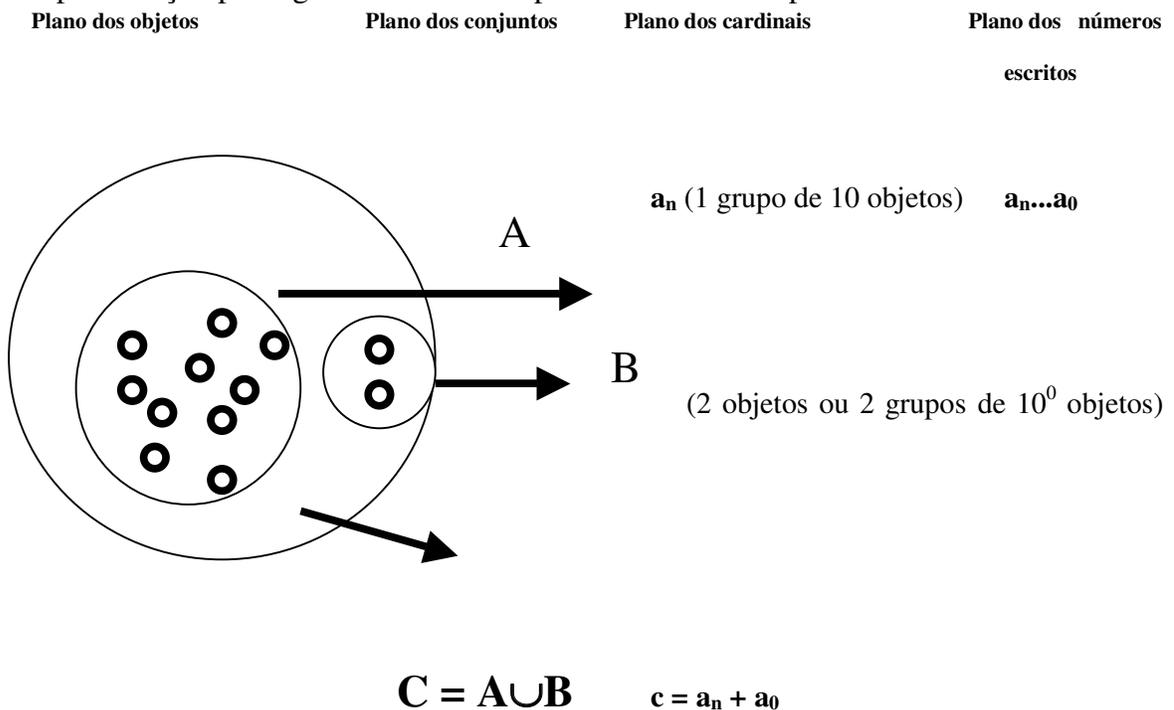
Partimos das conclusões de Teixeira (1996) que afirma ser preciso “redimensionar o trabalho sobre a numeração posicional mantendo no espírito que há uma relação entre significante e significado [...] tendo em vista a complexidade destas relações [...]” (p.202).

Nesse sentido, serão analisados o significado e os significantes utilizados para exprimi-lo, buscando identificar que parte do significado eles exprimem para entender, os erros e as hesitações apresentadas. Serão analisadas, também, as relações entre os significantes e o significado engajados e os elementos constitutivos dos significantes e do significado e suas relações complexas no interior do sistema considerado.

Em se tratando do sistema de numeração posicional, há que se considerar a aplicação composta que é colocada em jogo, pois o reagrupamento dos objetos em conjuntos de dez, e os conjuntos de dez em conjuntos de conjuntos de dez objetos é colocado em paralelo com o código da numeração de posição: coluna das unidades, coluna das dezenas, coluna das centenas, etc. Essa aplicação composta, por sua vez, compreende as operações de passagem dos planos apontados por (VERGNAUD, 1985): o plano dos objetos, o plano dos conjuntos de objetos, o plano dos cardinais dos

conjuntos e o plano das representações escritas. Essas operações que permitem passar de um plano a outro são: o reagrupamento, a medida ou contagem e a escrita. No caso do sistema de numeração posicional deve-se considerar a aplicação composta que compreende as aplicações que permitem aplicar o conjunto dos conjuntos no conjunto dos cardinais e o conjunto dos cardinais nos conjuntos dos números escritos.

As aplicações e as operações compreendidas na medida de um conjunto e sua representação por algarismos arábicos podem ser assim explicitadas:



Aplicação “*m*” que aplica o conjunto dos conjuntos no conjunto dos cardinais:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Aplicação “*e*” que aplica o conjunto dos cardinais no conjunto das representações escritas:

$$e(a_n + a_0) = e(a_n) + e(a_0)$$

Aplicação composta que aplica a representação do cardinal da união na representação dos cardinais dos conjuntos A e B (disjuntos) que se formam no

conjunto maior:

$$e(m(A \cup B)) = e(m(A)) + e(m(B))$$

São essas operações de agrupamento, medida e escrita, presentes nas aplicações descritas, que fazem passar de um plano a outro juntamente com a aplicação composta que permite aplicar a cada conjunto uma representação escrita, que precisam ser consideradas ao nível do significado. Ao nível dos significantes, há os objetos desenhados, as palavras repetidas na contagem e as representações escritas por algarismos arábicos.

Pode-se inferir que esses significantes cobrem somente parte do significado de acordo com o plano em que se situam, se considerados individualmente. É necessário que eles sejam contemplados para que as conceituações sejam possíveis e tornam as representações significativas.

Os erros identificados podem ser relacionados com as operações acima apontadas: os dígitos da representação por algarismos são entendidos como unidades singulares sem respeito à posição (valor relativo), pois falta ao sujeito efetuar a passagem do plano dos cardinais dos conjuntos obtidos por contagem (por se tratar de elementos de natureza discreta) ao plano das representações escritas. Os significantes utilizados, expresso por palavras ou algarismos arábicos, não são identificados em relação à estrutura do SND baseada em regras de base e posição.

Não existe também a passagem do plano dos cardinais ao plano das representações escritas com utilização da palavra. Por essa razão, o procedimento apresentado, no qual a criança aceita o ponto de vista do outro ou circula o número de objetos de acordo com o dígito da representação quando este explicita na leitura pausada o número de unidades, pode ser interpretado como a não identificação da estrutura do SND. Isso acontece porque as palavras que designam os números são aprendidas antes da aprendizagem da representação dos números arábicos, e são utilizadas para a contagem de unidades idênticas. Já foi confirmado por pesquisadores

(FUSON, RICHARDS e BRIARS, 1982; GELMAN e MECK, 1983)³¹ que os nomes dos números constituem, desde cedo, um domínio lexical autônomo.

Como conclusão parcial, infere-se que as tarefas a serem propostas para uma situação de ensino para a aprendizagem do sistema de numeração decimal e posicional deverão compreender as operações presentes nas aplicações que permitem a passagem de um plano para outro. Essas situações no plano dos objetos e dos conjuntos de objetos deverão compreender os agrupamentos e os agrupamentos de agrupamentos e no plano das representações escritas, o valor relativo das unidades na escrita arábica e a identificação dos agrupamentos e dos agrupamentos de agrupamentos na palavra que designa o número, apesar da irregularidade dos padrões de organização dessas na nossa língua. As situações deverão também contemplar a articulação entre a atividade de contagem e as competências essenciais de agrupamento e codificação que constituem procedimentos relativos às regras de construção do código numérico.

³¹ Autores citados em Teixeira (1996), cujas referências completas são: FUSON, K; RICHARD, J.; BRIARS, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number Word sequence. In: BRAINER, C. (Ed.) *Progress in cognitive development children's logical and mathematical cognition*. V. 1 (p.33-92). N. York: Spirnger-Verlag. GELMAN, R.; MECK, E. (1983). Preeschooler's counting principles before skill, *Cognition*, 13, 343-359.

CAPÍTULO 5

UMA SITUAÇÃO DE ENSINO

A situação de ensino foi elaborada tendo por base as interpretações dos resultados obtidos nas tarefas do instrumento de coleta de informações qualitativas, constituídos de respostas dadas pelas crianças, estratégias e procedimentos utilizados, argumentações e justificações apresentadas, que foram incluídos em categorias estabelecidas *a priori*. As categorias foram elaboradas em relação à compreensão da estrutura do SND pelas crianças tanto em relação ao objeto de conhecimento, ao conteúdo da representação e à operação de conversão no que diz respeito à identificação das unidades cognitivamente pertinentes na escrita e no numeral arábico.

A elaboração das atividades e das diversas tarefas propostas para a situação de ensino levou em consideração resultados de pesquisas, uma teoria de representações que relaciona os significantes e o significado a uma conceitualização. Duval (1995) nos apresenta uma estrutura triádica e diádica da significância de um signo, na qual essas relações podem ser de representação ou de referência entre os elementos constitutivos dessa significância (significante, significado, objeto). Elas serão de representação do objeto para signos constituídos por uma referência instituída tais como vetores, operadores,... e não possuem significação. Elas serão de referência ao objeto para os signos aos quais serão atribuídos uma significação determinada, pelo sistema da língua, ao relacionar o significante e o significado. A relação ao objeto, neste caso, é apenas assegurada no plano do discurso. A figura 10 explicita essas relações e a estrutura diádica como triádica da significância.

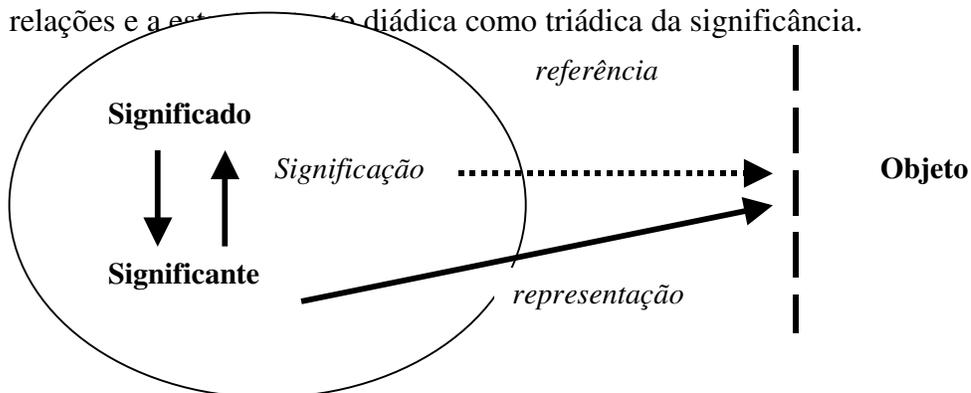


FIGURA 10 - ESTRUTURA DIÁDICA E TRIÁDICA DA SIGNIFICÂNCIA .
 FONTE: DUVAL. 1995. p.63

A elaboração das atividades também levou em consideração os padrões de organização e o caráter operatório, tanto das palavras que expressam os números como a representação desses através de algarismos.

O que se buscou foi a organização de uma situação de ensino que permita a compreensão dos registros de representação do número no que diz respeito à estrutura do SND veiculada nesses registros. Por esta razão, a fundamentação se deu nas relações entre semiósis e noésis e que envolvem as relações entre significantes e significados, as atividades de produção, tratamento e conversão que compreendem o fenômeno da congruência e não-congruência de Duval (1995).

Preliminarmente, a análise das tarefas da situação de ensino subsidiou a forma de como se pretende provocar procedimentos por parte dos alunos cujo sentido estará voltado para uma evolução da compreensão da estrutura do SND e da superação das dificuldades. Essa análise descreverá certas escolhas feitas, as características da situação, o tipo de operação, a natureza do registro de representação, para que se possa discutir qual o peso que elas podem ter para os alunos em relação à ação, escolha, decisão, controle e validação, ainda os comportamentos possíveis e de que forma eles revelam aplicação do conhecimento, significando aprendizagem.

Apresentar-se-ão, a seguir, os problemas e atividades presentes nas tarefas propostas aos alunos levando-os a agir, falar, refletir, confrontar pontos de vista, decidir e contra-argumentar.

A situação de ensino foi modelizada de forma a produzir a compreensão da estrutura do SND na palavra escrita e na representação por algarismos.

Nas tarefas da situação de ensino propostas foram utilizados os planos apontados por Vergnaud (1991): o plano dos objetos, o plano dos conjuntos, o plano dos cardinais dos conjuntos e o plano das representações escritas. O plano dos objetos e dos conjuntos contemplará atividades que envolvem as operações de adição, segundo o itinerário dos dedos cardinalizados em torno de agrupamentos de 10 identificados nas palavras que representam os números e nas representações por algarismos. O plano dos cardinais dos conjuntos contemplará atividades de comparação, interpretação e

ordenação através das palavras que representam os números e das representações desses por algarismos, evidenciando as unidades, dezenas, centenas e milhares. O plano das representações escritas contemplará atividades voltadas para os padrões de organização das palavras que representam os números e das representações por algarismos, atividades voltadas para a busca de regularidades e atividades centradas nas operações aritméticas. Neste plano, será considerado a teoria de representações de Duval (1995) no tocante às relações entre significantes e significados e as atividades de produção, tratamento e conversão, enfrentando o fenômeno de congruência e de não congruência.

5.1 AS TAREFAS DA SITUAÇÃO DE ENSINO

As tarefas organizadas para comporem a situação de ensino serão analisadas em relação ao tipo de operação, à natureza do registro e ao fenômeno da congruência. Resgatar-se-á, também, resultados de pesquisas que justificam os encaminhamentos propostos. Em seguida elas serão apresentadas.

As tarefas 1 e 2 foram organizadas levando em consideração resultados de pesquisas apresentados por Fuson e Kwon (1991) e a afirmação de que as crianças devem compreender o sentido quantitativo dos números expressos por algarismos, interpretando-os em termos de dezenas e unidades visto que, o padrão alfabético, devido às suas irregularidades, não explicita os agrupamentos e os agrupamentos de agrupamentos. Os itinerários sugeridos estão fundamentados nos resultados de pesquisas apresentados pelos autores que argumentam tais itinerários serem, em certo sentido, mais favoráveis aos métodos de cálculo de somas que são estruturadas em torno de 10, por permitirem identificar as somas superiores a 10 como sendo $10 + x$. Esse procedimento pode chamar a atenção para as palavras que representam os números e não trazem explicitada essa formação em torno de 10. Assim $8 + 6$ igual a 14 pode ser obtido colocando-se os 8 dedos numa mão e decompondo a segunda parcela em duas partes (no caso $2 + 4$), de forma que a primeira parte completa 10 e

a segunda parte é o que excede a 10. O resultado é lido, então, como 10 mais 4 e associado ao 14. No itinerário que decompõe cada parcela em uma soma do tipo $5 + x$ e $5 + x'$, somente os complementos x e x' vão corresponder aos dedos que ficarão levantados em cada mão e o resultado também é lido como $10 + x + x'$.

Por se tratar de operações ligadas ao par semiósis/noésis, estarão compreendendo a operação de tratamento quando ocorre a transformação intra-registro dos valores numéricos envolvidos tanto num itinerário como no outro. No primeiro itinerário, essa transformação corresponde à partição da segunda parcela em duas partes “ n ” e “ m ”, sendo que “ n ” completa 10 ao ser adicionado à primeira parcela e “ m ” é o que excede a 10. No segundo itinerário essa transformação corresponde à partição das duas parcelas em “ $5 + x$ ” e “ $5 + x'$ ”. Em relação à natureza do registro de representação, essa tarefa compreende um registro monofuncional e a sua conversão num registro plurifuncional. Em relação aos planos, essa tarefa permite a passagem do plano dos objetos ao plano dos conjuntos ao explicitar os agrupamentos em torno de 10, e deste ao plano dos cardinais, compreendendo a interpretação dos registros de representação que significa identificar esses agrupamentos na palavra (sufixos e prefixos) e na escrita arábica (com a atribuição do valor relativo ao algarismo do numeral) e, por fim, ao plano das representações escritas, ao se voltar para os padrões de organização da palavra e da escrita arábica.

As tarefas 3 e 4 foram organizadas levando em consideração os resultados de pesquisas apresentados por Lerner e Sadovsky (1996) que permitiram às autoras refletir sobre situações didáticas para o ensino de um sistema de representação para os números. A comparação foi considerada como um aspecto essencial do uso da numeração escrita, visto que o sistema de numeração é portador de significados numéricos. Numa atividade de comparação, a relação de ordem adquire uma especificidade vinculada à ordenação do sistema que é mobilizada. Os critérios de comparação sempre estarão vinculados a uma lógica que revela, de uma forma ou de outra, a estrutura do SND. Assim “o primeiro é quem manda” ou “a maior quantidade de algarismos” são critérios a serem compartilhados por todos os membros de um

grupo e estão associados à estrutura do SND. Isto porque o algarismo mais da esquerda estará sempre indicando o produto de um algarismo por uma potência de dez e quanto maior o número de algarismos no numeral, maior a quantidade de grupos de dez que se pode formar. Essas tarefas estão situadas no plano das representações escritas, no plano dos conjuntos., já que exige a comparação por meio dos algarismos da escrita arábica e do valor relativo desses nessa escrita, que representa potências de 10. Também estão voltadas ao plano dos cardinais, pois compreende a interpretação dos algarismos do numeral para efetuar a ordenação e a comparação. E por fim, também ao plano das representações escritas, pois estará identificando o padrão de organização da escrita arábica: posição do algarismo no numeral e caráter operatório. Em se tratando de uma teoria de representações, estão compreendendo o tratamento de um significante, pois a comparação vai exigir a decomposição do numeral da escrita arábica em suas partes constituintes e a transformação dos algarismos do numeral de acordo com seu valor relativo.

As tarefas 5 e 6 estão relacionadas, também, a uma atividade de comparação, mas com a seguinte diferença: em se tratando de uma teoria de representações, ela está centrada na produção de um significante e no tratamento que compreenderá uma atividade dentro de um único sistema de representação.

As tarefas 7, 8, 9 e 10 estão focadas no plano dos agrupamentos e dos agrupamentos de agrupamentos e também no plano das representações escritas ao procurar explicitar os padrões de regularidade. A busca de padrões de regularidades estará sendo contemplada na atividade de produção e de interpretação compreendidas nessas tarefas. Segundo Lerner e Sadovsky (1996) “é estabelecer regularidades cumpre um duplo objetivo: torna possível formular problemas dirigidos a explicitar a organização do sistema e permite gerar avanços no uso da numeração escrita” (p.132). Elas envolvem registros de natureza multifuncional e as operações de produção e tratamento.

As tarefas 11, 12, 13, 14 e 15 compreendem a atividade de conversão de acordo com uma teoria de representações. Para essa conversão ser possível, é

necessário explicar o caráter operatório tanto da escrita por algarismos como através da língua natural.

Na escrita verbal há sufixos e prefixos que expressam as potências de dez e as quantidades básicas, além da forma como estes prefixos e sufixos se articulam entre si por meio de operações de adição e multiplicação.

Na escrita numérica, há os algarismos que, de acordo com a posição expressam potências de dez, e, de acordo com a quantidade, expressam um produto por uma potência de dez e também se articulam entre si através de uma adição.

Nas atividades de conversão compreendidas nas tarefas, há que se analisar o fenômeno da congruência, a fim de verificar o grau de complexidade para que essa possa ser coordenada pelo sujeito conhecedor. Essa análise vai exigir a segmentação dos dois registros de representação em suas unidades significantes respectivas, a colocação em correspondência dessas unidades significantes e a verificação dos três critérios de congruência que são: a possibilidade de uma correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a mesma ordem das unidades componentes de cada um dos registros de representação. Ela vai exigir, igualmente, a identificação dos tipos de registros de representação e a atividade cognitiva de conversão entre dois registros de representação que envolve as relações entre cada representante e o representado (expressão e tratamento) e as relações entre os representantes (conversão).

Tarefa 1

Solicitar que os problemas de adição a seguir sejam resolvidos com auxílio dos dedos de forma que as somas que são superiores a 10 compreendam duas mãos, abaixando os dez primeiros dedos e tornando a levantá-los para os valores que excedem a dez, permanecendo elevados. O primeiro termo (parcela) da adição será colocado numa das mãos a partir do dedão e o segundo termo (parcela) da adição será colocado em seguida. Este segundo termo será sempre decomposto em duas partes a e b, sendo que “a” completará o primeiro termo até atingir 10, colocado na seqüência, a partir da primeira parcela, e “b” seguiu irá na última mão cujos dedos foram abaixados sendo agora levantados a partir do minguinho.

a) Tenho 9 figurinhas e ganhei 2 do meu amigo. Com quantas figurinhas fiquei?

Valores propostos: $5 + 6$, $4 + 7$, $3 + 8$, $2 + 9$ totalizando 11; $6 + 6$, $5 + 7$, $4 + 8$ e $3 + 9$, totalizando 12; $5 + 8$, $4 + 9$ e $6 + 7$, totalizando 13; $5 + 9$, $6 + 8$ e $7 + 7$, totalizando 14; $6 + 9$ e $7 + 8$, totalizando 15.

Tarefa 2

Solicitar que os alunos resolvam os problemas de adição também utilizando os dedos cardinalizados, porém com a seguinte diferença: as crianças deverão realizar as adições colocando numa das mãos um dos termos da adição e, na outra mão, o outro termo. Porém, o que será colocado de cada um dos termos, em cada mão, será somente a parte que excede a 5. Isso significará que cada termo da adição será decomposto em duas partes “a” e “b” e “a” e “b₁” sendo $a = 5$. Será colocado em cada mão somente a parte “b” e “b₁” de cada parcela. A soma obtida será dita como igual a 10 e “b” + “b₁”.

Exemplificando: $7 + 9$ $\therefore 7 = 5 + 2$ e $9 = 5 + 4$

Numa mão 2 e em seguida 4, totalizando 6. O resultado de $9 + 7$ será dito 10 e 6 e em seguida a palavra dezesseis.

a) Tenho 9 figurinhas e ganhei 7 do meu amigo. Com quantas figurinhas fiquei?

Demais valores propostos: $8 + 8$, também totalizando 16; $9 + 8$ totalizando 17 e $9 + 9$ totalizando 18.

Tarefa 3

Comparar os seguintes valores, dizendo qual é o maior:

12 e 15 107 e 109

17 e 19 112 e 121

22 e 32 232 e 222

29 e 45 240 e 340

120 e 671147 e 147

Para cada par comparado, solicitar justificativa.

Tarefa 4 (LERNER e SADOVSKY, 1996, p. 121)

Solicitar que as crianças selecionem, dentre os preços apresentados 45, 10, 40, 60, 25 e 85, o preço de cada pacote de balas, sabendo que cada pacote contém: 4, 26, 62, 30, 12 e 40 balas cada um.

Solicitar que elas argumentem a respeito das próprias escolhas e das escolhas dos colegas.

Selecionar dentre os argumentos as funções dos termos, o caráter operatório dos prefixos e dos sufixos.

Tarefa 5 (LERNER & SADOVSKY, 1996, p.122)

Solicitar que as crianças formem com os algarismos 1, 2 e 3, todos os números com 2 e 3 algarismos possíveis. Em seguida solicitar que os números formados sejam colocados em ordem apresentando argumentos a respeito.

Tarefa 6 (LERNER & SADOVSKY, 1996, p.122)

Solicitar que as crianças estabeleçam qual a melhor posição para colocar um determinado algarismo num número de 2 algarismos para que se tenha o maior número possível. Solicitar que elas argumentem a respeito, em cada caso, até que se possa elaborar uma conclusão.

- a) 45 e o algarismo 3
- b) 27 e o algarismo 3
- c) 52 e o algarismo 3

Associar a posição do algarismo em relação aos agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos, isto é, quando os algarismos se tornam dezenas e quando eles se tornam centenas.

Evidenciar os prefixos e sufixos das palavras que representam os números formados também em relação às dezenas e centenas.

Tarefa 7

Solicitar que as crianças alterem os preços das mercadorias apresentadas abaixo em 10 reais a mais.

30,00; 123,00; 52,00; 102,00; 1435,00

Solicitar que elas procurem verificar algum padrão de regularidade buscando uma explicação para tal regularidade.

Tarefa 8

Solicitar que as crianças alterem os preços das mercadorias em 10 reais a menos.

30,00; 123,00; 52,00; 102,00; 1435,00

Solicitar que elas procurem verificar algum padrão de regularidade e busquem uma explicação para tal regularidade.

Tarefa 9

Solicitar que as crianças calculem o número de fitas adquiridas por uma vídeo-locadora que tinha inicialmente 13 fitas, e passa a adquirir 10 fitas por semana:

- a) ao final de 3 semanas
- b) ao final de 8 semanas
- c) ao final de 10 semanas.

Solicitar que argumentem sobre os procedimentos adotados para encontrar o resultado.

Solicitar que seja calculado o número de fitas que tinha uma vídeo-locadora que adquiriu 84 fitas ao final de 8 semanas.

Tarefa 10

Solicitar que as crianças indiquem o que deve ser feito para aparecer um zero no lugar dos algarismos determinados:

- a) no lugar do 8 do 1872
- b) no lugar do 7 em 175
- c) no lugar do 3 em 143

Solicitar que elas argumentem sobre os procedimentos adotados e sobre as conclusões que se tornaram possíveis.

Solicitar que as crianças indiquem o que deve ser feito para transformar 6275 em 6075, em 6205 e em 6270.

Fazer o mesmo para transformar o 4444 em 4440, em 4404 e em 4044.

Tarefa 11

Solicitar que as crianças identifiquem sufixos do tipo “enta” e “centos” ou “entos” no 6275 e no 4444. Solicitar que as crianças indiquem em que posição se encontra o algarismo com o sufixo “enta” com o sufixo “centos” ou “entos”. Solicitar que as crianças indiquem quantos grupos de dez pode-se formar com as palavras com sufixo “enta” e com sufixo “centos” ou “entos”.

Tarefa 12

Solicitar que as palavras abaixo, com sufixos “enta” sejam expressas por algarismos arábicos: sessenta e um; noventa e sete; quarenta e dois. Solicitar que seja elaborada uma conclusão a respeito dos prefixos que precedem os sufixos “enta” em termos de operação matemática. Solicitar que uma conclusão seja estabelecida para o conectivo “e” em termos de operação matemática.

Tarefa 13

Explicitar as operações contidas nas expressões a seguir:

- a) Noventa e seis
 - b) Cinquenta e nove
 - c) Setenta e quatro
-

Tarefa 14

Explicitar as operações contidas nos numerais a seguir:

57 49 78

Tarefa 15

Associar as operações contidas nas palavras que representam os números com as operações contidas nos numerais que os representam explicitando os prefixos que estão associados aos algarismos do numeral e os sufixos que indicam a posição dos algarismos no numeral:

Duzentos e noventa e seis trezentos e sete

2 9 6

3 0 7

trinta e oito
3 8

cinco mil quinhentos e cinquenta e cinco
5 5 55

Tarefa 16

A tabela 5, abaixo, apresenta os números de 1 a 10, expressos em algarismos, as palavras a eles associadas e as suas deformações

Número expresso em algarismos	Número expresso em palavras	Deformações			
1	Um	On			
2	Dois	Vin	Duz	Do	
3	Três	Tri	Trez		
4	Quatro	Quar	Quator		
5	Cinco	Cinq	Quinh	Quin	
6	Seis	seiss	Sess		
7	Sete	Set			
8	Oito	Oit			
9	Nove	Nov			
10	Dez	Ze	te	ta	Enta

Tabela 5: palavras designadas para os números de 1 a 10 e suas deformações.

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e uns. Analisar a função do um no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do 1 (um) e suas funções de adição e multiplicação na formação dos números

1 um

11 on + ze = 1 + 10 Onze

100 cem = 1 x 100 cem

$$101 \text{ cento} + \text{um} = 100 + 1 \text{ cento e um}$$

$$110 \text{ cento} + \text{dez} = 100 + 10 \text{ cento e dez}$$

$$1000 = 1 \times 1000 \text{ mil}$$

$$1001 \text{ mil} + \text{um} = 1000 + 1 \text{ mil e um}$$

$$1011 \text{ mil} + \text{on+ze} = 1000 + 1 + 10 \text{ mil e onze}$$

$$1111 \text{ mil} + \text{cem} + \text{on} + \text{ze} = 1000 + 100 + 1 + 10 \text{ mil cento e onze}$$

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e dois. Analisar a função do dois no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do 2 (dois) e suas funções de soma e multiplicação na formação dos números

2 dois

$$12 \text{ do} + \text{ze} = 2 + 10 \text{ doze}$$

$$20 \text{ vin} \times \text{te} = 2 \times 10 \text{ vinte}$$

$$22 \text{ vin} \times \text{te} + \text{dois} = 2 \times 10 + 2 \text{ vinte e dois}$$

$$200 \text{ duz} \times [\text{entos}] = 2 \times 100 \text{ duzentos}$$

$$202 \text{ duz} \times [\text{entos}] + \text{dois} = 2 \times 100 + 2 \text{ duzentos e dois}$$

$$222 \text{ duz} \times [\text{entos}] + \text{vinte} + \text{dois} = 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \text{ duzentos e vinte e dois}$$

$$2000 \text{ dois} \times [\text{mil}] = 2 \times 1000 \text{ dois mil}$$

$$2002 \text{ dois} \times [\text{mil}] + \text{dois} = 2 \times 1000 + 2 \text{ dois mil e dois}$$

$$2022 \text{ dois} \times [\text{mil}] + \text{vinte} + \text{dois} = 2 \times 1000 + 2 \times 10 + 2 \text{ dois mil e vinte e dois}$$

$$2222 \text{ dois} \times [\text{mil}] + \text{duz} \times [\text{entos}] + \text{vinte} + \text{dois} = 2 \times 1000 + 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \text{ dois mil duzentos e vinte e dois}$$

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e três. Analisar a função do três no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do três e suas funções de soma e multiplicação na formação dos números

3 três

$$13 \text{ tre} + \text{ze} = 3 + 10 \text{ treze}$$

$$30 \text{ trin} \times \text{ta} = 3 \times 10 \text{ trinta}$$

33 trinta + três = $3 \times 10 + 3$ trinta e três

300 trez x [entos] = 3×100 trezentos

303 trez x [entos] + três = $3 \times 100 + 3$ trezentos e três

333 trez x [entos] + trinta + três = $3 \times 100 + 3 \times 10 + 3$ trezentos e trinta e três

3000 três x [mil] = 3×1000 três mil

3003 três x [mil] + três = $3 \times 1000 + 3$ três mil e três

3033 três x [mil] + trinta + três = $3 \times 1000 + 3 \times 10 + 3$ três mil e trinta e três

3333 três x [mil] + trez x [entos] + trinta + três = $3 \times 1000 + 3 \times 100 + 3 \times 10 + 3$ três mil trezentos e trinta e três

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e quatros. Analisar a função do quatro no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas. A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do quatro e suas funções de soma e multiplicação na formação dos números

4 quatro

14 quator + ze = $4 + 10$ quatorze

40 quar x [enta] = 4×10 quarenta

44 quar x [enta] + quatro = $4 \times 10 + 4$ quarenta e quatro

400 quatro x [centos] = 4×100 quatrocentos

404 quatro x [centos] + quatro = $4 \times 100 + 4$ quatrocentos e quatro

444 quatro x [centos] + quar x [enta] + quatro = $4 \times 100 + 4 \times 10 + 4$ quatrocentos e quarenta e quatro

4000 quatro x [mil] = 4×1000 quatro mil

4004 quatro x [mil] + quatro = $4 \times 1000 + 4$ quatro mil e quatro

4044 quatro x [mil] + quar x [enta] + quatro = $4 \times 1000 + 4 \times 10 + 4$ quatro mil e quarenta e quatro

4444 quatro x [mil] + quatro x [centos] + quar x [enta] + quatro = $4 \times 1000 + 4 \times 100 + 4 \times 10 + 4$ quatro mil quatrocentos e quarenta e quatro.

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e cincos. Analisar a função do cinco no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas. A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do cinco e suas funções de adição e multiplicação na formação dos números

15 quin + ze = $5 + 10$ quinze

50 cinqü x [enta] = 5×10 cinqüenta

55 cinqü x [enta] + cinco = $5 \times 10 + 5$ cinqüenta e cinco

500 quinh x [entos] = 5×100 quinhentos

505 quinh x [entos] + cinco = $5 \times 100 + 5$ quinhentos e cinco

555 quinh x [entos] + cinqu x [enta] + cinco = $5 \times 100 + 5 \times 10 + 5$ quinhentos e cinqüenta e cinco

5000 cinco x [mil] = 5×1000 cinco mil

5005 cinco x [mil] + cinco = $5 \times 1000 + 5$ cinco mil e cinco

5055 cinco x [mil] + cinqu x [enta] + cinco = $5 \times 1000 + 5 \times 10 + 5$ cinco mil e cinqüenta e cinco

5555 cinco [mil] quinh x [entos] e cinqu x [enta] e cinco = $5 \times 1000 + 5 \times 100 + 5 \times 10 + 5$ cinco mil quinhentos e cinqüenta e cinco

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e seis. Analisar a função do seis no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do seis e suas funções de adição e multiplicação na formação dos números

6 seis

16 dez-e-sseis = $10 + 6$ dezesseis

60 sess x [enta] = 6×10 sessenta

66 sess x [enta] + seis = $6 \times 10 + 6$ sessenta e seis

600 seis x [centos] = 6×100 seiscentos

606 seis x [centos] + seis = $6 \times 100 + 6$ seiscentos e seis

666 seis x [centos] + sess x [enta] + seis = $6 \times 100 + 6 \times 10 + 6$ seiscentos e sessenta e seis

6000 seis x [mil] = 6×1000 seis mil

6006 seis x [mil] + 6 = $6 \times 1000 + 6$ seis mil e seis

6066 = seis x [mil] + sess x [enta] + seis = $6 \times 1000 + 6 \times 10 + 6$ seiscentos e sessenta e seis

6666 = seis x [mil] + seis x [centos] e sess x [enta] e seis = $6 \times 1000 + 6 \times 100 + 6 \times 10 + 6$ seis mil seiscentos e sessenta e seis

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e setes. Analisar a função do sete no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do sete e suas funções de adição e subtração na formação dos números

7 Sete

17 dez-e-ssete $10 + 7$ dezessete

70 set x [enta] = 7×10 setenta

77 set x [enta] + sete = $7 \times 10 + 7$ setenta e sete

700 sete x [centos] = 7×100 setecentos

707 sete x [centos] + sete = $7 \times 100 + 7$ setecentos e sete

777 sete x [centos] + set x [enta] + sete = $7 \times 100 + 7 \times 10 + 7$ setecentos e setenta e sete

7000 sete x [mil] = 7×1000 sete mil

7007 sete x [mil] + 7 = $7 \times 1000 + 7$ sete mil e sete

7077 sete x [mil] + set x [enta] + 7 = $7 \times 1000 + 7 \times 10 + 7$ sete mil e setenta e sete

7777 sete x [mil] + sete x [centos] + set x [enta] + sete = $7 \times 1000 + 7 \times 100 + 7 \times 10 + 7$ sete mil setecentos e setenta e sete

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e oitos. Analisar a função do oito no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do oito e suas funções de adição e subtração na formação dos números

8 Oito

18 dez-oito $10 + 8$

80 oit x [enta] = 8×10 oitenta

88 oit x [enta] + oito = $8 \times 10 + 8$ oitenta e oito

800 oito x [centos] = 8×100 oitocentos

808 oito x [centos] + oito = $8 \times 100 + 8$ oitocentos e oito

888 oito x [centos] + oit x [enta] + oito = $8 \times 100 + 8 \times 10 + 8$ oitocentos e oitenta e oito

8000 oito x [mil] = 8×1000 oito mil

8008 oito x [mil] + 8 = $8 \times 1000 + 8$ oito mil e oito

8088 oito x [mil] + oit x [enta] + 8 = $8 \times 1000 + 8 \times 10 + 8$ oito mil e oitenta e oito

8888 oito x [mil] + oito x [centos] + oit x [enta] + oito = $8 \times 1000 + 8 \times 100 + 8 \times 10 + 8$ oito mil oitocentos e oitenta e oito

Solicitar que as crianças produzam, em duplas, números que contenham zeros e noves. Analisar a função do nove no número em relação às operações de adição e multiplicação. Confrontar os pontos de vistas das duplas.

A seguir, apresentar a síntese abaixo.

O estudo do nove e suas funções de adição e subtração na formação dos números

9 Nove

19 dez-e-nove $10 + 9$ dezenove

90 nov x [enta] = 9×10 noventa

99 nov x [enta] + nove = $9 \times 10 + 9$ noventa e nove

900 nove x [centos] = 9×100 novecentos

909 nove x [centos] + nove = $9 \times 100 + 9$ novecentos e nove

999 nove x [centos] + nov x [enta] + nove = $9 \times 100 + 9 \times 10 + 9$ novecentos e noventa e nove

9000 nove x [mil] = 9×1000 nove mil

9009 nove x [mil] + 9 = $9 \times 1000 + 9$ nove mil e nove

9099 nove x [mil] + nov x [enta] + 9 = $9 \times 1000 + 9 \times 10 + 9$ nove mil e noventa e nove

9999 nove x [mil] + nove x [centos] + nov x [enta] + nove = $9 \times 1000 + 9 \times 100 + 9 \times 10 + 9$ nove mil novecentos e noventa e nove

5.1.1 Análise das respostas das atividades desenvolvidas com a La (9;2) e Bru (9;4)

As tarefas acima organizadas foram propostas a duas crianças, do 2º ciclo do ensino fundamental, de uma escola da rede estadual de ensino de Ponta Grossa.

A partir da aplicação das tarefas da situação de ensino, a essa dupla, foi possível efetuar análises a fim de verificar as complementações e reformulações necessárias. A seguir, serão apresentados os encaminhamentos e as análises e, posteriormente, as reformulações e complementações.

Tarefas 1 e 2

Os valores numéricos que compreenderam somente os valores de 11 a 19 foram adequados. Todas as vezes os dedos eram levantados de modo a formarem 10 unidades e em seguida abaixados. As unidades que excediam a 10 ficavam levantadas. O número era repetido como 10 e “à” e o numeral era escrito. O que foi identificado, como possibilidade, a partir dos encaminhamentos, diz respeito a uma complementação das atividades da tarefa, que compreende a solicitação da escrita do numeral e a identificação dos grupos de dez formados nos algarismos da representação arábica e nas partes das palavras que expressam as somas resultantes.

Valores propostos: $5 + 6$, $4 + 7$, $3 + 8$, $2 + 9$ totalizando 11; $6 + 6$, $5 + 7$, $4 + 8$ e $3 + 9$, totalizando 12; $5 + 8$, $4 + 9$ e $6 + 7$, totalizando, 13; $5 + 9$, $6 + 8$ e $7 + 7$ totalizando, 14; $6 + 9$ e $7 + 8$ totalizando, 15; $9 + 7$ e $8 + 8$ totalizando, 16; $9 + 8$ totalizando, 17 e $9 + 9$ totalizando, 18.

Tarefa 3

Na comparação de dois números representados por numerais com a mesma

quantidade de algarismos, a argumentação baseou-se na quantidade de unidades a mais de um número em relação ao outro. Nesse caso, o critério de comparação recaiu sobre o lugar do numeral ocupado numa seqüência numérica. No caso da comparação de números, cujos numerais que os representam têm números diferentes de algarismos, o argumento se voltou para o número de algarismos dos numerais e essa hipótese foi explorada lançando-se a seguinte pergunta: sempre que um número tem mais algarismos ele é maior? Por exemplo, um número de 3 algarismos é maior que um número de 2 algarismos? Alguns exemplos foram apresentados para testar a hipótese: 123 e 17, 325 e 43 e novamente a questão foi reformulada: sempre que o número tiver mais algarismos ele será maior? Diante da resposta afirmativa, foi solicitado uma argumentação, explicação ou justificativa e o que foi apresentado dizia respeito à quantidade de algarismos do numeral. Houve, porém, uma apresentação de um contra-argumento por LA (9;2) ao dizer que nem sempre isto é verdadeiro, pois se este algarismo for um zero colocado à esquerda do numeral, ele não o torna maior. La(9;2) apresentou como exemplo 53, a pedido da entrevistadora, e acrescentou um zero à esquerda e o valor permaneceu ainda 53: 053. Esse valor foi comparado com 73. A investigadora aproveitou para testar outras hipóteses a respeito do acréscimo de um zero a um numeral em outra posição, como por exemplo, para o zero colocado à direita do numeral. As crianças concluíram que, à direita, ele altera o número e pode ou não torná-lo maior que um outro com o mesmo número de algarismos. Exemplos: 53 e 730, 53 e 230 ($053 < 730$ e $530 < 730$ mas $053 < 230$ e $530 > 230$).

Ainda houve um pouco mais de exploração a respeito do zero. Para o valor 109 elas argumentaram que 0109 é ainda o mesmo número, mas 1090 fica maior, pois o 0 ao lado do 9 transforma-o em 90 e o 1, que era 100, fica sendo 1000, pois agora ele tem 4 números. A reflexão valeu para explorar um outro fato: alguns números com 4 algarismos são unidades de milhar, de 3 algarismos são grupos de 100 e os de 2 algarismos são grupos de 10 (somente para o caso dos numerais, cujo primeiro algarismo da esquerda para a direita, não seja zero). Um exemplo foi tomado para testar a hipótese: 234. Colocando o zero à esquerda elas afirmaram que o número não

muda e se colocado à direita transforma-o em 2340, pois transforma o 4 em 40 e o 200 em 2000, pois o numeral tem agora 4 algarismos. Uma síntese do padrão de regularidade, reconhecido, foi solicitada: números de 4 algarismos são números do tipo “mil” (um mil, dois mil, etc., desde que o primeiro algarismo da esquerda para a direita, não seja zero), números de 3 algarismos são números do tipo “cens” (cem, duzentos, etc., somente para o caso dos numerais, cujo primeiro algarismo da esquerda para a direita, não seja zero) e números de dois algarismos são números do tipo “dez” (somente para o caso dos numerais, cujo primeiro algarismo da esquerda para a direita, não for zero) .

Da mesma forma, o argumento que recaiu sobre número superior de unidades foi explorada com mais profundidade em torno da estrutura do SND. Pares de números com diferença de 100 e 10 unidades foram propostos. A diferença de 100 unidades foi focalizada, pelas crianças, no algarismo da casa das centenas e a diferença de 10 unidades foi identificada por contagem. Neste momento houve a oportunidade de explicitação do número de “cens” que formam o 200 (dois “cens”) e o 300 (três “cens”), logo 100 a mais. Para o não reconhecimento dos grupos de 10 presentes nos números representados por numerais de 2 algarismos, houve um pouco mais de exploração com a solicitação da comparação de 57 e 67. Uma das crianças identificou a diferença de 10 unidades nos algarismos 5 e 6 dos numerais. Ela argumentou que se tratava da mesma coisa que 240 e 340. Essa hipótese foi explorada voltando-se para a natureza do tipo de grupos identificados nas centenas e nas dezenas. Este fato permitiu que as crianças identificassem que os numerais de dois algarismos contém grupos de 10 (salvo se o algarismo da esquerda for zero). Pares de números, de dois algarismos, com características diferentes foram apresentados: em que os dois algarismos diferem ou apenas um deles difere (podendo ser o algarismo das unidades ou o das dezenas) com a intenção de chamar a atenção para a superioridade do algarismo da esquerda em relação ao da direita, visto o valor relativo por ele representado, tornando o número maior ou menor. No caso de 57 e 42, perguntou-se em qual dos algarismos seria necessário centrar a atenção, se no algarismo da esquerda ou da direita. Apesar da

intensa exploração da hipótese, as crianças ainda não haviam identificado o padrão. Por essa razão, julgou-se necessário, ainda neste momento, concentrar-se em pares de valores com diferença de um determinado número de dezenas exatas: 47 e 67, 38 e 58, 76 e 46. Em seguida, novamente o par de numerais 57 e 42 foi proposto para comparação. As crianças ainda, neste momento, não argumentaram consistentemente, sobre a maioridade de 57 sobre 42, concentrando-se nos grupos de 10, presentes no quarenta e no cinquenta, suficientes para determiná-la. Essa observação, então, foi feita pelo entrevistador e houve aceitação por parte das crianças, visto a familiaridade com a identificação dos grupos de 10 ou de 100 conforme a posição do algarismo no numeral. O entrevistador aproveitou para explorar as sínteses obtidas a partir das regularidades observadas, comparando os seguintes valores: 325 e 425, 325 e 432, 239 e 249. Convém evidenciar que este foi um bom momento para explorar as hipóteses lançadas em torno dos grupos de 10 e de 100 identificados nos algarismos dos numerais de acordo com a sua posição no mesmo.

Análises e comentários: as hipóteses lançadas que se voltaram para o número de algarismos do numeral como determinante da quantificação intensiva (tem mais ou é maior) permitiu explorar os tipos de grupos que se formam quando o número é representado por numerais de 2, 3 ou 4 algarismos. Essa identificação possibilitou centrar a posição do algarismo no numeral como determinante do tipo de grupo que se forma. Esse fato possibilitou a conclusão de que certas questões podem ser incluídas nas tarefas da prova, dentre as quais se destacam:

- a) Uma outra criança me disse que um número é maior se tiver mais algarismos. Isto é válido sempre? O que acontece se acrescentarmos um zero à esquerda de um número? E se acrescentarmos um zero à direita?
- b) Quando dois números apresentam diferenças em um ou dois algarismos da representação, quem determina a maioridade? Teste a conclusão com os seguintes numerais: 425 e 325, 53 e 43, 57 e 59, 432 e 422, 432 e 423.
- c) Quantos grupos de cem tem cada um dos numerais: 342, 567, 254 e 109?
- d) Quantos grupos de 10 têm cada um dos numerais: 45, 39, 98, 100, 109,

117, 142, 200, 207, 215 e 234?

Será importante, no momento da prova, explorar as hipóteses lançadas, apresentando exemplos e contra-exemplos que possam corroborá-las ou refutá-las. Nessa prova, o aproveitamento de contra-argumentos evidencia a estrutura do SND no que diz respeito ao valor posicional. A prova é riquíssima para evidenciar os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos representados pelos algarismos de acordo com a sua posição no numeral.

Tarefa 4

A tarefa permite ainda explorar a ordenação em torno dos grupos de 10 ou de 100.

Tarefa 5

A tarefa permite explorar o valor relativo dos algarismos. As seguintes perguntas podem ser incluídas:

- a) Por que 321 é maior que 312?
- b) Qual dos algarismos permite identificar que 321 é maior que 312?
- c) Que tipos de grupos definem o algarismo 3 do numeral?
- d) Que tipos de grupos definem o algarismo 2 do 321?
- e) Quantos grupos de 10 são determinados pelo algarismo 2 do 321? E pelo algarismo 1 do 312?
- f) Qual dos algarismos dos numerais 231 e 213 permite determinar que 231 é maior que 213: o algarismo da esquerda, o algarismo do meio ou o algarismo da direita?
- g) O que significa o 3 do 231? Que tipos de grupos ele define?

Outros algarismos podem ser propostos para a formação de números, inclusive o zero. Os números solicitados podem ser de dois, três e quatro algarismos. Será importante também solicitar que sejam identificados os grupos de 10 nas centenas que compõem os números e no número como um todo, de forma que as dezenas, presentes nas centenas, sejam somadas às demais dezenas do número identificadas nos algarismos do numeral que o representa.

Tarefa 6

Após a realização da tarefa foi possível identificar os seguintes encaminhamentos a serem propostos:

- a) Solicitar que o algarismo a ser colocado seja identificado com o tipo de grupo que ele passa a representar de acordo com a posição no numeral.
- b) Visto que o algarismo transforma o número em um número 10 vezes maior, solicitar que o algarismo da esquerda seja comparado ao algarismo a ser colocado. Passar para o algarismo imediatamente à direita e ir comparando com o algarismo a ser colocado de acordo com seu valor relativo.
- c) Incluir o zero e intercalá-lo em um numeral com dois algarismos e em um numeral com 3 algarismos. Solicitar uma generalização a respeito do zero.

Tarefas 7 e 8

Convém reunir a tarefa 7 com a 8, propondo ora acréscimos e ora retiradas.

Os seguintes encaminhamentos são aconselháveis:

- a) Apresentar primeiro somente numerais com dois algarismos e direcionar a observação ao algarismo que se altera, refletindo sobre a sua posição no numeral, o seu valor relativo e as 10 unidades somadas (ou subtraídas).
- b) Apresentar os numerais com 3 algarismos e 4 algarismos para os acréscimos (ou retiradas) das 10 unidades.
- c) Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 20, 30, 40, etc., unidades centrando a atenção no número de grupos de 10 que se formam e na alteração do algarismo da casa das dezenas a partir desses acréscimos.
- d) Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 100 unidades, por meio de numerais de três algarismos que direcionem a observação ao algarismo que se altera, refletindo sobre a sua posição no numeral, o seu valor relativo e as 100 unidades somadas.
- e) Apresentar os numerais com 3 algarismos e 4 algarismos para os

acrécimos das 100 unidades.

- f) Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 200, 300, 400, etc., unidades centrando a atenção no número de grupos de 100 que se formam e na alteração do algarismo da casa das centenas a partir desses acréscimos.

Tarefa 9

Propor encaminhamentos complementares:

- a) Centrar a atenção nos grupos de 10 formados e na alteração do algarismo no numeral de acordo com a sua posição.
- b) Propor um outro enunciado em que os acréscimos sejam de 100 unidades.

Tarefa 10

Em primeiro lugar, identificar com a criança, o valor relativo do algarismo no numeral para em seguida refletir com ela sobre qual operação matemática deveria ser realizada com este valor relativo de modo a zerar a casa ocupada pelo algarismo.

Tarefa 11

Sem dificuldades

Tarefas 12 e 13

Podem ser reunidas numa única tarefa.

Tarefa 14

Acrescentar números com centenas e unidades de milhar tais como:

145, 307, 1224, 520 e 1032.

Tarefa 15

Solicitar que flechas sejam utilizadas para ligar os sufixos e prefixos das palavras aos algarismos do numeral após a explicitação do caráter operatório da escrita.

Exemplo: duzentos e noventa e seis

$$296 = 2 \times 100 + 9 \times 10 + 6$$

Tarefa 16

Muito longa. Algumas alterações realizadas durante a tarefa tornaram-na

mais rápida e mais produtiva. São elas:

- a) Solicitou-se que as crianças escrevessem numerais que contivessem somente quatros e zeros;
- b) Apresentou-se as deformações da palavra quatro;
- c) Solicitou-se que fossem identificados os sufixos e os prefixos das palavras e as operações matemáticas que os ligam;
- d) Fez-se o mesmo para outros numerais que contivessem três e zeros, dois e zeros, cinco e zeros, etc.

As tarefas e as atividades com as reformulações e complementações encontram-se no anexo 1.

Após a aplicação das tarefas a outras duplas com as complementações e reformulações, oriundas da aplicação piloto, foi possível identificar respostas dadas, explicações e argumentações apresentadas, estratégias e procedimentos utilizados que serão a seguir apresentados, constituindo resultados que serão interpretados e analisados.

5.1.2 Explicitação dos encaminhamentos e identificação de procedimentos, argumentos, explicações e justificativas apresentados

Tarefas 1 e 2: Encaminhamentos

As crianças foram orientadas em relação aos procedimentos para a obtenção da adição de dois números com utilização dos dedos e a anunciação da soma em torno de 10 e do número de unidades excedentes. Os procedimentos compreendiam dois itinerários distintos, utilizando os dedos cardinalizados ou como nome de contagem: o primeiro itinerário compreendia a estratégia de contar na seqüência até utilizar os dez dedos que deveriam ser abaixados e novamente erguidos até adicionar as duas parcelas da adição. A soma deveria ser anunciada em termos dos dez dedos abaixados e dos que

restaram erguidos, associada ao numeral arábico e à palavra. Ao mesmo tempo, era feita a análise dos sufixos e prefixos das palavras e a correspondência aos algarismos do numeral arábico. Os valores das parcelas compreendiam somas até 15; o segundo itinerário compreendia a estratégia de decompor cada parcela em duas outras no formato ‘ $5 + x$ ’ e ‘ $5 + x_1$ ’. Em seguida cada uma das parcelas era colocada em uma das mãos de forma que os 5 dedos eram abaixados rapidamente e restavam, erguidos, os dedos correspondentes às partes x e x_1 em cada uma das mãos respectivamente. Os dedos erguidos eram contados e a soma era anunciada em termos de 10 e $x + x_1$. De forma idêntica, a soma era associada ao numeral arábico e à palavra, e, ao mesmo tempo, era feita a análise dos sufixos e prefixos das palavras (as deformações sofridas) e a correspondência aos algarismos do numeral arábico.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- Soma anunciada em função de dez e do número de unidades excedentes a dez, conforme solicitado nas tarefas.
- Associação dos sufixos e prefixos da palavra aos algarismos do numeral.
- Identificação da operação que une os sufixos e prefixos da palavra.
- Identificação da operação que une os valores relativos dos algarismos do numeral da escrita arábica.

Tarefa 3: Encaminhamentos

A atividade foi conduzida de modo a propor a comparação de números com dois algarismos que apresentavam ora uma diferença de unidades, ora uma diferença de dezenas e ora uma diferença de dezenas e unidades. O desafio cognoscitivo centrou-se na justificativa sobre a maioridade do número em termos de dezenas e unidades e sobre o algarismo que é determinante na maioridade dependendo da posição que ele ocupa no numeral em virtude de seu valor relativo, já que a representação arábica compreende as leis que regem o sistema de numeração decimal. Em seguida, números com 3 algarismos foram comparados apresentando as diferenças

ora nas unidades, ora nas dezenas, ora nas dezenas e unidades, ora nas centenas, ora nas centenas e dezenas e ora nas centenas, dezenas e unidades. Outro desafio cognoscitivo centrou-se na maioria em virtude do número de algarismos do numeral que representa o número o que possibilitou questionar sobre o zero. A questão do zero foi explorada em relação à sua posição no numeral. Questionou-se por que, quando colocado à direita, deixa o número maior, e à esquerda, não altera o valor do número.

As intervenções da pesquisadora assim como os direcionamentos, foram distintos para as duplas de crianças. Para a primeira dupla, os números apresentavam uma diferença de uma dezena exata e a investigadora conduziu as crianças a perceberem que este algarismo iria provocar uma diferença de 10 unidades por se tratar do algarismo que representa as dezenas da quantidade representada. Em seguida, os pares apresentados tiveram que ser justificados em termos das dezenas ou unidades que apresentavam como diferença. Em seguida foram propostos pares de números cujos numerais possuíam 3 algarismos e uma diferença de centenas exatas. Logo após, os numerais de 3 algarismos apresentados revelaram uma diferença de dezenas exatas. Só então os pares diferiam de dezenas não exatas, e as crianças demoraram a perceber que não importa o valor das unidades, pois é o algarismo das dezenas, das centenas, etc, que vai determinar a maioria de um valor sobre o outro. A investigadora teve de intervir para que este fato fosse percebido.

Para a segunda dupla, os pares apresentados possuíam uma diferença de 10 unidades exatas e o questionamento referiu-se ao que podia estar causando esta diferença, após a observação de todos os pares. A dupla não encontrou argumentos para justificar a diferença a partir de algum padrão de regularidade observado, no caso a diferença em um dos algarismos do par representativo das dezenas. Neste momento, a investigadora apresentou um par de números, cujos numerais possuíam 2 algarismos e outro 3 algarismos, respectivamente. Ainda o argumento sobre a diferença apontada dizia respeito ao número de unidades idênticas. A investigadora procurou confrontar um outro ponto de vista de uma outra criança que falou ser sempre maior um número

de 3 algarismos e sobre o fato de que números de 3 algarismos representam cens e de dois, representam grupos de 10. Evidentemente que a questão do zero foi lembrada em relação à sua posição no algarismo. Se ele estiver colocado à esquerda o numeral de 3 algarismos não representará grupos de 100 e os de dois algarismos não representarão grupos de 10. As denominações foram invocadas: cem, duzentos (para dois cens) trezentos (para 3 cens) vinte (para dois grupos de 10) quarenta (para 4 grupos de 10) etc. A denominação para as 10 unidades, como sendo uma dezena, não foi lembrada de imediato pela dupla. A investigadora voltou para os pares apresentados inicialmente e a justificativa sobre a diferença de 10 recaiu sobre o fato de que os números são contados em dezenas e unidades, isto é, para somar 20 com 20, soma 0 com 0 e 2 com 2 que são as dezenas e que vai dar 4 dezenas, pois os números são de 2 algarismos. Neste momento, a investigadora apresentou um par de números de 2 algarismos em que a diferença era maior que uma dezena exata: 23 e 53 e propôs refletir sobre os algarismos do numeral de acordo com a posição por eles ocupada e que tipo de grupo estariam representando. Foi somente neste momento que a dupla conseguiu argumentar sobre as diferenças em virtude da posição do algarismo no numeral. Outros pares com 3 algarismos foram propostos ora a diferença sendo de centenas exatas e ora sendo de dezenas exatas e ora sendo de dezenas não exatas para questionar sobre a determinação da magnitude do número. A partir de então a investigadora voltou sobre a questão do número de algarismos do numeral propondo o acréscimo de um zero à direita do número. O argumento recaiu sobre o número de algarismos do numeral como determinante de sua maioria sobre o outro. A colocação do zero no meio (casa das dezenas) e na esquerda (casa das centenas) serviu para refutar a hipótese lançada.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- Identificação do maior dos números sem apresentação de justificativa.
- Identificação do maior dos números com justificativas apresentadas que dizem respeito à posição ocupada na seqüência numérica ou pelo

número de unidades idênticas que eles possuem a mais.

- Argumentação apresentada em relação à maioria em termos de dezenas e unidades, após intervenção da pesquisadora, somente quando a diferença encontra-se num dos algarismos do numeral: ou nas dezenas ou nas unidades.
- Argumentação sobre a maioria do número de acordo com o número de algarismos do numeral, se não existirem zeros à esquerda, como por exemplo 004 e 32.
- Argumentações a respeito da posição do zero valer dezenas, se colocado à direita ou no meio.

Tarefa 4: Procedimentos

Duas séries de números foram apresentadas, relativas a preços de pacotes de balas e número de balas em cada pacote. Foi solicitado que as séries fossem ordenadas de modo que, a cada preço, fosse correspondido um pacote de balas. Se algum valor da série aparecesse em lugar diferente, a investigadora questionava a criança do porquê da ordenação apresentada, permitindo uma correção. A tarefa foi realizada com sucesso por quase todas as crianças.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- A criança não ordena corretamente, mas se autocorrigue após análise da ordenação

Tarefa 5: Procedimentos

Foi solicitado que as crianças formassem com os algarismos 1, 2 e 3, todos os números com 2 e 3 algarismos possíveis. Em seguida, solicitou-se que os números formados fossem colocados em ordem apresentando argumentos a respeito. As seguintes perguntas foram feitas:

- a) Por que 321 é maior que 312?
- b) Qual dos algarismos permite identificar que 321 é maior que 312?
- c) Que tipos de grupos definem o algarismo 3 do numeral?

- d) Que tipos de grupos definem o algarismo 2 do 321?
- e) Quantos grupos de 10 são determinados pelo algarismo 2 do 321? E pelo algarismo 1 do 312?
- f) Qual dos algarismos dos numerais 231 e 213 permite determinar que 231 é maior que 213: o algarismo da esquerda, o algarismo do meio ou o algarismo da direita?
- g) O que significa o 3 do 231? Que tipos de grupos ele define?

Outros algarismos foram propostos para a formação de números inclusive o zero. Os números solicitados foram de três algarismos. Para a ordenação, a investigadora sugeriu que fossem olhadas primeiro as centenas e, no caso de igualdade, as dezenas, até as unidades. Foi solicitado que fossem identificados os grupos de 10 nas centenas que compõem os números e no número como um todo de forma que as dezenas presentes nas centenas fossem somadas com as demais dezenas do número identificadas nos algarismos do numeral que o representa. Foi perguntado a respeito do algarismo que determinou a ordenação, isto é, se foram as centenas, as dezenas ou as unidades.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- O argumento sobre a superioridade do número recaiu sobre a comparação dos algarismos conforme sua posição no numeral, isto é, sendo iguais as centenas, são olhadas as dezenas que poderão ou não determiná-la.
- Os agrupamentos de agrupamentos não são identificados de imediato nos algarismos do numeral, isto é, as centenas só representam grupos de 100 e não de 10.
- Na presença do zero intercalado, as dezenas não são identificadas nas centenas.
- Com a intervenção da investigadora as dezenas são identificadas nas centenas.

- Mesmo com a informação de que nas centenas existem grupos de 10, elas não são identificadas quando da presença de um zero intercalado.

Tarefa 6: Procedimentos

Um determinado algarismo foi proposto para ser acrescentado a numerais de dois algarismos de modo que os novos valores que estes registros passassem a representar fossem os maiores possíveis. Sempre que o algarismo era colocado numa determinada posição em relação aos outros dois já existentes, a investigadora perguntava qual era o seu valor relativo. Os algarismos existentes nos numerais foram analisados em relação ao seu valor relativo, antes e depois, do acréscimo do terceiro algarismo.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- A criança obtém o maior número inserindo um algarismo ora à direita, ora à esquerda, ora no meio, conforme o numeral de dois algarismos apresentado.
- A criança identifica o valor relativo do algarismo a ser inserido conforme a posição.
- A criança identifica o valor relativo dos algarismos no numeral, antes e após a inserção do terceiro algarismo.

Tarefa 7: Procedimentos

Foi solicitado às crianças que alterassem os preços das mercadorias apresentadas a seguir em 10 reais a mais: 30; 52; 75; 20, em seguida, foi solicitado para que elas identificassem algum padrão de regularidade, chamando a atenção das crianças sobre o algarismo do numeral que sofria alteração. Foi perguntado porque esta alteração ocorria somente neste algarismo, nesta posição. Em seguida, numerais com 3 algarismos foram propostos: 123 e 457. Novamente foi solicitado que fosse observada a alteração de somente um dos algarismos do numeral e foi perguntado o porquê. Aumentos de 100 reais foram propostos para os mesmos números de 3 algarismos, seguidos da explicação da causa da alteração de somente um dos algarismos do numeral, agora posicionado de forma diferente. Outros acréscimos de

20, 30 e 40 reais foram propostos, evidenciando que estas quantidades representam 2, 3 e 4 grupos de 10 respectivamente. Decréscimos de 20, 30 e 10 reais e a seguir acréscimos de 200 reais evidenciando que esta quantidade corresponde a 2 grupos de 100.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- a alteração do algarismo é percebida quando dos acréscimos ou decréscimos;
- a justificativa para a alteração não se deu de imediato para todas as crianças às quais foram propostas as atividades. Neste caso, houve interferência da investigadora, o que foi benéfico, pois levou a criança a concordar com o argumento apresentado. Ela não o ignorou como se não fizesse sentido para ela;
- A justificativa para a alteração baseou-se na localização do algarismo no numeral: altera a dezena, pois 10 unidades representam uma dezena, da mesma forma 20, 30, 40, representam 2, 3 e 4 dezenas respectivamente; 100 representa 1 centena e 200, 300, 2 e 3 centenas respectivamente.
- Alteração incorreta do algarismo do numeral: de 62 para 64, de 49 para 249, de 85 para 285 quando foi solicitado um aumento de 20 reais. Isto ocorreu porque a justificativa para a alteração do algarismo baseou-se no aumento de 10 unidades idênticas e não 1 grupo de 10 denominado dezena e identificado no segundo algarismo da direita para a esquerda. Neste caso, a necessidade de interferência da investigadora sobre o tipo de grupos e suas respectivas denominações: o aumento de 10 reais vai significar o aumento em 1 dezena, 20, 30 e 40 em 2, 3 e 4 dezenas respectivamente assim como 100 reais representam 1 centena e 200 reais, 300 reais representam 2 e 3 centenas respectivamente. Tal interferência leva a criança, num primeiro momento, a se concentrar somente no algarismo que sofre

alteração esquecendo de identificar que os demais permanecem inalterados. Neste caso apresenta o valor de 70,00 para um aumento de 10 ao valor 62,00. Para um aumento de 20,00 ao valor de 92 apresenta como resultado 11, não sabendo o que fazer com o 2 achando que deveria somar ao 11. Houve necessidade da interferência da investigadora sobre o fato de que 11 estaria representando 11 dezenas e 2 somente 2 unidades.

Tarefa 8: Procedimentos

Foi solicitado que as crianças identificassem quantos grupos de 100 existiam em numerais de 3 algarismos e quantos grupos de 10 e quantas unidades existiam em numerais com 2 algarismos ou 3 algarismos. Os numerais apresentados compreendiam centenas e dezenas exatas e não exatas e com zero intercalado pertencente ao intervalo [101 109]. Cada elemento da dupla deveria dar a resposta e a investigadora solicitava a concordância, ou não, do outro par da dupla. Quando nenhum dos elementos da dupla apresentava uma resposta correta quanto ao número de grupos de 10, em numerais de 3 algarismos, a investigadora propôs a soma de 10 em 10 até alcançar 100 para induzir o raciocínio. A partir de então, as respostas distintas são confrontadas e é solicitada argumentação a favor da resposta apresentada.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações utilizadas:

- O número de grupos de 10 é identificado corretamente em numerais de 2 algarismos.
- O número de grupos de 10 não é identificado corretamente em numerais de 3 algarismos sendo associados ao algarismo da dezena. (por exemplo em 129 tem 2 grupos de 10 e em 207 tem 0 grupos de 10).
- O número de unidades é identificado corretamente em numerais de 2 e 3 algarismos.
- O número de unidades não é identificado corretamente nem em numerais de 2 algarismos e nem em numerais de 3 algarismos sendo

associados aos algarismos das unidades.(por exemplo em 59 tem 9 unidades, em 100 tem zero unidades)

- Num primeiro momento são identificados 100 grupos de 10 em 100 unidades, mas existe a aceitação após a soma de 10 em 10 da existência de 10 grupos de 10.

Tarefa 9: Procedimentos

Um valor inicial foi apresentado e sofreu acréscimos de mais de um grupo de 10 (20, 30, 40, ...90) obtidos a partir da interpretação do problema do acréscimo de 10 fitas por semana tendo, portanto que serem calculados e acrescentados diretamente no algarismo da casa das dezenas. A investigadora adota procedimentos distintos, ao propor a questão às duplas: primeiro, evidenciando que 10 fitas correspondem a 1 dezena e que, após 2 semanas serão 20 e conseqüentemente 2 dezenas e, assim por diante, ao mesmo tempo que analisa os algarismos do numeral para serem alterados. Para uma outra dupla estas considerações ficaram por conta das crianças. Os acréscimos propostos também diziam respeito a grupos de 100. A mesma orientação sobre a relação com as centenas foi feita. Não foi necessário identificar as centenas nos algarismos do numeral.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- A criança não trata os acréscimos como grupos de 10 e não acrescenta estes grupos diretamente às dezenas.
- A criança ao ser orientada sobre os grupos de 10 que se formavam, as dezenas que representavam e sobre o algarismo representativo das dezenas no numeral, num primeiro momento, não efetuou o acréscimo corretamente, quando adicionou os grupos de 10 às unidades. Procedeu corretamente após correção.
- A criança, a princípio, não consegue somar de 100 em 100, mas procede corretamente após intervenção da investigadora e acrescenta os grupos de 100 na casa das centenas.

Tarefa 10: Procedimentos

Alguns numerais foram apresentados às crianças, e em seguida, foi solicitado que um determinado algarismo do numeral fosse zerado a partir da retirada do número de unidades correspondentes ao valor relativo do mesmo. Inicialmente a criança era convidada a anunciar o valor relativo do numeral para, em seguida, efetuar a retirada.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- Identificação do valor relativo do algarismo do numeral.
- Retirada do número de unidades de acordo com o valor relativo de modo a zerar um determinado algarismo através de uma subtração

Tarefas 11 e 12: Procedimentos

Foi solicitado que as crianças representassem numerais arábicos por meio da escrita em palavras e, ao mesmo tempo, identificassem as palavras terminadas em “enta” e em “centos” ou “entos” e os relacionassem aos tipos de grupos representavam: de 10 ou de 100. Após a identificação, as palavras tiveram que ser substituídas por seus valores e estes foram representados por operações matemáticas conforme o número de grupos que representavam. O conectivo “e” foi associado à soma dos valores representativos das palavras. As palavras vinte e trinta, que não terminam em enta, também são questionadas sobre se representam grupos de 10.

Respostas dadas, procedimentos e justificativas utilizadas e argumentações e explicações:

- Relacionam corretamente as palavras terminadas em “enta” com grupos de 10 e em centos ou “entos” com grupos de 100.
- Representam as palavras por seus valores numéricos correspondentes e estes por operações matemáticas representando os números de grupos.
- Relacionam as palavras terminadas em “enta” com unidades e as palavras terminadas em “entos “ ou “centos” com grupos de 10.

5.2 RESULTADOS ENCONTRADOS: ASPECTOS QUALITATIVOS

As tarefas 1 e 2 foram importantes porque sugeriram itinerários que permitiram obter somas em torno de 10 e de unidades excedentes a 10. Isto porque a soma resultante de algumas adições compreendiam numerais, de 2 algarismos, do intervalo [11;15] que não trazem explicitada a dezena, ao contrário das somas cujos numerais pertenciam ao intervalo [16; 19].

Elas foram importantes por permitirem explicitar o sentido quantitativo da escrita arábica de representação do número, porque puderam ser interpretados como dezenas e unidades confrontando-o com a escrita em palavras, que por si só não envia à essa interpretação.

A escolha dos itinerários se deu em virtude do padrão de organização da palavra escrita, e a não-congruência com a escrita arábica. Estes não são utilizados de forma espontânea pelas crianças que realizam as adições através de uma seqüência unitária de subcontagem na qual, o 10 não desempenha papel essencial.

Na tarefa 1, o itinerário proposto levou à necessidade da reutilização dos dedos para as adições entre 10 e 19, e essa pôde explicitar a estrutura do SND na palavra e na escrita arábica. Essa reutilização permitiu à criança apreender os complementos de 10 visualmente e a segunda parcela da adição é também repartida nas duas partes necessárias: a que completa 10 e a que excede 10.

O segundo itinerário também constitui um método de estruturação por 10 da adição e explicita a estrutura do SND para as adições cuja soma resulta no intervalo [11; 19].

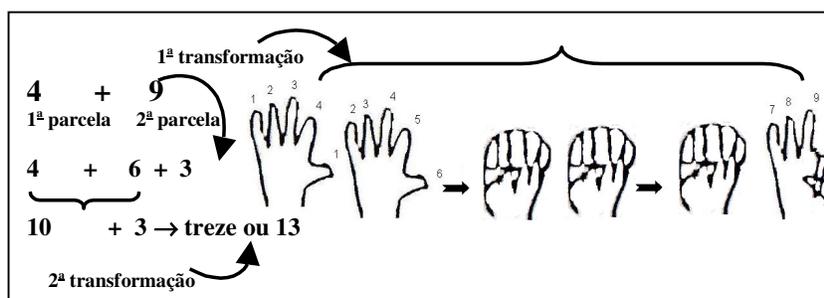
Os itinerários sugeridos são importantes visto a irregularidade dos registros de representação que utilizam a palavra para a representação de quantidades (medida de um conjunto). Essa irregularidade requisita que muita ajuda seja prestada para levar as crianças a perceber a estrutura do SND na palavra e relacioná-la à escrita arábica.

Existem também outras experiências fornecidas pela cultura que podem ajudar a compreensão da estrutura do SND, como por exemplo, o sistema métrico e o sistema monetário, as calculadoras que utilizam a base 10, entre outros. Ao contrário

de certas ferramentas culturais que podem prejudicar a compreensão e requisitar muito mais ajuda, como é o caso do sistema métrico e monetário utilizado nos Estados Unidos.³²

O quadro 7 ilustra as transformações que ocorrem para adicionar 4 com 9 utilizando um dos itinerários dos dedos cardinalizados. A operação de tratamento entra em ação quando a criança, ao contar na seqüência, faz a partição da segunda parcela da adição em duas partes: uma para completar 10 e a outra para completar o valor da segunda parcela. Também quando ela transforma a soma 10 e 3 resultante em dois registros de representação: 13 e treze.

Quadro 7 -
Transformações que correspondem a uma operação de tratamento numa operação de adição



A conversão é provocada quando a soma é anunciada em termos dos dez dedos abaixados e dos que restaram em pé, 10 e 3, e sua associação à palavra treze e à escrita arábica 13. Ela é consolidada quando é feita uma análise das palavras três e dez, e suas deformações

três	tre	trin	trez
dez	ze	te	enta

Também é provocada quando as dez unidades correspondentes aos dedos abaixados são identificadas no algarismo 1 da representação arábica.

As crianças não encontraram dificuldades para realizar as atividades das duas tarefas e fazer as associações do grupo de dez e das unidades excedentes, ao 1 e ao 3 da escrita arábica, “13”, e aos sufixo “ze” e prefixo “tre” da palavra “treze”.

Todas as observações foram descritas, e essa descrição envolve atividades

³² Sistema monetário: níquel e quartos (5 e 25 cents), notas de 20 e 50 dólares.
Sistema métrico: milhas e jardas.

cognitivas que são requisitadas visto a dimensão heurística existente na resolução de problemas. As descrições são importantes, pois elas são submetidas a exigências de aceitabilidade específicas, ou seja, elas devem permitir entender o que foi descrito. Isto significa que, do ponto de vista estritamente cognitivo, todo caminho de descrição é, intrinsecamente uma atividade de representação que mobiliza processos cognitivos de representação que são heterogêneos e requerem sua coordenação.

Em Quanto à descrição dos procedimentos adotados para a obtenção da solução dos problemas que compreendiam adições, segundo os itinerários sugeridos, ficou claro a sua importância em relação à produção dos alunos. Ela permitiu distinguir os diversos níveis de articulação de sentido atribuído aos registros de representação semióticos produzidos ou utilizados, discursivos ou não, uma vez que estas articulações de sentido não requisitam as mesmas operações.

A importância da descrição decorre do fato de que ela é uma atividade de complexidade cognitiva com função decisiva para o desenvolvimento dos conhecimentos. Quando se tem de responder a uma pergunta, pode-se lançar mão de explicações verbais acompanhadas de gestos com a mão, fazer um desenho, entre outros. Mas, qualquer que seja o registro de representação semiótica escolhido é necessário que o outro, a quem queremos comunicar, possa converter em imagens as descrições verbais, e no caso de um gráfico ou desenho, é necessário que o outro reconheça nos traços a solução apresentada. Logo, uma descrição compreende, segundo Duval ([s.a.]³³ *Decrire, visualiser ou raisonner...*) três pólos: o sujeito que já pode ter visto ou não o que foi descrito; a capacidade do sujeito de articular ou não os diferentes registros de representação nas quais a descrição pode ser feita; a possibilidade ou não de um acesso aos objetos independentemente das representações que podem ser feitas.

Para a obtenção das somas propostas nas adições das tarefas 1 e 2,

³³ Texto datilografado de título *Decrire, visualiser ou raisonner: quels “aprentissages premiers” de l’activité mathématique?*

independentemente dos itinerários, pôde-se identificar tais pólos, uma vez que as crianças já recitam números numa seqüência. Ao se propor a descrição da soma obtida em duas partes ($10 + n$ ou $10 + (x_1 + x_2)$), de acordo com o itinerário, está-se propondo a articulação dos registros de representação utilizados para anunciá-las: a palavra escrita utilizando a análise dos prefixos e sufixos e a escrita arábica através da análise do algarismo do numeral de acordo com a sua posição, ambos relacionados com um grupo de 10 e as unidades que excedem 10, visto que as somas propostas estão compreendidas no intervalo

] 11 ;19 [.

Outra questão relevante em relação à atividade de descrição, reside no fato de ela recobrir tanto situações de transmissão de informações, como situações de observações e mobilizar dois registros de representação diferentes. Em relação à atividade cognitiva, há, no caso da matemática, uma atividade de descrição formal que se limita a uma mudança de registro. Neste caso registra-se a atividade de conversão que respeita a invariância daquilo que é representado. Nessa atividade reside a complexidade da descrição: a indissociação dos dados de sua organização, sendo necessário distinguir muitos níveis de correspondência entre a descrição e os fenômenos descritos. Isto é válido para os procedimentos utilizados para encontrar as somas resultantes das adições propostas nos problemas: atribuir sentido cardinal e ordinal aos dedos e fazer corresponder aos registros de representação.

Ainda em relação aos problemas propostos, será necessário analisar como compreender uma descrição feita. Normalmente para que as descrições não apresentem maiores dificuldades, elas são apresentadas por meio de situações que enviem a alguma coisa que se pense já ser conhecida pelos alunos, ou por meio de uma ilustração ou esquema. Segundo Duval ([s.a], já citado) duas razões justificam esta escolha: compreender uma descrição é visualizar o que está descrito e, portanto, pode-se compreender um texto ou um enunciado se o objeto descrito já foi visto ou manipulado; acessar um esquema, um gráfico ou uma figura pode se tornar mais acessível que uma descrição verbal, já que se pode identificar imediatamente o que é

representado ou ver determinadas relações.

Essa questão é relevante para esta análise, visto que os itinerários propostos destacam propriedades e relações presentes na estrutura do SND que podem ser visualizadas. Evidentemente, não se pode esquecer que a compreensão de uma descrição por visualização não significa somente reconhecer o objeto descrito, mas também poder colocar em correspondência as unidades do esquema (no caso os dez dedos abaixados e os que restaram em pé) e os traços do objeto descrito. Da mesma forma, há que se questionar se, de fato, as representações visuais (imagens, esquemas, etc) mostram os objetos da mesma maneira, se a articulação entre uma descrição visual e uma descrição verbal valem por si mesmas ou requerem uma longa aprendizagem, e, também, que função realmente cobre uma descrição que vem acompanhada de outra.

Nos itinerários propostos para a resolução dos problemas das tarefas 1 e 2, foi possível uma visualização icônica fundamentado sobre critérios de semelhança entre os elementos da representação e o objeto representado, porque se está lidando com quantidades de natureza discreta e os dedos são utilizados, tanto como nome de contagem como com sentido cardinal. O funcionamento representacional deste tipo de visualização pode oferecer apoios e apreensões diferentes para a descrição verbal e para o raciocínio.

Existe o fato a ser sempre lembrado que, no caso da matemática, a descrição vai exigir um registro de representação semiótico e este vai depender do sistema semiótico mobilizado. Segundo Duval ([s.a]) a relação entre o conteúdo da representação e o que ela representa muda radicalmente, segundo o sistema que a produziu. Sempre para as representações semióticas existe uma escolha intencional e uma relação de referência.

Cita-se, ainda, o fato de que é preciso analisar os tipos de correspondências cognitivas existentes entre o discurso e os diferentes tipos de visualização. Tal observância é importante, pois nas tarefas 1 e 2 se está valorizando um apoio visual para a compreensão da estrutura do SND nos registros de representação semióticos utilizados para representar as somas resultantes das adições. O apoio aos dedos, de

acordo com os itinerários, passa a constituir uma visualização de ordem semiótica e seu conteúdo precisa ser analisado para ser possível fazer as correspondências com as representações discursivas (tanto a palavra como a escrita arábica). Segundo Duval ([s.a]) é necessário distinguir as unidades figurais e as relações entre as unidades figurais que podem ser reconhecidas e que tem um valor representativo de composição. Logo são dois níveis a serem analisados para se possa identificar a atribuição de sentido: num primeiro nível, a identificação das unidades figurais e num segundo nível as relações entre as unidades figurais que para os registros icônicos podem ser de justaposição (quando existe uma semelhança mais ou menos, seja de contorno global, seja de enumeração dos objetos típicos disto que é representado) ou de conservação (das relações topológicas entre as partes ou os elementos do objeto representado). No caso dos itinerários que utilizam os dedos cardinalizados para a obtenção das somas resultantes das adições, pode-se identificar tanto relações de justaposição, pois os dedos são representações das unidades idênticas e singulares se considerarmos o plano dos objetos, e também uma relação de conservação, pois as partes (os dez dedos abaixados e os que restaram em pé, em uma ou em duas mãos) conservam o todo, no caso de se estar considerando o plano dos conjuntos e dos agrupamentos.

Segundo Duval ([s.a]) ‘esta distinção de dois tipos de unidades figurais e de dois níveis de articulação permite analisar as produções dos alunos e medir a lenta evolução de suas produções, indo de uma simples justaposição de unidades figurais a estas representações que Piaget qualifica de formais.’

A atividade de comparação presente na tarefa 3 foi importante para perceber que as crianças analisam os números de acordo com o seu lugar na seqüência numérica e estabelecem as diferenças contando as unidades idênticas que se estabelecem. Não são capazes de argumentar sobre a posição dos algarismos do numeral, visto que as leis que regem o sistema de numeração não são por elas conhecidas. As intervenções da investigadora compreenderam reflexões a respeito das regularidades identificadas e estas estiveram voltadas para diferentes intervalos da seqüência numérica. Desta forma

foi possível conduzir a reflexão a respeito do número de algarismos do numeral e sua associação com tipos de grupos (de cem, de dez, etc) e também a respeito do zero como associado ao número de algarismos do numeral, mas não tornando o número sempre maior em virtude da posição por ele ocupada. As intervenções serviram como desafio para as crianças a refletirem sobre enfoques que a escola não privilegia, mas que se voltam para as leis que regem o sistema de numeração e que, embora não sejam identificadas pelas crianças, estão presentes na notação arábica. Tanto respostas corretas, como parcialmente corretas ou erradas serviram para encontrar maneiras de articular procedimentos e argumentos que permitissem a socialização do conhecimento. Foi possível empreender esforços no sentido de ultrapassar uma forma de conceber e utilizar os numerais que representam os números, a princípio como um lugar ocupado na seqüência, como se cada quantidade fosse denominada sem seguir regras ou leis de formação. A representação, com utilização da escrita arábica, passou a ser objeto de reflexão e observação de padrões de regularidades a partir dos desafios colocados, o que evidenciou uma das leis que regem esta estrutura: a posição do algarismo no numeral.

A atividade proposta e as formas de encaminhamentos diferenciadas apontam o que nos diz Parra e Saiz (1996) “O trabalho em sala de aula está [...] envolvido pela provisoriade: não só são provisórias as conceitualizações das crianças, como também o são os aspectos do “objeto” que é colocado em primeiro plano, os acordos grupais que são fomentados, as conclusões que vão sendo formuladas, os conhecimentos que se consideram exigíveis” (p. 117).

Mesmo para os que dão respostas corretas e apresentam argumentos baseados no conhecimento das leis que regem o sistema de numeração foi possível perceber que a forma de condução da atividade, que exigiu uma justificativa para a resposta apresentada, propiciou um momento de aprendizagem, pois os levaram a conceitualizar aquilo que somente era um recurso utilizado sem reflexão.

Os procedimentos adotados para conduzir a atividade que incluiu as intervenções da investigadora, do mesmo modo permitiram um aprendizado durante a

situação. Quando o padrão de regularidade identificado teve que ser justificado, foi o momento em que as crianças se obrigaram a formular perguntas para si mesmas o que constitui um caminho para a aprendizagem. Da mesma forma, confrontar suas hipóteses com o ponto de vista dos outros e seus argumentos é um caminho para que algum progresso aconteça, pois estes podem corroborá-las ou refutá-las e neste caso entram em contradição que geram novas perguntas e novos processamentos. É uma intensa interação com o objeto de conhecimento. A argumentação vai permitir que as relações que elas estabelecem, sem saberem vão se tornar claras ou passam a ser coordenadas com outros conhecimentos que já possuíam ou mesmo acabam por fazer descobertas que só se tornaram possíveis devido ao contexto da situação.

Nesta atividade, privilegiou-se a produção de acordo com uma teoria de representações, pois a colocação do zero em diversas posições num numeral transformaram-no em outro com significados diferentes.

A observação e análise do registro de representação com utilização da escrita arábica permitiram o lançamento de hipóteses a partir de dados recolhidos. Essas hipóteses foram descritas evidenciando-se a atividade de representação que está no coração da atividade de descrição. Esta co-estensividade se justifica, pois ela é necessária para o conhecimento científico. Isto tem significado importante na aprendizagem da matemática e para as pesquisas que se preocupam em entender as dificuldades das crianças, significando que o foco para levar os alunos à aquisição dos conhecimentos científicos não pode se reduzir simplesmente a uma explicação dos erros.

Esta tarefa permitiu que se apresentassem contra-exemplos, o que se tornou decisivo para a explicitação da estrutura do SND na escrita arábica e principalmente uma atribuição de sentido ao zero nesse registro de representação. A análise ao recurso do contra-exemplo é decisiva, primeiramente, em virtude de que a réplica numa discussão constitui uma refutação de uma declaração mais abrangente. Em seguida, a resistência ao contra-exemplo é um teste de aceitabilidade para definições ou relações de implicação.

A produção de um contra exemplo é importante, mas está sujeita a determinadas condições. O sujeito só pode produzi-lo, num determinado domínio de conhecimento, dependendo da base de dados dos quais ele dispõe neste domínio ou de seu grau de familiaridade com o domínio. Nesta tarefa a apresentação do ‘ponto de vista do outro’ gerou contra-exemplos que possibilitaram implicações a respeito do objeto em foco: a estrutura do SND e a forma como ela está explicitada na escrita arábica através do valor relativo dos algarismos e do caráter operatório que os ligam entre si.

A tarefa 5 teve seu eixo na formação por se tratar de uma teoria de representações semióticas.

A formação de registros de representação não é uma operação neutra, visto que exige o respeito às regras de conformidade que, segundo Duval (2003) se referem :

- c) à determinação [...] das unidades elementares [...];
- d) às combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior [...];
- c) às condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa [...] (p. 43).

Essas regras de conformidade vão exigir, entre outros, a codificação de relações e propriedades.

A tarefa 5, ao exigir a produção de numerais representativos de números, com utilização de algarismos, a escrita arábica, vai requisitar que esses algarismos sejam articulados entre si de forma que, a sua posição no numeral colocará em jogo uma das combinações possíveis das unidades elementares. Essa combinação, nesse caso, diz respeito ao caráter operatório da representação arábica. Assim, ao utilizar algarismos 1, 2 e 3 pode-se formar o numeral 231 e, nesse caso, as unidades elementares estarão combinadas da seguinte forma: $2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$. Se, os mesmos algarismos forem utilizados para formar o numeral 321, outra combinação surge: $3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1$.

As regras de conformidade são seguidas de forma consciente ou inconsciente e permitem a produção de um registro de representação de alguma coisa (no caso um número) em um sistema semiótico. São elas que permitem tal reconhecimento. Segundo Duval (2003) ‘cumprem também uma função de identificação em um registro determinado [...]. Porém isso não implica que o conhecimento das regras seja suficiente para a compreensão ou exploração das representações dadas.’ (p. ??) Por essa razão a ordenação dos números produzidos vai colocar em evidência a estrutura do SND no que diz respeito ao valor posicional e à base.

No entanto, segundo Duval (2003), as regras de conformidade voltam-se mais para a aceitabilidade do registro do que para a sua formação que é de natureza mais complexa. ‘A formação implica a seleção de um certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função das possibilidades de representação próprias ao registro feito’ (p. 44).

Nenhuma das crianças deixou de produzir números com os três algarismos apresentados. Mudaram a posição dos algarismos no numeral, o que lhes permitiu identificá-los como diferentes uns dos outros e ordená-los segundo critérios que se tornam explicitados a partir das justificativas apresentadas. A produção, seguida de interpretação, apelou também para os critérios que fundamentam a ordenação, levando as crianças a refletirem sobre o valor relativo das unidades de acordo com a sua posição e também sobre os tipos de grupos que representam. Esta reflexão voltou-se diretamente para a organização do sistema pelo fato de permitir que se estabeleçam as relações entre os critérios elaborados e o valor de cada algarismo em termos de grupos de 10 e de 100.

Foi no momento da ordenação que se pôde discutir sobre os critérios colocados em jogo para produzi-la e, ao mesmo tempo, questionar a validade de tais critérios e explorar as leis que regem o sistema de numeração.

A atividade proposta permitiu que se observassem, mais uma vez, os tipos de conhecimentos utilizados para colocar os numerais em ordem. Cada numeral constitui um registro de representação de quantidades, sem regras ou leis específicas, mas como

denominação única de unidades singulares idênticas, que ocupa um lugar numa seqüência ordenada. Isto pôde ser percebido quando as crianças não souberam identificar nos algarismos do numeral os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos, dizendo haver somente zero dezenas no 407 ou no 704 apesar de reconhecerem a posição do zero como o lugar ocupado pelas dezenas e as posições dos demais algarismos do numeral como representativo das unidades e das centenas conforme eles ocupem a primeira ou a terceira casa da direita para a esquerda.

A condução da tarefa 7 depende da compreensão dos dois componentes da dupla, da análise das hipóteses lançadas, dos padrões de regularidades observados e da ausência de justificativa. Houve momentos em que ambos compreenderam, outros em que nenhum compreendeu e ainda o momento em que somente um compreendeu. A interferência da investigadora possibilitou a compreensão de somente um dos elementos do grupo, bem como reforçou as hipóteses lançadas de antemão por um dos elementos da dupla. As centenas e as unidades foram, mais facilmente identificadas nos algarismos do numeral que as dezenas.

Nem sempre a soma de 10 unidades foi interpretada como um grupo de 10. Quando a criança soma de 1 em 1 para aumentar 10 unidades significa que ela não as agrupam denominando-as de uma dezena e tampouco identifica a dezena nos algarismos do numeral que representa o número. Quando há a interferência da investigadora é possível explicitar as leis que regem o sistema de numeração e de que forma elas podem ser identificadas, tanto na escrita arábica como na escrita em língua materna. No caso desta atividade estava-se lidando com a escrita arábica e a interferência voltou-se para o tipo de grupo que 10 unidades representam e sua respectiva denominação, bem como a identificação deste tipo de grupo na escrita arábica. O mesmo procedimento foi adotado para 20, 30 e 40 unidades e a identificação de 2, 3 e 4 grupos de 10 (ou 2, 3, 4 dezenas), 100, 200 e a identificação de 1 e 2 grupos de 100 (ou 1, 2 centenas).

Este tipo de interferência produziu efeitos diferentes para cada uma das crianças das duplas em virtude do conhecimento prévio que tinham das leis que regem

o sistema de numeração e da identificação destas na escrita arábica. Para a criança que encontrou uma justificativa correta esta interferência serviu para corroborar sua hipótese. Para a criança que não encontrou justificativa, mas identificou os diferentes tipos de grupos na escrita arábica, de acordo com a posição do algarismo, esta interferência serviu para justificar a alteração percebida, adquirindo sentido. Para a criança que não tem automatizado que 10 unidades representam grupos de 10 ou dezenas a interferência serviu para tornar explícito uma operação realizada implicitamente, isto é, a justificativa de que um dos algarismos muda, pois aumentou 10 unidades. Foi por esta razão que o padrão de regularidade observado, isto é, a alteração de um dos algarismos do numeral, levou a criança a alterar ora o algarismo das unidades, ora o algarismo das centenas, visto que esta alteração não foi identificada com o grupo de 10 que representam as 10 unidades e nem com a posição do algarismo no numeral. Foi necessária a interferência da investigadora sobre a relação existente entre a alteração de um algarismo específico e o tipo de grupo que ele representa em virtude da posição ocupada no numeral e as unidades acrescidas: ora 10 (1 dezena) ora 20, 30 ou 40 (2, 3 ou 4 dezenas, respectivamente) ora 100 (1 centena) ora 200 (2 centenas). Esta relação a princípio foi levada em consideração pela criança que passou a considerar unicamente o algarismo a ser alterado, sem levar em conta os demais algarismos do numeral, ora esquecendo-os, ora substituindo-os por zero. Mais uma vez a necessidade da interferência da investigadora sobre a inalterância dos demais algarismos, caso fossem somadas dezenas ou centenas. Desta forma foi possível levar a criança a entender as regularidades observadas, justificá-las e aplicá-las em outras atividades de mesma natureza.

Estas regularidades envolvem não somente o tipo de grupos envolvidos, mas os aspectos multiplicativos envolvidos na notação numérica: 3 grupos de 10 é 30, o que significará alterar o dígito da casa das dezenas em 3 unidades (enquanto valor absoluto) que estarão significando 3 dezenas ou 30 unidades (enquanto valor relativo). As intervenções da investigadora permitiram que a criança refletisse sobre a função multiplicativa do 2, 3 e 4 nas notações 20, 30 e 40 como sendo 2×10 ($10 + 10$), 3×10

(10 + 10 + 10) ou 4×10 (10 + 10 + 10 + 10), respectivamente. Tal reflexão serviu também para as centenas e como consequência sobre a organização do sistema de numeração.

O foco das atividades da tarefa voltou-se para a identificação de padrões de regularidade que são identificados por observação e explicitados por descrição. Esse procedimento é um caminho para a generalização visto que segundo DUVAL (S/D, já citado) ‘De um ponto de vista cognitivo, uma generalização se faz sempre sobre a base de uma descrição. A passagem de valores numéricos particulares para uma escritura literal dos números que permite explicitar a generalidade de propriedades observáveis, é uma das passagens cruciais no ensino da matemática.’

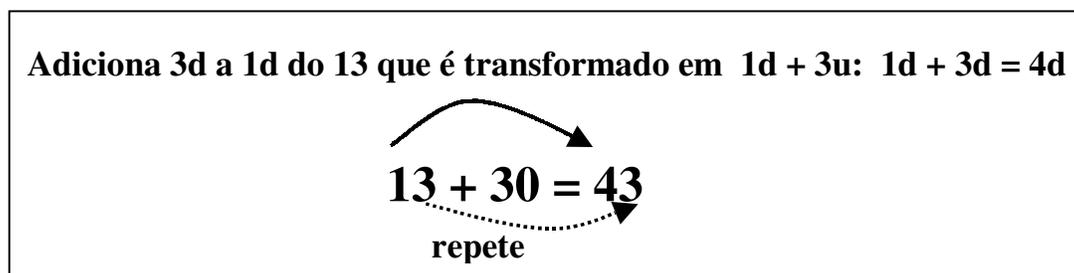
Após a identificação dos padrões de regularidade, começou a atividade de generalização que consistiu naquilo que se manteve invariante, qualquer que seja o valor numérico trabalhado. Neste caso, é fato que o acréscimo de dezenas ou centenas exatas só faz alterar um dos algarismos do numeral e este algarismo passa a ser identificado pelo tipo de grupo que representa de acordo com a sua posição no numeral. Segundo Duval ([s.a.]) ‘A generalização consiste evidentemente em uma descrição da solução que não se limita mais aos dados particulares de um exemplo [...] generalizar requer que se passe num registro discursivo, pois este repousa sobre operações discursivas de designação de objetos ou, mais exatamente, sobre operações de redesignação de objetos já designados. Trata-se de transformar as referências aos objetos particulares em referências a objetos quaisquer.’ O processo começa com uma qualificação (somente um dos algarismos do numeral altera conforme se acrescente dezenas ou centenas exatas) e essa qualificação faz passar de um nível de designação individualizante a um nível de designação categorial mais indeterminada não importando que ela se faça de uma forma explícita ou não explícita. Essa qualificação só se torna operatória se forem utilizadas letras que tornam possível a designação funcional específica às escrituras literárias. Logo, qualquer número natural que expresse a medida de um conjunto pode ser representado por um numeral (no caso da escrita arábica) do tipo $a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + c \times 10^{n-2} + \dots + d \times 10^{n-n}$, com a, b, c ...d

pertencente a N e $n \in N$. Evidentemente que os alunos não chegam a esse estágio de generalização que lança mão de atividade de descrição formal. Mas, cognitivamente, para a aprendizagem, o que é importante são as diferentes operações discursivas possíveis para designar um mesmo objeto, operações que se explicitam com duas variáveis: o talhe do léxico (no caso da palavra escrita) e a mudança de registro.

No caso da aprendizagem do SND é suficiente que as crianças atribuam sentido à escrita arábica que é um registro de natureza formal

A transformação de um registro de representação consiste numa atividade intelectual. Ela pode ocorrer tanto inter-registro como intra-registro. Se ela for inter-registro a atividade intelectual é de uma natureza, pois estará compreendendo a operação de conversão. Se for intra-registro, essa atividade é de outra natureza, pois estará compreendendo a operação de tratamento. No caso da tarefa 9 ocorreu a transformação intra-registro ao se obter o preço pago pela locadora no prazo de 2, 3 ou 8 semanas e esta transformação colocou em evidência a estrutura do SND, visto que seria possível obtê-la após a identificação de um padrão de regularidade. Ao adquirir 10 fitas por semana a locadora terá adquirido, ao final de 3 semanas, 30 fitas e ficará com o montante de 43 após adicionar às 13 fitas iniciais, logo $3 \times 10 = 3$ dezenas, bastando acrescentar essas 3 dezenas à 1 dezena das 13 iniciais.

Isto significa que 13 deve ser transformado em $10 + 3$ e 30 em 3×10 seguido de outra transformação, $1d + 3u$ e $3d$ resultando ao final de 3 semanas $4d + 3u$ e novamente a transformação $40 + 3 = 43$. O quadro 4 ilustra a transformação do 13 em $1d + 3u$ para adicionar 30 que corresponde a $3d$, também transformado.



QUADRO 8 -: TRANSFORMAÇÕES EFETUADAS PARA A REALIZAÇÃO DE UMA ADIÇÃO CORRESPONDENDO A UMA OPERAÇÃO DE TRATAMENTO

O tratamento sempre vai depender das possibilidades de funcionamento representacional do registro e, neste caso, a escrita arábica favorece o acréscimo de 3 dezenas à 1 dezena das 13 fitas iniciais da locadora, visto que a posição do algarismo 1 da escrita arábica revela a quantidade de grupos de 10, existentes em 13 fitas. Essa possibilidade se realiza porque a escrita arábica é um registro de natureza monofuncional admitindo, portanto, um tratamento algoritmizável. Neste caso, convém evidenciar o caráter operatório da escrita arábica: um número representado por um numeral do tipo $a b \dots c$, ao ser interpretado, explicitará as seguintes operações:

$$a \times 10^n + b \times 10^{n-1} \dots + c \times 10^{n-n}, \text{ com } a, b \dots c \in \mathbb{N}.$$

Segundo Duval (2004) o tratamento de uma representação semiótica corresponde à sua expansão informacional. O tratamento, porém, vai exigir a codificação dos dados observados e essa operação, que é de natureza cognitiva, articula ao menos três níveis de sentido, cada um deles enviando a operações discursivas e a processos cognitivos diferentes. Quando as crianças obtiveram os valores relativos à quantidade de fitas, após um determinado número de semanas, ocorre uma transformação intra-registro que para ser descrita e explicada segundo um padrão de regularidade observado, fica condicionada à interpretação. Esta, por sua vez, vai exigir escolhas de expressões ou termos para qualificar os dados observados.

Os níveis de articulação de sentido vão estar ligados às operações discursivas (que dependem do sistema semiótico utilizado), aos processos cognitivos mobilizados e aos tipos de expressões produzidas que serão distintos em cada nível. Para o nível de articulação de sentido de função referencial, existem como operações discursivas a escolha de elementos de um léxico e a composição de vários elementos de um léxico, que são processos cognitivos, associações de palavras e coisas e discriminação descritiva de objetos, compondo um processo ou uma situação e designação direta ou indireta destes objetos como tipos de expressões produzidas, há denominações por um nome, uma sintaxe nominal ou uma sintaxe funcional.

As produções dos alunos permitiram identificar que alguns deles atribuem sentido de função referencial, pois, enquanto operação discursiva, atribuem sentido de

unidades às palavras que designam os números e não a agrupamentos de dez formando uma ou mais dezenas que podem ser adicionadas diretamente ao algarismo representativo das dezenas no numeral. Enquanto processo cognitivo atribuem uma designação direta das unidades através de palavras (uma palavra para cada número) e, finalmente, enquanto expressão produzida, atribui a denominação do resultado por um nome. Estamos nos referindo ao caso das crianças que não tratam os acréscimos como grupos de dez e não os adicionam diretamente às dezenas.

Para o nível de sentido de função apofântica³⁴, apontam-se como operações cognitivas: escolha de objetos de ancoragem, quantificação e ligação entre uma designação do objeto e uma designação de propriedade ou de relação. Como processos cognitivos: focalização sobre um objeto ou sobre uma relação entre objetos; dois tipos de variação, como tipos de expressões produzidas; estabelecimento de proposições adquirindo um status de definição, constatação, conjectura, teorema, etc.

Foi também possível identificar nas produções dos alunos, uma atribuição de sentido pertencente à função apofântica, pois enquanto operações discursivas, foi possível lidar com as dez unidades como uma dezena, e com cem unidades como uma centena. Sua designação funcional permitiu adicioná-la ao algarismo da casa das dezenas ou centenas. Enquanto processos cognitivos mobilizados, foi possível lidar com a focalização sobre a relação entre o número de unidades e o valor relativo do algarismo no numeral. Enquanto tipos de expressões produzidas, a adição dos grupos de dez e dos grupos de cem ao algarismo do numeral representativo das dezenas ou centenas, respectivamente, que caracteriza a constatação da estrutura do SND na escrita arábica. Está-se referindo ao caso das crianças que, após intervenção da

³⁴ A função apofântica acrescenta uma qualificação aos enunciados tornando-os completos, diferenciando-os das expressões referenciais que apenas designam objetos (por gestos, marcas, qualidades, determinado um campo de aplicação, identificando um objeto através de cruzamento da várias categorizações). Por sua vez o sentido completo significa tornar um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores cuja especificidade é baseada num valor lógico, epistêmico (de certeza, necessidade, de verossimilidade, de possibilidade ou de absurdidade) ou social (de pergunta que obriga a uma resposta, de ordem para ser executada, de desejo, de promessa)

investigadora a respeito de uma denominação específica para um grupo de 10 unidades a adição deste aos algarismos do numeral representativo das dezenas, também indicado pela investigadora.

Para o nível de função de expansão discursiva cita-se, segundo Duval ([s.a]) como operações discursivas convergência de referências sucessivamente efetuadas, como processos cognitivos mobilizados a escolha de um referencial e integração de cada observação local num conjunto (contexto, conhecimentos adquiridos...) e como tipos de expressões produzidas explicações.

Essa expansão discursiva também foi identificada nas produções dos alunos que passaram a efetuar as convergências de referências sucessivamente efetuadas, adicionando ou subtraindo uma ou mais dezenas e uma ou mais centenas aos algarismos representativos das dezenas e centenas do numeral, significando a integração do padrão de regularidade observado nas diferentes situações e, ao mesmo tempo, explicando as expressões produzidas.

Segundo Duval ([s.a]) no primeiro nível existe um antagonismo entre associação de palavras já conhecidas e a exigência de uma denominação indireta. É o caso, por exemplo, da associação de 10 unidades e de cem unidades a dezenas e centenas. Esse antagonismo ocorre porque a atividade de descrição de observações conduz a uma descoberta de fenômenos não perceptíveis, como é o caso do valor relativo dos algarismos do numeral na escrita arábica, que não exigem a passagem de uma designação direta a uma designação indireta.

A produção dos alunos tem que ser interpretada em termos de definições, denominações ou de codificação dos dados observáveis. Só desta forma adquire-se condições de avaliar a evolução em relação ao objeto de aprendizagem.

Para análise e interpretação dos resultados das tarefas 11 e 12, é necessário que se analisem os problemas colocados pela não-congruência, uma vez que essas tarefas compreendem uma operação de conversão. Um registro de representação A pode ser substituído por um outro registro de representação B, desde que ambos façam referência ao mesmo objeto. Porém, essa substituição não ocorre sem um determinado

custo cognitivo que é causado pelos problemas da congruência semântica. Ser referencialmente equivalente, não significa ser congruente. O problema da significação vem de encontro à relação entre congruência e não-congruência e pode ser responsável por certas dificuldades em matemática, cuja superação exige a atenção a esse problema.

A substituição, por sua vez, funciona em relação à referência quando se trata da constituição objetiva do saber (validação), e aos sentido quando se trata de apropriação do saber e depende da congruência.

Duas expressões podem ser referencialmente equivalentes e não serem semanticamente congruentes. É o caso do número expresso pela palavra ou pelo numeral arábico, em se tratando da estrutura do SND a ser reconhecida nos dois registros de representação.

Entre duas representações será importante considerar não só a relação de equivalência referencial, mas também a relação de congruência semântica. Ser equivalente do ponto de vista referencial, não significa continuidade semântica ou associatividade.

A substitutividade choca-se com dificuldades na diferença semântica. Posso substituir o numeral arábico 13 pela palavra treze, mas esses registros são pertencentes a redes semânticas diferentes, organizados segundo padrões diferentes, de naturezas diferentes (monofuncional e plurifuncional, respectivamente), admitindo, portanto, tratamentos diferentes (algoritmizáveis e não algoritmizáveis).

Substituir o numeral arábico pela palavra pode significar um salto entre duas redes semânticas de tal forma que o indivíduo não o perceba, nem se for indicado a ele. Na matemática, a mudança de registro semiótico é freqüente, portanto, a substitutividade desempenha papel essencial em relação ao custo cognitivo.

A substitutividade, tanto inter-registro como intra-registro, tem por base a invariabilidade da referência. Mas, as mudanças de registros obedecem a certos procedimentos elementares de codificação. Esta substitutividade choca-se com as dificuldades oriundas da diferença semântica.

Segundo Duval (1988), ‘não-congruência semântica é uma fonte de dificuldades, independentemente do conteúdo matemático. Uma atividade matemática pode ser bem sucedida se sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulação ou representações congruentes e, a mesma tarefa matemática, dada com uma variante que implica uma manipulação de dados não-congruentes pode conduzir ao fracasso’ (p. 18).

Quando duas apresentações são ditas congruentes, os elementos podem ser emparelhados e eles explicitam as mesmas unidades de informação, na mesma ordem, considerando a equivalência referencial. Quando as representações não explicitam as mesmas unidades, ou quando a ordem não corresponde, é preciso proceder a uma transformação de uma das seqüências (apresentações) para torná-las comparáveis.

Duas apresentações podem ser ditas, mais ou menos congruentes, segundo o número de transformações necessárias. Vejamos no caso do SND.

a) Os particulares de 11 a 15

$$\text{Onze} = 1 + 10$$

$$11 = 10 + 1$$

Há que se inverter a ordem de um deles e ainda analisar o sentido do prefixo ‘on’ como uma deformação do ‘um’, e do sufixo ‘ze’, como uma deformação do ‘dez’. Há de se atribuir sentido ao ‘1’ da esquerda como sendo ‘10’ visto que esta unidade não é explicitada.

b) Valores entre 16 e 19

$$\text{Dezesseis} = 10 + 6$$

$$16 = 10 + 6$$

Nesse caso deverá haver a decodificação do algarismos ‘1’ do ‘16’ como sendo 1 dezena em virtude da posição ocupada na representação arábica. Logo o algarismo ‘1’ do ‘16’ não explicita a dezena da mesma forma que o prefixo ‘dez’ da palavra dezesseis.

c) numerais maiores que 20

$$\underline{\text{Vinte}} \text{ e um} = 2 \times 10 + 1$$



$$21 = 2 \times 10 + 1$$

Estão na mesma ordem, porém unidades de significado não explicitadas da mesma forma nos dois registros. Na escrita arábica há necessidade do reconhecimento do algarismo 2 como representativo de duas dezenas em virtude de sua posição. Na escrita, é necessário o reconhecimento de que o prefixo “vi n” é uma deformação da palavra “dois”, e o sufixo “te” da palavra “dez”, e que ambos estão articulados através de uma multiplicação. Ainda há o fato de que a escrita compreende três palavras e a representação arábica dois algarismos. Uma das palavras explicita uma das operações que articula as palavras entre si: o conectivo “e” em “vinte e um” representa uma adição. Essa operação não é explicitada na escrita arábica.

Nos dois registros de representação, percebe-se variações de traços semânticos e de forma.

	escrita	Numeral arábico
Traços semânticos	Posição dos algarismos	Prefixos e sufixos
Forma	palavras	algarismos

“O problema da congruência ou não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, o de distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro” (DUVAL, 1988, p. 13). Quanto maior a distância cognitiva, o custo de passagem de uma apresentação a outra pode aumentar ou também essa passagem pode não ser efetuada ou entendida.

A substituição, por equivalência referencial, cumpre uma função de tratamento e de transformação da informação, desde que se introduzam condições semânticas. Os problemas colocados pela congruência semântica se tornam primordiais na aprendizagem sempre que a atividade cognitiva requeira um mínimo de tratamento.

Por essa razão, quando se solicita às crianças para separar 15 fichas, elas

realizam uma atividade cognitiva que pode estar ligada à estocagem de unidades idênticas, se contadas uma a uma. O registro de representação com utilização da escrita arábica está recebendo um tratamento que compreende uma atividade cognitiva e essa pode não estar relacionada à compreensão da estrutura do SDN que se manifesta pela posição do algarismo no numeral.

O registro de representação já apresenta sentido cardinal e ordinal, mas a estrutura do SND não é reconhecida em tal registro. Por essa razão a maioria das crianças separa “1” objeto para o “1” do “15”, conforme identificado nos procedimentos apresentados nas provas e em outras pesquisas (KAMII, 1992; TEIXEIRA, 1996).

As atividades das tarefas 11e 12 foram organizadas com o objetivo de confrontar os problemas de congruência colocados pelos dois tipos de registros de representação: a escrita e o numeral arábico. Segundo Duval (1988), “os problemas de congruência fornecem uma nova abordagem à questão da linguagem matemática. A linguagem natural não pode ser oposta, de maneira simples e global, às linguagens lógico-matemáticas e às figurais ou gráficas: a verdadeira fronteira que impede muitos alunos é a congruência e a não-congruência semântica no jogo da substituição de uma expressão a outra, ou de uma representação a outra” (p. 23).

As análises e interpretações efetuadas conduziram à explicitação das representações tanto em relação ao que elas representam, como ao sistema pela qual ela é produzida.

A primeira relação permite distinguir o conteúdo da representação e o objeto representado, bem como os diversos tipos de representação em função da existência ou não, dos objetos ou da semelhança entre o conteúdo da representação e o objeto da representação.

A segunda relação leva em conta as representações produzidas pelo próprio sujeito que vai depender dos sistemas produtores de representação de que ele dispõe, significando uma diversidade de representações possíveis. Em consequência disto, o conteúdo da representação de um objeto varia consideravelmente segundo o sistema

mobilizado para produzir a representação deste objeto. Se este conteúdo varia, significa que as propriedades e as particularidades do objeto podem ser explicitadas de forma diferente de acordo com o sistema de representação mobilizado.

Segundo Teixeira (1996) o trabalho voltado para a aprendizagem da numeração posicional deve levar em conta a relação entre significante e significado visto a complexidade destas relações considerando-se que,

um significante exprime somente uma parte do significado; um significado não se exprime também facilmente e da mesma maneira por todos os significantes. É deste modo que se pode analisar as hesitações, os erros das crianças, ou seja, procurando analisar qual parte do significado é engajada no momento da passagem de uma representação a outra (p. 202).

Os sistemas produtores de representação podem ser do tipo psíquicos ou neuronais E permitem produzir, automaticamente, representações, que apresentam uma relação de causalidade entre o conteúdo de uma representação e o objeto representado. Também podem ser do tipo semióticos por permitirem a produção intencional de representação, apresentando uma relação de referência entre o conteúdo da representação e o objeto representado. Cabe ressaltar que os registros de representação semióticos, que são sub-conjuntos dos sistemas semióticos, devem respeitar regras para que possam ser identificados por outros e possibilitar transformações advindas de tratamento ou de conversão.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A apresentação dos resultados de pesquisa e estudo realizado (FUSON & KWON, 1991; FAYOL, 1996) sobre o padrão de organização das palavras e dos numerais arábicos que representam os números, apontam: 1) irregularidades no padrão de organização quando confrontado com outros sistemas; 2) deformações das palavras que compreendem os prefixos e sufixos, que obscurecem o sentido quantitativo; 3) caráter operatório não explicitado, tanto na escrita como no numeral arábico, que dificulta, a correspondência das unidades elementares entre os dois registros de representação.

Alguns destes estudos (POWER & LONGUET-HIGGINS, 1978) indicam a utilização de uma denominação numérica passível de uma decomposição em soma e produto em alguns sistemas, com a recorrência a termos para a organização da sintaxe elementar dos sistemas verbais (os que entram nas composições aditivas(p), os que entram nas composições multiplicativas (m) e os que designam o número(n)).

Outros (FUSON & KWON, 1991) apresentam comparações entre sistemas europeus e asiáticos para a criação de palavras que expressam os números de modo a explicitar uma maior irregularidade delas como o cem, nos sistemas europeus e uma regularidade, também até cem, nos sistemas asiáticos.

Foi possível cruzar os resultados dos dois estudos (o de FUSON & KWON, 1991 e o de POWER & LONGUET-HIGGINS, 1978) e identificar que a regularidade dos sistemas asiáticos para a criação das palavras pode ser explicada em virtude de que os termos criados para os números de 0 a 9 assumem as três funções p, m e n, cuja denominação numérica é decomposta em soma se os termos se localizam à direita da palavra criada para o dez, e em produto se esses termos se localizam à esquerda do dez.

Esses estudos foram utilizados para analisar o padrão de organização das palavras que expressam os números até cem. Na Língua Portuguesa, por meio da análise dos prefixos e sufixos das palavras e da forma como se articulam entre si em

operações de adição e multiplicação. Igualmente, de que forma e quais os termos entram nas composições aditivas e multiplicativas, que deformações sofrem e de que forma obscurecem a numerosidade subjacente, ainda quais aspectos da estrutura do SND estão presentes nessas palavras e em que consistem as irregularidades referidas.

Em relação aos aspectos históricos, foi possível acompanhar a evolução da atribuição de significados e sentidos que iniciou pela distinção entre o singular, o dual e o plural. A pluralidade por sua vez levou a procedimentos de correspondência biunívoca que permitiram o desenvolvimento de noções de quotidade e quantidade, uma vez que, segundo Piaget (1975) a “correspondência entre objetos homogêneos levanta todo o problema da cardinalidade” (p. 72) permitindo, porém, a obtenção da medida de um conjunto sem haver contagem. Com o desenvolvimento da noção de ordinalidade, as coleções passam a ser contadas impondo a criação de registros que contribuem para mais um avanço que permitiu passar do sentido de pluralidade concreta ao sentido de quantidade absoluta. Esses registros, por sua vez, não foram a princípio de natureza semiótica, constituindo, no entanto, imagens-signos que evoluíram para registros de natureza semiótica, e culminaram em diversos sistemas de numeração inventados para a obtenção da medida de um conjunto. Alguns desses sistemas foram apresentados com o sentido de explicitar a estrutura que ora compreendia uma base, ora o valor posicional e ora a base e ora o valor posicional.

Dada a extensa e árdua caminhada percorrida pela humanidade para a invenção de um sistema de numeração, foi considerado importante apresentar resultados de pesquisas que se voltaram para as dificuldades de compreensão da estrutura do SND, que compreende a base dez e o valor posicional, em relação à leitura e escrita.

Esses estudos e pesquisas apontaram que, tanto a dificuldade de compreensão desta estrutura, como os erros que se produzem, estão relacionados a diversos aspectos e foram identificados segundo abordagens psicológicas, neurológicas e lingüísticas, entre outras.

Na abordagem lingüística, foram apresentados estudos (FUSON @ KWON,

1991) referentes a alguns sistemas que obscurecem a estrutura do SND na organização da palavra, por omitirem palavras e trocarem certas consoantes por sílabas breves. Dessa maneira, não possibilitam concebê-la como composta de x dezenas e y unidades, a partir dos prefixos e sufixos dessas palavras que se compõem através de operações de adição e multiplicação e também não se tornam explicitadas. Também, nesta perspectiva, resultados de estudos (apresentados em FAYOL, 1996) que apontam erros do tipo lexicais, que significa a substituição de números ou partes de números, e erros do tipo sintáticos, que significa o respeito aos itens lexicais, mas sem respeito à posição.

Na abordagem psicológica, outros estudos (POWER et al, apresentados em FAYOL, 1996) que se voltam para a organização cognitiva de modo a comportar os módulos de base constituídos de sistemas de compreensão, de produção e de cálculo com dissociação entre eles, significam um olhar sobre os erros dos alunos.

Já outros resultados de pesquisas (FUSON 2 KWON, 1991) estiveram voltados para a atribuição do sentido cardinal e ordinal e a relação das palavras designadas para os números com o sentido cardinal, bem como à utilização dos dedos para realização de adições, ora como nomes de contagem e ora utilizados como dedos cardinalizados que permitem as adições cujas somas estão compreendidas no intervalo 11 a 19 e estruturadas em torno da dezena e das unidades que excedem a dezena.

Foram também apresentados resultados de pesquisa (KAMII, 1992; TEIXEIRA, 1996) que buscaram interpretar a atribuição de sentido aos algarismos da escrita arábica pelas crianças, tendo por base a teoria operatória piagetiana de aprendizagem ou a teoria de representações e revelaram que as crianças não atribuem valor relativo aos algarismos que compõem o numeral arábico.

Foram também mostrados estudos (FAYOL, 1996) que apontam uma lógica essencial para a contagem que está na base da quantificação extensiva, o papel das invenções que constituem hipóteses primeiras construídas para atribuir significação às convenções e sua importância na construção do conhecimento (BRIZUELA, 1998) e também as hipóteses construídas para atribuir sentido a um material gráfico particular,

no caso, os números escritos (SINCLAIR et al, 1994,1990). Evidenciaram-se alguns esclarecimentos (LERNER & SADOVSKY, 1996) sobre a construção progressiva do sistema de numeração, como as crianças se aproximam do sistema de numeração como produto cultural a partir de situações que as levem à elaboração de hipóteses, conceitualizações e procedimentos, à explicitação de argumentos, à identificação de erros, à reformulação de idéias.

Configurou-se de modo mais preciso, para o estudo que foi desenvolvido, uma abordagem voltada para o trânsito entre as duas formas de registros de representação do número, a escrita e o numeral arábico, visto que eles explicitam de modos diferenciados a estrutura do SND. Tal abordagem tem de levar em conta os resultados de pesquisas que indicam causas de dificuldades de compreensão dessa estrutura. Mas essa abordagem implica uma forma de interpretar e enfrentar a problemática, de modo substancial, e buscar as relações dos dados pertinentes desse campo conceitual específico, o SND.

Neste sentido, as proposições de Duval (1995), relativas à ligação semiósis/noésis e seu papel na construção de conhecimentos, permitiram melhor adentrar na complexidade do processo de compreensão do SND. Na perspectiva adotada, a elaboração de tarefas para a situação de ensino implicou compreender vários instrumentos nocionais, relações e inferências pertinentes ao sistema conceitual que também o são à uma teoria de representações por compreenderem sistemas semióticos e não semióticos aos quais estão subjacentes formas diferenciadas de tratamento cognitivo colocados em ação.

Infere-se desses resultados que as várias representações de natureza semiótica, tais como a língua natural para a descrição de um enunciado ou um texto, assim como figuras (imagens, esquemas, quadros, gráficos, fórmulas) não são importantes, só, para deixar um texto mais atraente, mas são, sobretudo importantes, pela diversidade que é inerente ao funcionamento do pensamento e ao desenvolvimento dos conhecimentos. Esse desenvolvimento só se torna possível com a diferenciação progressiva de outros registros de representação diferentes da língua

natural.

Os alunos são sempre levados a transitar de um registro de representação a outro, vivenciando dois problemas: a aprendizagem do funcionamento representacional de cada um dos registros que pertencem a sistemas semióticos com especificidades e particularidades e a conversão de uma representação produzida num registro em uma representação do objeto em outro registro. Essa conversão não significa simples reconhecimento. Por ter sentido, esse reconhecimento deve permitir o estabelecimento de correspondências entre os diferentes elementos que compõem as duas representações identificadas como representações do mesmo objeto.

Nessa investigação, buscou-se a identificação dos diferentes elementos que compõem duas formas de registros de representação de um número que estará designando a medida de um conjunto (o numeral arábico e a palavra escrita), as possíveis formas de estabelecimento das correspondências entre os diferentes elementos, a aprendizagem do funcionamento das representações de cada um dos registros que pertencem a sistemas semióticos diferentes e a conversão de uma representação produzida em um registro em uma representação.

Intencionou -se mostrar que a diversidade de registros de representação, que é inerente ao funcionamento do pensamento, só torna possível o desenvolvimento pela diferenciação progressiva de diferentes registros de representação.

O número, por sua vez, adquire sentidos diferentes conforme sua utilização: número de telefone, número de uma casa, número da carteira de identidade ou do CPF, CEP, placa de carro, andar de um prédio, dia da semana, dia do mês, além de designar medidas; tempo para realização de uma prova, distância percorrida, distância entre dois pontos, altura de uma pessoa, custo de uma mercadoria, entre outros.

Isso significa que quando se utiliza o registro de representação 3355424 para designar o número de um telefone, não se atribui o mesmo significado se o utilizamos para designar o número de habitantes de um país.

Enquanto medida, o registro de representação que a expressa, exigirá, por questões de custo de memória e tratamento, uma estrutura para um sistema de

numeração.

Os registros históricos revelam que a invenção de um sistema de numeração, para o registro de quantidades não foi fácil, sendo necessário, em primeiro lugar, avançar no sentido atribuído ao número, o que exigiu um grau de abstração mais elevado. À medida que o número passou a ser concebido com a sua natureza cardinal e ordinal, as quantidades que correspondem a medidas muito grandes puderam ser percebidas, e como consequência, representadas, passando a exigir um sistema de numeração.

O sistema de numeração que se tornou hegemônico, de origem indo-arábica, tem uma estrutura que compreende base e posição e pode ser expresso através da escrita arábica e da palavra. Os dois registros de representação são de natureza discursiva mas são de tipos diferentes: monofuncional e plurifuncional, passando a possibilitar, ou não, tratamentos algoritmizáveis.

Esse estudo esteve voltado para a elaboração de uma situação de ensino, composta por diversas tarefas, que favoreça a compreensão da estrutura, presente nos dois registros, explicitada ou não, e que permitissem aos alunos transitar de um registro de representação a outro, considerando duas questões: as especificidades de cada um dos registros, em virtude de sua natureza e tipo, e a conversão que não significa simples reconhecimento, e sim, o estabelecimento de correspondências entre os diferentes elementos que compõem os dois registros de representação do mesmo objeto.

Duval (1988) afirma que a conversão é sub-estimada ou completamente desconhecida em virtude de duas razões: o princípio da compilação e o dualismo cognitivo. “A compilação é a tradução de um programa escrito numa linguagem em um programa equivalente escrito numa outra linguagem” (p. 8). Por exemplo, a utilização do código booleano para gerar informações a serem processadas por circuitos elétricos. Porém compilação não é conversão, pois compilação é apenas uma codificação, enquanto que conversão é uma atividade complexa que levanta numerosos problemas e obstáculos.

Já o dualismo cognitivo resulta da oposição mental/material que busca subordinar uma à outra, e esta subordinação leva a relativizar ou até a negligenciar a importância dos sistemas semióticos em todas as atividades e aprendizagens intelectuais. Esse dualismo subordina o sistema semiótico à produção de representações materiais, tornando as representações mentais independentes, tanto das representações materiais como de todo sistema semiótico de representação. As representações mentais evocam as representações semióticas ou materiais para serem compreendidas e, desta forma, postula-se a transparência dos signos que seriam necessários somente para fins de comunicação, significando que, se um sujeito não compreender um enunciado as dificuldades seriam de origem conceitual, já que os signos seriam transparentes.

Foram por essas questões que se considerou a importância da atividade de conversão nas tarefas da situação de ensino. Entende-se como crucial a passagem de um registro de representação semiótico a outro para a compreensão tanto da aprendizagem do SND, como para o domínio do funcionamento de cada um destes registros.

Pretendeu-se superar a barreira da justaposição de registros que impede o sujeito de mobilizar um outro registro, já visto, estando em presença de um. Objetivou-se sim, a compreensão conceitual que implica o domínio de um registro de representação o qual vai implicar a capacidade de poder articulá-lo com outro registro.

Buscou-se, também, a superação do dualismo cognitivo para não confundir o representante com o representado, sendo necessários muitos registros de representação do que é representado e a articulação dessas representações como sendo representação da mesma coisa. Considerou-se, igualmente, que as representações semióticas são inseparáveis de possibilidades e de procedimentos de tratamentos (que pode mudar radicalmente de um registro a outro) nas quais o aspecto “representante” prima sobre o aspecto “compreensão do que é representado”. Por fim considerou -se que a conversão está subordinada a fenômenos maiores de não congruência na possibilitação da significância que é própria a cada um entre dois sistemas mobilizados para uma

conversão de representações.

No presente estudo, houve a preocupação de considerar o salto crucial que constitui a passagem de coisas materiais que se manipula à sua representação semiótica, salto esse que abre possibilidades de sentido e de tratamento totalmente independentes daquelas que tem de ser experimentadas ao redor destas manipulações.

Um bom exemplo a ser evocado diz respeito às respostas apresentadas numa das provas do instrumento de coleta das informações qualitativas. As crianças contavam 15 objetos, dispostos linearmente ou desenhados aleatoriamente, sem determinada configuração geométrica ou desenhados numa configuração retangular, escreviam o numeral representativo da quantidade e deveriam separar o número de objetos representados pelo 1 e pelo 5 do numeral 15. Algumas acordaram sentido de 1 e 5 objetos, outras de 1º e 5º objetos e outras de 10 e 5 objetos ao 1 e 5, respectivamente. Esse sentido podia mudar de acordo com determinadas intervenções, dentre as quais “apresentação do ponto de vista do outro”, a apresentação da quantidade a ser separada com a apresentação da palavra e sua leitura pausada: “vinnn.....te e..... três” e a retomada das questões anteriormente colocadas. Crianças que a princípio haviam separado duas e cinco fichas para a quantidade 25 solicitada através da palavra pronunciada pausadamente “vinnn.....te....e....cin. ...co”, alteraram seu julgamento, passando a separar 20 e 5 objetos referentes ao 2 e ao 5 do numeral arábico 25, respectivamente. Mesmo que essas vinte unidades não fossem consideradas como 2 grupos de 10 ou 2 dezenas, houve uma primeira aproximação de atribuição de sentido aos algarismos da representação arábica oriunda deste trânsito entre 2 registros de representação do mesmo objeto. Esse fato observado vem ao encontro do que afirma Duval (1998) ao dizer que “é a semiósis que permite agir no campo das possibilidades”(p.).

Há de se considerar ainda, o fato de que nesta tarefa as crianças transitaram entre 3 tipos de registros de naturezas diferentes: discursivas (monofuncional e plurifuncional) e não discursivas (desenhos que constituem representações de ordem icônica). Isto significa que não somente as representações discursivas exigirão

tratamento específico deste tipo de registro, mas as de ordem icônica que mobilizam um tratamento a efetuar que vai exigir que o sujeito já domine o jogo da representação, assim como sua articulação. No caso específico de uma quantidade apresentada através de desenhos de objetos, há a necessidade, por parte do sujeito que a manipula, do respeito aos três princípios lógicos de contagem: contar todos, contar apenas uma vez e recitar os nomes dos números numa ordem específica.

Existe também a questão de que a interpretação de representações de ordem icônica vai mobilizar um registro de língua, levantando o problema da não congruência.

Outra questão que foi contemplada na organização das tarefas da situação de ensino diz respeito aos dois aspectos compreendidos numa representação: a sua forma (enunciado, desenho) e o seu conteúdo (maneira pela qual a representação apresenta o objeto através da qual o objeto se torna acessível). Esta foi uma questão de extrema relevância, visto que, os dois registros de representação do número não tinham o mesmo conteúdo. Isto significou que além da aprendizagem do objeto de estudo em questão, a estrutura do SND, houve a necessidade de organização de situações que compreendessem a aprendizagem da forma e do conteúdo da representação. Além disso, houve necessidade de explicitar as propriedades do objeto representado de formas diferentes em virtude das possibilidades da representação que são ligadas à sua forma. Isso significou explicitar um dos aspectos da estrutura do SND na palavra atribuindo significação às unidades elementares constituídas de sufixos e prefixos que compreendem a base do sistema de numeração segundo o qual foi estruturado, ligado por operações de adição ou multiplicação.

Essa significação compreendeu as deformações das palavras designadas para os números de 1 a 9, para as dezenas, centenas, unidades de milhar,... Curioso será ressaltar que o registro de representação do número através da palavra não depende de um outro aspecto da estrutura do SND: o valor posicional, para os particulares de onze a quinze (onze → on + ze → um mais dez; doze → do + ze → dois mais dez; ...) enquanto que na escrita arábica temos ($11 \rightarrow 10 + 1$; $12 = 10 + 2$; ...). Foi essa

questão que levou à interpretação dos procedimentos adotados pelas crianças numa das provas do instrumento de coleta das informações qualitativas, reformulando seu ponto de vista, a partir da pronúncia pausada das palavras que designam os números, articulando às unidades elementares da escrita arábica, sendo, porém, interpretadas como unidades idênticas e singulares e como um valor ocupado na seqüência. Isso ocorreu em virtude de que as deformações dos sufixos e prefixos das palavras que expressam os números, obscureceram o sentido quantitativo e a organização do sistema em torno de uma base e do valor posicional.

A palavra enquanto forma compreende o conteúdo das unidades elementares relativas aos sufixos, prefixos e às operações matemáticas que os ligam entre si. Já a escrita arábica, enquanto forma, compreende o conteúdo da composição aditiva e o valor relativo das unidades que envolve a multiplicação por potências de dez. Assim,

$$\begin{array}{ccccccc}
 324 = & 3 \times 10^2 & + & 2 \times 10 & + & 4 & \\
 & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\
 & \text{Valor relativo} & & \text{Valor relativo} & & \text{valor relativo} & \\
 & \underbrace{\hspace{4.5cm}} & & & & & \\
 & \text{Composição aditiva} & & & & &
 \end{array}$$

Contemplaram-se todas essas questões nas tarefas da situação de ensino, levando em conta o que Duval (1998) afirma “o conteúdo de uma representação depende mais da forma da representação, ou mais precisamente, dos meios de apresentação do sistema semiótico [...] utilizado. É porque duas representações representando o mesmo objeto com registros diferentes [...] não podem ter o mesmo conteúdo” (p. 30).

A importância da distinção entre forma – conteúdo e objeto representado está vinculado ao fato de que os alunos não reconhecem um mesmo objeto em representações diferentes e este reconhecimento é absolutamente necessário para que um sujeito possa utilizar formas alternativas, mobilizadas por ele mesmo.

O que se pode concluir é que as crianças utilizam os nomes de números e a escrita arábica para denominar objetos de uma coleção ou para se referir à medida de um conjunto (peso, volume, velocidade etc), mas não reconhecem, nesses registros de

representação, a estrutura do SND, e isso significa uma denominação de objeto singulares idênticos.

Nesse sentido, perde-se a valiosa síntese inventada para um sistema de numeração, ao não reconhecer este objeto nos registros e configura-se um retrocesso em se tratando de representação de quantidades, já apontado pela história (e ainda hoje existente em tribos primitivas), como por exemplo, a atribuição de partes do corpo para a denominação dos números já percebidos em seu sentido cardinal e ordinal.

Um mesmo objeto pode ser representado por vários registros de representação que não possuem uma mesma forma e um mesmo conteúdo. Segundo Duval (1998) “a forma depende do registro de representação, o conteúdo depende das possibilidades de explicitação das propriedades do objeto que permite o registro de representação e o tratamento depende igualmente do registro de representação.” (p. 32)

O fato de que a escrita não compreende um padrão de organização que utiliza um dos aspectos da estrutura do SND, o valor posicional, para um determinado intervalo numérico está vinculado à relação forma e conteúdo intrínsecos à representação: toda forma está ligada a um sistema semiótico que apresenta possibilidades e impossibilidades de apresentação, fazendo com que o conteúdo da representação do objeto mude radicalmente de um sistema semiótico a outro.

Uma referência importante a ser lembrada é a conclusão de Teixeira (1996) afirmando que “à análise da conceitualização tendo em vista o papel das diferentes formas simbólicas utilizadas nas atividades de numeração, mais particularmente da numeração posicional [...] não tem sentido se não recorrermos a uma teoria de representação” (p. 199). A autora considera ser preciso redimensionar o trabalho sobre a numeração posicional mantendo no espírito a relação entre significante e significado que são determinados em função dos conhecimentos matemáticos concernentes. O redimensionamento do trabalho deverá estar considerando o que a autora apresenta e

sugere:

um significante exprime somente uma parte do significado; um significado não se exprime também facilmente e da mesma forma por todos os significantes [...] ensinar as crianças a passar de um modo de representação a outro tem um sentido e permite conceituações se nos perguntarmos sobre as relações entre: **1)** significantes e significados engajados e pertinentes para a situação; **2)** sistema de significantes e significados entre eles; **3)** os elementos constitutivos dos significantes e significados e suas relações complexas no interior mesmo de cada um dos sistemas significantes/significados considerados (p. 202).

Existe uma outra questão que foi identificada e considerada importante. Ela diz respeito à relação de não semelhança entre os dois registros de representação que utilizam signos livres e signos ligados. Os algarismos da escrita arábica são signos livres que dependem de uma decisão para o seu emprego: a posição do algarismo no numeral designado uma potência de dez. As palavras são compostas de signos ligados cujo valor é dependente da sua pertinência a um sistema. Seu sentido depende de relações de “antonímia” ou de “sinonímia”³⁵ com outras palavras da língua, isto é, da rede de relações semânticas da língua. Segundo Duval (1998) “é este o sentido das palavras que determina suas possibilidades de emprego para nomear objetos [...] esta designação de objetos não se fazendo geralmente no nível de palavras tomadas isoladamente, mas no nível de uma combinação de palavras” (p. 38). No caso do padrão de organização das palavras que designam os números, lembra-se do resultado de pesquisa de Power e Longuet-Higgins (1978)³⁶ de três tipos de termos: os termos que designam as unidades, os termos que entram nas composições aditivas e os termos que entram nas composições multiplicativas. Esses termos, por sua vez, sofrem as deformações apontadas por Fayol (1996) que esconde a numerosidade subjacente. Logo, existem tipos de signos que se ligam de forma a atribuir sentido a uma

³⁵ Sinonímia: qualidade do que é sinônimo. Emprego de sinônimos (Pequeno dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa Ilustrado, vol 3, São Paulo: Abril Cultural, 1971. Antonímia: qualidade e emprego de antônimo. (Pequeno dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa Ilustrado, v. 1, São Paulo: Abril Cultural, 1971).

³⁶ Citado em Fayol (1996) cuja referência completa já foi citada.

numerosidade, mas que não fica explicitada em termos das operações, como por exemplo: doze (do, deformação do dois, → dois e ze, deformação do dez, → dez, ligados por uma operação de adição “dois mais dez”) e vinte (vin, deformação do dois, →dois e te, deformação do dez, → dez, ligados por uma operação de multiplicação “dois vezes dez”), o mesmo termo designando unidades singulares idênticas (dois) entrando em composições aditivas e multiplicativas (não explicitadas) para designar outros números relativos a outras quantidades.

As relações entre a representação e o objeto representado é compreendida em seu modo de produção, visto que uma representação está ligada à sua utilização e as diferentes representações estão ligadas à sua utilização e as diferentes representações desempenham papéis diferentes no desenvolvimento dos processos cognitivos. O objeto representado (no nosso caso o SND) é a causa da representação em razão de um mecanismo ou de um sistema que permitiu produzir os diferentes registros de representação. No caso do SND foi possível a utilização da língua materna e da escrita árabe e constituem sistemas que dão especificidades significativas representacionais diferentes, independente do objeto representado.

É por esta razão que os alunos encontraram dificuldades em relação à aprendizagem do SND, têm que ser estudadas nas relações entre a produção dos registros de representação no sistema que permitiu esta produção, e em virtude de suas especificidades e natureza que tornam mais ou menos explicitado o objeto representado (no nosso caso a base 10 e o valor posicional compreendidos na estrutura do SND). Esses dois aspectos compreendidos na estrutura são interligados por operações matemáticas de adição e multiplicação e deverão estar presentes nos registros de representação, em virtude do sistema utilizado explicitar formas diferenciadas desta estrutura. É por essa razão que Duval (1998) afirma “é o sistema mobilizado para produzir uma representação que determina, de um lado, a natureza da relação entre esta representação e o objeto representado e, de outro lado, a forma da representação produzida e seu conteúdo isto é, a maneira pela qual a representação

torna acessível o objeto representado, explicitado ou colocado em primeiro plano certas de suas propriedades em detrimento de outras” (p. 41).

Existem dois tipos de sistemas que permitem produzir representações os sistemas semióticos e os sistemas físicos. As representações obtidas pelos sistemas semióticos são radicalmente diferentes das produzidas pelos sistemas físicos, pois para as primeiras há uma relação de referência entre a representação produzida e o objeto representado e, para as segundas, haveria uma relação de dependência causal já que a representação seria produzida em função de um sistema físico ou orgânico. São esses sistemas, por sua vez, que determinam as duas classes de representações conscientes, que apresentam ou evocam qualquer coisa para o sujeito que as produziu ou para aquele que as apreende: as representações semióticas e as não semióticas. As semióticas são intencionalmente produzidas e as outras não o são jamais.

Esse aspecto é fundamental do ponto de vista cognitivo visto que os sistemas semióticos desempenham um papel central no funcionamento cognitivo. Para serem produzidas as representações semióticas implicam a mobilização de um sistema físico ou orgânico, mas não são estes que vão determinar a forma e o conteúdo implicando, somente o modo de acessibilidade que, quando mudado, reflete somente sobre o custo de produção. Esse custo depende do tempo tomado para a produção ou da quantidade de informações que a representação semiótica deve conter.

É por essas razões que a compreensão da estrutura do SND, tanto na palavra como na escrita arábica, é fundamental, pois a utilização das palavras e dos numerais arábigos para designação dos nomes dos números considerados como unidades idênticas singulares leva muito depressa à saturação da capacidade de memória.

Outra questão importante foi a análise funcional realizada preliminarmente, almejando entender as funções cumpridas pelos dois tipos de registros de representação: comunicação, tratamento, conversão e endereçamento. A mesma importância teve a análise *a posteriori* que permitiu, após uma aplicação piloto, fortalecer mais as funções numa determinada situação de ensino. Ambas as análises possibilitaram identificar o conteúdo da representação e o objeto representado e a

enfrentar as relações entre eles.

Os problemas relativos do conhecimento, na abordagem cognitiva, são tratados por diversas áreas, dentre as quais se destacam algumas: a psicologia, a lingüística, neurociências, inteligência artificial, entre outras. A abordagem cognitiva difere de uma abordagem epistemológica que trata de conhecimentos relativos a um domínio particular de objetos, seu desenvolvimento histórico e sua validação.

A abordagem cognitiva considera que o conhecimento a ser estudado é atividade de um sujeito individual, compreende formas específicas consideradas complexas e se efetua de maneira interna ou externa. No caso da matemática, destaca-se um tipo de conhecimento que apresenta particularidades que vão requisitar uma abordagem diferencial, e não geral, do funcionamento cognitivo e se refere ao sujeito individual e não ao sistema.

O estudo do funcionamento cognitivo pode ser feito segundo escalas de tempo escolhidas, muito diferentes, colocando em jogo fenômenos e processos que não são de mesma natureza. Numa dessas escalas, segundo Duval (1996) “às unidades de tempo permitem gerar situações nas quais o sujeito é engajado. Nesta escala os tratamentos e a execução das ações relevam de um controle consciente da parte dos sujeitos ou podendo fazer o objeto de um tal controle” (p. 354).

Foi esta a abordagem utilizada para a elaboração das tarefas da situação de ensino de modo a incluir noções, relações, inferências, situadas nos diversos planos apontados por Vergnaud (1985) e na passagem de um plano a outro, e também, a considerar as questões colocadas por uma teoria de representações.

Dentre elas encontram-se operações presentes nas atividades das tarefas, requeridas para que o próprio sujeito tomasse consciência da validade de seu raciocínio, da validade do raciocínio de outro ou para que ele percebesse a natureza de um raciocínio válido.

Também houve operações necessárias, presentes nas atividades das tarefas, para que a criança pudesse ver uma configuração de forma que funcionou como ajuda heurística, como por exemplo, adições cujas somas eram estruturadas em torno de dez,

com a utilização de dedos cardinalizados.

Da mesma forma, houve operações presentes nas atividades das tarefas, que permitiram aos sujeitos retirar informações pertinentes e as organizar, em virtude de um tratamento matemático.

Foi a abordagem cognitiva que culminou na mobilização de pelo menos dois registros de representação, visto que eles desempenham um papel fundamental no modo de um conhecimento específico, tal como é considerado o conhecimento matemático.

As tarefas da situação de ensino foram elaboradas levando em consideração o aspecto funcional ligado à produção de representações semióticas, que é relativo ao tipo de atividade que os signos permitem abranger. Essas atividades estão ligadas, por sua vez, às funções cognitivas fundamentais de comunicação, tratamento e objetivação que transforma a representação semiótica em registro de representação.

Esses registros, por sua vez, apresentam especificidades que são inerentes à mudança de registro e dizem respeito a dificuldades específicas oriundas da não congruência e o são, também, às aprendizagens que requerem uma coordenação dos diferentes registros que um objeto de conhecimento mobiliza.

Houve também a questão a enfrentar das duas apreensões diferentes que as representações semióticas possibilitaram: uma apreensão do objeto e outra da representação. Isto significa que a representação pode direcionar a atenção sobre o objeto ou sobre ela mesma.

Segundo Duval (1996) considerando que os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de representações, e os tratamentos dependem das possibilidades dadas pelas representações, elas não podem ser consideradas secundárias em relação aos objetos matemáticos propriamente ditos.

Os aspectos históricos que mostraram o sentido atribuído ao número, que constituiu um avanço do senso numérico, permitiram compreender outros aspectos das representações semióticas: de acordo com Duval (1996) um deles relativo ao modo de produção, e o outro a significação das representações semióticas.

O modo de produção está relacionado ao aspecto fenomenológico, podendo ser interno ou externo e está vinculado a exigências cognitivas da situação. Se esta exigência ressaltou a necessidade de comunicação, impõe-se um modo de produção externa, mas se ressaltar a necessidade de tratamento, a escolha dar-se-á em função do custo, rapidez e quantidade de dados a serem levados em conta.

Os registros históricos revelaram estes aspectos por meio de procedimentos adotados para quantificar intensivamente e extensivamente. Conforme o senso numérico avançou, os primeiros registros produzidos constituíram-se de entalhes, riscos, e a partir da necessidade de quantificar intensivamente (dizer quem tem mais) impôs-se um tratamento aos dados que implicou a correspondência biunívoca. Mas para uma quantificação extensiva (quantos a mais) impôs-se um tratamento que compreendeu a enumeração que está vinculada a um outro aspecto do número: a ordinalidade. E, finalmente, para fins de comunicação a produção de representações semióticas que é de natureza externa.

Em relação à significância dessas representações, um outro aspecto de natureza estrutural se impôs, pois enquanto signos, elas adquirem valores diferentes de acordo com o sistema semiótico utilizado para produzi-las, que determinam um campo de significância ou de representação ou de referência ao objeto representado.

Essa questão se impôs de forma significativa na elaboração das tarefas da situação de ensino, pois as propostas deveriam estar contemplando o conteúdo da representação que não deveria ser confundido com o objeto representado. Isso significou, sucessivamente ou simultaneamente, que se lidou com a compreensão do conteúdo do registro de representação de acordo com a sua forma (escrita arábica ou palavra) de forma a explicitar o seu conteúdo (valor relativo dos algarismos na escrita arábica e análise da articulação entre sufixos e prefixos das palavras) e com o objeto matemático de aprendizagem: o SND.

O que se configurou, em relação às tarefas julgadas importantes e relevantes para levar os alunos a superarem as dificuldades identificadas e a compreenderem a estrutura do SND, na palavra e no numeral arábico, foi a possibilidade de uma

operacionalização que culminou na organização das tarefas da situação de ensino.

Mas estas tarefas compreenderam, de uma maneira concreta, a abordagem cognitiva, levando em consideração desafios cognoscitivos que se tornaram presentes nas atividades pelas operações subjacentes e, nos encaminhamentos metodológicos que incluíram a solicitação de justificativas, argumentações, explicações e confrontação com o ponto de vista do outro.

A abordagem cognitiva conduziu à consideração de outras questões, dentre as quais: a necessidade de apresentar o objeto matemático por meio de mais de um registro de representação, visando as operações cognitivas de tratamento e objetivação; a necessidade da coordenação destes registros visando a diferenciação entre representação e objeto representado de modo a evitar o enclausuramento de registros de representação.

Foi necessário, também, diferenciar os tipos de transformações de um registro, oriundos de uma operação de tratamento ou de uma operação de conversão. Por esta razão foi apresentada uma análise, feita preliminarmente, para especificar que tipo de operação estava em jogo visto que elas requisitam operações de natureza cognitiva que são distintas entre si. Esta diferenciação foi importante e necessária porque a operação enfrenta o fenômeno da não-congruência.

Para enfrentar o fenômeno da não-congruência foi necessário identificar as unidades elementares cognitivamente pertinentes de forma que pudessem ser contempladas nas atividades das tarefas através de correspondências. Este fenômeno, por sua vez, pode ser mais forte num sentido da conversão que em sentido contrário.

Entretanto a identificação das unidades elementares cognitivamente pertinentes está ligada ao tipo de registro de representação que, neste caso, eram de natureza plurifuncional (a palavra) e monofuncional (o numeral arábico). Essa diferença não é sem importância visto que de acordo com a natureza dos registros haverá a possibilidade de tratamentos específicos a que elas dão lugar. Há também o fato de que as condições de aprendizagem não são de mesma natureza para os dois tipos de registros.

Essas questões relativas ao funcionamento cognitivo estão na base do procedimento metodológico proposto por Duval (1996) para analisar as produções dos alunos. Esse procedimento de análise consiste na utilização da conversão de representações. Trata-se de uma análise cognitiva que vai repousar sobre o princípio e regra seguintes:

‘Princípio

Para tudo isto que releva da significância, a discriminação de unidades significantes de uma representação (e, portanto, da possibilidade de uma apreensão disto que ela representa) depende da apreensão de um campo de variações possíveis.

Regra fundamental

É levando-se simultaneamente em conta dois registros de representação, e não cada um isoladamente, que se pode analisar o funcionamento cognitivo de diferentes atividades matemáticas” (p. 373).

Neste estudo, agiu-se com variações nos dois registros de representação do número: a palavra e o numeral arábico, para identificar as unidades significantes. Na palavra procedemos com variações dos sufixos e prefixos, portanto, uma variação no interior do mesmo registro. Para os numerais arábicos, operou-se com variações dos algarismos e com variações relativas à posição dos algarismos no numeral e com acréscimos de zeros à direita, à esquerda e intercalados constituíram também variações no interior do registro.

Procedendo dessa forma, pode-se realizar a análise cognitiva dos dois registros, levando em conta o princípio acima apontado. Essas variações permitiram reconhecer a significância do registro, isto é, permitiu reconhecer, por meio das variações efetuadas, uma representação possível de mesmo registro.

Este princípio foi considerado nas atividades das tarefas propostas, como por exemplo, nas alterações de preços de mercadorias em 10 , 20,... reais ou em 100, 200... reais, na produção de numerais com 3 algarismos, na solicitação feita para zerar um determinado algarismo de um numeral, nas atividades de comparação que exploraram o ponto de vista do outro ou os argumentos e justificativas apresentados para as

respostas, por fim, na exploração do acréscimo de um zero aos algarismos da representação arábica em diferentes posições.

Agiu-se, também, com a variação concomitante num outro registro de representação correspondente a um primeiro escolhido (por exemplo, uma palavra relativa a um número e o numeral arábico correspondente). As variações em dois registros coloca em jogo não mais a significância, e sim a referência.

O primeiro tipo de variação é estrutural e este segundo tipo corresponde a variações cognitivas. As variações estruturais poderão ser cognitivamente neutras. Nas atividades das tarefas acima citadas, operou-se com variações estruturais, visto que não se levou os alunos a observarem se estas variações provocariam variações num registro de outra natureza, a palavra, levando a um outro objeto.

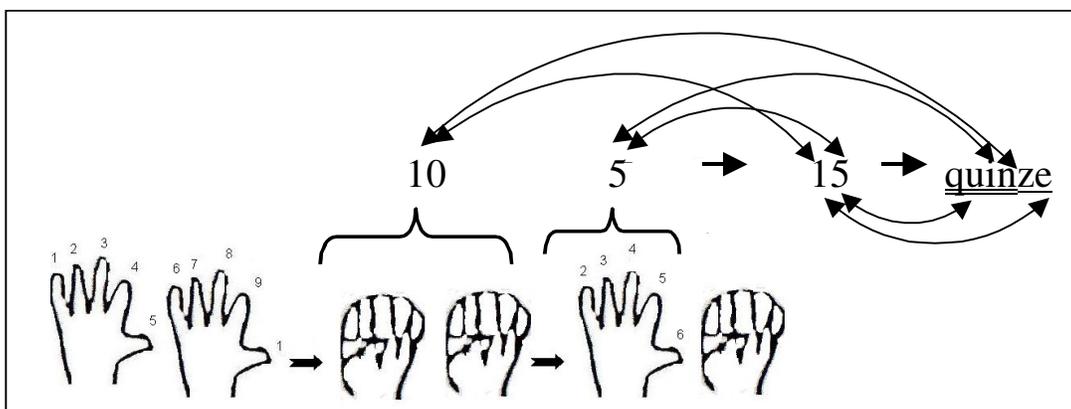
Atividades das tarefas propunham: a identificação do valor relativo no algarismo do numeral arábico e a ligação entre eles, por meio de adições e multiplicações; a identificação dos sufixos e prefixos das palavras representativos de agrupamentos, agrupamentos de agrupamentos e a ligação entre eles, também por meio de operações de adição e multiplicação; a correspondência entre os valores relativos e os sufixos e prefixos nos dois registros. Tais atividades compreenderam variações cognitivas, visto que qualquer variação num registro provocava variação no outro e ambos passavam a ter outro objeto referente.

Ainda, em termos de operacionalização de uma abordagem cognitiva há de se levar em conta a diferenciação funcional dos registros plurifuncionais e a coordenação de registros. Esta coordenação muda radicalmente frente a um tipo de atividade ou domínio e permite identificar as capacidades de iniciativa e de controle do sujeito, principalmente em casos de não-congruência.

Neste estudo, foram analisados dois registros de representação e concluiu-se que não há congruência entre a palavra e o numeral arábico. Esta não-congruência é maior quando os três critérios de congruência não são cumpridos e, neste caso, isso acontece para os valores compreendidos no intervalo [11; 15].

Nas atividades presentes nas tarefas, procurou-se enfrentar o fenômeno da

não-congruência, como por exemplo, nas tarefas 1 e 2, com a proposta de adições, cujas somas estavam compreendidas no intervalo acima considerado. Os itinerários sugeridos possibilitavam estruturá-las em termos de uma dezena, de unidades excedentes a uma dezena, e por fim, com a associação de dezenas e unidades aos algarismos do numeral arábico e aos sufixos e prefixos das palavras, cujas deformações foram, por sua vez, associadas às palavras criadas para os números de 1 a 9. O quadro 9 apresenta como exemplo a adição $9 + 6$ cuja soma é obtida utilizando o primeiro itinerário:



QUADRO 9 - PROCEDIMENTO DE CONTAGEM NA SEQÜÊNCIA PARA OBTENÇÃO DA ADIÇÃO DE 9 COM 6 SEGUNDO O ITINERÁRIO DOS DEDOS CARDINALIZADOS.

Todo o estudo enfim, que buscou possibilidades de organização de tarefas para comporem uma situação de ensino que permita aos alunos compreender o SND, encontra sentido nos argumentos apresentados por Duval (1996) de que “o problema da aprendizagem, ao nível do funcionamento cognitivo do sujeito, deve ser formulado não em termos do funcionamento cognitivo do sujeito, mas deve ser formulado em termos de condições de compreensão. [...] que não estão ligadas a um conteúdo particular, mas à natureza das atividades e dos raciocínios que se encontram exigidos através de diferentes conteúdos ensinados” (p. 377).

Uma questão não investigada diz respeito ao que se denomina compreensão que vai depender de um conjunto de exigências que são determinadas tanto

institucionalmente quanto individualmente e será relativo “à maneira pela qual o sujeito deve saber isto que ele sabe para verdadeiramente saber” (p. 377).

O estudo realizado traz derivações pedagógicas: ao proceder com uma análise funcional das atividades, das tarefas e das produções cognitivas nos registros de representação, aponta para o que deve se voltar a atenção do professor, a cada momento de compreensão do aprendiz e quais deverão e poderão ser, então, objeto de intervenção específica e como esta deve caracterizar-se.

Por seu intermédio ainda, foi possível apontar evidências de que as aprendizagens dos conteúdos escolares faz-se em um processo, se houver a intervenção do ensino, e este depende de estruturas processuais cognitivas que lhe são subjacentes, decorrentes também do desenvolvimento cognitivo. O desenvolvimento cognitivo, por sua vez, será dependente de estruturas conceituais específicas decorrentes de um ensino que efetivamente as provoque.

Toda a trajetória percorrida, da elaboração do instrumento de coleta das informações qualitativas às tarefas propostas para a situação de ensino, indicam o que se deve enfrentar em relação a um processo mais amplo de construções de formas cognitivas que envolvem aprendizagens pontuais, que apresentam caráter mecanizado, tal como é o sistema de numeração decimal: numerais arábicos repetidos numa ordem correta, escritos, utilizados em algoritmos, assim como as palavras para designação da medida de conjuntos, expressa pelo número, porém sem significação em relação à compreensão do SND.

Ultrapassar esse caráter mecanizado exigiu muito esforço e constitui aquisições não fáceis e imediatamente superadas por intervenções didáticas, mas que se não acontecerem podem comprometer e limitar o processo cognitivo mais amplo dos aprendizes na escola e se refletir fora dela.

Enfim, com esse quadro de argumentos, ainda resta pontuar que há um caminho a ser continuado e este deverá estar voltado para a análise da eficácia das tarefas propostas para a situação de ensino para a aprendizagem do SND. Esta busca, que deverá ser continuada, assevera sua relevância aos propósitos da Educação

Matemática.

REFERÊNCIAS

- ASTOLFI, J. P.; DEWELAY, M. **A didática das ciências**. São Paulo: Papirus, 1991.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BECKER, F. Ensino e construção do conhecimento: o processo de abstração reflexionante. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, 18(1): 43-52, jan/jun, 1993.
- BEDNARZ, N.; JANVIERS, B. O. The understanding of numeration. **Primary School Education Studies en Mathematics**, 13, p. 33-57, 1982.
- BRIZUELA, B. Invenções e convenções: uma história sobre números maiúsculos. In: Carraher, D.; Schillemann, A. (organizadores). **A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa**. São Paulo: Papirus, 1998.
- CARRAHER, T. *et al.* **Na vida dez, na escola zero**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.
- CARRAHER, T. N. **O método clínico: usando os exames de Piaget**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1994.
- CÉSAR, D. **De sonho e poesia**. Curitiba: Feller, 2005.
- CHEVALARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado**. Tradução: Claudia Gilman. [s.l]: La Pensée Sauvage Éditions, 1991.
- DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico- descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**, IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993.
- _____. **Sémiósis et pensée humaine :registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Suisse: Peter Lang, 1995.

_____. Quel cognitive retenir em didactique des mathématiques? **Recherches em didactique des mathématiques**. La pensée Sauvage, 1996. v. 16/3, n. 48, p. 349-380.

_____. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 1, IREM de Strasbourg, p. 7-25, 1988. Anais. 1988.

_____. Conversion et articulation des représentations analogiques. In: **Séminaire I.U.F.M.** Nord- Pas de Calais, 1988b.

_____. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. (Organizadora Sílvia Dias Alcântara Machado). Campinas, SP: Papirus, 2003.

_____. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**, IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993

_____. **Cours PUC**. São Paulo: Février, 1999. Documento datilografado.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 1997.

FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FUSON, K. C.; KWON, Y. Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC,C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre**. França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

KAMII, C. **A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget junto a escolares de 4 a 6 anos**. Campinas, SP: Papirus, 1990.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papyrus, 1992.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papyrus, 1995.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 11. ed. Campinas, SP: Papyrus, 1996.

KAMII, C.; HOUSMAN, L. B. **Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed. 2002.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: SAIZ, I.; PARRA, C. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções do conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MIGUEL, A. Reflexão acerca da educação matemática contemporânea. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, SBEM**. a. 1, n. 2, 1994. p. 53-60.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. Tese (Doutorado em Educação, área de concentração Metodologia do Ensino) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1993.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

PEQUENO DICIONÁRIO BRASILEIRO DA LÍNGUA PORTUGUESA ILUSTRADO. v. 1 e 3, São Paulo: Abril Cultural, 1971

PIAGET, J.; SEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. São Paulo: Zahar, 1981.

PIAGET, J. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro, 1975.

SERON, X. DELOCHE, Gerard & NOËL, Marie-Pascale. Um transcodage des nombres chez l'enfant: la production de chiffres sous dictée. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC, C.; FISCHER, J.P. *Les chemins du nombre*. France: Presses Universitaires de Lille, 1991.

SINCLAIR, A.; CHRISTINA, C. T.; GARINM, A. Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres. In: ARTIGUE, M. et col. Vingt ans de didactique des mathématiques em France. Homenage à G. Brousseau et G. VERGNAUD: *La Pensée Sauvage*, 1994, p. 243-249.

SINCLAIR, A. com a colaboração de MELLO, D. & SIEGRST, F. A notação numérica na criança. Capítulo II. In: SINCLAIR, Hermine et al. Tradução de Maria Lúcia Moro. *A produção de notações da criança: linguagem, número, ritmos e melodias*. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990.

TEIXEIRA, L. Aprendizagem inicial do valor posicional dos números: conceituação e simbolização. In: **Psicologia na Educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica**. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia, 1996.

VERGNAUD, G. Quelques orientations theoriques et methodologiques des recherches françaises em didactique des mathematiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. v. 2, n. 2, p. 215-232, 1981.

_____. **L'enfant, la mathematique et la realité**. 3. ed. Berne: Peter Lang, 1985.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches em didactique de mathématiques**, v. 10, n. 23, 1990, p.133-170.

_____. Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la representation. **Les sciences de l'éducation**, v. 1, n. 3, 1993, p. 9-16.

_____. Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In: P. TAVIGNOT (eds). **Vingt ans de didactique des mathématiques em France**. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1994.

ANEXOS

ANEXO A

SITUAÇÃO DE ENSINO PROPOSTA APÓS REFORMULAÇÕES

A tabela que segue apresenta as tarefas da situação de ensino, após a aplicação piloto, com as reformulações e complementações propostas:

TAREFA	TAREFA ORIGINAL	COMPLEMENTAÇÕES E/OU REFORMULAÇÕES
1	<p>Solicitar que os problemas de adição a seguir sejam resolvidos mentalmente. Solicitar que os dedos sejam utilizados como auxílio de forma que as somas superiores a 10 compreendam duas mãos com dez primeiros dedos abaixados e os demais dedos (que excedem a dez) ficam elevados. O primeiro termo (parcela) da adição será colocado numa das mãos a partir do dedão e o segundo termo (parcela) da adição será colocado em seguida. Este segundo termo será sempre decomposto em duas partes, a e b, sendo que ‘a’ completará o primeiro termo até atingir 10, colocado na seqüência, a partir da primeira parcela, e ‘b’ seguirá na última mão cujos dedos foram abaixados, sendo agora levantados a partir do minguinho.</p> <p>a) Tenho 9 figurinhas e ganhei 2 do meu amigo. Com quantas figurinhas fiquei?</p> <p>Valores propostos: $5 + 6$, $4 + 7$, $3 + 8$, $2 + 9$ todos totalizando 11; $6 + 6$, $5 + 7$, $4 + 8$ e $3 + 9$ totalizando 12; $5 + 8$, $4 + 9$ e $6 + 7$, totalizando 13; $5 + 9$, $6 + 8$ e $7 + 7$ totalizando 14; $6 + 9$ e $7 + 8$ totalizando 15.</p>	<p>Solicitar tanto a escrita do numeral como a identificação dos grupos de dez formados nos algarismos da representação arábica e nas partes das palavras que expressam as somas resultantes</p>

2	<p>Solicitar que os alunos resolvam os problemas de adição mentalmente, utilizando os dedos cardinalizados porém com a seguinte diferença: as crianças deverão realizar as adições colocando numa das mãos um dos termos da adição e na outra mão o outro termo. Porém, o que será colocado, de cada um dos termos em cada mão, será somente a parte que excede a 5. Isso significará que cada termo da adição será decomposto em duas partes “a” e “b” e “a” e “b₁” sendo a = 5. Será colocado em cada mão somente a parte “b” e “b₁” de cada parcela. A soma obtida será dita como igual a 10 e “b” + “b₁”.</p> <p>Exemplificando: $7 + 9 \therefore 7 = 5 + 2$ e $9 = 5 + 4$ Numa mão 2 e em seguida 4, totalizando 6. O resultado de $9 + 7$ será dito 10 e 6 e em seguida a palavra dezesseis.</p> <p>a) Tenho 9 figurinhas e ganhei 7 do meu amigo. Com quantas figurinhas fiquei? Demais valores propostos: $8 + 8$ também totalizando 16; $9 + 8$ totalizando 17 e $9 + 9$ totalizando 18.</p>	<p>Solicitar tanto a escrita do numeral como a identificação dos grupos de dez formados nos algarismos da representação arábica e nas partes das palavras que expressam as somas resultantes</p>
3	<p>Os seguintes valores serão comparados: 12 e 15; 107 e 109; 17 e 19; 112 e 121; 22 e 32; 232 e 222; 29 e 45; 240 e 340; 120 e 67; 1147 e 147. Para cada par comparado solicitar justificativa.</p>	<p>Questões que podem ser incluídas nas tarefas da prova:</p> <p>Uma outra criança me disse que um número é maior se tiver mais algarismos. Isto é válido sempre? O que acontece se acrescentarmos um zero à esquerda de um número? E se acrescentarmos um zero à direita?</p> <p>Quando dois números apresentam diferenças em um ou dois algarismos da representação quem determina a maioridade? Teste a conclusão com os seguintes numerais: 425 e 325, 53 e 43, 57 e 59, 432 e 422, 432 e 423.</p> <p>Quantos grupos de cem têm cada um dos numerais: 342, 567, 254 e 109.</p> <p>Quantos grupos de 10 têm cada um dos numerais: 45, 39, 98, 100, 109, 117, 142, 200, 207, 215 e 234.</p> <p>Será importante, no momento da prova, explorar as hipóteses lançadas apresentando exemplos e contra-exemplos que possam corroborá-las ou refutá-las. Nesse caso diz-se: “uma outra criança me disse que...” Nessa prova o aproveitamento, de contra-argumentos evidencia a estrutura do SND no que diz respeito ao valor posicional. A prova é riquíssima para evidenciar os agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos representados pelos algarismos de acordo com a sua posição no numeral.</p>

4	<p>Solicitar que as crianças selecionem, dentre os preços apresentados, 45, 10, 40, 60, 25 e 85 o preço de cada pacote de balas, sabendo que cada pacote contém: 4, 26, 62, 30, 12 e 40 balas cada um.</p> <p>Solicitar que elas argumentem a respeito das próprias escolhas e das escolhas dos colegas.</p> <p>Selecionar dentre os argumentos, as funções dos termos e o caráter operatório dos prefixos e dos sufixos.</p>	<p>A tarefa permite ainda explorar a ordenação em torno dos grupos de 10 ou de 100.</p>
5	<p>Solicitar que as crianças formem com os algarismos 1, 2 e 3, todos os números com 2 e 3 algarismos possíveis. Em seguida solicitar que os números formados sejam colocados em ordem apresentando argumentos a respeito.</p>	<p>A tarefa permite explorar o valor relativo dos algarismos. As seguintes perguntas podem ser incluídas:</p> <p>Por que 321 é maior que 312? Qual dos algarismos permite identificar que 321 é maior que 312? Que tipos de grupos definem o algarismo 3 do numeral? Que tipos de grupos definem o algarismo 2 do 321? Quantos grupos de 10 são determinados pelo algarismo 2 do 321? E pelo algarismo 1 do 312? Qual dos algarismos dos numerais 231 e 213 permite determinar que 231 é maior que 213: o algarismo da esquerda, o algarismo do meio ou o algarismo da direita? O que significa o 3 do 231? Que tipos de grupos ele define?</p> <p>Outros algarismos podem ser propostos para a formação de números inclusive o zero. Os números solicitados podem ser de dois, três e quatro algarismos. Será importante também solicitar que sejam identificados os grupos de 10 nas centenas que compõem os números e no número como um todo, de forma que as dezenas, presentes nas centenas, sejam somadas com as demais dezenas do número identificadas nos algarismos do numeral que o representa.</p>
6	<p>Solicitar que as crianças estabeleçam qual a melhor posição para colocar um determinado algarismo num número de 2 algarismos para que se tenha o maior número possível. Solicitar que elas argumentem a respeito, em cada caso, até que se possa elaborar uma conclusão.</p> <p>a) 45 e o algarismo 3 b) 27 e o algarismo 3 c) 52 e o algarismo 3</p> <p>Associar a posição do algarismo em relação aos agrupamentos e agrupamentos de agrupamentos, isto é, quando eles se tornam dezenas e quando eles se tornam centenas.</p> <p>Evidenciar os prefixos e sufixos das palavras que representam os números formados também em relação às dezenas e centenas.</p>	<p>Após a realização da tarefa foi possível identificar os seguintes encaminhamentos a serem propostos:</p> <p>Solicitar que o algarismo a ser colocado seja identificado com o tipo de grupo que ele passa a representar de acordo com a posição no numeral.</p> <p>Visto que o algarismo transforma o número em um número 10 vezes maior, solicitar que o algarismo da esquerda seja comparado com o algarismo a ser colocado. Passar para o algarismo imediatamente à direita e ir comparando com o algarismo a ser colocado de acordo com seu valor relativo.</p> <p>Incluir o zero a ser intercalado em um numeral com dois algarismos e em um numeral com 3 algarismos. Solicitar uma generalização a respeito do zero.</p>

7 8	<p>Solicitar que as crianças alterem os preços das mercadorias apresentadas abaixo em 10 reais a mais. R\$ 30,00; R\$ 123,00; R\$ 52,00; R\$ 102,00; R\$ 1435,00</p> <p>Solicitar que elas procurem verificar algum padrão de regularidade buscando uma explicação para tal regularidade. Solicitar que as crianças alterem os preços das mercadorias em 10 reais a menos. R\$ 30,00; R\$ 123,00; R\$ 52,00; R\$ 102,00; R\$ 1435,00</p> <p>Solicitar que elas procurem verificar algum padrão de regularidade buscando uma explicação para tal regularidade.</p>	<p>Convém reunir a tarefa 7 com a 8, e propor ora acréscimos e ora retiradas Os seguintes encaminhamentos são aconselháveis: Apresentar primeiro somente numerais com dois algarismos e direcionar a observação ao algarismo que se altera, refletindo sobre a sua posição no numeral, no seu valor relativo e nas 10 unidades somadas (ou subtraídas). Apresentar os numerais com 3 algarismos e 4 algarismos para os acréscimos (ou retiradas) das 10 unidades. Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 20, 30, 40, etc., unidades centrado a atenção no número de grupos de 10 que se formam e na alteração do algarismo da casa das dezenas a partir desses acréscimos. Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 100 unidades apresentando numerais de três algarismos, direcionando a observação ao algarismo que se altera; refletir sobre a sua posição no numeral, o seu valor relativo e as 100 unidades somadas. Apresentar os numerais com 3 algarismos e 4 algarismos para os acréscimos das 100 unidades. Solicitar acréscimos (ou retiradas) de 200, 300, 400, etc., unidades centrado a atenção no número de grupos de 100 que se formam e na alteração do algarismo da casa das centenas a partir desses acréscimos.</p>
9	<p>Solicitar que as crianças calculem o número de fitas adquiridas por uma vídeo-locadora que tinha inicialmente 13 fitas e adquire 10 fitas por semana: a) ao final de 3 semanas b) ao final de 8 semanas c) ao final de 10 semanas. Solicitar que argumentem sobre os procedimentos adotados para encontrar o resultado. Solicitar que seja calculado o número de fitas que tinha uma vídeo-locadora que adquiriu 84 fitas ao final de 8 semanas.</p>	<p>Centrar a atenção nos grupos de 10 formados e na alteração do algarismo no numeral de acordo com a sua posição. Propor um outro enunciado em que os acréscimos sejam de 100 unidades.</p>
10	<p>Solicitar que as crianças indiquem o que deve ser feito para aparecer um zero no lugar dos algarismos determinados: a) no lugar do 8 do 1872 b) no lugar do 7 em 175 c) no lugar do 3 em 143 Solicitar que elas argumentem sobre os procedimentos adotados e sobre conclusões que se tornaram possíveis. Solicitar que as crianças indiquem o que deve ser feito para transformar 6275 em 6075, em 6205 e em 6270. Fazer o mesmo para transformar o 4444 em 4440, em 4404 e em 4044.</p>	<p>Em primeiro lugar identificar com a criança o valor relativo do algarismo no numeral para em seguida refletir com ela que operação matemática deveria ser realizada com este valor relativo de modo a zerar a casa ocupada pelo algarismo.</p>

