

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

**Estudo das Elaborações dos Professores
sobre o Conceito de Medida em atividades de ensino.**

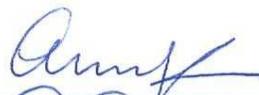
Autor: **Micheline Riscallah Kanaan da Cunha**
Orientador: **Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura**

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por
Micheline Riscallah Kanaan da Cunha e aprovada pela
Comissão Julgadora.

Data: 25/02/2008

Assinatura: 
Orientador

COMISSÃO JULGADORA:



Rosângela Fernandes

Leonardo
Jorge Megid Neto

Ano 2008

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca
da Faculdade de Educação/UNICAMP**

C914e	Cunha, Micheline Rizcallah Kanaan da. Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino / Micheline Rizcallah Kanaan da Cunha. -- Campinas, SP: [s.n.], 2008.
	Orientador : Anna Regina Lanner de Moura. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.
	1. Medidas. 2. Atividades de ensino-aprendizagem. 3. Educação matemática. 4. Conceitos. 5. Pensamento. I. Moura, Anna Regina Lanner de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.
	08-014/BFE

Título em inglês : Studies of the teacher's elaboration about the measurent concept in teaching activities.

Keywords : Measurements; Teaching-learning activity; Mathematical education; Concepts; Thought.

Área de concentração : Educação Matemática

Titulação : Doutora em Educação

Banca examinadora : Prof^a. Dr^a. Anna Regina Lanner de Moura (orientadora)

Prof^a. Dr^a. Maria do Carmo de Sousa

Prof^a. Dr^a. Regina Célia Grando

Prof. Dr. Jorge Megid Neto

Prof^a. Dr^a. Marisa Dias

Prof^a. Dr^a. Dione Luchesi de Carvalho

Data da defesa: 25/02/2008

Programa de Pós-Graduação : Educação

e-mail : mlkc@uol.com.br

DEDICATÓRIA

Aos meus Pais, Georgette e Rizkallah

(in Memoriam)

Ao meu amado filho Giancarlo

À Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura.

Ao Prof. Luciano de Castro Lima

Aos meus irmãos, Antoinette, Liliane, e Roukouz,

Pierre *(in Memoriam)*, Antoine *(in Memoriam)*

AGRADECIMENTOS

Ao senhor que me deu a capacidade de pensar e medir.

À Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura por ensinar-me com seus ilimitados conhecimentos e dedicação, pelo respeito às minhas limitações, pelo seu rigor que me permitiu avançar e crescer e por me fazer entender que a educação humaniza e liberta.

As professoras – aluna da disciplina Fundamentos de Matemática que tornaram este trabalho possível e muito me ensinaram.

Ao meu eterno amigo e irmão Francisco (Chico) pela presença constante, pela paciência, ajuda, leitura e formatação da tese.

Ao Prof. Luciano de Castro Lima, incansável educador e pesquisador.

À Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa pelas valiosas contribuições e sugestões de leitura

À Profa. Dra. Celi Lopes pela leitura e incentivo

Ao grupo PRAPEM educadores e alunos em especial à Profa. Dra. Dione Luchesi e ao Prof. Dr. Dario Fiorentini, e a Marisol pela amizade e incentivo

Aos professores Dra. Angela Miorim, em especial ao Prof. Dr. Antonio Miguel pelas valiosas contribuições.

À Profa. Dra. Elisabeth Barolli pelas sugestões e amizade.

Ao Prof. Dr. Oriosvaldo de Moura pelas contribuições.

À Faculdade de Educação pela valiosa oportunidade que tive de ministrar aulas.

À secretaria da pós-graduação em especial a Nadir e Gislaine.

À Rosa Maria da pós-graduação pelas preocupações e constante incentivo.

Ao eterno grupo Caraça: Anna Regina, Luciano, Ori, Esther, Maria do Carmo, Dulce, Érica Catalani, Roberto Moisés, Rose, e em especial a Marisa Dias pela leitura e sugestões.

Ao grupo de pesquisa Educação Matemática Conceitual: Anna Regina, Fabiana, Rute, Leila, Esther, Érica Ferreira, Érica Catalani, Natália, Maria do Carmo e em especial a Miriam, pela disposição, ajuda e incentivo.

A Alaíde por sua paciência, ajuda em casa, carinho e por incentivar-me.

RESUMO

Esta pesquisa constitui-se num estudo de caráter qualitativo das elaborações de professores do nível fundamental, relacionadas ao conceito de medida. Foram assumidos como referência teórica para este estudo os autores como Kopnin (1978), Davýdov (1982), Kosik (2002), Leontiev (1989). Para a elaboração das atividades de ensino foram considerados os autores: Caraça (2003), Leontiev(1983), Aleksandrov (1988), Ribnikov (1987), Dantzig (1970), Hogben (1970), Lanner de Moura(1995, 2001, 2002, 2003) e Moura (1998,2000,2001) e Lima & Moisés (1998). As atividades enfocaram os nexos conceituais da medida como: qualidade-quantidade, grandeza, discreto-contínuo e unidade que se supõe aprofundar o conceito além de seus aspectos perceptíveis, tendo por pressuposto serem esses temas necessários para o desenvolvimento do pensamento e linguagem da medida. A pesquisa foi desenvolvida, durante 12 aulas, do semestre letivo de um Curso de Pedagogia, do período noturno, na cidade de Campinas. Os dados resultaram da transcrição de atividades de ensino, dos portfólios elaborados pelos professores e do registro do pesquisador que atuou como professor no período da pesquisa. A análise dos dados é feita tendo por referência os nexos conceituais da medida sobre as elaborações feitas pelas professoras, focalizando suas características empírico-teóricas segundo os autores de referência. Os resultados indicam o progresso nas elaborações com características empíricas iniciais para características teóricas do aspecto prático da medida, ao término das atividades. Este estudo pretende fornecer contribuições para a reflexão dos professores sobre o ensino de medida nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Palavras chaves: medida, nexos conceituais, pensamento empírico e teórico, atividades de ensino, educação matemática conceitual.

ABSTRACT

This research constitutes itself to a study of qualitative character of the elaborations of professors of the fundamental levels, related to the concept of measurement. The assumption of certain theoretical references for this study came from authors such as Kopnin (1978), Davydov (1982), Kosik (2002), Leontiev (1989). For the elaboration of teaching activities, the consideration of authors like: Caraça (2003), Leontiev(1983), Aleksandrov (1988), Ribnikov (1987), Dantzig (1970), Hogben (1970), Lanner de Moura (1995, 2001,2002,2003) and Moura (1998,2000,2001) and Lima & Moisés (1998) were dispensed. These activities enforced the conceptual connections of measurement such as: quality vs. quantity, size, discretion vs. continuity and unity which is going to deepen the concept beyond the aspects perceptible to students, having these assumptions will be necessary in order to develop the process of thought and language of measurement. This research was developed during five classes, within the academic semester of a nocturnal class on pedagogy within the city of Campinas. The data resulted in the transcription of teaching activities, the portfolios elaborated by professors and the recording of the researcher who acted as teacher during this period of research. The analysis of the data was done having as reference the connected concepts of measurement about the elaborations done by the professors focusing on the characteristics of empirical-theoretical though second to the authors stated above. The results point towards the progress of elaboration with characteristics initially empirical for the characteristics theories with aspects on the practice of measurement, in terms of the activities. This study is meant to establish a contribution to the reflections of professors on the subject of teaching measurement in the initial years of the initial studies.

Key words: measurement, concepts nets, empiric and theoretical though, leanings activities, conceptual mathematics education.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	01
2. A IMPORTÂNCIA DO CONCEITO DE MEDIDA.....	11
2.1 O lógico-histórico da medida na escola.....	14
3. ENCONTRO COM AS TEORIAS	21
4. O CAMINHO QUE PERCORREMOS.....	35
4.1 Sujeitos da pesquisa.....	38
4.2 Dinâmica das aulas	39
4.3 Os dados da pesquisa	41
4.4 Análise dos dados	41
4.5 A atividade orientadora de ensino e pesquisa.....	42
4.6 Desenvolvimento das atividades de ensino e pesquisa.....	44
4.7 Descrição dos dados	46
4.7.1 Descrição dos dados do Primeiro Momento	46
4.7.1.1 Etapa A: “PERFIL PROFISSIONAL”	46
4.7.1.2 Etapa B - Descrição da segunda etapa do primeiro momento: conhecimento inicial das professoras-aluno e de sua prática sobre o conhecimento da grandeza	47
4.7.2 Descrição dos dados do Segundo Momento	47
5. DISCUSSÃO DOS DADOS DO PRIMEIRO E DO SEGUNDO MOMENTO.....	57
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	101
BIBLIOGRAFIA	107
ANEXOS	113
Anexo 1	115
Anexo 2	117
Anexo 3	119
Anexo 4	121

Anexo 5	123
Anexo 6	125
Anexo 7	127
Anexo 8	129
Anexo 9	133

1. APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa tem origem nas reflexões geradas pelas experiências adquiridas ao longo de trinta anos de magistério como professora em diferentes níveis de escolaridade, (do fundamental ao terceiro grau, em cursos diversos e em formação de professores) e pelos estudos de pesquisas que tratam sobre a formação do pensamento matemático.

Minhas concepções sobre o entendimento dos conceitos matemáticos e sobre o processo do que ‘é ensinar e aprender matemática’ e sua importância para a vida do indivíduo sofreram radicais mudanças quando por ocasião do Doutorado, na volta à Universidade. Nesse período tive a oportunidade de conviver com o grupo de pesquisa “Educação Matemática Conceitual”. Essa convivência possibilitou diversos estudos sobre a prática do professor e sua relação com a formação do pensamento matemático tanto para quem ensina como para quem aprende. Outras mudanças que ocorreram foram em relação aos conceitos matemáticos. O conceito era por mim entendido como uma lei que rege o entendimento matemático formal, imutável, distante da realidade do indivíduo, algo pronto e indiscutível. Conforme Lanner de Moura (2003), entendo que o conceito “compõe a atividade humana e se encontra no nosso cotidiano, seja na estruturação do espaço que habitamos, nas máquinas que manipulamos, seja nas relações sociais, políticas e econômicas que estabelecemos para a vida conjunta e para a produção”.

Pesquisas como Lanner de Moura (1995), Sousa (2004), Dias (2004), Prado (2002), Catalani (2002) e Ferreira (2005) são alguns dos estudos que tratam sobre a aprendizagem matemática conceitual e que contribuíram para minha formação.

O grupo de Educação Conceitual tem como um dos pressupostos de formação e pesquisa que:

A educação conceitual não é um fato que acontece aleatória, permanente e espontaneamente a todo e qualquer momento, em função do simples uso do conceito. Trata-se de um momento especial, de um momento intencionalmente planejado (LANNER DE MOURA, 2003, p. 2).

Nesta tese buscamos investigar as elaborações, dos professores que atuam com as crianças do nível fundamental, em relação ao conceito de medida.

Conforme Lanner de Moura (2003):

qual seria o conceito matemático possível para a criança e como ele se relacionaria com o desenvolvimento do pensamento-linguagem-afetividade, sobre o mundo em que ela vive? (grifo nosso) Residiria neste desenvolvimento uma compreensão não fragmentada do saber pensar e do saber fazer o conceito matemático? (LANNER DE MOURA, 2003, p.3).

Entende-se que um conceito possível para a criança, das primeiras séries do ensino fundamental, aprender pode ser o de medida, seja pela presença da medida em sua vida, seja por suas características desencadeadoras, conforme Davidov (1982), para o pensamento matemático e, conseqüentemente, para a compreensão do conceito de número, dos campos numéricos, de outros conceitos matemáticos e na relação destes com o entendimento científico do mundo. Daí a relevância deste tema para a formação do professor que ensina a criança, já que ele é um dos principais elementos do processo ensino e aprendizagem.

Nossa experiência como docentes comprova que no ensino da medida, na escola, é enfatizada a manipulação mecânica, o pronto e o acabado e ignora-se, conforme Lanner de Moura (2003, p. 4), “o desenvolvimento histórico do conceito. A manipulação mecânica não garante a assimilação do conceito”.

O conceito de medida vem se modificando ao longo da história da humanidade em função do contexto histórico social. Com relação a outros conceitos fundamentais da matemática o conceito de medida é ao mesmo tempo conceito gerado e conceito gerador de outros conceitos: é um conceito gerado pela confluência de conceitos ou nexos conceituais, como a qualidade, quantidade, grandeza e unidade; é um conceito gerador de outros conceitos como a fração e os números racionais.

Tendo-se em conta a importância do ensino deste conceito desde as primeiras séries do ensino fundamental optamos por investigar como os professores que atuam nestas séries tratam o conceito de medida. Buscamos com esta pesquisa investigar a questão: “*Quais elaborações os professores produzem ao vivenciar atividades de ensino sobre medidas?*”

Conforme Lanner de Moura (2001) “por elaborações entendemos as manifestações do pensamento sobre os conceitos quer orais ou escritas.” Para esta autora a aprendizagem do conceito envolve:

Discutir o conceito pretende ser um aprofundamento de seu movimento de criação na história humana buscando encontrar elementos pedagógicos tensionadores, da (re) criação conceitual em quem ensina e em quem aprende; ao entender que o elemento tensionador é determinante para estabelecer uma relação subjetiva do sujeito, com o conceito. (LANNER DE MOURA, 2003, p. 6).

Para melhor compreensão das elaborações dos professores, sobre o conceito de medida, nos amparamo-nos nas teorias de autores como Kopnin (1978) e Kosik (2002), mas, sobretudo, nas teorias de Davidov (1982) cujos estudos tratam das formas de pensamento e seu papel no conhecimento. Segundo esses autores o pensamento é o movimento das formas das atividades da sociedade historicamente constituídas e apropriadas pelos homens e é na filosofia e na dialética que se formam o conceito sobre os tipos de pensamento humano e sobre as condições históricas de seu desenvolvimento.

Davidov (1982), tendo por base os fundamentos de Kopnin (1978) e Kosik (2002) afirma que do ponto de vista da didática, o ensino e a educação são elementos indispensáveis para o desenvolvimento das capacidades dos estudantes.

A parte prática desta pesquisa desenvolveu-se em 12 aulas da disciplina de Fundamentos do Ensino da Matemática de um curso de graduação, numa Universidade na Cidade de Campinas. Os trinta e cinco alunos desse curso já atuavam como professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. Dentre eles selecionamos como sujeitos de pesquisa, treze alunas, por estarem mais freqüentes às aulas, e que para esta pesquisa estamos denominando de “professoras-aluna”¹ ou professora. Na sala de aula pesquisada optamos por intervir como professora ao propor atividades que possibilitassem aos professores reflexão e elaboração sobre o conceito de medida na dinâmica *indivíduo-grupo-classe* (Ferreira, 2005). O enfoque da pesquisa é qualitativo. Esta natureza de pesquisa possibilita a modalidade que assumimos de atuar como professora e pesquisadora.

Os dados da pesquisa foram construídos mediante registros escritos dos alunos nos desenvolvimento das atividades, nos portfólios e nos registros escritos da professora pesquisadora e das discussões orais dos grupos. A faixa etária dos professores pesquisados variava entre 24 e 50 anos. A maioria egressa do curso do magistério e já tendo lecionado no ensino fundamental.

Propomos aos professores atividades que foram trabalhadas em situações de ensino, nas quais foi-nos possível explorar a qualidade de educar do conceito de medida. As atividades de pesquisa foram adaptações do livro de Lima & Moisés (1998) e complementadas pelas teorias de autores como Caraça (2003), Leontiev (1978), Moura (2000, 2001), Alekxandrov (1975), Ribnikov (1987, Dantzig (1970) e Hogben (1970).

¹ Todos os participantes da pesquisa são do sexo feminino.

A qualidade de educar o conceito de medida envolve reflexão sobre a elaboração e desenvolvimento das atividades. Essa reflexão implica primeiramente um planejamento, um processo mental que possibilite e justifique o procedimento experimental. Por meio da atividade, segundo Lanner de Moura (2003) “o ser humano constrói imagens abstratas de suas ações antes mesmo de realizá-las com as mãos”.

Pelo processo da atividade, a necessidade, inicialmente apenas sentida, passa a ser conhecida em forma de conceito. A interação com o conceito, por sua vez, pode gerar novas necessidades. O conceito é tanto um ponto de partida quanto um ponto de chegada da atividade, a diferença consiste na nova qualidade para a qual se amplia, como resultado de novas atividades. (LANNER DE MOURA, 2003, p.5).

Uma mudança na abordagem dos conceitos científicos na escola pode proporcionar ao aprendiz condições de reunir com mais propriedades variáveis da realidade em que vive, podendo intervir sobre elas e, nesse sentido, destituir-se de explicações mágicas ou místicas como as que são caracterizadas pelo senso religioso, ou as do senso comum.

Conforme Sousa (2004):

A sociedade admite que, realmente, aprender a lógica contida nos conceitos matemáticos é muito difícil. Apenas algumas pessoas têm e terão o privilégio de compreender tais conceitos. Preocupamo-nos com o como ensinar e o como aprender matemática, porém, não proporcionamos momentos de reflexões, a partir de vivências e análises de atividades de ensino, pelas quais estudantes e professores possam pensar sobre as diversas concepções de mundo que interferem no nosso modo de conceber a matemática. Não falamos da vida a partir dos conteúdos matemáticos e ignoramos a vida que pulsa nos conceitos matemáticos que ensinamos.

Esquece-se que por trás de toda representação lógica matemática, há uma história. Há vida a pulsar. Há o humano. Há o movimento da palavra, da figura e do número. (SOUSA, 2004 p.4 e 5).

Segundo Davidov (1988) para se aperfeiçoar o sistema de ensino escolar, é necessário compreender as questões pedagógicas da inter-relação entre os conceitos “conhecimentos”, “pensamento” e “ensino”.

Os problemas do ensino e da educação estão relacionados com a fundamentação da estruturação das disciplinas escolares. O conteúdo destas e os meios para entendê-las no processo didático-educativo, determinam, essencialmente, o tipo de consciência e de pensamento que se forma nos escolares durante a assimilação dos correspondentes conhecimentos, atitudes e hábitos. (DAVIDOV, 1988, p.1).

Davidov (1988), no estudo que faz da didática tradicional, conclui que esta tem uma abordagem empírica da formação dos conceitos na escola e afirma que para superar esta tendência empirista é necessário que o ensino tenha a função de propiciar mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento do aluno em vistas do pensamento teórico. E a tal pressuposto aliamos o ensino do conceito de medida.

As sensações provenientes do contato externo com o objeto, segundo Davidov (1988), possibilitam ao indivíduo os pensamentos empíricos. O pensamento empírico é descrito pela lógica formal a qual não delimita o processo percepção- abstração- conceito como pertencente a um tipo particular de conceito, mas como um sinônimo de qualquer forma de aquisição de conhecimento. O pensamento empírico se caracteriza por uma relação cotidiana, utilitária da realidade. Davidov considera que “o esquema lógico formal integrador do conceito afeta a generalização e abstração quando formado só de propriedades extrínsecas observáveis, sensorialmente dadas de objetos singulares” (DAVIDOV, 1988, p.68).

O cultivo do pensamento empírico, de acordo com Davidov (1988) não favorece aos alunos o desenvolvimento de outro tipo de pensamento. Devido a isso muitos alunos assimilam com dificuldade os conhecimentos. O ensino escolar deve ser orientado a desenvolver nos estudantes o pensamento teórico, caracterizado pela reprodução mental das múltiplas relações que constituem um conceito ou objeto de aprendizagem.

Os pensamentos empíricos e teóricos são manifestações de generalizações do conhecimento às quais denominamos de empíricas ou teóricas segundo a profundidade e a multilateralidade do conhecimento que elas representam. A construção do pensamento teórico sobre os fenômenos do mundo está relacionada aos conhecimentos científicos, pois esses em seu processo de construção histórica sintetizam as atividades realizadas para a sua formação e que foram movidas pelas necessidades histórico-culturais das civilizações que lhe deram origem.

A essência do pensamento teórico consiste num procedimento especial com o qual o homem enfoca a compreensão das coisas e dos acontecimentos por via da análise e das condições de sua origem e desenvolvimento o que gera a importância da história do conhecimento que é tratado na escola. A dinâmica da história de criação do conhecimento científico revela o modo de pensar e a necessidade cultural pela qual ele é criado. O contato com esta dinâmica permite entender em sua profundidade, ou seja, conferir significado de falibilidade e de concretude

histórica ao seu formalismo, aparentemente, inviolável e impenetrável à compreensão do iniciante.

A apropriação dos múltiplos significados do conceito não acontece na tradução de seu significado cotidiano para sua representação científica. Sob este ponto de vista, afirma Kopnin que “a passagem do nível empírico ao teórico não é uma simples transferência de conhecimento da linguagem cotidiana para a científica, mas uma mudança de conteúdo e forma do conhecimento.” (KOPNIN, 1978, p. 24). Para Davidov “a diferença de conteúdo entre o pensamento empírico e o teórico gera a diferença de suas formas.” (DAVIDOV, 1982, p. 130). As dependências empíricas podem ser descritas verbalmente como resultado das observações sensoriais.

Enquanto o pensamento empírico compara, classifica, cataloga objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise de suas relações no sistema integral. (DAVÍDOV, 1982, 154).

O pensamento teórico da medida envolve o pensamento de nexos conceituais. Os nexos conceituais de acordo com Lanner de Moura (2003) são conceitos dos quais o conceito em estudo é uma nova síntese. Os nexos conceituais são por sua vez caracterizados por nexos internos e externos ao conceito. Os nexos internos do conceito são históricos, envolvem o contexto social, político e o econômico que lhe deram origem. Os nexos externos do conceito, por sua vez, estão relacionados à sua representação, à linguagem formal do conceito.

Para esta pesquisa, no caso da medida, consideramos tanto a ação ou o ato de medir como a expressão numérica de seu resultado os nexos externos ao conceito. As relações de comparação, que se estabelecem entre objetos, sob os aspectos quantidade, qualidade, grandezas, unidades, discreto e contínuo, diferentes linguagens da medida são consideradas seus nexos internos.

A elaboração dos nexos conceituais dos aspectos discreto e contínuo da realidade a ser contada, discutida por Aleksandrov (1975), de unidade e de grandeza, conforme aborda Caraça (2003) é fundamental para o entendimento de como aplicar o pensamento da medida aos movimentos quantitativos dos fenômenos do mundo em que vivemos. As relações entre contar e medir, número e forma, aritmética e geometria aparecem mais esclarecidas quando esses nexos são trabalhados a partir de uma reflexão mais ampla dos significados de medir os fenômenos.

Conforme os autores de referência, anteriormente citados, os nexos conceituais são considerados unidades dialéticas formadas por pares que embora tenham diferentes significados

interdependem e implicam um no outro. É o caso do par qualidade- quantidade. A qualidade é um atributo que surge na comparação entre objetos. A comparação em termos de qualidade fica mais bem determinada quando se traduz em termos de quantidade. São as expressões do tipo mais que ou menos que fornecem as noções quantitativas dessa relação.

A medida é uma unidade dialética do pensamento caracterizada pelos aspectos da grandeza e da unidade em que a escolha de uma implica na determinação da outra: a escolha da grandeza a ser medida implica na natureza da unidade que a mede

Conforme LANNER DE MOURA (2005, p.1)

Entende-se ser importante o professor re-significar, para si, os nexos conceituais do conceito de medida de forma a poder desenvolver sua autonomia em elaborar atividades para que este tema desafie a criança para o controle numérico da variação quantitativa de diferentes grandezas.

Quando as ações de medir definidas por Caraça (2003) em: a seleção da unidade; a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica da comparação, são intencionalmente planejadas, se esclarecem os significados das inter-relações matemáticas do conceito de medida e a necessidade de construir o rigor da mesma.

O pensamento resultante desses entendimentos deverá ser o de generalização do conceito de medida como um dos conteúdos do pensamento teórico sobre a realidade, segundo discute Davidov (1982). Este conteúdo é teórico, quando ao aprender o conceito, é dada a possibilidade de elaborar generalizações deste que abrangem não só seu modo de aplicação, mas, também, seu modo de pensar a realidade e de construir o progresso no sentido do ser humano destituir-se do desconhecimento da realidade natural e social em que vive.

Para o estudo das relações entre as elaborações das professoras e dos conceitos que confluem para o entendimento de medida optamos por subdividir esta pesquisa em seis partes ou capítulos.

No primeiro procuramos justificar a relevância da escolha do tema; estudamos a influência dos diferentes conceitos de medidas para o desenvolvimento dos povos orientais e ocidentais; a problemática; o objetivo e a questão que deu origem a este estudo.

No capítulo II estudamos a evolução dos conceitos de medida e da importância da relação destes com a evolução do pensamento da humanidade e das civilizações.

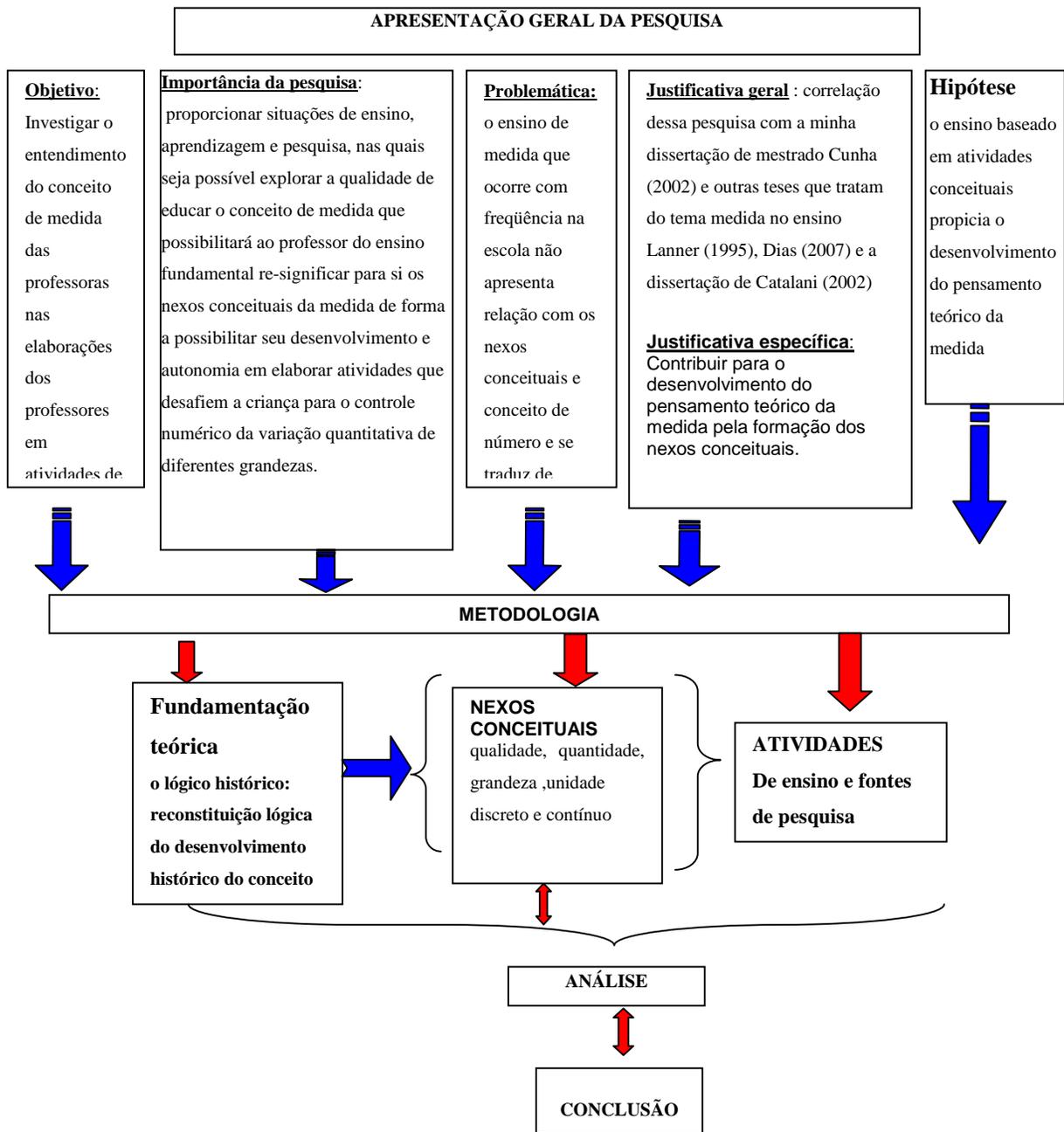
O capítulo III, por nós denominado de Encontro com a Teoria trata, das teorias que nos forneceram subsídios, à luz das discussões teóricas de Davidov (1982), Kopnin (1978), Moura

(2000,2001), Leontiev(1983) e Kosik (2002). Nele é feito um breve estudo dos pressupostos lógico-históricos do conhecimento de acordo com os autores de referência, da Teoria da Atividade de Leontiev e da Teoria Orientadora de Ensino de Moura (2001). Estudamos ainda, neste capítulo, a importância do conhecimento dos nexos conceituais para o conhecimento de medida.

O capítulo IV, que chamamos de O Caminho que Percorremos, constitui-se na Metodologia e nele descrevemos os sujeitos; o desenvolvimento das atividades de ensino e de pesquisa e os dados de todos os momentos da pesquisa, maneira como foram registrados os dados da pesquisa, as atividades e seu desenvolvimento das atividades propostas, pelos alunos.

A discussão dos dados, ou a análise, é tratada no Quinto capítulo. Nele analisamos os dados obtidos na pesquisa. A Conclusão da pesquisa é feita no capítulo VI.

Apresentamos a seguir um mapa representativo da seqüência dos itens da pesquisa



No capítulo II a seguir estudamos como ocorreu o desenvolvimento histórico do conceito de medida.

2. A IMPORTÂNCIA DO CONCEITO DA MEDIDA

*“O homem é a medida de todas as coisas”
Protágoras*

A história da humanidade documenta a importância do pensamento de medida com relação às contribuições que este conceito trouxe para o desenvolvimento do pensamento da humanidade. Vários foram os autores que se dedicaram ao estudo da influência do conhecimento de medida com relação ao conhecimento do mundo, e entre eles, destacamos os estudos dos autores Bohm (1980), Crosby (1997) e Silva (2004).

Nas primeiras fases do desenvolvimento das civilizações, de acordo com Bohm (1980), as concepções do homem, sobre a realidade, eram essencialmente de totalidade e não de fragmentação. Essa concepção de totalidade sobrevive até hoje no Oriente, onde a Filosofia e a religião enfatizam uma visão pessoal de mundo dirigida para o imensurável. Na sociedade ocidental essa concepção é fragmentária e enfatiza principalmente o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, e ambas dependem da medida. As diferenças entre as concepções orientais e as ocidentais, de realidade, estão relacionadas com a diferença entre as concepções de medida. No ocidente a noção de medida desempenha um papel fundamental na determinação da visão geral pessoal de mundo e no modo de vida implícito nessa visão.

O conhecimento de medida, para os gregos, era uma chave para o entendimento da harmonia na música, das artes visuais (proporção áurea). Para eles a noção de medida foi além da noção de comparação com um padrão externo, apontando para um tipo universal de proporção interna, percebida tanto pelos sentidos como pela mente.

Assim entre os gregos antigos, de quem derivamos uma grande parte de nossas noções fundamentais (por intermédio dos romanos), manter tudo em sua justa medida era um dos elementos essenciais para uma boa vida (as tragédias gregas retratavam o sofrimento do homem como consequência de ele ir além da medida apropriada das coisas). Com relação a isso, a medida não era considerada em seu sentido moderno, como sendo basicamente, algum tipo de comparação de um objeto com um padrão ou unidade exterior. Ao contrário este último procedimento era visto como uma espécie de exposição ou aparecimento ou manifestação exterior de uma ‘medida interna’ mais profunda, que desempenhava um papel essencial em todas as coisas. (BOHM, 1980, p 43).

Enquanto para a sociedade ocidental, a medida é a apropriada essência da realidade, no oriente é considerada, num certo sentido, como falsa e enganosa.

No oriente a noção de medida não desempenhou o mesmo papel fundamental. Na filosofia predomina o imensurável, considerado como realidade fundamental.

Muitas palavras utilizadas atualmente têm sua origem no entendimento da palavra medida. Conforme Bohm (1980), a palavra *mederi* significa ‘curar’ (a raiz da moderna palavra ‘medicina’) e deriva de uma raiz que significa medir. Isto reflete a visão de que a saúde física deve ser vista como resultado de um estado de justa medida interna em todas as partes e processos do corpo; a palavra ‘moderação’, uma das primeiras noções antigas de virtude, era considerada como o resultado de uma correta medida interna subjacente às ações e comportamentos sociais do homem; a palavra ‘meditação’ envolve uma espécie de pesagem, ponderação ou medição de todo o processo do pensamento, que pode levar a atividades internas da mente a um estado de medida harmoniosa. Portanto, física, social e mentalmente, a consciência da medida interna das coisas era vista como a chave essencial para uma vida feliz e harmoniosa.

Conforme Bohm (1980), nos tempos atuais a medida denota um processo de comparação de algo com um padrão externo, embora o significado original ainda sobreviva na matemática, na arte e em alguns outros contextos. A medida “é uma forma de insight² na essência de todas as coisas, e a percepção do homem, seguindo os caminhos indicados por tal insight, será clara, realizando assim, uma ação ordenada e uma vida harmoniosa.” (BOHM, 1980, p. 44).

A noção de medida e, portanto seu conceito foi mudando com o tempo e tornando-se mecânica. De acordo com Bohm (1980), ‘atualmente os homens aprendem a noção de medida não de modo criativo, mas de maneira mecânica, conformando-se aos ensinamentos de seus antepassados ou de seus mestres’ (grifo nosso) (BOHM, 1980, p. 45). Assim, a medida passou gradualmente a ser ensinada como uma espécie de regra que devia ser imposta a partir de fora sobre o ser humano. Como consequência as noções predominantes de medida tornaram-se como verdades absolutas sobre a realidade. O pensamento sobre medida tendeu a cair principalmente no domínio do hábito inconsciente e como resultado as formas induzidas na percepção por esse pensamento passaram então a ser vistas como realidades objetivas diretamente observadas, que

² Para Bohm (1980, p. 22), uma teoria, é basicamente, uma forma de insight (ou intuição), ou seja uma forma de olhar para o mundo, e não uma forma do conhecimento como ele é.

eram essencialmente independentes de como foram pensadas. Essa mudança afetou o pensamento do povo grego que começou a questionar a noção de medida.

Crosby (1997), em seu livro “A mensuração da Realidade”, discute o tema “a Quantificação e a Sociedade Ocidental” quando “havia mais gente pensando quantitativamente na Europa Ocidental do que em qualquer outra parte do mundo”. Esse pensamento sobre medida, que Crosby (1997) denomina de ‘Mentalité’(Crosby, 1997, p. 13), foi o responsável pelo progresso Europeu, colocando a Europa como uma das regiões mais desenvolvidas do planeta no final da Idade Média e durante o Renascimento. A mudança, na Europa Ocidental (final da Idade média e durante o renascimento), da percepção qualitativa para a percepção quantitativa possibilitou o surgimento da ciência moderna, a tecnologia, a prática comercial e a burocracia. Essa mudança foi tão profunda que afetou tanto as medições do tempo, do espaço, a técnica, a matemática, a música e a pintura.

Conforme Crosby (1997), durante o fim da Idade Média e o Renascimento despontou na Europa um novo modelo de realidade. Um modelo quantitativo foi começando a substituir o antigo modelo qualitativo. A vantagem dos ocidentais residiu não em sua ciência e tecnologia, mas em sua utilização de hábitos de pensamento que lhes deram importantes habilidades administrativas, comerciais, navais, industriais e militares.

No quadro de Pieter Bruege 1560 (A Temperança, sec. XVI), destacado no livro de Crosby (CROSBY, 1997, p.19), observa-se que a maioria das pessoas do quadro aparece empenhada em visualizar a matéria que compõe a realidade como agregados de unidades uniformes, ou como elementos de quantificação: léguas, milhas graus de ângulos, letras, horas, minutos, notas musicais. Isto é um índice segundo o qual o ocidente estava tomando a decisão de tratar o universo em termos de quantidades uniformes em uma ou mais características, quantidades estas freqüentemente consideradas como dispostas em linhas, quadrados, círculos e outras formas simétricas: Pautas musicais, pelotões de soldados, colunas de livros contábeis, órbitas planetárias.

Para Crosby (1997), o peso, a dureza e outros contrários sensíveis são quantificáveis, mas isso não está implícito nem nessas qualidades nem na natureza da mente humana.

Com relação à idéia de medida Crosby (1997), cita alguns filósofos que refletiram sobre este tema:

“vivemos em sociedades para as quais o estudo daquilo que pode ser pesado e medido é uma paixão obsedante”, temos dificuldades de imaginar uma alternativa para a nossa abordagem da realidade. (W. H. Auden).

“Quando a alma depende dos sentidos para obter informações, ela é arrastada pelo corpo para o âmbito da variável, desvia-se de sua rota e fica confusa e tonta”. (Platão)

“o matemático só mede as dimensões depois de retirar todas as qualidades sensíveis (como o peso, a leveza, a dureza, seu oposto e também o calor e o frio e outros contrários sensíveis). (Aristóteles)”.

(CROSBY, 1997, p.25-27).

2.1 O lógico-histórico da medida na escola

A formação do conceito de medida está relacionada à formação do pensamento teórico. Este, conforme Davidov (1988) implica o conhecimento de aspectos internos e externos do objeto³ já mencionados no Capítulo I.

No caso da medida, os nexos conceituais como a unidade, a qualidade, a quantidade, a grandeza, o aspecto discreto e o contínuo são considerados seus aspectos internos considerados nexos internos do conceito de medida. O ato da medição e o resultado desta são considerados nexos externos. Um dos elementos da constituição do conceito segundo os autores é a unidade dialética.

O estudo do conceito é também subsidiado pela teoria de Kopnin (1978), conforme a abordagem lógico-histórico. O conhecimento da história do conceito é de extrema importância na busca da essência como produção humana e compreensão da interação do sujeito com o seu meio.

O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve-se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento (KOPNIN, 1978, p. 186).

A escola, para os estudiosos da Educação, é o local que possibilita, aos estudantes, o ensino formal e contribui para formar nos estudantes o pensamento teórico. No entanto, de

³ Estamos utilizando, nesta pesquisa a palavra ‘objeto’ como sinônimo de conhecimento, conforme os pressupostos teóricos de Kopnin (1988) e Kosik (2002).

acordo com Davidov (1988), os conteúdos e os métodos do ensino que vem sendo trabalhados na didática tradicional, contribuem para formar nos escolares do primeiro grau, as bases da consciência e do pensamento que se caracterizam como conhecimento empírico. Este caminho, embora importante, não é o mais efetivo para propiciar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico.

A educação escolar centrada numa formação tecnicista implica o ensino com característica empírica que fragmenta o desenvolvimento do pensamento científico dos movimentos subjetivos da aprendizagem e a compreensão dos movimentos da vida e da realidade. Esse tipo de ensino, no caso da medida, não prioriza *o processo da medição, determinado por uma seqüência de ações relativas aos nexos conceituais*, prioriza sim, a técnica da medição e o seu produto final expresso como o valor numérico atribuído à medida.

Davidov (1988) afirma que para superar a pedagogia tradicional empírica, é necessário que o ensino tenha a função de propiciar mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico.

Em suas experiências, Davidov demonstrou que, para a matemática, todos os conjuntos numéricos estudados no nível fundamental estão estritamente ligados ao conceito de grandeza e de suas propriedades sendo que “o estudo das relações gerais entre as grandezas permite considerar diferentes espécies de números” (SEMENOVA, 1996, p. 4) (grifo nosso) como números naturais, inteiros relativos, racionais na representação fracionária ou decimal.

Os conceitos de grandeza e de medida, para vários autores da Educação Matemática, são conceitos articuladores para a formação dos pensamentos numéricos. Chamorro (1991) destaca a importância da construção de noção das grandezas começarem na educação pré-escolar com as ações de classificações e seriações e a necessidade de dispor de materiais variados que permitam as manipulações das crianças, em brincadeiras ou jogos coletivos, sempre mediados pelo professor.

Concordamos com Chamorro (1991) que para o ensino da medida, na educação matemática inicial, faz-se necessária a manipulação concreta com o objeto a ser medido, porém o resultado dessa ação não é suficiente para articular o pensamento numérico intrínseco ao pensamento da medida.

Lanner de Moura (2005), afirma que:

A medida está também conectada com o conceito de número, pois para comunicar o valor da medida torna-se necessário uma expressão numérica apropriada. É a partir da inter-relação espaço-número-medida que os conceitos matemáticos ficam impregnados de sentido. Durante o processo de construção do conhecimento de medida a criança experimenta concretamente a relação (espaço-medida) aplicando a extensão da unidade sobre a extensão da grandeza; realiza contagens (número) contando os deslocamentos da unidade sobre a grandeza. Para medir o comprimento de um objeto, faz-se necessário dois tipos de operação: uma de caráter geométrico, a que aplica a unidade ao longo da grandeza a ser medida, a outra de caráter aritmético, a que calcula quantas vezes é possível repetir a operação anterior. Uma está estritamente relacionada a outra, dando lugar a uma, nova operação: a operação de medir. Na operação de medir, assim constituída, podemos distinguir três outras operações, a seleção da unidade de medida, a comparação, com a unidade, a expressão numérica do resultado da comparação e cada uma delas condiciona a outra. Pode ocorrer que a unidade escolhida não esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. De onde surge a necessidade de fracionar a unidade para expressar exatamente a dimensão da grandeza em partes da unidade, o que não é possível fazer com números inteiros, mas com números fracionários. (LANNER de Moura, 2005 p.3).

O ensino de medidas nas séries iniciais do Ensino Fundamental é geralmente considerado muito árido e sem outro significado senão o de saber uma técnica de ler corretamente um instrumento de medir: “Dessa forma a criança não tem acesso à complexidade e profundidade com que o pensamento de medir interage com a realidade, ao criar unidades para administrar os movimentos quantitativos da vida.” (LANNER, 2005, p.1).

No bloco sobre medidas, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) fazem referência à importância dos temas grandeza e medida desde o ensino fundamental:

Este bloco (medida e grandeza) caracteriza-se por sua forte relevância social, com evidente caráter prático e utilitário. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica. (PCN, 1997, p. 56).

Embora os PCN's citem a relevância deste tema, centram-se apenas no aspecto social, no sentido prático e utilitário do conhecimento de medida. Não fazem menção à importância desta

aprendizagem com relação ao seu caráter formador e articulador no processo de formação do pensamento teórico.

Os nexos conceituais dos aspectos discretos e contínuos da realidade a ser contada, discutidos por Aleksandrov (1975), de unidade e de grandeza, conforme aborda Caraça (2003) é fundamental para o entendimento de como aplicar o pensamento da medida aos movimentos quantitativos dos fenômenos do mundo em que vivemos. O pensamento resultante desses entendimentos deverá ser o de generalização do conceito de medida como um dos conteúdos do pensamento teórico sobre a realidade, segundo discute Davidov (1988).

O aspecto da história do conceito, a elaboração dos nexos conceituais, o pensamento e a linguagem da medida foram abordados nas atividades que desenvolvemos nesta pesquisa, como elementos desencadeadores para um aprofundamento do ensino da medida nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

No sentido de contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, no professor-aluno, propusemo-nos a investigar como o ensino, no caso da medição, pode propiciar o processo da formação desse conceito

Buscamos entender como tem sido abordado o tema medida e a formação do professor em pesquisas em Educação Matemática. Percebemos que há muita produção em estudos que focalizam a pedagogia na formação do professor em Educação Matemática, tanto nacional quanto internacionalmente. No entanto não encontramos nenhum estudo com a perspectiva que fizesse referencia a questão da formação do professor e do desenvolvimento do conteúdo específico da medida. Isto nos permite inferir que existe uma lacuna em pesquisas com essa temática.

Entre os estudos encontramos os que tratam da importância do ensino de conceitos matemáticos fundamentais como geometria, fração e campos numéricos. Destacamos as investigações de Lanner de Moura (1995), Catalani (2002), Prado (2000), Ferreira (2005), e Dias (2007) cujas preocupações são semelhantes às nossas com relação ao ensino e a aprendizagem conceitual.

A seguir apresentamos uma descrição de cada um desses estudos, evidenciando seus objetivos e possíveis semelhanças com nossa pesquisa, sem, no entanto, determo-nos numa análise pormenorizada.

Lanner de Moura (1995) investigou em sua pesquisa as ações de medir em crianças de pré-escola. Propôs situações de ensino que envolviam a gênese da medida unidimensional e cuja

análise evidenciou como as crianças elaboram os três aspectos matemáticos da medida: a seleção da unidade de medida, a comparação da unidade com a grandeza a ser medida e a expressão numérica da comparação.

Objetivamos nesta pesquisa estudar as ações de medir que são construídas através das interações em situações de ensino, quando as crianças buscam solucionar situações-problema de medir o espaço unidimensional. Partimos do pressuposto que o conjunto de ações das crianças, representadas nos episódios, revela os procedimentos definidores de suas concepções de medir, construídas a partir das interações na busca da solução do problema colocado. (LANNER de Moura, 1995, p. 151).

Embora a pesquisa de Lanner de Moura (1995) e a nossa tenham por semelhança o estudo do tema medida nossas investigações se diferenciam com relação ao foco da investigação e, conseqüentemente, à metodologia e ao público alvo.

A pesquisa de Catalani (2002) trata da inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração. Em sua pesquisa, a autora analisa e interpreta as ações de alunos do 4º ano do ensino fundamental em atividades que problematizaram o aspecto das grandezas com relação a enumeração (grifo nosso).

O caráter de nossa pesquisa requereu a interpretação das atividades realizadas pelos alunos na perspectiva da elaboração humana de conhecimentos e, para tanto, buscamos fundamentação teórica em autores que fazem referência ao processo de desenvolvimento de formas de pensamento juízos e conceitos integrantes do movimento da forma e do conteúdo do conceito. Sob esta perspectiva, os juízos e conceitos de medida e grandeza constituem conexões básicas para a elaboração do conceito de fração e são identificados como fundamentais por meio do estudo da história deste conceito. (grifo nosso) Estas conexões foram buscadas na história do desenvolvimento conceitual da fração por proporcionar o planejamento e organização das atividades e também por se tornarem elementos para analisar as elaborações dos alunos”. (CATALANI, 2002, p.29).

Catalani (2002) ao trabalhar com alunos da 4º série do ensino fundamental elaborou atividades que foram orientadas pelo desenvolvimento lógico-histórico da fração e *‘privilegiaram elaborações que abordam o movimento forma e conteúdo, no sentido do estabelecimento de juízos e conceitos sobre as ações de medir aspectos contínuos (grifo nosso), oferecendo elementos para discussões sobre o ensino-aprendizagem da fração.*

Nas palavras de Catalani (2002):

Abordamos o conceito de nossos objetos de estudos como movimentos que parte do pensar sobre a realidade na qual estamos imersos para, a partir dela, manifestarmos o conhecimento sobre o controle das variações quantitativas de objetos cujo aspecto a ser relevado nessa quantificação é o de natureza contínua. (CATALANI, 2002, p. 45).

PRADO (2000), em sua pesquisa, propõe a aprendizagem conceitual, como apoio a prática pedagógica, a superação da fragmentação do conhecimento. Ao abordar o conceito da fração, ao estudar a formação do professor e os elementos de modificação da prática docente desenvolve uma prática de ensino “na (re)-criação dos conceitos matemáticos, destacando como elemento importante para esta o caminho do movimento da história do conceito” (PRADO, 2000, p.56). A autora afirma que a ênfase, no ensino, dado ao aspecto operacional do conhecimento matemático implica na fragmentação do conhecimento matemático e distanciamento do mundo real, pelo aluno.

A pesquisa de Dias (2007) constitui-se na formação da imagem conceitual do professor do Ensino Fundamental e Médio, na inter-relação indivíduo-coletividade, com o fim de compreender a relação da imagem conceitual com o desenvolvimento da reta real na perspectiva lógico-histórica desse conceito. Sua pesquisa procurou compreender de que modo a aquisição do conhecimento teórico é elemento potencializador da formação de nexos conceituais que dão sentido ao que se aprende como contributo para a vida. (grifo nosso).

Para Dias (2007):

A unidade didática medida aborda a criação do processo da medição e conseqüentemente os nexos conceituais como a fração, acumulados em instrumentos de medida. A unidade número racional relaciona a medida com o número racional com a superação do primeiro, percurso que parte da comensurabilidade à significação da racionalidade do número. A unidade densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e número apresentam uma discussão que parte de um problema envolvendo medida e se articula com os conceitos de sucessor, divisibilidade, racionalidade e irracionalidade.(DIAS, 2007, p.35). (grifo nosso)

Nossa pesquisa e a de Dias (2007) estudam a formação do conceito e do pensamento teórico em atividades de ensino. Porém Dias enfatiza a formação da imagem conceitual, na extensão do estudo do campo numérico.

Uma das hipóteses da nossa pesquisa supõe que o tipo de pensamento, dos professores, relativo à medida tem características de pensamento empírico, isto é, este pensamento pode manifestar-se de duas maneiras: uma, na maneira como concebem o ensino de medida para as

séries iniciais; a outra forma, nas elaborações dos nexos conceituais ao desenvolverem as atividades propostas. Conforme comentamos anteriormente, quando os tipos de pensamentos, para quem ensina, tem caracterizações do tipo empíricas, possibilitam um ensino de forma técnica e instrumental, já que não tratam da relação entre a medida e seus nexos conceituais. Portanto, sob o ponto de vista científico, o ensino de medidas, desenvolvido nas séries iniciais, do Ensino Fundamental, não proporciona ao aluno, o desenvolvimento do pensamento teórico da medida relativo ao conceito de número.

Propusemo-nos a refletir, juntamente com os professores-aluno, os processos inerentes ao pensamento de medir que faz interconexões internamente à matemática e a outras áreas de conhecimento

Durante o desenvolvimento das atividades observamos que os pensamentos manifestos dos professores apresentavam forte influência religiosa, artística, senso comum e restringiam-se apenas ao aspecto externo do conceito, ou seja, ao aspecto técnico-operacional da ação de medir, caracterizando-se, conforme Davidov (1982), como pensamento empírico. Entendemos, em acordo com os pressupostos de Davidov que o pensamento resultante das elaborações dos nexos internos do conceito de medida deverá ser o de generalização teórica do conceito de medida. Este conteúdo é teórico, quando ao aprender o conceito, é dada a possibilidade de elaborar generalizações deste que abrangem não só seu modelo de aplicação, mas seu modo de pensar a realidade e de construir o progresso no sentido do sujeito libertar-se do desconhecimento da realidade natural e social em que vive.

No capítulo a seguir estudamos a evolução histórica dos conceitos de medida, a importância do conhecimento dos nexos conceituais para o conhecimento de medida à luz das teorias de Davidov (1982), Kopnin (1978), Moura (2000,2001), Leontiev(1983) e Kosik (2002).

3. ENCONTRO COM AS TEORIAS

Desde a Antiguidade, na história da filosofia ocidental, diferenciavam-se dois tipos de pensamento: a atividade mental orientada a separar e registrar os resultados da experiência sensorial e o pensamento que põe a descoberto a essência dos objetos, as leis internas de seu desenvolvimento. Conforme Davidov (1982), a psicologia moderna e a didática distinguem o saber empírico e o teórico como dois tipos de conhecimento que, por sua vez, correspondem a dois tipos de pensamento: o pensamento empírico e o teórico.

Para compreender a diferença que separa os dois tipos de conhecimento, Rubtsov (1987), faz uma breve análise comparativa entre eles, tendo por base as conclusões das pesquisas de Davidov (1978).

O conhecimento empírico é elaborado quando se compara os objetos às suas representações, o que permite valorizar as propriedades comuns dos primeiros. O saber teórico repousa numa análise do papel e da função de uma certa relação entre as coisas no interior de um sistema.

A comparação entre os objetos e suas representações dentro do conhecimento empírico torna possível a generalização formal das propriedades dos objetos, a qual por sua vez, permite situar objetos específicos no interior de uma dada classe formal, independentemente da existência de laços entre esses objetos, ou da ausência de tais ligações.

Por outro lado, por ocasião da análise do conhecimento teórico, procura-se saber que tipo de relação entre classes caracteriza, há um tempo um representante de uma classe e um objeto em particular. Essa relação tão real e tão particular serve, ao mesmo tempo, de base principal para todas as manifestações do sistema. Ela se apresenta como uma forma universal ou como uma entidade representada em pensamento.

Qualquer conhecimento empírico se baseia na observação. Reflete apenas as propriedades exteriores dos objetos e apóia-se inteiramente nas representações concretas. Já o saber teórico é oriundo de uma transformação dos objetos e reflete as relações entre as suas propriedades e suas ligações internas. O saber teórico determina a ligação de uma relação geral com as suas manifestações concretas, isto é, o elo entre geral e particular.

Concretizar o conhecimento empírico é escolher exemplos relativos a uma certa classe formal. No caso do saber teórico, essa concretização exige a transformação do saber em uma teoria desenvolvida através de uma dedução, e uma explicação das manifestações concretas do sistema, a partir da base fundamental.

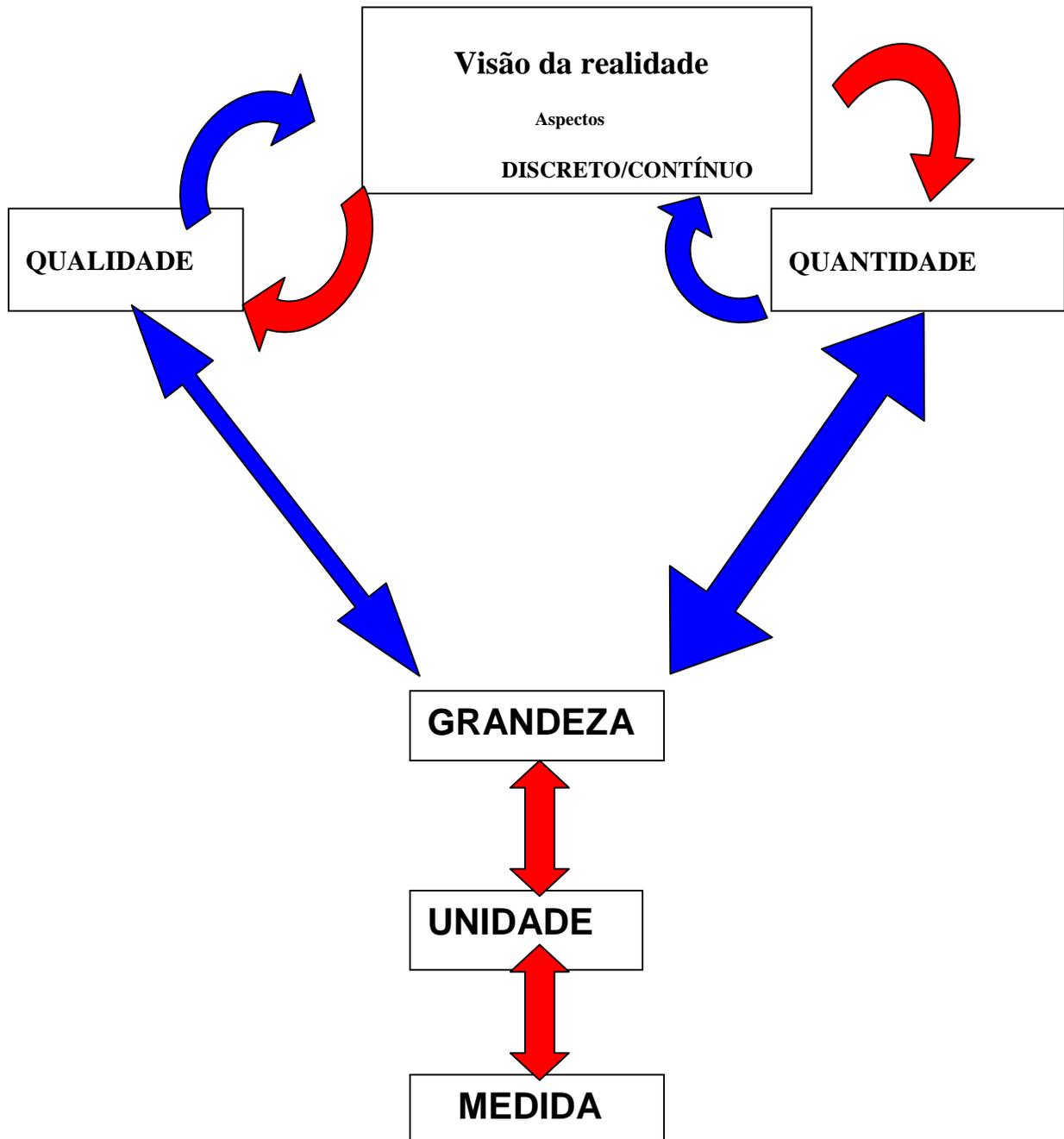
É uma palavra, um termo, que serve para fixar os resultados do conhecimento empírico. Ao contrario, o conhecimento teórico é expresso, a principio por diferentes modos de atividade e, em um segundo momento, por diferentes sistemas semióticos. (RUBTSOV. In: GARNIER & ALL, 1996, p. 129).

Medir e expressar corretamente a medida são atitudes adequadas e necessárias, porém não suficientes para o pensamento científico sobre o mundo. Medir envolve além do ato da medição, reflexão sobre os aspectos discretos e contínuos sob os quais se pode abordar a natureza. A manifestação da qualidade, a quantificação, a grandeza correspondente, constituem, conforme pesquisadores matemáticos, conexões básicas para a elaboração do conceito de número e estes por sua vez expressam grandezas.

Para uma visão geral dos nexos conceituais da medida traçamos inicialmente um mapa conceitual.

A seguir apresentamos um esquema de como o entendimento de medida está interligado ao conhecimento dos nexos que a constitui.

ESQUEMA DOS NEXOS DA MEDIDA



Nos conhecimentos representados no esquema está o conhecimento da Realidade. O estudo desta foi, há muito, foco de reflexões de vários filósofos tendo como consequência teorias filosóficas, como o Positivismo, o Iluminismo, a Metafísica, o Materialismo e outros. Os estudos atuais da realidade, sob o enfoque científico, provêm desses estudos filosóficos.

Nosso pensamento e estudo da realidade têm referência no materialismo dialético segundo os pressupostos de Caraça (2003), Kosik (2002) e Kopnin (1978), e estes por sua vez têm por base as teorias de Marx, Lênin, Engels. Em conformidade com esses autores, este estudo pode ser abordado sob vários aspectos caracterizados por unidades dialéticas tais como: qualidade-quantidade; discreto-contínuo; parte-todo; isolado-totalidade; permanência-fluência; independência – interdependência; grandeza; unidade natural-unidade de medida e outros.

Para Caraça (2003), o conhecimento científico da realidade é o resultado da observação, lentamente adquiridos e acumulados, das causas e do encadeamento de seus fenômenos. A esse conhecimento científico, Caraça chama de Ciência. O objetivo, portanto, da Ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos “fenômenos naturais fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social” (Caraça, 2003, p.101).

A realidade (Caraça, 2003) é caracterizada por duas qualidades essenciais: A interdependência e a fluência. Por interdependência entende a qualidade segundo a qual todas as coisas que constituem a Natureza estão interligadas. “A realidade é um organismo vivo no qual todos os elementos que a compõem, comunicam-se e dependem uns dos outros. Tudo depende de tudo.” (Caraça, 2003, p.203). Por fluência, o autor entende a qualidade da realidade, na qual o mundo está em permanente evolução.

Na afirmação de Heráclito, segundo Caraça, “todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo flui, tudo devém” (Caraça, 1998, p.103). Compreendemos que “o que é agora”, não tem significado real.

Na impossibilidade de captar a totalidade do universo, o homem recorta, destaca da totalidade, um conjunto de seres e fatos que, de acordo com Caraça (2003), é chamado de ‘isolado’. A apreensão de um isolado pode comportar erros, dando origem ao inesperado. O inesperado é a manifestação do erro e significa que um fator dominante estava ignorado. O progresso do conhecimento está diretamente relacionado com o aparecimento do inesperado.

O mundo humano de Caraça é entendido por Lima e Moises (1998), como sendo a natureza humana:

O homem é parte da natureza. **Natureza** é o movimento universal do qual o homem é parte integrante. O homem conhece alguns movimentos naturais e deles se utiliza para sobreviver. Chamamos de **natureza humana** ao conjunto de movimentos naturais que o homem conhece e administra para a sua sobrevivência. Chamamos de **natureza desconhecida** ao conjunto de movimentos naturais que o homem desconhece. (LIMA & MOISES, 1998, p.10).

Na abordagem que fazemos da natureza, no sentido de entender o mundo em que vivemos, as grandezas ocupam há muito tempo um lugar de extrema importância.

A física aborda a natureza sob o aspecto macroscópico e o aspecto microscópico. Os estados físicos dos corpos como sólido, líquido e gasoso são, entre muitos, aspectos macroscópicos. Qualquer objeto ao se encontrar num destes estados apresenta peso, massa, apresenta forma espacial, pode estar em movimento, enfim, pode apresentar propriedades que nos são extremamente importantes, sem, no entanto, sabermos que se trata de grandezas.

O que esses elementos têm em comum que os caracterizam como grandeza? Como identificar as grandezas? O que é grandeza? Tudo é grandeza? Serão o ponto e a reta e o plano, da geometria, também considerados grandezas? E a coragem, a verdade, a beleza, a liberdade, o companheirismo? A grandeza existe na natureza ou é apenas uma abstração?

O espaço, o tempo, a massa, o ponto, a reta e o plano são alguns conceitos utilizados na física e na matemática que não têm definições. Os três primeiros são considerados, pela física, como conceitos fundamentais e os três últimos são os famosos postulados da matemática, e não existem na natureza. São abstrações que se concretizam em nosso pensamento para nos auxiliar a abordar a natureza de forma racional e científica.

Conforme Ribnikov,

As relações quantitativas e as formas espaciais do mundo real constituem o objeto de investigação da matemática. Estes objetos não representam diretamente a realidade, mas são frutos da abstração. Para investigar, com os recursos da matemática, qualquer objeto ou fenômeno é necessário abstrair-se de todas as suas qualidades particulares, exceto as que caracterizam diretamente a quantidade e a forma”. (RIBNIKOV, 1987, p. 11).

Na busca pela definição formal do conceito de grandeza, fizemos várias pesquisas, entre elas, livros sobre a história da matemática, livros didáticos de matemática e física, teses em educação matemática, artigos em periódicos, anais de congressos e Internet. Encontramos duas definições para grandezas, uma no livro de Silva (2004) e outra em Davidov (1988).

Silva (2004) em seu livro cita uma definição conforme o INMETRO (2000a). Grandeza (mensurável) é “atributo de fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente” (SILVA, 2004, p.16)

Para Davidov (1988), a grandeza é uma relação elementar entre as qualidades que atribuímos aos objetos do ponto de vista da quantificação. Essa relação, ou grandeza, estabelece a base para a elaboração dos conceitos matemáticos fundamentais, como por exemplo, o conceito de número.

A diferença entre as duas definições reside na a relativização do conceito de grandeza. Em Silva (2004) entendemos que a grandeza é característica do objeto, enquanto em Davidov (1988), e a qual assumiremos, ela resulta de uma *relação entre qualidades* atribuídas aos objetos do ponto da quantificação. A semelhança entre as duas explicações reside na quantificação da grandeza e conseqüentemente na mensuração.

No manual de ciências para professores do nível fundamental do programa “Educar”, da Universidade de São Carlos (2001), encontramos uma definição de grandeza, segundo a qual: “a grandeza é tudo o que pode ser medido”. Ao contrário, visto que não podem ser medidas, não são grandezas verdade ou alegria conforme o entendimento matemático de grandeza. Esta afirmação é dialética e nos leva a entender que também o conhecimento matemático não é absoluto ou definitivo, pois o conhecimento do homem está em constante evolução e com ele o desenvolvimento da ciência.

O que hoje não pode ser medido no futuro talvez o seja. Por exemplo, falar que “João é mais corajoso que Pedro”, permite o conhecimento da quantificação (aspecto da quantidade). Embora a coragem possa ser quantificada e intensificada como mais corajoso que, ou menos que, os conhecimentos matemáticos atuais não nos permitem, ainda, a esse tipo de quantificação, a atribuição de um número, ou seja, a qualidade coragem não pode ser enumerada. Este aspecto, em geral, não é trabalhado nas escolas e é de importância para o conceito de grandeza e medida, pois auxilia no entendimento do conceito de medida.

Será, então, necessário definir grandeza? Não, não é preciso defini-la, mas é necessário entender seu significado e para isso devemos refletir sobre o que há de comum entre os elementos que anteriormente afirmamos serem grandezas. Quando o assunto é grandeza, a espécie, a qualidade, ou o atributo, são freqüentemente referenciados e a ela relacionados. Alguns autores usam as palavras “qualidade ou atributo como sinônimo de espécie de grandeza”.

Freqüentemente, deparamo-nos com expressões do tipo: “a medida de uma grandeza”. Mas, medir grandeza é medir o quê? É medir uma qualidade ou uma quantidade do objeto?

Caraça (2003) responde a questão sobre “o que é medir” afirmando que medir “consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, duas massas, etc.” (grifo nosso) (Caraça, 2003,p.29) . A afirmação de Caraça nos faz entender que o peso, a massa, o volume, o comprimento são grandezas de espécies diferentes. Então se existem grandezas de espécies diferentes, podemos questionar como espécie está relacionada à grandeza.

O estudo da medida, conforme Caraça (2003), pode ser feito sob dois aspectos: o experimental e o teórico. Considerando-se inicialmente o seu aspecto experimental, é fundamental que, para a medida de grandezas, exista um termo de comparação único para toda a grandeza de mesma espécie. Portanto, parece-nos que a grandeza consiste em espécies que podem ser iguais ou diferentes. Essas espécies nada mais são que as qualidades que surgem na relação da comparação entre objetos. A qualidade é, então, um nexos conceitual da grandeza e, por vezes, a qualidade é considerada a própria grandeza como, por exemplo, na ação da força com que um homem empurra um objeto, a grandeza é caracterizada pela própria força. A capacidade que uma jarra tem de conter líquido, é a grandeza. Portanto, se as espécies ou qualidades de grandeza variam infinitamente, também irão variar infinitamente as grandezas.

No cotidiano da escola, tanto no ensino da matemática como no de física, quer no Ensino Fundamental, Médio ou na Universidade, é freqüente o estudo de grandezas, porém, na prática, a maneira como se tem trabalhado com esses conceitos, não nos permite ter consciência de estarmos lidando com grandezas. O uso, na prática das grandezas, simplificou sua nomenclatura e prejudicou seu entendimento. Falamos peso, quando deveríamos falar grandeza peso; grandeza volume e não simplesmente volume e assim para os demais conceitos. Realmente soa-nos de maneira estranha ‘a grandeza tempo’, ‘a grandeza temperatura’, etc.

Nas primeiras séries do ensino fundamental, são enfatizadas às crianças, as noções de comprimento e ao volume. Constatamos que, dificilmente, esse ensino evidencia as noções quantitativas relacionadas com a noção de grandeza e ainda são pouco trabalhadas outras grandezas, como as noções de massa e de tempo.

Conforme Chamorro (1991, p. 110), a pré-escola se limita ao trato das propriedades como cor, forma e tamanho, descuidando de outras propriedades físicas, e ainda as do tipo abstrato

como gosto e afeições, que são vitais, pois é a relação mais elementar que se estabelece entre os objetos a base para todas as relações lógico-matemáticas mais complexas. Quando, por exemplo, a criança encontra duas colheres de tamanhos diferentes, pode concebê-las como iguais ou diferentes. Estas relações não existem em uma colher ou na outra. Elas são criadas pelas relações do sujeito com os objetos e quando não são colocadas, por ele, numa relação. Cada objeto, para ele, permanecerá separado e sem relacionar-se com outro. Isto proporciona ao sujeito um conhecer sensitivo proveniente da relação do sujeito com a realidade que o cerca.

Ao compararmos as grandezas de mesma espécie podemos considerar, de acordo com Caraça, advérbios do tipo mais que, menos que, maior que, menor que etc. Fica, portanto, evidente a relação de dependência entre a qualidade, a quantidade e a grandeza. Conforme Lima (1998), a grandeza fica perfeitamente determinada ao caracterizar a qualidade e a quantidade que surgem na comparação de vários objetos.

Numa pesquisa bibliográfica sobre grandeza, encontramos relatórios (?) sobre vários programas de matemática, na França, da escola fundamental. De acordo com o manual francês são freqüentes as confusões, feitas pelos alunos, entre grandeza e medida de uma grandeza. O programa enfatiza que a noção de grandeza não é a noção de um número ou de uma unidade como cm, kg, °Celsius. O número cinco, por exemplo, não designa uma grandeza, mas 5 cm é a classe de equivalência de todos segmentos com comprimento igual a 5 vezes 1cm (onde estamos usando 1cm como unidade). Para grandezas de mesma espécie, podemos definir uma lei de composição interna, segundo a qual, uma massa de 5kg acrescida de uma massa de 2 gramas resulta a mesma grandeza massa equivalente a 5.002g (gramas) ou a mesma grandeza massa equivalente a 5,002kg. Se considerarmos uma multiplicação de uma dada grandeza por um número externo como, por exemplo, a grandeza tempo 20s multiplicada por 5, onde 5 indica a freqüência com que acontece os 20 segundos, (obtem um tempo de 100s segundos ou 1hora e 40 minutos).

A grandeza área, que corresponde a medida de uma superfície, resulta do produto de duas grandezas de comprimento; como, por exemplo, a área de um retângulo de 7m por 3m de dimensões de comprimento nos fornece uma grandeza área de 21m² de dimensão. A adição de grandezas resulta numa grandeza de mesma espécie das que lhe deram origem. Já a multiplicação e divisão resultam em grandezas de espécies diferentes. Ao dividirmos, por exemplo, 1kg da grandeza massa de um corpo por 1litro da grandeza volume obteremos a grandeza densidade do

corpo expressa em quilograma por litro (kg / l). A grandeza velocidade 80km/h deriva do quociente ou da razão entre as grandezas distância (de 80km) percorrida por um objeto e a grandeza tempo (1h) gasto para percorrê-la.

Na divisão entre grandezas de mesma espécie ou qualidade, o quociente poderá ser um número puro, adimensional, sem unidades. Este número representa o quanto uma grandeza cabe dentro da outra. Por exemplo, se compararmos os lados de uma figura plana, no caso de um retângulo e cujas dimensões medem 5cm e 10cm. Se uma grandeza couber um número inteiro de vezes dentro da outra diremos que uma é múltipla da outra. No entanto, pode acontecer que a divisão, não seja exata, ou não se traduza como um número inteiro de vezes, mas que haja sobra ou resto na divisão. Esta sobra resultante da comparação entre as grandezas é entendida como um número fracionário e é atribuída a ela a origem do campo numérico dos racionais.

No estudo dos aspectos prático e teórico da medida, convém fazermos algumas reflexões sobre a “ação fazer e pensar a medida”.

Existe uma diferença significativa entre “fazer medida” e “pensar a medida”. Quando fazemos medida, agimos de forma mecânica: usamos instrumentos de medidas, medimos simplesmente, sem refletirmos sobre os conceitos matemáticos envolvidos nessa ação. A medida, neste caso, é apenas uma técnica e saber usá-la mecanicamente não significa entender seu significado. Podemos dizer, referindo-nos a Davidov (1988), que temos um conhecimento empírico da medida.

No entanto, quando ‘pensamos’ sobre a medida estamos pensando nas qualidades e nas relações desta com o objeto a ser medido. Pensamos nos nexos conceituais da medida e isso significa entender tanto as relações internas, como as relações externas do conceito de Medida e estabelecer relações entre elas. De acordo com Kopnin (1978), Davidov(1988) estabelecer essas relações é elaborar o pensamento teórico da medida, o saber pensar e o saber fazer a medida. Nesta tese, portanto, entendemos que a medida é uma forma do pensamento de ver e modelar uma quantidade que faz parte da realidade.

Após a explicação científica da concepção da realidade, vamos focar a atenção para os nexos conceituais da medida.

Conforme Davidov (1988), para o pensamento teórico da medida é necessário o estabelecimento das relações entre os atributos internos e externos (nexos internos e externos) do conceito de medida. Para o entendimento dos nexos conceituais da medida, conforme Caraça

(2003), devemos ter sempre em mente o caráter da permanência e fluência entre as qualidades. Podemos identificar inúmeras qualidades de um objeto. Conforme o senso comum, podemos citar a cor, o tamanho, a beleza entre as infinitas possíveis qualidades de um objeto. No entanto, em nosso estudo, trataremos somente as qualidades consideradas sob o aspecto científico da medida como a qualidade comprimento, o volume, a área, a cor, a temperatura, entre outras.

O entendimento da noção de qualidade, sob o ponto de vista científico, é fundamental, pois a qualidade estudada sob este enfoque, é que constitui um dos nexos da medida. “Ao conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres de um agregado, chamaremos de ‘qualidade do ser em relação aos outros seres’”. (Caraça 1998, p.93). Isto implica no entendimento da ‘qualidade relativa’ de um objeto, uma vez que ela tem sua origem na relação com outro objeto. Portanto, a qualidade é uma noção relativa resultante de uma comparação e não uma propriedade intrínseca do objeto. Assim, as qualidades de um objeto dependem do meio no qual ele se insere, ou seja, são funções do recorte do isolado. Estamos usando a noção de isolado como sendo *‘uma seção da realidade, nela recortada arbitrariamente.’* (Caraça 1998, p.105).

Caso mudemos o isolado, mudamos as qualidades do ser. Numa precisão maior para o conceito de qualidade de um ser, Caraça nos informa que devemos estudar as possíveis relações deste ser com outros seres do mesmo isolado. É preciso considerar as qualidades de um ser, pensar no isolado a que ele pertence e isto nos permite concluir que existem diferentes níveis de qualidade de um ser.

Como expressar numericamente a qualidade? Essa questão é um norte em nossa busca pelos nexos conceituais da Medida.

Para Caraça (2003), a quantidade aparece como um atributo da qualidade. No senso comum é freqüente o uso da palavra quantidade como sinônimo de número e ainda o entendimento de que a quantidade é tudo o que pode ser medido.

Dessa forma, a quantidade, atributo da qualidade, é também um nexo conceitual da medida. Ao medirmos a quantidade de certa qualidade de um determinado objeto, estamos na verdade, medindo as variações quantitativas dessa qualidade em outros objetos. Concluimos, do que foi dito até agora, que para o entendimento do conceito de grandeza é importante a noção da relação qualidade-quantidade nos objetos.

Para um melhor entendimento da unidade dialética qualidade-quantidade convém esclarecer, conforme alguns estudiosos, o aspecto discreto ou contínuo, da grandeza.

Para Broleski (1996), discreto e contínuo são termos que se referem respectivamente a duas das ações básicas na elaboração da Matemática: contar e medir. Discreto é aquilo que exprime objetos distintos, que se põe à parte; contínuo é o que está simultaneamente unido à outra coisa. O termo discreto e o contínuo, quando associado a grandezas, resultam em grandezas discretas ou grandezas contínuas: as grandezas discretas são relacionadas a objetos contáveis, por exemplo, o número de carros no estacionamento ou o número de maçãs numa caixa; já, as grandezas contínuas são as possíveis de serem medidas. Por exemplo, a altura, o peso, o ângulo, o tempo.

Conforme Aleksandrov (1978) o discreto e o contínuo são duas classes contraditórias. A classe dos discretos é a dos que podem ser divididos e os contínuos são indivisíveis. A concepção do discreto e do contínuo para Aleksandrov (1978) difere da concepção de Broleski (1996); para o primeiro essa concepção é dialética: discreto e contínuo são características que vêm sempre unidas, já que não existem na natureza objetos infinitamente divisíveis e nem completamente contínuos. Dada à existência real de tais características, uma predomina sobre a outra. A denominação 'ser discreto' ou 'ser contínuo' é uma questão de predominância, dependendo do isolado que cria para fim de conhecimento.

Nesta pesquisa, por tratarmos da medida, a ênfase é dada aos aspectos contínuos, e em acordo com Aleksandrov (1978), o entendimento da unidade dialética do discreto - contínuo ocorre mediante a compreensão do desenvolvimento do conceito de número. As frações tiveram sua origem na divisão de grandezas contínuas. O autor exemplifica essa dualidade na situação segundo a qual é impossível a divisão de três batatas em quatro partes iguais. Para que esta divisão exata seja possível isto só ocorre se transformamos as batatas em purê. Com este exemplo, Aleksandrov (1978) nos informa que cada objeto separado é indivisível no sentido de que, quando se divide, quase sempre deixa de ser o que era: não é possível dividirmos o homem em três partes iguais, ou seja, na divisão perdeu-se a qualidade de manter a característica do ser homem; outro exemplo ocorre com a divisão de uma flecha em três partes iguais, resulta em partes que não serão mais flecha. As grandezas contínuas e homogêneas diferem das discretas no sentido que ao serem divididas e agrupadas não perdem seu caráter essencial. Retomemos ao exemplo das batatas que, quando transformadas em purê, este pode ser várias vezes subdividido e manterá suas propriedades.

O mero fato de que a matemática separa as formas de seus conteúdos determina uma divisão em duas classes: as formas discretas e as formas contínuas.

O modelo matemático de um objeto é a unidade, e o modelo matemático de uma coleção de objetos discretos é uma soma de unidades, a imagem do puramente discreto, separada de todas as demais qualidades. Por outro lado, o modelo matemático fundamental da continuidade é a figura geométrica: a linha reta no seu exemplo mais simples. (Aleksandrov, 1978, p 24).

Temos, diante de nós, dois contrastes entre o par discreto e o contínuo e as suas imagens matemáticas abstratas: o número e a extensão geométrica. O processo de medida consiste na união desses dois contrastes: o contínuo é medido por unidades individuais. Porém, estas unidades que em princípio são indivisíveis não bastam; é preciso introduzir partes fracionárias da unidade original. Desse modo surgem os números fracionários e o conceito de número se desenvolve precisamente como resultado da união dos contrastes: discreto e contínuo.

Este simples exemplo nos auxilia a entender a diferença entre o discreto e o contínuo. A batata separada é uma quantidade discreta, quando purê (sem leite ou manteiga), apenas amassada é uma quantidade contínua. A batata em termos de peso também é quantidade contínua. Podemos dividir o peso, obtendo pesos iguais, mas é quase impossível dividirmos uma batata inteira em porções iguais. Portanto, a grandeza discreta, uma unidade de batata, pode ser transformada numa grandeza contínua quando considerada, por exemplo, como x gramas de batata.

A nomenclatura com que se tratam determinados assuntos pode gerar futuros obstáculos com relação à concepção de determinados aspectos da realidade. A realidade não é estática, está em contínua modificação. Quando nos referimos a propriedades de objetos, entendemos essas propriedades como características imutáveis, quando na verdade, essas propriedades devem ser entendidas como qualidades possíveis de modificação em função de outras qualidades dentro do isolado no qual estão imersas (Caraça, 2003). O formato de uma pedra pode nos servir de exemplo sobre esses pressupostos. Após dias, meses ou mesmo anos, admitimos com toda a certeza que a pedra manteve sua forma inicial. No entanto, se considerarmos a ação do tempo, atrito com o ar, nuance da mudança de cor, imperceptível a olho nu, e passarmos a considerar mais o mesmo. Ao compararmos suas qualidades iniciais e finais, verificamos ter havido mudança entre elas.

Em geral, nas escolas do nível fundamental, a grandeza não é trabalhada como algo relativo resultante da comparação das qualidades comuns entre objetos. Podemos citar como exemplo de atividades propostas nas escolas as atividades que solicitam aos alunos identificar qualidades de objetos dentre um conjunto de objetos. Essas atividades não permitem ao aluno concluir que não existem qualidades intrínsecas aos objetos, pois estas surgem da comparação entre as qualidades comuns dos objetos no conjunto dado. Não existe objeto pesado. Não existe objeto pequeno. O que existe é um objeto mais pesado ou mais leve sempre na comparação das qualidades comuns a vários objetos. Conseqüentemente o mesmo ocorre com o ensino de medida. As atividades de medição de grandezas propostas nas escolas tem como foco principal a medição do tempo e de grandezas padronizadas como comprimento, superfície e volume. Dificilmente são trabalhadas as medições no sentido de comparar as grandezas de mesma espécie.

Dessa forma, para as crianças, do ponto de vista da enumeração, as pedras podem apresentar apenas características discretas. Parece que as pedras só são contáveis, ou seja, são discretas (só podemos estabelecer com elas relações biunívocas, que caracterizam a contagem). No caso do exemplo da pedra, omitimos em geral o fato de a pedra apresentar outras qualidades que não apenas o fato de serem contáveis, qualidades e que estão relacionadas a aspectos contínuos como a massa, a temperatura, o peso, a cor da pedra e etc.

Para o entendimento de quantidade se faz necessária uma revisão da noção da qualidade sob o aspecto discreto e ou contínuo e da relação entre esses dois eles.

Como já discutimos anteriormente, uma mesma grandeza pode ser estudada sob os dois aspectos: sob o aspecto contínuo ou o aspecto discreto. Uma maçã, sob o aspecto da contagem é uma grandeza discreta, sob o aspecto contínuo a maçã pode ser pesada ou ainda podemos determinar seu volume. O grão de feijão é um grão do ponto de vista discreto; entretanto, ao comprarmos o feijão, fazemo-lo sob seu aspecto contínuo: o peso em quilos ou em gramas.

Comparar quantidades implica no estabelecimento de comparações quanto ao aspecto discreto e contínuo. Ao compararmos “quantidades”, como o caso de um elefante com 100 formigas, qual quantidade é maior? A resposta a essa questão deve levar em conta os aspectos discretos e contínuos. Sob o aspecto discreto a quantidade 100 formigas é maior que a de um elefante, no entanto, sob o aspecto contínuo, ao compararmos o peso do elefante com 100 formigas, com o do elefante é muito maior. Portanto para se comparar quantitativamente grandezas é preciso definir que qualidade da grandeza está sendo considerada.

Medir, então, é uma operação que requer estabelecer referências. Não é uma operação que se aplica sobre um objeto absoluto, mas em determinadas qualidades que o objeto considerado

tem em comum a outros objetos, embora sejam esses de natureza totalmente diferentes. Por exemplo, comparamos o peso de uma pedra com o peso de uma porção de lã de ovelhas. Pedra e lã têm naturezas diferentes, mas apresentam uma qualidade comum cuja intensidade podemos colocar em comparação numérica. A grandeza se constitui num nexos fundamental da medida e que normalmente não é problematizada no ensino desse conceito.

O desenvolvimento de sua compreensão pode despertar, já bem cedo, na criança a forma como se criam os modelos matemáticos dos movimentos quantitativos da realidade em que vivemos.

As reflexões sobre a comparação entre grandeza nos possibilitam o questionamento: o que ocorre com as qualidades de duas grandezas quando uma é acrescida à outra? Como operar matematicamente com medidas ou grandezas?

Algumas grandezas tais como, massa, comprimento, volume, áreas e outras podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas entre si. Quando grandezas de mesma espécie são adicionadas resultam na soma ou na diferença entre elas. No entanto, para muitas operações entre grandezas de mesma espécie, quando somadas ou subtraídas nem sempre resultam na soma ou na diferença entre elas. Como exemplo, podemos citar o caso da temperatura quando dois objetos com temperaturas diferentes são colocados em contato. As temperaturas finais, não serão a soma das duas grandezas temperaturas, mas haverá um equilíbrio térmico entre elas, temperatura final ou de equilíbrio térmico. Esta temperatura final será intermediária entre as temperaturas dos corpos que foram colocados em contato.

As grandezas são, segundo Shwartz (1998), classificadas em intensivas e extensivas. Quando dois corpos, a temperaturas diferentes, são colocados em contato, não ocorre soma das grandezas temperaturas de cada corpo, pois a temperatura final após o contato entre eles terá um valor intermediário entre a do corpo de maior temperatura e a de menor temperatura. Isto também ocorre para a densidade. As grandezas temperatura e a densidade são exemplos de grandezas intensivas. Já as grandezas massa, o volume e o peso entre outras, podem ser adicionadas ou subtraídas e se caracterizam por grandezas chamadas extensivas. Experiências em Educação Matemática e nas escolas mostram que a prática da medida no ensino fundamental é somente trabalhada com grandezas do tipo extensivas.

Neste capítulo tratamos do entendimento de alguns conceitos tais como o isolado, a qualidade, o discreto, o contínuo e a grandezas que são considerados como conceitos fundamentais para o entendimento da medida.

No próximo capítulo descrevemos a trajetória que percorremos para o desenvolvimento da pesquisa.

4. O CAMINHO QUE PERCORREMOS

Este capítulo traça o caminho que percorremos para desenvolver a pesquisa. Nele descrevemos a metodologia, os sujeitos da pesquisa, as atividades propostas

Conforme os autores de referência anteriormente citados, afirmamos que nenhum conceito é imutável ou é uma verdade absoluta, mas varia conforme a época e o contexto social no qual se insere. Deste modo, consideramos a medida fazendo parte de um sistema que conforme Silva (2004) vem modificando-se desde a antiguidade até nossos dias.

No contexto desta pesquisa, estamos entendendo o conceito de medida não como algo pronto ou acabado, mas como um processo, como um movimento do pensamento do sujeito que o aprende. Este imprime ao conceito conteúdos que lhe são próprios, modos peculiares de medir que não fazem parte da universalidade do conceito formal de medida. Nas medições do dia-a-dia costumamos recorrer ao senso da medida. Medimos distâncias, alturas, volumes etc., apenas pela percepção visual. Esse conteúdo peculiar, intuitivo e prático, pode ser mobilizado ao tratar a medida cientificamente, para despertar no aprendiz a necessidade do rigor da medida.

O professor dos anos iniciais do ensino fundamental, nem sempre tem presente, em sua prática pedagógica da medida, o aspecto cultural e as inter-relações que perfazem o pensamento da medida. Dedicam-se com mais frequência a ensinar o aspecto técnico deste conceito.

Tendo em conta as conseqüências decorrentes do ensino mecânico da medida, já comentado no capítulo I, não garantir ao aluno a assimilação do conceito de medida e com a intenção de contribuir para o ensino e aprendizagem conceitual em matemática que nos propusemos a investigar as elaborações de medida de professores do ensino fundamental sobre o conceito de medida.

Procuramos descrever e analisar as elaborações das professoras, com foco no processo do pensamento manifesto nas atividades propostas em situações de ensino. As atividades foram desenvolvidas individualmente e em grupo sendo que os registros das elaborações orais e escritas das professoras se constituíram em uma das fontes de dados desta pesquisa.

Há consenso entre educadores que o ensino de matemática vigente nas escolas até a presente data ainda enfatiza o conhecimento formal, priorizando apenas o aspecto operacional do conceito. Como conseqüência, temos observado em nossa experiência com o magistério que os alunos apresentavam dificuldades com relação aos conceitos matemáticos fundamentais da

medida como qualidade, quantidade, grandeza, unidade e medida. E ainda, professores e alunos em geral, ao desenvolver atividades que envolvem grandezas e medidas, restringiam-se apenas às técnicas de medição e ao aspecto prático e operacional deste conceito.

Para ocorrer mudança na forma de aprender, de modo a favorecer a formação do pensamento teórico que é segundo Davidov (1988) o de generalização do conceito, aquele pensamento que constrói as múltiplas relações do conceito, dentro da própria matemática e fora dela; é necessário haver mudança na forma de ensinar.

Foi com a intenção de contribuir para o ensino conceitual em matemática, que nos empenhamos em pesquisar como as professoras desta pesquisa pensam a medida quando vivenciam atividades de ensino possíveis de serem desenvolvidas com seus alunos.

Optamos por intervir em sala de aula como professora e pesquisadora e em acordo com a professora da disciplina, que participou como observadora. Propusemos atividades de ensino e de pesquisa que possibilitassem às professoras trabalhar e refletir sobre os nexos conceituais da medida.

Vários foram os motivos que nos levaram a desenvolver a pesquisa em sala de aula. Dentre eles:

- As dificuldades apresentadas pelos alunos com relação aos conceitos matemáticos fundamentais.
- O fato de termos observado em outros cursos que muitos professores e alunos, ao desenvolverem atividades que envolviam grandezas e medidas, restringiam-se apenas às técnicas de medição e ao aspecto prático e operacional deste conceito.
- Por ser a sala de aula um ambiente rico para discussões e propiciar a elaboração não formal do conceito de medida.
- Por permitir um envolvimento entre a pesquisadora e os sujeitos da investigação e não se restringir à observação de aulas.
- Pelo fato das professoras atuarem no início da aprendizagem dos alunos, com conhecimentos matemáticos que são considerados conceitos basilares para os outros conceitos matemáticos.
- Pelo fato do tema *medida* constar dos conteúdos da disciplina de graduação desses professores e do ensino fundamental.

Na tentativa de responder a questão: “*Quais elaborações as professoras-aluno produzem ao vivenciar atividades de ensino sobre medidas?*” trabalhamos, com os sujeitos da pesquisa, atividades de ensino que possibilitassem problematizar e refletir sobre os nexos do conceito de medida e não apenas o resultado da medição ou a aplicação técnica desses conhecimentos.

Por elaborações entendemos, em acordo com Catalani (2002) e Sousa (2004), que são definidas como expressões orais e escritas processadas pelo movimento do pensamento que se caracteriza pelo pensar sobre os conceitos.

A aprendizagem de um conceito pelo sujeito ocorre, conforme Davidov (1988) e Rbutsov (1996), quando este participa dos movimentos de criação de significados deste conceito, “numa atividade que incorpora a prática, o pensar intelectual, nas suas dimensões sociológica e lógica” (CATALANI, 2002, p. 73). Para o pensamento do conceito da medida é fundamental o pensamento dos nexos que constituem esse conceito.

Conforme os autores de referência desta pesquisa todo conceito resulta da confluência de outros conceitos, considerados como seus nexos. Este conceito, por sua vez, será nexos de outros conceitos. Entende-se o conceito como um processo do pensamento no qual estão presentes nexos internos e externos a ele. No caso desta pesquisa, consideramos os aspectos qualidade, quantidade, discreto e contínuo, movimentos quantitativos como nexos internos do conceito de medida, sendo que para a presença desses, nas elaborações dos professores atribuímos a qualidade de pensamento teórico, pois possibilitam estabelecer relações da medida com a qualidade-quantidade dos fenômenos bem como com os aspectos contínuos e discretos atribuídos à realidade para efeitos de sua quantificação. As ações de medir, as técnicas de medida, o uso de um instrumento e a identificação da grandeza com sua respectiva unidade, consideramos nexos externos do conceito, pois são perceptíveis em sua linguagem formal e nos modos de medir. Com base em Davidov (1982), dizemos que estes fazem parte dos aspectos empíricos do conceito.

Conforme Davidov (1982), o pensamento empírico é importante para a formação do pensamento teórico: o primeiro serve de base para o segundo, são formas de pensamento que se geram mutuamente, sendo, porém, a forma teórica responsável pelas generalizações mais substanciais e profundas do conceito. Portanto, quando o ensino se reduz à formação do pensamento empírico limita o potencial do conceito possível de desenvolver. É o pensamento teórico da medida que permite apreender a capacidade de fazer todas as relações histórico-culturais que este sintetiza.

Sob a perspectiva de abordar o conceito em profundidade abrangendo suas conexões conceituais e não somente os aspectos perceptíveis do formalismo lógico que o constitui, optamos, para a elaboração desta tese, por atividades que consideram além dos aspectos lógicos, também a faceta histórica do desenvolvimento dos conceitos. Essas atividades problematizam as principais conexões do conceito de medida e têm como objetivo proporcionar momentos para o professor pensar e agir sobre sua realidade, recuperando o movimento criativo do conceito de medida.

Adaptamos um conjunto de atividades para ser desenvolvido na pesquisa, tendo por referência o material didático: “A Repartição da Terra: a construção da fração, de Lima e Moisés (1998)”. A escolha deste livro foi em função das atividades, nele propostas, permitirem ao aprendiz refletir sobre os nexos conceituais externos e internos do conceito de medida.

4.1 Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida, no 2º semestre do período noturno de 2004, num curso de Pedagogia, na cidade de Campinas – SP, que atende a professores em exercício das quatro primeiras séries do Ensino Fundamental e da Educação Infantil. O período noturno corresponde da 19h10min às 22h40min, com aulas presenciais diárias. Os encontros foram semanais, perfazendo o total de cinco encontros, ou um mês de aula. A procedência desses alunos é do curso Magistério e são, em sua totalidade, do sexo feminino.

Para análise do material empírico selecionamos 13 professoras dos trinta e cinco alunos da classe, a partir do critério, estar regularmente presentes nas aulas. Considerando-se o fato delas já atuarem no magistério há algum tempo e para efeito de referências, denominaremos esses sujeitos como professoras-aluno ou simplesmente professoras já que o grupo selecionado era constituído somente por professoras.

4.2 A Dinâmica das aulas

A pesquisa foi desenvolvida nas aulas da disciplina “Fundamentos do ensino da Matemática”. Numa primeira etapa da pesquisa, sugerimos um questionário inicial com o objetivo de levantar dados sobre como as professoras entendem e trabalham o conceito de medida com seus alunos e o que pensam sobre sua importância para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos.

Na segunda etapa, iniciamos as aulas com a retomada dos conteúdos que já haviam sido trabalhados pela professora da disciplina os quais nos auxiliaram servindo como conexão para introduzir o conceito de medida como o novo conteúdo a ser estudado pelas alunas e fonte da construção dos dados da pesquisa.

No seguimento das aulas, adotamos os seguintes procedimentos:

- ✓ Apresentação e discussão da síntese das elaborações dos alunos sobre as questões propostas pelas atividades desenvolvidas em aula.
- ✓ Discussão de textos teóricos referentes aos conteúdos tratados ou a serem tratados nas atividades.
- ✓ Desenvolvimento de novas atividades.

O desenvolvimento das atividades de sala de aula ocorreu em três momentos de reflexão sobre os nexos conceituais nelas tratados: um momento individual, em pequeno grupo e no grupo classe.

O propósito do uso dos três momentos é justificado, conforme Sousa (2004):

Permite ao aluno perscrutar em seu conhecimento a resposta a uma determinada atividade. Em seguida, a resposta de cada um dos alunos é compartilhada em pequenos grupos. A partir da (re)elaboração das respostas ou das respostas individuais, é feita uma síntese, em cada um dos grupos, para ser compartilhada com os demais grupos. Durante todo o processo, o professor é convidado a ser o mediador do conhecimento. Propõe-se que, durante as discussões das atividades, a dinâmica relacional (...) auxilie o grupo a produzir o seu próprio conhecimento, onde a individualidade de cada um é respeitada ao construir suas verdades, a partir de seus referenciais. Em seguida, essas verdades são compartilhadas com o coletivo de pelo menos duas formas: em pequenos grupos e com a classe. Assim, ao mesmo tempo em que a verdade coletiva é construída pelos indivíduos, o mesmo coletivo interfere na (re)elaboração da verdade do indivíduo e do próprio coletivo. “(...) Há nessa dinâmica, a intencionalidade de fazer o pensamento movimentar-se, através de diversas conexões individuais e coletivas, na busca da verdade conceitual. (SOUSA, 2004, p. 42-3.).

Ferreira (2005) aprofunda os três momentos atribuindo a esses a característica de uma dinâmica relacional. Segunda esta autora “as atividades organizadas pelo movimento da dinâmica relacional vem contribuir para um modo de ensino diferente daquele que privilegia somente a dedução dos conceitos trabalhados que visa apenas posterior aplicação em exercícios de reforço” (FERREIRA, 2005, p. 47). Ou seja,

Permite aos professores-aluno um movimento interno de averiguação do conhecimento que já possuem. Percutando seu conhecimento, buscam uma resposta aos problemas apresentados pela atividade.

No momento posterior, a elaboração individual é compartilhada nos pequenos grupos, onde realizam a síntese das idéias de cada um, compondo uma elaboração coletiva. Essa elaboração é, em seguida, compartilhada com os demais grupos, num movimento coletivo de busca de significação. Em todo o processo, a pesquisadora assume o papel de mediadora dos processos de desenvolvimento do conhecimento, auxiliando para que no coletivo se produza conhecimento, pelo coletivo, mas de modo individual buscando que cada um recrie subjetivamente os conceitos trabalhados busca de definibilidades próprias. (FERREIRA, 2005, p.47)

Durante o desenvolvimento das atividades, pelas professoras, quer individual ou em grupo, acompanhávamos as reflexões e discussões, esclarecendo a proposta, auxiliando com outras questões, observando como procediam nas trocas de idéias e as organizavam, fazendo, posteriormente, o registro do que observávamos. Ao término de cada atividade, recolhíamos os trabalhos escritos dos alunos, quer os individuais ou os dos grupos. Preparávamos uma síntese das elaborações feitas e no encontro seguinte apresentávamos para a classe esta síntese em transparência para que o grupo escolhesse a elaboração que avaliava a mais apropriada ou as reelaborasse com o intuito de encontrar uma melhor estruturada. Este momento era seguido pela discussão da leitura, previamente sugerida, de textos teóricos com o tema correlato com a atividade. Este trabalho de reflexão tinha o objetivo de provocar a elaboração de sínteses dos nexos conceituais em questão na atividade discutida e que poderiam ser apoiadas, também, pelas leituras teóricas. Após este procedimento era proposta uma nova atividade.

Como já comentamos anteriormente, as atividades privilegiaram o desenvolvimento do conceito como processo de aprendizagem, focalizando aspectos da história e a elaboração dos nexos conceituais como, por exemplo, a medida no Egito antigo.

4.3 Os dados da Pesquisa

Os dados que foram analisados são provenientes dos registros orais e escritos das alunas e dos registros da professora-pesquisadora e constituíram-se:

- Dos registros escritos das professoras-aluno ao responderem individualmente e em grupo as questões propostas pelas atividades.
- Das reflexões escritas sobre as aulas contidas nos portfólios da disciplina elaborados pelas alunas.
- Dos registros da pesquisadora das discussões que ocorriam seja nos pequenos grupos seja no grupo classe, durante o desenvolvimento das atividades de ensino e pesquisa.

4.4 Análise dos dados

A análise dos dados foi feita tendo por referência os nexos internos e externos do conceito de medida e as características empíricas e teóricas das elaborações sobre os nexos dos sujeitos da pesquisa. Para tanto, nos fundamentamo-nos nas formas de generalização empírica e teórica desenvolvidas no ensino conforme discute Davidov (1982, 1988) bem como na abordagem da atividade orientadora de ensino na formação. Para o estudo dos nexos conceituais da medida buscamos referências nas teorias matemáticas sobre medida, discutidas por Caraça (2003) e Aleksandrov (1988).

A construção dos dados aconteceu no decorrer do desenvolvimento das atividades. Os dados se constituíram nas sínteses das elaborações sobre os nexos conceituais e do conceito de medida, individualmente para a maioria das atividades propostas e individualmente e em grupos para a última atividade.

No transcorrer dos procedimentos metodológicos, estudamos a relação entre os nexos externos e os nexos internos conceituais da medida manifestos nas elaborações dos professores. Analisamos se na dinâmica utilizada, os resultados das atividades influíram na construção de novos conhecimentos e possibilitaram mudanças qualitativas nas elaborações conceituais das professoras.

4.5 A atividade orientadora de ensino e pesquisa

A principal fonte dos dados desta pesquisa consistiu nas atividades desenvolvidas em aula sobre o conceito de medida. As atividades que adotamos têm a característica de problematizar os nexos do conceito e de não se restringir a exercícios de cálculo de medida. A intenção foi de conferir às essas atividades os elementos teóricos da Teoria da Atividade de Leontiev (1983). Para este autor, a necessidade, o motivo, a ação são elementos estruturais da teoria da atividade e essenciais da estrutura da aprendizagem, sendo a necessidade o fator desencadeador da atividade. Ela motiva o sujeito a ter objetivos e a realizar ações para supri-la.

A teoria da atividade fornece elementos para a compreensão e organização do ensino e da aprendizagem dos conceitos científicos cuja formação por meio da instrução propicia o desenvolvimento psíquico do sujeito. O conceito científico envolve níveis de organização que não se limitam a captar apenas o aspecto empírico, externo, ou observável dos objetos ou fenômenos em estudo.

A atividade será orientadora, conforme Moura (2001), quando aplicada em sala de aula, com o objetivo de ensino e aprendizagem e quando define os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados.

O que diferencia a atividade orientadora de uma tarefa comum de exercícios de sistematização é a maneira de abordar o problema no ensino. A atividade orientadora é caracterizada por uma situação problematizadora que possibilita ao aluno estar psicologicamente ativo perante a situação. Passa a assumir a atividade como uma necessidade sua e em decorrência, elabora um plano de ação para resolvê-la. Isto é o que favorece a aprendizagem conceitual.

Na atividade orientadora de ensino, conforme Moura (2001), o conhecimento ocorre de forma inter-individual satisfazendo necessidades. Tem implícita a intencionalidade do professor ao buscar responder suas necessidades de organizar o ensino objetivando o ensino e a aprendizagem conceitual.

A atividade sob o ponto de vista da aprendizagem conduz ao desenvolvimento psíquico ao proporcionar o movimento de formação do pensamento teórico, assentado na reflexão, análise e planejamento e possibilita o desenvolvimento do aprendiz.

Davidov (1988) diz:

No curso da formação da atividade de estudo, nos escolares de menor de idade se constitui e desenvolve uma importante neo estrutura psicológica: as bases da consciência e do pensamento teórico e as capacidades psíquicas a eles vinculadas (reflexão, análise e planejamento) (DAVIDOV, 1988, p. 176).

Para Moura (2001), a atividade orientadora permite ao aprendiz, aprender a pensar criando conceitos num movimento semelhante ao da dinâmica da criação conceitual na história do conceito.

A atividade orientadora de ensino, nesta pesquisa, teve a intenção de proporcionar às professoras, problematizações sobre o conceito de medida que as levem a refletir sobre como ensinar este conceito para seus alunos. Uma das problematizações consistiu em propor a medição de objetos diferentes sem definir a grandeza a ser medida de forma que precisassem planejar suas ações de medir. Segundo Semenova “O plano interior de ações corresponde à capacidade de operar com o conceito e é esse plano interior que garante a planificação e a efetivação mental” (Semenova,1996, p.166).

Essas atividades têm a conotação de atividades de pesquisa e de ensino. De pesquisa porque as reflexões e respostas das alunas às atividades propostas se constituem nos dados da pesquisa. E tem significado de ensino por permitirem às professoras pensar (re)criar os significados conceituais da medida. As atividades consideram:

- a) O desenvolvimento histórico do conceito.
- b) Os nexos que o compõem.
- c) “A vivência dos sujeitos da pesquisa vinculada a um processo reflexivo-explicativo, dimensionado na dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe”. (SOUSA, 2004, p. 22,23).

As atividades de ensino são situações desencadeadoras que refletem o desenvolvimento histórico do conceito e os momentos de sua formação e auxiliam o aprendiz a pensar cientificamente sobre esse conceito. O pensar científico envolve níveis de organização que não se limitam a captar apenas o aspecto empírico, externo, ou observável dos objetos, e no caso da medida, a pensar sobre seus nexos conceituais como qualidade, quantidade, discreto, contínuo, unidade natura, unidade artificial e grandeza.

4.6 Desenvolvimento das atividades de ensino e pesquisa

O desenvolvimento das atividades, pelas professoras-aluna, foi organizado em dois momentos:

- ✓ O primeiro momento consistiu no desenvolvimento de um questionário individual com oito questões e teve por o objetivo obter informações sobre o perfil profissional e os conhecimentos iniciais dos professores sobre medida, como já esclarecemos anteriormente.
- ✓ O segundo momento foi caracterizado pelo desenvolvimento de quatro atividades orientadoras de ensino e pesquisa, com duração de 3 horas e meia cada.

No quadro a seguir apresentamos uma visão geral de cada momento e respectivas atividades, objetivos e os anexos nelas tratados.

Quadro geral das atividades (Q1)

	Atividade	Objetivo/característica	Elaboração	Anexo	Páginas
1º Momento	1ª etapa: perfil profissional do professor.	Delinear o perfil das professoras com relação ao tempo de magistério Atividade de Pesquisa	Individual	anexo 1	115
	2ª etapa: Estudo dos conhecimentos iniciais	O objetivo desta atividade foi estudar, como elas identificam qualidades e quantidades e que relações fazem entre elas com respeito aos aspectos contínuos e discretos. Atividade de Pesquisa e de aprendizagem.	Individual	Anexo 2	117
2º Momento	Qualidade e Quantidade. Discreto e Contínuo	Instigar mudanças na qualidade do pensamento da qualidade e quantidade. Estudar o controle das quantidades discretas e contínuas . Atividade de aprendizagem e pesquisa.	Individual e grupo	Anexo 3	119
				Anexo 4	121
				Anexo 5	123
				Anexo 6	125
				Anexo 7	127
Grandeza	Aprimorar o pensamento científico sobre qualidades e quantidades e grandeza. Atividade de aprendizagem e pesquisa.	Individual/ E grupo	Anexo 8	129	
Medição	Aprimorar o pensamento científico sobre o processo da medição. Atividade de aprendizagem e pesquisa.	Individual e grupo	Anexo 9	133	

Quadro 1

Faremos a seguir a descrição dos questionários e das atividades e faremos a exposição dos momentos da pesquisa e a forma como as atividades foram trabalhadas.

Descreveremos os momentos da pesquisa e a forma como as atividades foram trabalhadas.

4.7 Descrição dos Dados

4.7.1 Primeiro Momento: perfil profissional e conhecimentos iniciais das professoras

Este momento constou de um questionário que foi subdividido em duas etapas: a etapa A e a B. A etapa A envolveu três questões e tratou do perfil profissional dos sujeitos da pesquisa; e a etapa B, envolveu quatro questões sobre os conhecimentos iniciais das professoras com relação aos nexos conceituais da medida.

Apresentamos a seguir o desenvolvimento da cada etapa do primeiro momento

4.7.1.1 Etapa A: “PERFIL PROFISSIONAL”

Propusemos a elas que respondessem um questionário com três questões indicadas no quadro Q2 abaixo.

Quadro Q2.QUESTIONÁRIO SOBRE O PERFIL PROFISSIONAL

1) Qual a sua formação? Qual sua experiência com o magistério? Há quanto tempo?
2) Em sua experiência qual área de conhecimento você deu mais ênfase? Por quê?
3) Que lugar ocupa a matemática no seu dia-a-dia da sala de aula (tempo de preparação comparativamente a outras disciplinas/ nº de atividades desenvolvidas)?

Quadro 2

O questionário teve como objetivo fornecer dados para conhecermos o perfil profissional do professor com a intenção de entender o histórico dos sujeitos com relação a sua formação, ao tempo de experiência no magistério, a série na qual atuavam e como lidavam com a matemática

no do dia-a-dia da sala de aula. Dos dados provenientes das respostas construímos, no capítulo cinco, os quadros sínteses que se encontram no anexo 1 no quadros-sínteses QS2.1 pag. 115; QS2.2 pag. 115; QS2.3 pag. 116 e QS2.4 pag. 116.

4.7.1.2 Etapa B - Descrição da segunda etapa do primeiro momento: conhecimento inicial das professoras-aluno e de sua prática sobre o conhecimento da grandeza.

Esta etapa constou de um questionário (quadro 3) com o objetivo de investigar os conhecimentos iniciais das professoras com relação ao tema grandeza e medida.

4) Você já trabalhou "GRANDEZAS" com seus alunos?
5) Se já, de que forma?
6) Você já trabalhou "MEDIDA" com seus alunos? Em que série? Como o fez?
7) Caso tenha trabalhado recorreu a algum livro? Dê um exemplo de atividade que usou.
8) Você acha importante trabalhar o conteúdo medida? Explique o porquê.

Quadro 3

O quadro-síntese das respostas encontra-se no anexo 2, no quadro QS3.1 na página 117, no quadro QS3.2 na pag. 118 e no quadro QS3.3 na p.118

Passaremos a descrever as atividades que constituíram o que chamamos de segundo momento.

4.7.2 Descrição dos dados do segundo momento.

As atividades do segundo momento são de aprendizagem e de pesquisa, conforme já comentado no item que trata o "entendimento da atividade". Estas por sua vez foram elaboradas conforme os objetivos com relação aos nexos conceituais da medida que, em geral, não são tratados pelo ensino tradicional. Uma abordagem da natureza dos isolados de Caraça (2003), com

relação à unidade de quantificação dos aspectos discretos e contínuos possibilita a mobilização do pensamento e é um fio condutor ao aprofundamento do processo do conceito, conforme Davidov (1982).

As noções de qualidade e quantidade são alguns dos nexos fundamentais para a noção de grandeza e medida (Caraça, 2003). O estudo dos nexos conceituais da medida foi tratado em cinco atividades da Atividade 4.1 a atividade 4.5. Estas atividades constam nos seguintes anexos: anexo 3, p.119,120 e os respectivos quadros sínteses QS4.1 pag. 119; QS4.2 pág. 120; o anexo 4, p.121; QS5.1 pag.121 anexo 5: p.123; o anexo 6 pag.125.

Iniciaremos a descrição das atividades que trata da abordagem sob o aspecto da qualidade e da quantidade de um isolado.

Atividade 2.1: Qualidade e Quantidade

O objetivo desta atividade foi estudar, no pensamento manifesto das professoras, como identificam qualidades e quantidades e que relações fazem entre elas considerando aspectos contínuos e discretos. Além disso, desejava-se estudar a noção de enumeração associada à idéia de qualidade e quantidade e de número associado à grandeza.

Apresentamos às professoras, dois recortes da realidade de acordo com o conceito de isolado de Caraça (2003). Os dois recortes são representados pelos quadros com as que mostram respectivamente a cachoeira e os bois. Solicitamos a elas, que refletissem sobre as qualidades das duas imagens. E respondessem as questões do quadro 10 a seguir.

Quadro 4 (Q4)

Imagem 1 (I1)



imagem 2 (I2)



Observe os quadros 1 e 2.
1) Quais as qualidades que você observa no quadro 1? Quais as qualidades que você observa no quadro 2?
2) A quais dessas qualidades podemos atribuir intensidade?
3) Quais dessas intensidades são enumeráveis? Por quê?
4) As que são enumeráveis, atribua-lhes um número e explique o porquê da escolha desse número?

O quadro-síntese das elaborações das professoras relativas a esta atividade é apresentado no anexo 3 na p. 119 conforme a identificação em espirituais e físicas. Estamos considerando, com base em Davidov (1988), que as espirituais, agrupam qualidades que enunciam aspectos subjetivos das imagens como, por exemplo, feio e bonito. As segundas, as físicas, são as que admitem graus de intensificação, de senso comum como, por exemplo, maior e menor.

O quadro-síntese das elaborações escritas das professoras sobre a relação entre a qualidade, quantidade, intensidade, enumeração e a associação de número consta na p.120.

A próxima atividade, a atividade 2.2, trata do estudo das grandezas sob os aspectos discretos e contínuos.

Atividade 2.2: Estudo das Grandezas sob os aspectos discretos e contínuos.

Apresentamos às professoras três imagens, conforme o quadro com a imagem 3 e solicitamos que identificassem quais imagens representavam elementos organizados em unidades naturais e quais podem ser enumerados. A tarefa teve por objetivo identificar, no pensamento das professoras, o aspecto discreto e contínuo da grandeza.

Quadro 5(Q5)

Observe a imagem III.

Nela considere os seguintes elementos: pedras, ovelhas e cachoeira. Quais dos elementos estão organizados em unidades naturais: o das pedras, ovelhas ou da cachoeira? Quais podem ser enumerados? Por quê?

Quadro5 (Q5)



Imagem 3

As sínteses das elaborações das professoras estão no anexo 4 na pag. 121.

A próxima atividade estuda a identificação de vários tipos de qualidades no pensamento manifesto das professoras.

Atividade 3 : Identificação do tipo de qualidade: Atletas e animais.

Esta atividade foi subdividida em duas partes: uma delas solicitava indicar qualidades em atletas e outra nos animais. O objetivo era verificar em que medida as professoras identificavam qualidades que permitiam ou não a quantificação.

Apresentamos às professoras duas imagens, a dos atletas e dos animais representadas pelas imagens 4 e imagem 5 respectivamente.

Iniciaremos pela descrição da atividade dos atletas.

Atividade 3.1-Atletas.

Na atividade dos atletas comentamos com as professoras, que além da qualidade “jogar bem,” era necessário identificar outra qualidade que qualificasse um “bom” atleta de basquete.

Imagem 4



Atividade 3.2: Animais

Apresentamos às professoras imagens de animais conforme o quadro imagem Q5 e solicitamos a elas que identificassem a qualidade comum, a todos os animais, que provoca medo nas pessoas.

Imagem 5



Estas atividades têm por objetivo identificar, no pensamento manifesto das professoras, as qualidades sob os aspectos científico discretos e contínuos e que podem ser quantificadas.

As atividades 3.1 e 3.2 estão detalhadas nos anexos 5, p.123. As sínteses das elaborações das professoras com relação às atividades dos atletas estão nos quadros QS6.1 e QS6.2 na página 123 respectivamente.

As sínteses com relação a atividade dos animais estão nos quadros QS7.1 e QS7.2 na página 125 respectivamente.

Atividade 4 – Atividade da Jarra. Um caminho na busca do entendimento sobre grandeza: identificação da qualidade comum de determinadas substâncias.

Nesta atividade quisemos estudar o entendimento da qualidade comum a determinadas substâncias que permitem preencher um recipiente, a quantificação da qualidade e a possibilidade de representá-las numericamente.

Quadro 8

Uma jarra pode ser cheia de água, de vinho, de suco de laranja, gasolina, etc.
a) Qual é a qualidade comum a todas estas substâncias que as possibilitam preencher totalmente a jarra?
b) Esta qualidade possui quantidade?
c) Esta quantidade varia?
d) O homem sabe como conhecer esta quantidade?

Conforme CARAÇA (2003) que as qualidades não são propriedades intrínsecas dos objetos, mas são relações que se estabelecem entre os objetos de um isolado. Solicitamos às professoras que identificassem uma das qualidades comuns às substâncias indicadas no quadro atividade Q8 que lhes possibilitassem estar contidas na jarra. O detalhamento das elaborações das professoras consta no anexo 7, p.128.

Atividade 6. Estudo das Grandezas: grandezas possíveis de serem medidas.

A atividade consta de analisar no quadro abaixo, no qual são indicados vários movimentos qualitativos e suas respectivas grandezas.

Quadro 9 (Q9)

<p>a) suco</p> 	<p>b) som</p> 	<p>c) território</p> 
<p>d) viagem espacial</p> 	<p>e) medindo</p> 	<p>f) amor</p> 

A partir destes desenhos complete a tabela abaixo:

	MOVIMENTO	GRANDEZA
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Queremos lembrar que solicitamos, às professoras, leituras de textos teóricos antes do desenvolvimento da atividade e que normalmente eram discutidos após término da atividade. Entre os textos destacamos *a leitura* do capítulo do livro Caraça (2003) e do texto de Lanner de Moura (1995) que tratam dos aspectos da qualidade, quantidade, grandeza e unidade, já explicadas e referenciadas no capítulo teórico.

O objetivo da atividade consiste em identificar, no pensamento manifesto das professoras, as respectivas grandezas.

Esta atividade consiste em atribuir aos objetos indicados no QUADRO Q9 as qualidades e respectivas intensidades relativas a determinadas funções que o objeto cumpre na interação com as pessoas.

No quadro, os movimentos podem ser identificados por várias grandezas, porém solicitamos que nos indicassem uma. Como movimento, entendemos algo que não é estático. Embora os itens da tabela sejam representados por registros instantâneos, estáticos eles se originaram de ações.

As sínteses das elaborações, das professoras constam no anexo 8, p. 129,130 e 131.

A próxima atividade tem característica de atividade orientadora de ensino do conceito de medida ao proporcionar, ao indivíduo, além da necessidade e o motivo, o planejamento das ações de medir. Esse planejamento delinea mentalmente o processo de medição. Conforme Leontiev (1983), o indivíduo em atividade se apropria das capacidades humanas elaboradas historicamente e possibilita o movimento do pensamento no sentido da identificação, nos objetos, das qualidades substanciais destes e como proceder para efetivar sua medição.

Atividade 7 - “O processo da medição”

Apresentamos às professoras um conjunto-medida contendo alguns objetos descritos a seguir. Embora os objetos fossem os mesmos, o tamanho dos objetos variava para cada conjunto.

- a) Pedra.
- b) Garrafa contendo diferentes quantidades de água.
- c) Um pedaço de cartolina de forma totalmente irregular.
- d) Pedaço de fio.
- e) Pedaço de tronco de madeira de diferentes tamanhos.
- f) Copos de plásticos.

Solicitamos que trabalhassem em grupos e com todos os presentes e se constituíram por todas as alunas presentes na aula. A formação dos grupos foi por elas estabelecida e o propósito da atividade era trabalhar o processo da medição. Este, de acordo com Caraça (2003), envolve dois aspectos: o teórico e o prático. Nesta atividade tratamos, sobretudo, do aspecto prático.

O objetivo da tarefa era proporcionar às professoras, reflexão sobre os nexos conceituais da medida, e decorrente dela, possíveis mudanças na qualidade do pensamento com relação aos níveis de organização necessários para a aquisição do conceito de medida.

A reflexão, a análise e o plano interior das ações, elementos fundamentais do pensamento teórico, permitem identificar as operações mentais do processo de domínio do conceito. No caso da medida, nossa análise relativa ao pensamento teórico ou generalizações teóricas é caracterizada pelas relações entre discreto e contínuo, entre a grandeza com qualidades quantificáveis; pela predominância do número racional e pelas possibilidades de avanços de um tipo para outro de generalização.

As elaborações detalhadas das atividades realizadas pelas professoras constam no anexo 9 da pag. 133 a pag.135.

Propusemos trabalho em grupo e sugerimos que explicitassem, por escrito, os procedimentos utilizados para efetuar a medida.

Neste capítulo tratamos da metodologia e nele descrevemos os sujeitos, as atividades trabalhadas, os instrumentos que nos auxiliaram a registrar os dados para efeito de análise.

No próximo capítulo faremos a descrição dos dados seguindo os momentos que foram determinados na metodologia, ou seja, faremos inicialmente a descrição do primeiro momento e a seguir a do segundo momento.

5. DISCUSSÃO DOS DADOS

Na prática da matemática escolar, não é comum o professor se distanciar ou até tornar-se alheio aos conteúdos das propostas curriculares oficiais. Supomos ser este, também, o caso das professoras desta pesquisa. Por isso, sabemos de antemão que todas devem ter tratado ou, pelo menos, traçado em seus planos de aula, o assunto “medidas” por ser este um tema indicado nos currículos escolares e nos livros didáticos. Para nós é um assunto peculiar e, como já afirmamos em outros momentos, de importante contribuição para o conhecimento geral do aluno que, por meio da medida, pode inter-relacionar conhecimentos de diferentes áreas, bem como, para a formação de seu pensamento, de generalização ao aprofundar as interconexões deste conceito.

São os professores das séries iniciais e de Educação Infantil que poderão instigar os primeiros interesses das crianças por este assunto. Nossa inquietação consiste em saber se esses professores têm uma formação conceitual de medida que os permite proporcionar para suas crianças um espaço pedagógico de problematização e de instigação do pensamento sobre este conceito.

A pesquisa é o espaço que nos possibilita perscrutar a disponibilidade conceitual do professor para o ensino deste conceito. O que as professoras desta pesquisa pensam sobre a medida e suas conexões conceituais e como têm ensinado este assunto dentro de seu tempo de exercício do magistério? Esta foi a pergunta de base que tínhamos ao formular o questionário para buscar informações iniciais que pudesse servir de referência para posteriormente, avaliarmos progressos nas elaborações que viessem a fazer ao desenvolver atividades de medida. O objetivo da tarefa era fazer com que as professoras expressassem seu entendimento sobre o assunto.

O questionário, apresentado anteriormente na página 46, foi respondido pelas professoras e se constituiu, assim, no primeiro momento da pesquisa. Para a análise das informações por ele obtidas o distinguimos em duas partes. A parte A compreende as três primeiras questões que tratam do perfil profissional das professoras que participam da pesquisa e a parte B, as cinco questões seguintes que tratam dos conhecimentos iniciais das professoras referentes aos nexos conceituais da medida.

Na parte A, das 13 professoras encontramos 9 com mais de 10 anos de magistério e 4 com um tempo menor do que este. Onze (11) professoras atuam na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. Esta concentração do exercício na Educação Infantil e no Fundamental aumentou

nossa expectativa sobre se tratam e como tratam o assunto medida na faixa etária correspondente a esses níveis. Sabemos que na pré-escola a preocupação com a matemática está relacionada com a vida diária das crianças com a contagem com os números naturais.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais, os objetivos principais com a matemática para a Educação Infantil são descritos em função da faixa etária.

Para crianças de zero a três anos

A abordagem da Matemática na educação infantil tem como finalidade proporcionar oportunidades para que as crianças desenvolvam a capacidade de estabelecer aproximações a algumas noções matemáticas presentes no seu cotidiano, como contagem, relações espaciais, etc. (grifo nosso). (PCNs, 1998, p.213).

E para crianças de quatro a seis anos

Para esta fase, o objetivo é aprofundar e ampliar o trabalho para a faixa etária de zero a três, garantindo, ainda, oportunidades para que sejam capazes de:

- reconhecer e valorizar os números, as operações numéricas, as contagens orais e as noções espaciais como ferramentas necessárias no seu cotidiano;
- comunicar idéias matemáticas, hipóteses, processos utilizados e resultados encontrados em situações-problema relativas a quantidades, espaço físico e medida, utilizando a linguagem oral e a linguagem matemática;
- ter confiança em suas próprias estratégias e na sua capacidade para lidar com situações matemáticas novas, utilizando seus conhecimentos prévios. (PCNs, 1998, p.214).

Como conteúdos a serem trabalhados, os PCNs (1998) sugerem que:

Para crianças de zero a três anos

- Utilização da contagem oral, de noções de quantidade, de tempo e de espaço em jogos, brincadeiras e músicas junto com o professor e nos diversos contextos nos quais as crianças reconheçam essa utilização como necessária.
- Manipulação e exploração de objetos e brinquedos, em situações organizadas de forma a existirem quantidades individuais suficientes para que cada criança possa descobrir as características e propriedades principais (grifo nosso) e suas possibilidades associativas: empilhar, rolar, transvasar, encaixar etc. (PCNs, 1998, p.213).

Como a medida não se restringe a este campo numérico, pode não ser tratada neste período da educação escolar por entender-se ser um conceito muito complexo para as crianças.

Os conteúdos para crianças de quatro a seis anos foram organizados pelos PCNs em três blocos.

Conforme os PCNs (1998),

Nesta faixa etária aprofundam-se os conteúdos indicados para as crianças de zero a três anos, dando-se crescente atenção à construção de conceitos e procedimentos especificamente matemáticos. Os conteúdos estão organizados em três blocos: “Números e sistema de numeração”, “Grandezas e medidas” e “Espaço e forma”. (PCNs 1998, p.218).

Grandezas e medidas são, portanto, recomendados para esta faixa etária e em relação a esses conteúdos os PCNs (1998) ainda sugerem a:

- Exploração de diferentes procedimentos para comparar grandezas.
- Introdução às noções de medida de comprimento, peso, volume e tempo, pela utilização de unidades convencionais e não convencionais.(grifo nosso)
- Marcação do tempo por meio de calendários.
- Experiências com dinheiro em brincadeiras ou em situações de interesse das crianças. (PCNs, 1998, p.219, 226).

Antes mesmo de avaliar como as professoras entendem e abordam a medida, procuramos identificamos a relação que têm com a matemática e com sua prática. Pensamos que a relação que estabelecem com a matemática inclui a que têm com a medida.

Verificamos que apenas duas professoras dão prioridade em sua prática ao trabalho com matemática e 11 às outras áreas. Supõe-se que esta prioridade se repita pelo tempo do exercício que têm com o magistério. É de se perguntar o motivo pelo qual isto acontece, já que a contagem e os cálculos têm início na vida cotidiana da criança quase concomitantemente ao início do uso da língua materna. Elas justificam esta priorização das outras áreas sobre a matemática dizendo:

‘Apesar de o trabalho ser polivalente existe claro um maior espaço para a Língua Portuguesa, seguindo a grade curricular e até por ser uma série que dá certa continuidade à alfabetização ‘(questionário inicial professora A).’

‘Ao realizar meu trabalho devo admitir que dou ênfase as disciplinas humanas (hist./geo./por.), acredito que tais disciplinas me envolve mais pois oferecem margem p/ discussões de valores sociais, econômicos e políticos, importantes p/ formação dos alunos.

(Questionário inicial professora B)

‘Cultura Corporal e Oral escrita, talvez por não ter uma formação matemática que garantisse a competência de ensinar com consciência e clareza e na área de ciências naturais percebo a mesma dificuldade.

(Questionário inicial professora D).

Língua Portuguesa, pois percebia a grande dificuldade em grafar e produzir textos e interpretá-los prejudicando outras disciplinas.

(Questionário inicial professora E).

Português, porque são séries que exigem que o professor alfabetize.

(Questionário inicial professora M).

As professoras E, A e M dizem trabalhar com séries cuja grade curricular confere maior espaço para a Língua Portuguesa. Para elas este é o motivo pelo qual não enfatizam a matemática. Poderíamos dizer que essas professoras quando se sentem interpeladas porque dedicam menos tempo à matemática em sua prática de sala de aula, recorrem a uma justificativa curricular para argumentar esta sua opção.

As professoras B e D têm justificativas que residem em argumentos de opção pessoal quanto à ênfase que pretendem dar à formação dos alunos. Para a professora B, as disciplinas de humanas são veículos de mais fácil conexão entre os objetivos de formação dos alunos que avaliam como importantes para serem atingidas pelo seu trabalho. A professora D considera sua formação matemática insuficiente e não se sente segura para enfatizar a matemática.

Os dois tipos de justificativa nos induzem a pensar que essas professoras devem ter passado por uma formação que deu conta de separar os processos de aprendizagem da língua materna daqueles da matemática bem como de separar a matemática dos conteúdos sociais, econômicos e políticos da vida cotidiana.

Pesquisas recentes trazem como contribuição casos em que a formação da linguagem matemática pode estar combinada com a da língua materna de forma que uma serve de base para a outra. Pesquisas como a de Moura (1992) e Lanner de Moura (1995) tentam evidenciar esta combinação para a formação do signo numérico e das noções de medida em crianças pré-escolares.

Autores como Caraça (2003), Hogben (1970), Dantzig (1970), Ifrah (1987) e outros discutem em seus textos a profunda relação da matemática com as necessidades e valores socioeconômicos e culturais do homem.

Caraça (2003) discute, no prefácio de seu livro, as atitudes da ciência e a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

A ciência, para este autor, pode ser encarada sob dois aspectos diferentes: ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros, como algo criado, pronto e harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada; desta segunda forma, descobrem-se hesitações, dúvidas e contradições que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras dúvidas, hesitações e contradições.

Nessa forma de encarar a ciência segundo o autor:

Vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência. Sob esse aspecto a Ciência encarada dessa forma parece como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação. (Caraça, 2003, p. xxiii).

A formação matemática fragmentada da vida pode ser o verdadeiro motivo porque dedicam a essa área menor tempo em seu ensino, pois esta não lhes deu oportunidade de conhecer as raízes da sensibilidade e criatividade humanas desta ciência do rigor e da abstração. Por este motivo se sentem tão distantes dela e desavisadamente repetem esta mesma relação com seus alunos.

São testemunhas desta formação, os registros nos portfólios de memoriais das professoras onde comentam que sua formação matemática escolar foi deficiente, incluindo aquela do curso do magistério.

Algumas afirmam não gostar de matemática por não a entender, e isto, segundo elas, deve-se ao fato da matemática não ter sido bem explicada ou devidamente enfatizada durante seu percurso até a Universidade.

Vejamos o que dizem algumas professoras em seus portfólios:

'... Optei por fazer o Magistério e infelizmente a disciplina de matemática apareceu superficialmente nos três primeiros anos com os conteúdos de geometria, álgebra e aritmética e no último resolvemos problemas matemáticos para as primeiras séries. Hoje enquanto professora preocupa-me o ensino e procuro não cometer os mesmos erros que muitos professores cometeram quando eu era aluna'-(portfólio, 2004, prof^a. C)

'... Tive muita dificuldade com a matemática, desde o ensino primário. Decorava a tabuada, mas não adiantava, pois tinha bloqueio só de saber que tinha que resolver problemas. Esta disciplina ajudou-me a desmistificar a matemática que tive. ' (portfólio, 2004, prof^a. D)

Das reflexões manifestas acima é possível perceber as críticas que fazem à formação matemática que tiveram e de sua intenção em não repetir com seus alunos um ensino baseado em repetições que os obriga a aceitar verdades impostas fragmentadas e sem significados. O depoimento da professora D nos indica o quanto os conteúdos ensinados em Fundamentos de Matemática ajudaram-na a desmitificar seu entendimento sobre matemática.

Como elas tratam, então, assuntos mais específicos como o da medida? Nas respostas aos questionários as 13 professoras afirmam terem trabalhado medida e seus nexos conceituais como grandeza.

Segue abaixo os depoimentos de algumas professoras sobre o seu trabalho com grandeza.

As grandezas são trabalhadas o tempo todo, com conceitos básicos da matemática. (atividades-professora I)

Sim, superficialmente, pois achava as crianças novas para este trabalho, hoje espero muito mais. (atividades- professora J)

Sim, pois considero como grandeza quando podemos quantificar alguma coisa. (atividade-professora G)

Sim, através de medidas com m, cm, km, hora.(atividade professora L)

A princípio estas informações nos pareceram em contradição com a outra que indica que todas as professoras trabalharam com grandezas e medidas. Na verdade, apesar de a maioria trabalhar menos com matemática do que com outras áreas, chama-nos a atenção que mesmo no pouco tempo que disponibilizam a ela em sala de aula, trabalharam com medida e não apenas esporadicamente, mas como afirma a professora I “o tempo todo”.

O detalhamento das respostas sobre a experiência das professoras com relação ao tema grandeza foi organizado conforme os quadros QS2.4 na pag. 116, QS3.I na pag. 117 e QS3.2 na pag. 118.

Nas falas anteriores, chama a atenção o julgamento que a professora J faz de sua prática sobre as grandezas, avalia-a como superficial e justifica que assim procede por entender que as crianças ainda não estariam maduras cognitivamente para o nível de abstração que este conceito exige. Talvez, por este motivo, fala de uma abordagem superficial do assunto.

As orientações das Propostas Curriculares Nacionais de 1998 sugerem que se trabalhe com as crianças das séries iniciais do ensino fundamental apenas com noções de grandezas e medidas. Falar em noções e não em conceitos, seja, talvez, uma forma de dizer que se pode ou até se deve trabalhar aspectos mais elementares do conceito de medida com as crianças. Diríamos os aspectos que dizem respeito ao lado prático da medida como define Caraça (2003). Se a professora J estivesse trabalhando com suas crianças apenas noções de medida, não seria adequado avaliar sua prática como superficial, pois estaria condizente com as propostas oficiais.

Por outro lado, podemos encontrar nas falas das professoras indícios de que lhes falta, ainda, um conhecimento mais profundo sobre grandezas e medidas que lhes permita incluir em suas práticas as orientações expressas pelos PCNs sobre este assunto:

As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica. (PCN, 1997. p 39).

E mais,

...Resolvendo situações-problema, o aluno poderá perceber a grandeza como uma propriedade de certa coleção de objetos; observará o aspecto da “conservação” de uma grandeza, isto é, o fato de que mesmo que o objeto mude de posição ou de forma, algo pode permanecer constante, como, por exemplo, sua massa. Reconhecerá também que a grandeza pode ser usada como um critério para ordenar uma determinada coleção de objetos: do mais comprido para o mais curto ou do mais pesado para o mais leve.

Finalmente, o estabelecimento da relação entre a medida de uma dada grandeza e um número é um aspecto de fundamental importância, pois é também por meio dele que o aluno ampliará seu domínio numérico e compreenderá a necessidade de criação de números fracionários, negativos, etc. (PCN, 1997, p 83).

Das respostas dadas observamos que mais da metade das professoras dizem trabalhar com grandeza. Porém, conforme as informações do questionário percebemos que é dada maior ênfase, ao citarem exemplos à grandeza comprimento. Podemos dizer que, em face ao destaque dado, o conhecimento que lhes é mais familiar sobre grandezas é o referente ao comprimento. O que, na verdade, seria um conhecimento um tanto reduzido sobre este assunto e que pouco contribuiria para um trabalho de formação conceitual mais integrador com a criança.

Verificamos, também, não estar presente em suas falas um conhecimento que relacione medida e grandeza com espaço e forma, com conservação, proporcionalidade e número. Este fato pode indicar que não tenham formado um conhecimento mais profundo da medida.

A qualidade de seus conhecimentos manifesta-se nas respostas que dão à questão que pergunta como trabalharam medida com seus alunos. Ao tabular essas respostas no Q3.1 (Anexo 3 p. 133) verificamos que todas as professoras explicitam trabalhar ações de comparação, sendo que seis delas dizem simplesmente propor comparações entre as grandezas, quatro especificam mais, propõem a aplicação de um padrão para comparar as grandezas que serão medidas. Dessas,

três trabalham com um padrão não convencional, sendo que duas utilizam como padrão não convencional partes do corpo como: palmo, pé e passo.

Entender a medida como comparação de grandezas de mesma espécie, sendo que para esta comparação seja selecionada uma unidade coerente, faz parte do conhecimento, em geral, expresso nos livros didáticos, ou seja, é parte de uma definição substancial e mais comum da medida. Porém, as falas individuais das professoras não expressam este entendimento por completo.

A referência à aplicação a um padrão não convencional inclui dois tipos de conhecimento sobre a medida, um didático e o outro conceitual e que nem sempre um acompanha o outro. O conhecimento didático indica as mediações de significados que podem ser feitas para a aprendizagem do conceito. Usar padrões não convencionais pode levar à necessidade de universalizar a unidade para comparações numericamente coerentes. Para o padrão não convencional surgirá, também, a necessidade de estabelecer os múltiplos e submúltiplos sendo que, para os padrões convencionais, estes já estão estabelecidos. Neste caso, serão mobilizadas as idéias de unidade, de proporcionalidade, de conservação, de transitividade, de número fracionário, de linguagem matemática e outros.

As respostas individuais das professoras não circunscrevem esses conhecimentos, mas com o conjunto das respostas é possível tecer esta rede de significados. Ou seja, cada professora ao dizer como ensina, expressa um fragmento da totalidade das ações desejáveis para o ensino da medida: algumas falam de comparação entre grandezas, outras de aplicação de um padrão para a comparação e outras, ainda, da aplicação de um padrão não convencional. É, portanto, o conjunto de suas falas que compõe a integração das partes que, de outro jeito, ficam isoladas e sem efeito conceitual.

Se as professoras explicam usar um padrão não convencional é de se supor que consideram que exista também o convencional formal, ou seja, um conhecimento conceitual de maior complexidade e abstração do que o não convencional. Vemos isto expresso na fala da professora A:

Sim, medindo espaço da sala de aula, de objetos, distância de saltos, a massa de objetos, e a capacidade de líquidos, comparando, estimando e a partir de unidades de medidas não padronizadas para depois passar as unidades padrões. (professora A)

Como vimos, algumas professoras dizem usar partes do corpo como padrão não convencional. Não é possível saber se utilizaram essas unidades com a mesma intenção indicada pelos PCNs.

As propostas curriculares nacionais sugerem que:

O trabalho com medidas dá oportunidade para abordar aspectos históricos da construção desse conhecimento, uma vez que, desde a Antiguidade, praticamente em todas as civilizações, a atividade matemática dedicou-se à comparação de grandezas.

Assim, por exemplo, a utilização do uso de partes do próprio corpo para medir (palmos, pés) é uma forma interessante a ser utilizada com os alunos, porque permite a reconstrução histórica de um processo em que a medição tinha como referência as dimensões do corpo humano, além de destacar aspectos curiosos como o fato de que em determinadas civilizações as medidas do corpo do rei eram tomadas como padrão (PCN, 1997, p.83).

O uso de unidades não convencionais aparece em suas falas como um recurso didático mais acessível às crianças e não como uma forma de, também, ensinar as crianças que as técnicas de medir foram se aperfeiçoando ao longo da história.

Refletindo sobre sua prática, algumas repostas das professoras ilustram o seu saber ensinar a medida:

‘Educação infantil com salto de altura e salto de extensão que medíamos com quantidade de passos, porém sem problematizar os diferentes tamanhos de pés e outras formas de medir.’ (professora D)

‘Sim, no pré (crianças de 6 anos) medi cada criança e cortei para cada um barbante com seu respectivo tamanho, fizemos comparação e colocamos em ordem crescente. (professora J)’

‘Neste ano já trabalhamos com medidas de tempo, medidas de massa, medidas de comprimento e estamos trabalhando medida de capacidade’(professora K)

Desses depoimentos observamos que apenas as professoras A e K referem-se à medição de outras grandezas, além do comprimento que é citado pela maioria.

Ao falarem sobre a importância do ensino da medida apenas uma professora discorda que seja um assunto importante para a criança. A justificativa da razão pela qual discorda registrada no seu questionário:

Não, por se tratar de crianças pequenas, o assunto surge em diferentes momentos não sendo planejado com antecedência. (professora J)

Para a maioria, trata-se de um assunto que deve fazer parte da formação da criança seja pela sua utilidade seja pelo desenvolvimento matemático que pode proporcionar, justificando, ainda, esta importância para que o aluno tenha contato com os sistemas de medidas e possa fazer uso deles no seu cotidiano.

Conforme as respostas de algumas professoras:

Acho importante porque ela faz parte do nosso dia-a-dia. Sem elas os números praticamente não teriam função. (professora H)

Sim, pois a medida está presente em nosso cotidiano. (professora E)

Eu acho importante trabalhar o conteúdo medidas tendo em vista que, o aluno precisa ter contato com os sistemas de medidas e fazer uso deles no seu cotidiano (professora K)

A importância que atribuem ao ensino da medida mesmo que de acordo com alguns objetivos projetados para o seu ensino em livros didáticos e nas propostas curriculares oficiais conforme citados no início desta parte, restringe-se à utilidade e formalismo dos sistemas de medida. A esta importância poderá ser incluído, ainda, o argumento da formação geral e interdisciplinar do aluno.

As informações que obtivemos do questionário tecem um quadro dos conhecimentos iniciais sobre medidas e sobre como ensiná-las que as professoras da pesquisa possuem. Tais respostas mostram que nas afirmações individuais não é possível encontrar um conhecimento profundo e integrado deste conceito. Mas reunindo o conjunto das afirmações seria possível aproximá-las de um conhecimento teórico de medida segundo o explicita Davidov (1988), pois para este autor, nas escolas em geral, é dada ênfase ao método empírico de trabalho com as crianças e que, segundo este autor, não possibilita a formação de conceitos necessários para o desenvolvimento do pensamento teórico, isto é, do pensamento de generalização. No método empírico, considera o autor, são trabalhados somente os aspectos externos e perceptíveis do conceito que, no caso da medida, indicamos como sendo o uso dos instrumentos de medir e a transformação de unidades, ficando ausente o entendimento do que significa unidade, grandeza, grandeza discreta e contínua, grandeza escalar e vetorial, porque e o quê se mede, as interfaces da medida nas diferentes áreas de conhecimento, suas inter-relações no âmbito da matemática, seu aspecto prático e o aspecto teórico.

Conforme Davidov (1988), a ênfase dada ao concreto manipulativo permite apenas identificar propriedades externas e superficiais dos objetos e isto dificulta o processo da abstração

e do pensamento teórico no qual resulta o conceito. De acordo com Davidov (1988), as chamadas qualidades substanciais, ou essenciais ou os atributos internos são os responsáveis pelas generalizações teóricas que possibilitam a aprendizagem conceitual.

Em suas pesquisas, Davidov (1988) conclui que o entendimento do conceito de grandeza e de suas propriedades é fundamental para o entendimento de outros conceitos matemáticos, pois estão estritamente ligados a eles. Um exemplo disso é o entendimento dos conjuntos de números estudados na escola primária. ‘O estudo das relações gerais entre as grandezas permite considerar diferentes espécies de números. Esses últimos podem de fato, ser vistos como manifestação particular de uma grandeza expressa com a ajuda de uma outra grandeza’. (grifo nosso) (Davidov, 1988).

Temos comparado o que as professoras dizem de seu entendimento de medidas e grandezas e de sua prática com a abordagem sugerida pelos PCNs pelo fato de estas propostas estarem vigentes no período do exercício do magistério dessas professoras e, de alguma forma, suas práticas deverem ser orientadas por essas propostas.

Entretanto, observamos nos dados que, para a maioria dos professores, a importância desse ensino está relacionada ao seu uso no cotidiano, ou seja, a medida é apenas considerada no seu aspecto técnico, como um instrumento utilitário. Essas educadoras desconhecem, ou talvez não saibam, considerar em suas práticas que devem abordar a partir desse conteúdo o desenvolvimento da “capacidade de abstrair, generalizar, transcender o que imediatamente sensível” (a quem pertence essa frase? Por que está entre aspas?) além de caracterizar-se:

... por sua forte relevância social, com evidente caráter prático e utilitário. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. (PCN,1997.p 39).

Sousa (1999, p.149), em sua dissertação de mestrado, aponta a dificuldade de alguns professores em se relacionar com as propostas curriculares e faz uma consideração sobre como as propostas chegam aos professores. De acordo com a autora, estas pouco contribuem para suas modificações. A matemática moderna, conforme a pesquisadora, é considerada por esses educadores como uma matemática axiomática, rigorosa e formal.

Estão ausentes manifestações sobre a unidade de medida, sobre os aspectos discretos e contínuos do que se mede, sobre qualidade e quantidade, sobre coerência do padrão com a

grandeza a ser medida e sobre o fato desse conceito ser um elemento articulador para conceitos de geometria, da álgebra, dos campos numéricos, entre outros conceitos matemáticos, ou como fator impulsionador para o pensamento científico.

A quase ausência de uma visão mais profunda do conceito de medida pode ser, no entanto, atribuída à formação desses professores que, para a maioria, foi o curso tradicional do magistério que não só contemplava em seus currículos uma formação matemática que completasse ou aprofundasse o domínio dos conteúdos do ensino fundamental, como ao trabalhar a didática da matemática, ficou influenciada por uma abordagem formalista dos conceitos.

Embora esta análise dos conhecimentos iniciais das professoras possa contribuir para entendermos suas elaborações no decorrer das atividades e podermos avaliar a ocorrência ou não de algum progresso relativo a esses conhecimentos, ao final do desenvolvimento das atividades sobre os nexos conceituais da medida propostas na pesquisa, ela nos fornece informações sobre o tratamento que essas professoras dispõem ao assunto. O que nos surpreende é o fato de todas terem abordado de alguma forma o tema, ou seja, manifestam ter esta prática, já na Educação Infantil. Esta observação reforça o fato de querermos estudar o aprofundamento deste conceito, também, com professores da Educação Infantil.

A partir dos dados coletados, será possível refletir sobre esses conhecimentos iniciais das professoras e que tipos de elaboração terão as respostas às problematizações colocadas pelas atividades propostas por esta pesquisa. É possível, dessa forma, questionar: haverá progresso frente a seus conhecimentos iniciais manifestos no questionário? Quais poderão ser esses progressos? Procuraremos responder a essas questões que compõem o enfoque desta pesquisa na análise das informações obtidas no segundo momento da tese e que serão realizados a seguir.

Os aspectos técnicos da medida não constituem a complexidade e profundidade deste conceito, nem mesmo sua relação com os conhecimentos históricos e culturais que constituíram este conceito através da história da luta dos homens na produção de bens e de conforto para a vida.

Por que medir, para que medir e o que medir são questões que deveriam compor o pensar e o fazer a medida no ensino. Ao supor que a medida é uma forma de pensar a realidade; é um pensamento que modela numericamente os movimentos quantitativos de nossa vida diária, deveríamos ir mais a fundo no ensino deste conceito.

A medida torna a vida artificial. Se observarmos no nosso entorno, neste momento, verificaremos que grande parte de objetos que o compõem estão ajustados, pela medida, à função que cumprem neste determinado espaço. Se nos encontramos sentados numa cadeira, esta está ajustada proporcionalmente para acomodar nosso corpo nesta posição. Um vaso com plantas, adequado na forma e na medida para o cultivo da planta, a sala onde estamos está feita sob medida para se sustentar em pé, as roupas que estamos vestindo são escolhidas para se adequarem à estrutura e tamanho de nosso corpo e assim por diante.

Há um modo de pensar a medida diferente do modo de contar objetos, de calcular perdas e ganhos. Para medir, individualizamos aspectos da realidade que chamamos de grandezas. Conforme discutimos anteriormente, amparados nas teorias de Caraça (2003) e Davidov (1988), o entendimento do conceito de grandeza é relativo e surge da comparação entre as qualidades de objetos num isolado. É na comparação das qualidades que se torna possível a quantificação.

Do ponto de vista da quantificação da realidade, definimos dois tipos de grandezas: as grandezas discretas e as grandezas contínuas.

Do ponto de vista da medida, a realidade pode ser entendida sob vários aspectos. Os aspectos discretos e contínuos são alguns deles. Como discreto, entende-se o que exprime objetos distintos, que se põem à parte como já definimos no capítulo III. Conforme Aleksandrov (1978), o discreto e o contínuo são duas classes contraditórias. A classe dos discretos é a dos que podem ser divididos e a dos contínuos são indivisíveis.

Contínuo é o que está simultaneamente unido à outra coisa. As classificações em discreto e contínuo provêm das interações do indivíduo com a realidade do ponto de vista da quantificação de seus fenômenos, pois esses não se apresentam da mesma forma quando queremos controlá-los numericamente ou do ponto de vista de suas variações quantitativas. Alguns se apresentam em unidades separadas e com suas vizinhanças topologicamente distintas como, por exemplo, as unidades ovelhas. Outros se apresentam num contínuo, como a água, o ar, etc. o que exige que lhes atribuamos unidades de contagem que mais propriamente denominamos de unidades de medida como o litro, o kg, etc.

Por vezes, ficamos em dúvida com relação à noção de qualidade, quantidade e grandezas quer sejam discreta ou contínuas. Para muitos educadores, principalmente os que atuam na educação infantil, a idéia de número está associada à idéia de quantidade e esta por sua vez, associada à contagem. Ora esta idéia é a de número natural que se origina de uma

correspondência biunívoca e que só acontece para objetos que se nos apresentam separados em unidades na natureza. Porém, como sabemos, a idéia de número, embora englobe a idéia do natural, é mais abrangente, pois além da contagem envolve a medição.

A idéia de número engloba os números racionais, os irracionais, os reais e os complexos. Em nosso estudo, estamos apenas tratando do aspecto prático da medição e este só pode ser representado com número racional. Portanto, a idéia de número vai além do número natural e isto deve ser contemplado mesmo para o nível infantil. Esta noção, entretanto, não é aceita por educadores piagetianos, como Kamii (1990) que é contrária ao uso de barras Cuisenaire já que estas não refletem a diferença entre qualidades discretas e contínuas. Ora uma barra Cuisenaire sob o ponto de vista da contagem é separada das outras apresentando a qualidade de ser discreta, podendo, neste caso, ter em comum com outras barras a grandeza discreta e poder ser contada. A barra, por outro lado, pode ser encarada como grandeza contínua, por apresentar qualidades como massa, peso, comprimento e outros.

O que estamos, na verdade, querendo enfatizar é que quando pensamos na qualidade de um objeto apresentar-se separado ou não, estamos associando essa qualidade a quantidades que podem ser contadas ou podem ser medidas com outros objetos e dessa relação entre eles destacamos por sua vez grandezas comuns que são chamadas de discretas ou contínuas.

As noções de qualidade e quantidade foram por nós adotadas em conformidade com Caraça (2003), e descritos no capítulo III. Para melhor entendermos a relação entre elas com os conceitos de grandeza discretas e contínuas supomos ser necessário buscar novamente subsídios em Caraça (2003).

Poucos livros didáticos exploram esse modo de pensar a realidade pelas qualidades e suas intensidades provenientes da comparação quantitativa entre elas e pelos aspectos discretos e contínuos que dela destacamos com o fim de enumerá-la. Textos e a discussão com as professoras desses aspectos, que denominamos de nexos conceituais da medida, com as professoras tinham a intenção de problematizá-los, pois os encontramos ausentes em seus conhecimentos iniciais manifestos no questionário. Para reforçar este objetivo que tínhamos com os textos lidos propusemos as atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 detalhadas na metodologia.

Na atividade 4, detalhada conforme anexo 3 na p. 119 e 120, apresentamos às professoras, representados nas imagens 1 e 2, dois recortes da realidade: na figura 1, uma determinada quantidade de bois e na figura 2, uma cachoeira. Propusemos às professoras pensarem sobre as

qualidades que poderiam destacar das duas imagens orientadas pelas quatro questões indicadas nas figuras abaixo.

O objetivo desta atividade foi estudar, nas elaborações manifestas pelas professoras, como identificavam qualidades e quantidades e que relações faziam entre elas com respeito aos aspectos contínuos e discretos.



Figura 1



Figura 2

Quadro 7

Observe as figuras 1 e 2.
1) Quais as qualidades que você observa na figura 1. Quais as qualidades que você observa na figura 2
2) A quais dessas qualidades podemos atribuir intensidade?
3) Quais dessas intensidades são enumeráveis? Por que?
4) As que são enumeráveis, atribua-lhes um número e explique o porque escolheu este número?

Encontramos nas respostas um movimento alheio a nossa expectativa. Esperávamos que as professoras destacassem, mesmo que não todas, para ambas as figuras, aspectos relacionados ou à contagem ou à medida.

Organizamos as respostas das professoras no quadro 4 (anexo 3 p. 119, 120). Os tipos de respostas nos sugeriram duas categorias de elaborações que denominamos de tipo espirituais, e de tipo físicas. As respostas de tipo espirituais se referem a qualidades destacadas das figuras com conotação subjetiva e as de tipo físicas se referem a graus de intensificação das qualidades destacadas.

Para a figura 1 foram destacadas por 12 professoras, qualidades espirituais como: união, graça, carinho, vida, fartura, beleza, frescor, vida, paz, Deus, tranqüilidade, sem natureza; e as qualidades físicas como: Cor, tamanho, força, forma geométricas por uma professora. (QS4. 1, p.119).

Alguns registros sobre essas qualidades:

'Harmonioso, refrescante, puro, lindo, divinal, vivo, equilibrado, natural.'
(professora D)

*'O quadro 1 possui uma **beleza intensa**, sensação de paz.'* (prof K)

'É um quadro bem bonito, representa a natureza e transmite tranqüilidade.'
(professora C)

'Bonito, colorido, movimentado'(prof M)

Para a figura 2, dez professoras atribuem qualidades do tipo espirituais e 3 de tipo físicas que são enunciadas em frases como:

União, igualdade, cumplicidade. (prof M)

Vida, saudável, relacionamento (prof D)

'Cor, tamanho, elementos dispersos'. (prof G)

Podemos verificar que há uma predominância das qualidades espirituais, ou seja, o primeiro impacto das duas figuras sobre a observação das professoras provoca uma interpretação subjetiva, tanto que são poucas as qualidades espirituais que se repetem entre as observadoras. Uma observação objetiva estaria apoiada num olhar referenciado nas questões propostas. Apenas quatro professoras indicam qualidades orientadas por essas referências.

Nas respostas não observamos em nenhuma manifestação sobre as qualidades dos dois quadros que acenassem para aspectos contínuos ou discretos a serem atribuídos para a contagem dos objetos mostrados nas figuras. A enunciação predominante das qualidades espirituais pode ter sua origem, segundo observa Davidov (1998), no hábito de observação empírica que recai, num primeiro momento, sobre os aspectos perceptíveis dos objetos.

Destacar qualidades que são passíveis de quantificação como a numerosidade dos bois e da água requer relações não imediatamente perceptíveis como a beleza, o colorido, a tranqüilidade e outras, o que não foi o movimento do pensamento das professoras. Mesmo

solicitando, nas questões, a atribuição de um número para a qualidade destacada, a ocorrência da relação qualidade e quantidade não estão presente nas respostas às questões.

Embora tenha sido solicitada a leitura de texto sobre o assunto de autores como Caraça (2003) e Lanner de Moura (1995) e discutido depois do trabalho em conjunto, o fato de não aparecer nenhuma resposta que contemple este aspecto nos leva a supor que, ou não entenderam a proposta das questões, ou este é um elemento tão novo em seus imaginários conceituais da medida que não havia sido ainda internalizado pela leitura de texto sobre o tema, feita anteriormente pelas professoras.

Era preciso investir mais nos nexos conceituais da qualidade, quantidade e enumeração dos aspectos discretos e contínuos o que ocorreu nas discussões posteriores feitas, em aula, pela pesquisadora, sobre as respostas das professoras a esta primeira atividade.

Quanto às questões de 2 a 5, para a maioria, tanto as qualidades espirituais como as físicas podem ser enumeradas. Para duas professoras, a enumeração está relacionada aos atributos muito ou pouco. Para uma a enumeração só é possível para o que podemos contar. Para outra nenhuma das qualidades, pois todos são quantificáveis e não enumeráveis. Extraímos essas considerações das seguintes respostas a essas questões:

“Animais - 3 , cores - 7.”; (prof. D)

“é possível enumerar os animais, 3 animais”.(prof. C)

‘1º quadrado, 2º triângulo, 3º retângulo’. (prof. E)

“Não são enumeráveis.”; (prof. F)

Conforme a discussão das respostas à atividade 7, ficou acordado pelo grupo classe que, para enumerar as intensidades das qualidade dos objetos, é preciso fazer a distinção mais geral entre qualidades discretas e contínuas. Segundo Ifrah (1998), os primeiros contadores como, por exemplo, os pastores antigos usavam as pedras para contar suas ovelhas. Fazer a correspondência pedra-ovelha era uma maneira infalível para saber se ao retornar o rebanho para o curral no final da tarde faltava ou não ovelhas. Porém, já estes primeiros contadores, diz Hogben (1970) se deram conta que para contar o tempo que se passava entre o dia e a noite não havia nada semelhante a que pudessem fazer correspondência com as pedras como entre uma ovelha e outra. Ou seja, é possível dizer que já o pastor antigo percebeu que a grande invenção do número pedra para contar ovelhas não servia para contar o tempo, a água, a terra etc.

Problematizar a possibilidade de contar a água com as pedras à semelhança de como se faz com as ovelhas poderia levar à conclusão que grandezas discretas se contam com unidades discretas e grandezas contínuas com outro tipo de unidade que lhe seja coerente sob este aspecto. Como é do senso comum que unidades discretas são controladas com números naturais, a atividade 2 foi apresentada para as professoras com a intenção desta problematização.

Atividade 2: as unidades naturais

Apresentamos às professoras três figuras, conforme a figura 3 e solicitamos a elas que identificassem quais figuras representavam elementos organizados em unidades naturais. A atividade teve por objetivo identificar, no pensamento dos professores, o aspecto discreto e contínuo da grandeza.

Solicitamos às professoras que considerassem os seguintes elementos: pedras, ovelhas e cachoeira. Posteriormente pedimos que respondessem quais desses elementos estão organizados em unidades naturais, quais podem ser enumerados e como.

Figura 3



A idéia de enumeração não está apenas associada à idéia do discreto, mas também a do contínuo. Nas respostas, encontramos sete professoras que afirmam que tanto as pedras quanto as ovelhas estão organizadas em unidades naturais e seis atribuem esta organização do ponto de vista da contagem, à mesma natureza, ou seja, são de mesma grandeza, daquela pela qual estão representadas em unidades naturais. É de se supor que agrupariam sob esta mesma organização

outros objetos como frutas, pessoas, planetas etc., isto é, todos os objetos que do ponto de vista da contagem são de grandeza discreta. Essas mesmas sete professoras dizem que tanto as pedras quanto as ovelhas podem ser enumeradas. Reconhecer que esses objetos estão organizados em unidades naturais parece levar a dedução imediata que, por este fato, podem ser a eles atribuídos um número natural e, portanto, podem ser enumerados. Isto significa entender que há algo em comum a esses objetos pelo que é possível enumerá-los da mesma forma. Ou seja, este algo em comum é a grandeza. Não enunciam grandeza, mas o que está subentendido é que é possível colocá-los em correspondência biunívoca, pois são de mesma natureza do ponto de vista da contagem, ou seja, são de mesma grandeza, são discretos. Quando identificam os objetos que podem ser enumerados e explicam os aspectos enumeráveis, identificam qualidades organizadas em unidades naturais.

As seis respostas que indicam somente as pedras não denotam terem percebido qual qualidade é comum aos objetos que podemos organizar em unidades naturais. Podemos incluir neste grupo, também, a professora que afirma não ser possível enumerar e nem atribuir número a nenhum dos aspectos destacados nas figuras. As elaborações dessas professoras ainda não dão indicadores da generalização teórica do nexa da grandeza e do tipo de grandeza.

Nesta atividade, podemos notar um avanço do grupo analisado em relação aos seus conhecimentos iniciais e aos manifestos nas duas tarefas anteriores a respeito de sua compreensão das características comuns que atribuímos aos objetos quando queremos controlá-los quantitativamente, mesmo que não as definam como discretas ou contínuas. O fato de nenhuma professora ter indicado a água como fazendo parte da característica solicitada, reforça este argumento.

A pergunta “Qual pode ser enumerada?” pode não ser levada muito a sério. Se nos afinarmos ao pensamento pitagórico que acredita que a essência do mundo é constituída pelos números, ou seja, que tudo no mundo corresponde a número tal questão pode parecer redundante.

Mas há intensidades que se podem enumerar e há intensidades que somente se pode quantificar. Entende-se quantificar por uma avaliação apenas de comparação qualitativa como dizer “João é mais alegre do que Carlos” ou “amo muitíssimo”. Para definir numericamente a intensidade da qualidade “ser alegre” não há uma unidade, portanto não podemos atribuir um número a esta intensidade, por isto nos detemos somente em avaliações do tipo: “mais alegre, menos alegre do que”, tão alegre quão, etc. e que não deixam de ser uma quali-quantificação,

Mas podemos atribuir um número à qualidade ser alto. Podemos dizer numericamente quanto um aluno é mais alto do que o outro ou ainda quanto um aluno é alto, porém não quanto ele é inteligente.

Esta reflexão nos leva a entender que o que não medimos hoje, talvez futuramente seja possível fazê-lo. Assim como, até o início do século XIX, não se pensava em medir, por exemplo, a energia elétrica, hoje, é possível de ser medida, ser quantificada e expressa em unidades de energia como quilowatts-hora.

Leva-nos, também, a refletir com Caraça (2003) quando ele afirma que o progresso depende das novas unidades de medida que a ciência estabelece. Isso mais uma vez confirma que futuramente poderemos identificar novas grandezas e atribuir-lhes unidades que hoje não conhecemos. De qualquer forma, essas reflexões nos convencem que a medida é uma das formas do homem conhecer a realidade e uma das formas a qual é atribuído o rigor científico, ainda que o conhecimento esteja sempre se renovando e avançando indefinidamente.

Com o intuito de instigar o pensamento das professoras frente aos nexos conceituais da medida e avaliar suas elaborações, foco de nossa pesquisa, propusemos as elas uma outra atividade com o objetivo de suscitar a reflexão sobre a possível enumeração de determinadas qualidades.

A próxima atividade estuda o pensamento manifesto das professoras com relação às qualidades, suas intensidades e possível enumeração dessas.

Atividade 3 : qualidade-intensidade-número

Esta atividade foi subdividida em duas partes: uma solicita indicar qualidades em atletas e outra em animais.

Apresentamos às professoras as imagens de atletas e de animais representadas nas figuras 4 e 5 respectivamente.

A problematização dos nexos, na atividade dos atletas, procedeu da seguinte forma: questionamos as professoras se para montar um bom time de basquete, além da qualidade “jogar bem,” que outra qualidade era necessária fazer parte do critério de seleção. Após enunciá-la, as

educadoras deveriam verificar se esta qualidade possuía quantidade, se variava e como expressávamos esta variação.

Foi discutido que a expressão “possui quantidade” é força de expressão, pois, na verdade, é a abstração humana que faz comparações de intensidades e, em decorrência, quantifica.

Figura 4



Embora tivéssemos por hipótese que a indicação mais freqüente seria a qualidade “ser alto” ou “altura do jogador” para esse tipo de esporte, uma qualidade física, portanto, observamos que 6 professoras, quadro Q11, assinalaram qualidades espirituais como, a “união entre os jogadores, o companheirismo, a disposição e o coleguismo” do mesmo modo que o fizeram para a atividade1. Conforme já comentamos, anteriormente, qualidades não são atributos fixos dos objetos, intrínsecos a eles, mas dependem da inter-relação do sujeito com o objeto, no isolado conforme definido no capítulo III no qual ele se encontra e, por este motivo, resultam das múltiplas interações que o objeto tem com os outros do mesmo isolado (Caraça, 2003). Portanto, mesmo que tenham sido dadas as condições para definir uma qualidade física, a sua enunciação está sujeita a uma interpretação pessoal uma vez que o isolado criado para esta questão “definir uma qualidade para a escolha de um bom jogador de basquete”, possibilita, também, uma interpretação pessoal.

Sete professoras foram além da nossa expectativa e afirmaram ser a altura e a velocidade qualidades importantes e necessárias para a formação de um bom time. Podemos dizer que essas sete respostas se ativeram às condições de numerosidade dadas como critério de escolha da qualidade. Verificar se possui quantidade, se varia e como expressamos esta variação é uma indicação que levaria mais provavelmente à enunciação de uma qualidade física mensurável.

Houve três entre as 6 professoras que admitiram que as qualidades espirituais que destacaram possuem quantidade e que esta quantidade varia. Tal afirmação está correta se

tomarmos como referência a afirmação de Caraça (2003) do texto lido, inicialmente, pelas professoras, que toda qualidade possui quantidade e que esta varia. A diferença, porém, das qualidades físicas, está em não podermos atribuir a esta variação um número. O que parece ser entendimento de 5 professoras que dizem que podemos expressar a variação de intensidade com a medida. Na verdade, podemos definir o quanto um jogador é mais alto do que o outro medindo suas alturas. As alturas variam em intensidade de um para outro jogador e esta variação pode ser definida ou controlada numericamente.

Uma professora expressa sua resposta da seguinte forma:

... a qualidade altura possui a quantidade e está relacionada com a unidade de medida como m, cm, etc. (Prof. B .registro das atividades)

Para 3 professoras as qualidades “humanas” não admitem quantificação. Para 2 dessas não é possível quantificar qualidades humanas. Certamente, essas professoras estão atribuindo à expressão “quantificar” o significado puramente numérico e não de avaliação de intensidade como nossas referências teóricas, cujos textos foram lidos por elas, indicam. Percebemos, novamente, que significados novos que não fazem parte de seu conceito de medida, não são internalizados por todas, ao mesmo tempo e no mesmo ritmo. Mas, nessa terceira atividade, podemos verificar que 10 professoras vêm acrescentando ao seu campo conceitual esses novos significados.

Para seis professoras, a expressão da variação quantitativa pode ser feita pelo diálogo, pela observação. Embora não tenha ficado explicitado como a variação pode ser feita pelo diálogo e pela observação, entendemos que a quantificação da variação fica determinada de maneira qualitativa, sem a atribuição de números.

As 5 professoras que dizem ser a medida a forma como expressamos a variação de quantidade tem mais elaborado seu pensamento de medida relativamente aos seus conhecimentos iniciais e aos manifestos nas atividades anteriores. A esse pensar sobre a medida, atribuímos mudanças com tendência a elaboração do pensamento teórico desse conceito. A reelaboração do modo de encarar a medida remete a Davidov (1988), segundo o qual o pensamento abrange múltiplas conexões. Ou seja, essas professoras ampliaram o conceito inicial de medida, restrito ao aspecto técnico e formal, integrando a este as relações qualidade-intensidade-grandezas-número. Uma compreensão que envolve leitura e atribuição de significados aos movimentos quantitativos da realidade o que não estava incluído nos significados iniciais manifestos pelas professoras no

questionário. Como diz Kopnin (1978), a profundidade do conceito é constituída das idéias simples que compõem sua complexidade, o seu conteúdo e que não são manifestas em seu aspecto formal. Nós entendemos que são essas idéias simples que possibilitam o acesso à compreensão do conceito pela criança pequena e não o formalismo conceitual como quer em geral a escola.

A leitura que fazemos de qualidades cuja variação de intensidade podem ser enumeráveis ou não para as coisas e para as pessoas é possível ser feita, também, para os animais, ou seja, para a realidade de nosso entorno. Quando o isolado que estabelecemos para fazer a leitura qualidade-quantidade-número é a relação homem e animal as qualidades que atribuímos a esta relação podem estar referendadas a várias necessidades humanas como a da utilidade como meio de locomoção, como fonte de alimentação, de vestuário, como companhia, como medo e outras. Escolhemos o medo que pode ser causado na convivência com os animais para servir de referência de avaliação das variações quantitativas das qualidades a eles atribuídas, avaliação esta que se constitui objetivo da atividade que segue.

Atividade 4: qualidades enumeráveis e não enumeráveis nos animais

Apresentamos às professoras imagens de animais conforme a figura 5 e solicitamos que identificassem a qualidade comum a todos os animais, que provoca medo nas pessoas e avaliar se esta qualidade admite quantidade, se esta quantidade varia e como pode ser expressa esta variação.

Embora esta atividade tenha, para um isolado diferente, o mesmo objetivo que a anterior, pode parecer repetitiva e redundante. Talvez para o nível de compreensão das professoras desta pesquisa tenha este efeito. Mas como acordamos com elas que as atividades propostas para a vivência, nas aulas relativas à pesquisa, seriam passíveis de serem trabalhadas tais quais com seus alunos. E para o nível de compreensão da criança esta atividade não seria repetitiva, mas estaria possibilitaria a ela estender para isolados diferentes o pensamento sobre a relação qualidade-quantidade-número construída nas atividades anteriores. Este processo visa à formação do pensamento de generalização teórica da medida, o que inclui no conceito todos os nexos que o compõem.

Imagem 5



Das respostas das professoras nos quadros sínteses QS7.1 e QS7.2 na página 125, podemos observar que 10 das 13 do grupo da pesquisa optou por indicar qualidades espirituais que não são enumeráveis e uma minoria, 3 professoras, optou por qualidades que identificam grandezas, pois justificam:

-Todos atacam se ameaçados, ou seja a ferocidade

(profa. L)

-o instinto animal (profa. B)

-A qualidade comum é a massa (profa. J)

A maioria, 9 professoras, respondeu que todas as qualidades que provocam medo, enunciadas por elas, admitem quantidade, 11 responderam que esta mesma quantidade varia e 9 que há possibilidade de conhecer essa quantidade. Mas ninguém explica como expressá-las. A essa afirmação entendemos que houve movimento do pensamento ao identificarem a conexão entre qualidade, sua variação e a possibilidade de expressar essa variação quantitativamente. Mas, consideramos que embora 3 indicassem qualidades físicas como, massa, força e som não indicaram que essas qualidades podem ser submetidas à medida, como o fizeram na atividade anterior.

Algumas suposições nos levam a avaliar esta omissão. Uma delas é o fato dessas grandezas, com exceção da massa, serem tratadas nos programas das escolas do que a grandeza altura. Também pode ter passado despercebida a solicitação de dizer como expressar esta qualidade. Esta última é mais provável, pois na discussão do grupo classe sobre essas atividades, ocorria a justificativa de não ter percebido a questão como um todo. Por isso, não podemos avaliar a não indicação de como expressar as qualidades indicadas como um retrocesso relativo às respostas da atividade anterior.

Dizemos que a relação qualidade-quantidade-intensidade-número é uma forma de ler a realidade na tentativa de conhecê-la numericamente. A primeira grande classificação que fazemos ao estabelecer esta relação, como já comentamos, é de duas grandes categorias de qualidades discretas e de qualidades contínuas. Nas atividades 3 e 4, trabalhamos com a relação citada acima para elementos cujo conjunto tem características de grandeza discreta como o de jogadores de basquete e o de animais. Na atividade seguinte, propusemos pensar esta relação para elementos com característica de grandeza contínua como o líquido.

Assim, para um isolado de grandeza diferente daquela tratada nas atividades anteriores, solicitamos aos professores estabelecer a relação qualidade-quantidade-grandeza-número. Ou seja, uma relação que constitui a base do conceito de medida.

A todo objeto na natureza, quer ele se apresente na forma líquida, quer sólida ou gasosa, podemos atribuir múltiplas qualidades. Entre elas, destacamos o volume, a densidade, o peso, a temperatura.

Considerando, conforme CARAÇA (2003), que qualidades não são propriedades intrínsecas, mas relações que estabelecemos entre os objetos de um mesmo isolado, dizemos que dado um isolado formado por um líquido e o recipiente que o contém denominamos a qualidade do líquido de ocupar um espaço tridimensional de volume e ao espaço que o contém de capacidade. Por exemplo, os 2 litros de Guaraná indicado na garrafa que o contém é o volume do líquido Guaraná e, ao mesmo tempo, a capacidade da garrafa, mas não o volume da garrafa. Com o objetivo de instigar as professoras a pensarem sobre a qualidade comum a determinadas substâncias que permitem preencher um recipiente, propusemos para as professoras a seguinte atividade.

Atividade 5: a qualidade comum a determinadas substâncias.

Uma jarra pode ser preenchida com água, vinho, suco de laranja, gasolina, etc. e nós propusemos às professoras verificar qual era a qualidade comum a todas essas substâncias que as possibilitam preencher totalmente a jarra. Além disso, deveriam explicar se essa qualidade possuía quantidade, se esta variava e como podíamos conhecer esta quantidade.

Das respostas, ver quadro QS8.1 e QS8.2 na página 127, encontramos que 11 professoras indicam que a qualidade comum às substâncias que possibilita contê-las numa jarra é a de “ser líquido” e para 2, esta qualidade é a capacidade e o volume; todas as 13 professoras afirmam que a qualidade que indicaram tem quantidade.

Doze disseram que esta quantidade variava, como podemos perceber das falas que se seguem.

Mais líquido ou menos líquido. (registro da atividade, profa. C)

Apenas uma professora considerou que não variava. Todas consideraram que podíamos conhecer numericamente esta quantidade. As falas a seguir são representativas dessa consideração.

existem vários instrumentos que ajudam os homens a

conhecerem a quantidade de cada um dos líquidos. (Profa. A)

utilizando medidas, mililitros. criou uma unidade de medida específica para comportar volume.; (Profa. K)

O homem desenvolveu uma unidade de medida para conhecer esta quantidade".

“Através da quantificação. Ex. uma jarra que cabe 1 litro de suco. Se ela está com suco até o meio, entende que ela tem 1/2 litro ou 500 mL. (Profa..L)

“Possui litros como unidade de medida”;(Profa J).

Sabe, através de medidores específicos, com unidade de medida litro.”(Profa. E)

Podemos dizer que nesta atividade as professoras estabelecem a relação qualidade-quantidade-grandeza-número que constitui a interconexão conceitual da medida. Reconhecer que há uma qualidade comum aos líquidos que lhes possibilita preencher um recipiente e que esta qualidade tem uma quantidade que varia, pois “pode conter mais ou menos líquido” e que podemos conhecer esta variação numericamente, o homem “criou uma unidade de medida específica para comportar volume” é a evidência de que o grupo atribui à grandeza volume a esta qualidade comum aos líquidos e à unidade de medida litro, o modo para enumerar esta grandeza. Para Caraça (2003), a qualidade sempre apresenta quantidade e esta quantidade pode variar e se esta variação é passível de ser controlada por um número temos, então, uma grandeza.

Em seus conhecimentos iniciais, encontramos indicação de que trabalhavam com volume ao responder a pergunta que questionava se trabalhavam com medida com seus alunos. Nesse

momento, aparece volume associado à medida de uma forma restrita. Nas elaborações desta atividade, as professoras da pesquisa fazem as relações conceituais mais simples que permitem atribuir significados próprios à medida. A compreensão dessas relações mais simples pode contribuir para seu trabalho didático-pedagógico em sala de aula, pois estão em posse de um conteúdo da medida que pode ser mais acessível ao nível de compreensão das crianças.

Os líquidos são quantificados em função da capacidade dos recipientes que os contêm e a representação numérica dessa quantidade necessita do sistema de unidades como litros e metro cúbico e de suas subunidades. Não encontramos nenhuma referência à unidade de medida, “decímetro cúbico” nas falas das professoras. Assim como se referiram espontaneamente ao litro e subunidades, poderiam ter feito para o decímetro cúbico. Supomos que isto não lhes ocorreu ao responder à questão que perguntava como podemos conhecer esta quantidade porque a abordagem dessa unidade, para líquidos, não é freqüente nas séries iniciais e por isso, não deve estar presente em suas práticas sobre a medida, tanto que também não se fez presente em seus conhecimentos iniciais, nas respostas ao questionário inicial. De qualquer forma, segundo Caraça (2003), “uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas quantas as unidades com que a medição se faça”. (p. 31). Por isso, a não manifestação dessa unidade para líquidos não é propriamente um erro, mas, sem dúvida, falta de um conhecimento mais amplo da medida em líquidos.

Nas expressões: “o homem desenvolveu uma unidade de medida para conhecer esta quantidade” e “*criou uma unidade de medida específica para comportar volume.*”; está subentendida a compreensão de que a unidade para grandezas de tipo líquido foi criada e não está disponível como para os objetos que estão organizados, em unidades naturais, como no caso das grandezas discretas. A idéia de que as unidades são uma criação do pensamento humano para controlar movimentos quantitativos contribui para o entendimento de que a medida não é um conhecimento acabado e que, portanto, o controle dos fenômenos pela medida requer novos estudos e novas pesquisas. Trabalhar com a criança esse movimento do conhecimento é importante para sua formação de modo que possa ser instigada a estudar e a se sentir participante. Supomos que essa formação deve ser feita, primeiramente, com os professores para que possam possibilitá-la a seus alunos.

Ao compararmos as elaborações das professoras sobre as atividades anteriores, com as atuais, notamos um avanço no entendimento que compõe o pensamento da medida de forma que terão mais informações a respeito para sua prática docente.

Atividade 6. A relação movimento-grandeza

Tudo está em movimento e o ato de conhecer precisa isolar aspectos do movimento para entendê-lo (Caraça (2003). O modo de conhecer pela medida isola as quantidades do movimento e para enumerar essas quantidades individualiza-se, no movimento, grandezas e unidades da mesma espécie da grandeza. Olhar para um movimento quantitativo e nele individualizar uma grandeza correlacionada consiste-se no objetivo da seguinte atividade proposta para as professoras.

Esta atividade foi precedida da leitura de textos sobre o tema grandeza, em autores como Caraça (2003) e Lanner de Moura (1995), e cuja discussão com o grupo classe foi feita após a realização da atividade.

Propusemos às professoras observar as figuras do quadro 24 e escrever a sua interpretação de cada figura a partir dos itens da tabela, movimento e grandeza, procurando associar a cada movimento uma grandeza que fosse pertinente.

Quadro 24(Q24)

<p>a) suco</p> 	<p>b) som</p> 	<p>c) território</p> 
<p>e) viagem espacial</p> 	<p>e) medição</p> 	<p>f) amor</p> 

	MOVIMENTO	GRANDEZA
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

Encontramos nas respostas, ver quadros QS9.2 (anexo 8, p. 129,130,131) um índice baixo, apenas 3 ocorrências de enunciações coerentes entre o tipo de movimento individualizado e uma grandeza a ele correspondente. Para a figura que representa, “medindo altura” aparecem duas coerências entre o movimento e a grandeza correspondente: medir altura e grandeza comprimento ou altura. Para a figura que representa “amor”, a coerência consistiu em enunciar que a este movimento não corresponde uma grandeza. Na figura da jarra com suco, aparece uma coerência entre o movimento de encher/depositar o líquido e a grandeza capacidade.

Estão presentes incoerências como: para a figura território, a correspondência do movimento “contorno” com a grandeza “área”.

Várias respostas, em torno de 8, confundem a unidade de medida com a grandeza a ser medida, como é o caso de indicar como sendo grandezas as unidades: litro, m², km, m, cm, decibéis e outras.

Talvez um dos motivos para essas incoerências seja a proposta insólita de corresponder um movimento que elas mesmas devem individualizar a uma grandeza. A denominação do movimento representado pelas figuras é um tanto subjetiva, ou seja, não existem critérios objetivos para esta denominação. Mas uma vez definido o movimento, dependendo de sua qualidade física destacada, pode existir ou não uma grandeza a ele associado. Em seus conhecimentos iniciais as professoras deixam transparecer que sua formação sobre o conceito de medida não deve ter possibilitado estabelecer relações dos movimentos quantitativos da vida com este conceito. Portanto, é de se esperar as elaborações que mostram incoerência entre o movimento enunciado e a respectiva grandeza.

Não esperávamos, no entanto, que confundissem com tanta frequência, nesta atividade, a grandeza com a unidade de medida. Para aprofundar a relação entre uma e outra, prosseguimos na atividade seguinte.

Nas atividades de 1 a 6, analisadas anteriormente, foram problematizados, em forma de questões, os nexos conceituais da medida para que as professoras fizessem uma reflexão individual sobre eles e igualmente um registro dessas reflexões. Analisamos, portanto, as elaborações individuais destas atividades.

Na atividade 7, cuja análise apresentaremos a seguir, foi feita uma proposta aberta de medição de objetos. A intenção metodológica foi a de proporcionar uma atividade com características da atividade orientadora de ensino Moura (1992) que discutimos no capítulo IV, “O caminho que percorremos”. Queríamos desencadear, como é próprio da atividade orientadora, a necessidade e o motivo para que as professoras assumissem como um problema real *o planejamento das ações de medir*. Esse planejamento delineia mentalmente *o processo de medição*. Conforme Leontiev (1983), o indivíduo em atividade se apropria das capacidades humanas elaboradas historicamente que possibilitam o movimento do pensamento no sentido da resolução do problema em jogo na atividade.

Análise da atividade 7: medições de objetos

Como já temos discutido na medição de objetos é preciso definir a grandeza a ser medida, selecionar uma unidade de mesma espécie da grandeza. Como, por exemplo, se formos medir o comprimento de uma vara, o comprimento é a grandeza a ser medida. Precisamos, então, escolher uma unidade de medida que seja da mesma dimensão da grandeza comprimento e que, neste caso, deve ser unidimensional. Preenche essas condições uma outra vara, por comodidade, menor do que a que será medida e estaremos, então, usando uma unidade de medida não convencional. Ou poderemos usar a unidade convencional, o metro.

Na comparação de comprimentos aplica-se um objeto sobre o outro, fazendo coincidir dois de seus extremos. Caso o objeto escolhido tenha um comprimento L e a unidade escolhida como padrão de comparação, um comprimento M menor que L é necessário ainda comparar quanto L é maior que M . Conforme Caraça (2003), na comparação entre grandezas de mesma espécie não basta dizer que um é maior ou mais pesado que o outro. É necessário responder à pergunta quantas vezes é maior ou mais pesado. Segundo este autor, para se medir algum objeto é necessário:

1. Estabelecer um padrão único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie. Esse padrão chama-se unidade de medida da grandeza de que se trata. Por exemplo, o m para comprimento, o kg para a massa, os segundos para o tempo ou outras unidades que um indivíduo queira convencionar no caso de não dispor de unidades padronizadas.
2. Responder à pergunta quantas vezes o padrão comporta na grandeza é associar um número que expressa o resultado da comparação com a unidade. Esse número chama-se medida da grandeza em relação à unidade.

O autor distingue, no problema da medida, três fases que podem ser enunciadas da seguinte forma:

- Escolha da unidade.
- Comparação com a unidade.
- Expressão numérica do resultado dessa comparação.

Ele chama a atenção sobre a comparação com a unidade explicando que raramente ocorre o caso no qual a unidade escolhida cabe um número inteiro de vezes na grandeza que se quer medir.

O autor distingue, ainda, o ponto de vista prático da medida do ponto de vista teórico. Do ponto de vista prático da medida, é sempre possível comparar a unidade com a grandeza a ser medida e frequentemente esse número é racional.

Do ponto de vista teórico, nem sempre é possível comparar a unidade com a grandeza e, nesse caso, considera-se que os segmentos são incomensuráveis. Por exemplo, citamos o caso da medição da diagonal de um quadrado tomando-se como termo de medição seus lados. A diagonal e o lado do quadrado não têm uma unidade de medida comum, ou seja, a razão entre eles é um número irracional e, portanto, diagonal e lado do quadrado são segmentos incomensuráveis.

Como já temos informado anteriormente, nesta pesquisa, tanto a abordagem feita para a medida, nas atividades de ensino e pesquisa, quanto para a análise das elaborações das professoras da pesquisa, temos por referência o aspecto prático da medida, pois o aspecto teórico, devido sua complexidade, não é tratado e nem poderia ser tratado nas séries iniciais do ensino fundamental.

Com a intenção de que as professoras pudessem planejar suas ações de medir, propusemos uma atividade diferente das anteriores. Enquanto essas atividades propunham problematizações dos nexos conceituais da medida a partir de observações de figuras representativas de movimentos quantitativos, a realização da atividade 7 requer que projetem suas ações para medir objetos físicos. O objetivo da pesquisa com esta atividade consiste em avaliar se as professoras planejam as ações necessárias para medir os objetos propostos, como planejam e qual é o conteúdo de medida presente no planejamento.

Para a análise de suas elaborações, teremos como referência as três fases da medida discutidas por Caraça de que falamos anteriormente.

Entregamos para as professoras o que denominamos de kit-medida. Este continha um pedaço de cartolina, recortada de forma irregular, um pedaço de barbante, uma garrafa com pouco de água, um copo de plástico vazio, uma pedra, um pedaço de galho de árvore que denominamos de tronco de madeira. Para esta atividade não houve um momento individual de reflexão e registro das respostas às questões como ocorreu nas atividades anteriores; as reflexões individuais sobre esta atividade foram registradas nos portfólios das professoras.

Foi sugerido que constituíssem grupos, discutissem e desenvolvessem a proposta da atividade conjuntamente e fizessem um registro coletivo da discussão.

Para evitarmos repetições da descrição dos procedimentos e das análises escolhemos apenas três dos sete grupos que foram constituídos. Procuramos fazer esta escolha em função da maior concentração das professoras cujas reflexões individuais foram destacadas na pesquisa. Os grupos escolhidos foram A, B e F.

Pedimos aos grupos que medissem os objetos do kit-medida e fizessem o registro, por escrito, de como procederam para medir cada objeto. Propositamente, não informamos a ordem da medição e nem a grandeza a ser medida, pois nossa expectativa era de que a escolha da grandeza fizesse parte de seus planejamentos.

A seguir transcrevemos afirmações, dos grupos, que nos possibilitam identificar como ocorreu o processo da medição seguido da análise.

Iniciaremos por analisar as elaborações do grupo A.

Conforme a descrição do grupo A para a medição da pedra: “*Montamos uma balança, usando caneta, barbante, um estojo cheio e a pedra (como comparação de peso)*”. *A pedra é mais pesada que o estojo.*

Supomos que a construção da balança foi consequência da escolha da grandeza peso. Pensamos que, diante da proposta, medir a pedra, a primeira grandeza que lhes ocorreu foi o peso, guiadas certamente pelo senso comum, pois, dentre todos os objetos propostos, é mais evidente associar o peso à pedra.

Este fato sugere, também, que não houve uma reflexão prévia ou um planejamento sobre as qualidades mensuráveis possíveis de serem individualizadas para este objeto como o volume, a densidade, que também poderiam ser medidas.

No entanto, observamos que embora tenha sido adequada a escolha do peso do objeto bem como a unidade para medir, ao mesmo tempo tornou-se uma unidade inadequada por não aceitar múltiplos ou submúltiplos de forma a expressar com precisão a medida do peso. Como consequência, ao afirmarem que *A pedra é mais pesada que o estojo* não atribuem à comparação da unidade com a grandeza uma expressão numérica; desta forma, conforme Caraça (2003) a medição não está completa, pois, segundo ele, para medir não basta dizer que um objeto é mais pesado do que o outro, mas é necessário responder à pergunta: quanto é mais pesado? Para

expressar, apenas, qualitativamente a medida, não se fazia necessário montar a balança, teria sido suficiente avaliar pela própria sensação, colocando o estojo numa mão e a pedra na outra.

O grupo descreve o procedimento para a medição da garrafa conforme segue: *Pegamos uma garrafa vazia e uma cheia. Para medir a água, usamos um copinho descartável (café) e transportamos a água de um para o outro frasco. Usamos o copinho como uma comparação. A medida foi 6 copinhos. “Copo é a unidade de medida”.*

Da afirmação do grupo não nos foi possível verificar se houve ou não um planejamento de qual grandeza medir na garrafa, supomos que o fato desta conter um pouco de água deve ter induzido à medida do volume de água contido na garrafa. Também, aqui podemos supor que foi feita uma relação direta líquido com a grandeza volume, presente em suas falas no questionário inicial, relação feita baseada no senso comum quando se trata de medir líquidos, tanto que impede considerar outras grandezas mensuráveis no líquido como densidade, temperatura, viscosidade e outras.

A escolha do copo de café para a medição do líquido da garrafa foi adequada, considerando-se que ambos apresentam o volume e a capacidade como grandezas que lhes são comuns. Embora tenham expressado numericamente o valor da medição, à diferença do objeto anterior, *A medida foi 6 copinhos*, esta expressão foi formulada com um número natural. Conforme Caraça (2003), freqüentemente, a unidade de medida não cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida. Ou seja, o resultado da medição não é um número exato, mas um valor aproximado e representado pelos números racionais (Hogben, 1970). Um número natural é um número racional cuja origem ocorreu com a expansão dos números naturais, a medida deve ser representada por um número racional não natural, conforme já explicamos na parte teórica. Por exemplo, o número 6 é um número racional e natural representa uma contagem qualquer de seis elementos. Levando-se em conta que a medição do volume de água nos copinhos não é uma medida exata, mas aproximada. Isso nos permite inferir que não ficou clara para este grupo a diferença entre a quantificação de grandezas discretas daquela das grandezas contínuas.

Para a medição da cartolina, conforme a descrição do grupo: *Pensamos... Pensamos! E aí, resolvemos medir a área com tampa de garrafa de água. Deram 10 tampas e mais 1 tampa aproximadamente*, (observamos que, ao explicarem para a classe, informam que usaram a superfície da tampa para medir), entendemos que houve um planejamento para a medição ao afirmarem terem escolhido a área da cartolina, uma vez que poderiam ter escolhido outra

grandeza como o perímetro. Foi adequada a escolha da tampa da garrafa como unidade de medida, pois para compará-las, cartolina e tampa, é usada a bi-dimensionalidade, grandeza comum a ambas. Foi correta a expressão do resultado da medição como sendo 10 tampas e, aproximadamente, mais uma tampa. Ou seja, o fato de considerar um número não exato evidencia um pensamento sobre o uso dos números racionais com relação a grandezas contínuas.

Comparando-se a medição da cartolina com as medições anteriores podemos inferir que na medição do terceiro objeto, as elaborações do grupo indicam um pensamento mais elaborado com aproximações de um pensamento teórico do aspecto prático da medida. Nesse caso, definir a grandeza a ser medida significa pensar que haveria outras grandezas a serem escolhidas para aquele objeto; definir uma unidade de mesma espécie da grandeza, significa poder conferir um número à medida, expressar um valor aproximado, significa atribuir a possibilidade de múltiplos e submúltiplos à unidade de medida e poder conferir à medida um valor numérico racional.

As afirmações do grupo para a medição do fio: *Medimos o fio por palmos. Ficamos entre a caneta BIC e o palmo. Optamos por ele por acreditarmos mais próximo a nós. A medida foi de dois palmos e de uma colega*, denotam um planejamento para a escolha da unidade, mas não para a grandeza a ser medida no fio.

Diante da proposta, medir o fio, a primeira relação que fizeram foi com a grandeza comprimento que podemos chamar de uma relação de senso comum. Portanto, para quem está refletindo sobre a medida de diferentes objetos é de se esperar que, mesmo diante de ter de medir um fio, pensasse em outras grandezas a ele associadas como peso, espessura, volume e etc. Embora o grupo não tenha especificado como o palmo foi utilizado, supomos que fizeram uma escolha adequada das unidades de grandeza ao optarem pela grandeza comprimento do palmo ou da caneta. Fio, caneta e palmo têm, em comum, a grandeza comprimento.

Embora optassem pelo palmo, não houve uma discussão sobre qual dos dois instrumentos, palmo ou caneta é melhor para a medição. Apesar da escolha do palmo ter sido justificado pelo fato deste *estar mais próximo a nós*, não levaram em consideração a inconsistência deste padrão que muda para cada pessoa. A caneta, por outro lado, é mais aceita como um padrão de medida considerando-se o fato de ela ser menos elástica e invariável dentro de determinadas condições físicas do ambiente.

Para a medição do tronco de madeira o grupo explica:

Pegamos o barbante primeiro e tentamos medir por ele, mas não conseguimos atribuir-lhe uma referência. Aí resolvemos usar o relógio de uma colega ser usada como unidade de medida. Deu três pulseiras.

Observamos que o barbante era maior que o comprimento do tronco; talvez, por isso, falam em não conseguir “atribuir-lhe uma referência”. Não é comum assumir uma unidade de medida maior que a grandeza a ser medida, mas sabemos, também, que não é inconsistente desde que se usem submúltiplos da unidade ou, então, se estabeleça o quanto a unidade é múltipla da grandeza em questão. Mas a solução dada foi pela escolha de uma unidade menor do que o tronco, a pulseira de um relógio, o que também é consistente do ponto de vista da medida.

Para este objeto, o grupo, também, não cogita medir outras grandezas associáveis ao tronco como a espessura, o peso e outras. Isto nos leva a pensar que fizeram uma relação direta tronco-comprimento, ou seja, pela grandeza mais evidente.

Embora tenha sido adequada a escolha da unidade de medida, não a expressaram conforme os critérios para a medição de grandezas contínuas.

Para a medição do copo de café, *decidimos medir a altura do copinho. A altura foi de dois dedos polegares da colega.*

Supomos que a escolha da altura do copo como a grandeza a ser medida resultou de um planejamento do que é medir já que na medição de recipientes é de senso comum considerar-se a capacidade como a grandeza a ser medida. A escolha da unidade de medida está de acordo com a escolha da grandeza a ser medida no copo. Observamos que persiste o pensamento da contagem com unidades naturais ao expressarem o resultado em *dois dedos da colega* e, novamente, utilizam de um número natural e não de um número racional não natural para representar quantidades contínuas.

Os procedimentos em geral não evidenciam as relações requeridas para um planejamento teórico da medida, visto que não houve manifestação de uma forma de pensamento que discrimine as grandezas possíveis de serem medidas como: o peso, o volume, a dureza, a massa, a densidade, a opacidade, a cor, a aspereza, a temperatura e outras.

Todos os grupos iniciam medindo uma grandeza sem expressar porque o peso ou a massa e não o volume ou outras. Portanto, não houve o planejamento para a escolha de uma das qualidades da pedra possível de ser medida. Cinco grupos medem o peso, talvez pelo fato de ser a qualidade mais notória das pedras do ponto de vista da medida.

O grupo B escolheu o peso da pedra como a grandeza a ser medida e construiu uma balança cujo equilíbrio indica igualdade na medida das grandezas postas em comparação: o peso da pedra e o volume da água. Há uma equivalência entre a grandeza volume da água, peso da pedra. Embora tenham comparado o volume da água, neste caso deveriam ter explicitado o peso ou massa do volume de água.

Três desses grupos selecionam uma unidade coerente: o peso do estojo, ou do copo de água como unidade de comparação. Um grupo identificou medidas impossíveis como o perímetro da pedra com barbante. A pedra é tridimensional e apresenta forma totalmente irregular e, portanto, a medição de perímetro, nesse caso, torna-se impossível.

Observamos em três grupos dificuldades em expressar a quantidade, quando o padrão não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Dois grupos usaram dois padrões de comparação e não a subunidade do padrão escolhido. Conforme alguns registros: “*A pedra se equivale a 1 garrafa de água mais 22 tampinhas e meia de água; o peso da pedra= 28 tampinhas e 4 gomos*”.

Ao expressarem numericamente que “*1 pedra = 3 copinhos e meio de líquido*”, referente à quantidade de água que equilibrou a balança, embora não tenham explicitado, entendemos ser o peso do copinho a grandeza de comparação entre os dois objetos. Do registro escrito, chamou-nos a atenção não terem feito uma *comparação aproximada*, e característica das medições de grandezas contínuas e ainda não a terem representado numericamente como *1 pedra = 3,5 copinhos*. Para nós, isto é um indício da predominância do uso do número natural já que é racional não natural o número que representa a medida.

O ocorrido nesse grupo nos reportou ao desenvolvimento da história dos pesos e medidas no qual Silva (2004) relata o uso e a evolução dos vários padrões de medida utilizados por diferentes povos. Na Grécia, por exemplo, com relação à massa, a unidade de medida era o *talento* e definida como o peso do volume de 1,5 pés cúbicos de água. Segundo o autor, essa afirmação seja muito contestada. Porém, conforme Silva, era comum utilizar-se uma unidade de volume e não de peso, já que a unidade com base no volume era mais fácil de ser padronizada e controlada, naquela época, do que uma unidade de peso. Na França, mesmo após a adoção do sistema métrico decimal para medidas lineares, manteve-se para a unidade de peso ou massa a idéia original de relacioná-la à unidade de volume. Assim, fixou-se que a unidade básica de

massa seria a unidade de um decímetro cúbico de água em condições especiais a serem determinadas.

Dois grupos usam como qualidades de comparação vários objetos, dificultando o entendimento da qualidade e do padrão de medida. É ausente a explicação das limitações para encontrar uma unidade coerente, fica implícito que as que assumiram são apropriadas. Não há a percepção de que estão quantificando o aspecto considerado contínuo, ou seja, grandezas contínuas. À pedra, do ponto de vista de contar uma determinada quantidade, é atribuído o aspecto discreto, e cada pedra passa a ser uma unidade de contagem, não ocorrendo o mesmo para seu peso e volume. Pelas respostas numéricas atribuídas ao peso e volume da pedra, fica subentendido que é dado o mesmo tratamento de ser discreto a essas grandezas.

Observamos que os pensamentos manifestos na atividade da pedra indicam o status de pensamento que os alunos trazem inicialmente.

Conjecturamos que para cinco grupos, as elaborações referentes a esta atividade são empíricas, pois as relações feitas estão no nível de abstrações referentes às qualidades imediatamente observáveis e sensíveis dos objetos e não advindas de generalizações do pensamento da medida das relações entre qualidades enumeráveis, grandezas discretas ou contínuas, unidade de grandeza, comparação adequada e expressão numérica.

Ao compararem a quantidade de água como 3 copinhos e meio, na verdade, estavam comparando o peso do volume de água com o peso da pedra. Notamos ainda que ao expressarem a medida, trabalharam com subunidade, e no caso, meio copinho de água.

Apesar de não ter ocorrido o planejamento para a medição da pedra, esse grupo contemplou as demais etapas do processo da medição: foram adequadas as escolhas da grandeza a ser medida no objeto, da unidade para a comparação e ainda a expressão numérica representada por número racional.

Com relação à medição da garrafa dizem : *Medimos o conteúdo da garrafa com a tampinha da própria garrafa. 1 garrafa = 15 tampinhas.*

Não podemos afirmar que houve o planejamento para a medição da garrafa embora tenha sido adequada a escolha do volume como a grandeza a ser medida e a da tampinha como unidade de medida. A expressão numérica da medição do volume em 15 tampinhas não foi adequada, considerando-se que o volume é uma grandeza contínua e deve ser expressa de forma aproximada por um número racional não natural.

Para a medição da cartolina, conforme os registros escritos explicam, as professoras se manifestaram da seguinte forma: *Medimos o contorno da figura com barbante. Em seguida medimos o barbante com um apontador e medimos a área com uma moeda de 10 centavos.*

O perímetro resultou em 7 apontadores e meio e a área em aproximadamente 29 moedas de 10 centavos.

A opção feita pelo grupo com relação à medição de duas grandezas como o comprimento e a área indica que houve planejamento do que e como medir. Tanto para a grandeza comprimento, como para a grandeza área foram coerentes as escolhas das unidades de medida. A escolha do fio como unidade de perímetro, além de ser consistente indica, também, a escolha de um aspecto prático da unidade: o de poder adequá-la ao contorno irregular da cartolina. Este grupo avançou gerando uma subunidade do comprimento do fio, o comprimento do lado do apontador. Para a área, usaram a superfície de uma moeda de 10 centavos. As expressões das duas medições são consideradas adequadas, uma vez que ambas representam numericamente grandezas contínuas medidas.

Na medição do fio conforme o grupo explica: *‘Utilizando um apontador, fomos medindo o barbante no sentido do comprimento. Pedaco de fio equivale a 9 apontadores.*

Também nesse caso, supomos que o grupo não discutiu outras grandezas mensuráveis no fio, como já ocorreu com o grupo A e pelo mesmo motivo da evidência da grandeza comprimento no próprio formato do fio.

Para a medição do tronco de madeira explica: *Usamos Lápis e carteirinha. Obtivemos como resultado 3 lápis + 3/4 do lápis. Ou 5 carteiras e 1/3 de carteirinha.*

O grupo não considerou a espessura para a medição e tratou apenas do comprimento do tronco da mesma forma que o fizeram para o fio. A escolha de dois objetos de forma e função totalmente diferentes, o lápis e a carteirinha, para unidades de medida, indicam que sabem distinguir algo comum a esses objetos que pode ser enumerado e que chamamos de grandeza e que esta grandeza é coerente com aquela a ser medida, o comprimento do tronco.

A medição do copo para este grupo foi assim registrada: *Medimos a capacidade do copo e usamos como unidade de medida a tampinha da garrafa de água. A capacidade do copo é de 5 tampinhas.*

Elas não enunciaram outras grandezas para a medição e não explicaram o porquê da escolha da grandeza capacidade o que nos leva a supor que não foi feito o planejamento da

medição. Entendemos que foi adequada a escolha da tampinha da garrafa por apresentar também uma grandeza coerente a que será medida na garrafa, a capacidade. Encontramos essa mesma adequação no grupo A.

No entanto, ao expressarem o resultado da medição como um número natural não indicam de forma adequada a medida de uma grandeza contínua como a capacidade.

Conforme as análises das medições do grupo B, podemos inferir que houve o planejamento para a medição da cartolina ao considerarem sua área e o seu perímetro, porém não temos elementos suficientes para inferir que não houve planejamento para as medições dos demais objetos.

Percebemos que o grupo apresenta tendência para expressar as medidas realizadas com números racionais o que indica um entendimento que a exatidão da medida de grandezas contínuas não é adequada para indicar numericamente as aproximações.

As medições do grupo F

Para a medição da pedra descrevem: *Primeiro medimos a quantidade da garrafa (56 tampinhas/8 gomos), construímos um pêndulo com barbante na mão e fomos retirando a quantidade de água até encontrar o equilíbrio. Resultado, peso 28 tampinhas ou 4 gomos. o peso da pedra resultou em 28 tampinhas ou 4 gomos da garrafa.*

Conforme a descrição acima, entendemos que houve planejamento do grupo para a medição da pedra. Observamos que para este grupo o processo usado para a medição do peso da pedra é semelhante ao que foi utilizado pelo grupo B. Comparam o peso da pedra com o volume da água da tampinha da garrafa e com o volume da água na garrafa, ao medir em gomos. Embora não o tenham explicado, ao expressar o peso da pedra em *28 tampinhas ou 4 gomos da garrafa*, subentende-se estarem medindo o peso do volume da água. Apesar de não expressarem o peso com o número racional, as elaborações do grupo nos fazem supor a existência de um movimento do pensamento com tendência ao pensamento teórico do aspecto prático da medida.

Para a medição da garrafa explicam: *Primeiro medimos a quantidade da garrafa (56 tampinhas /8 gomos), construímos uma balança com barbante na mão e fomos retirando a quantidade de água até encontrar o equilíbrio. Resultado, peso 28 tampinhas ou 4 gomos. Peso da água 28 tampinhas e volume da água 56 tampinhas.*

A escolha das grandezas peso e volume respondem as questões sobre o que medir e como medir e nos dão indicações de ter havido o planejamento requerido para as medições. Foram adequadas as grandezas para a medição do volume e do peso da garrafa e das unidades de grandezas. Sob este aspecto, a análise coincide com o que discutimos para os procedimentos da medida, deste objeto, do grupo B.

As expressões numéricas das medições, indicadas pelo grupo, para o peso e para o volume nos levam a crer que o grupo não as representou adequadamente, pois para expressá-las usou os números naturais.

Para a medição da cartolina registraram: *Quadriculamos a superfície com uma borracha, realizando a multiplicação da altura (h) e do comprimento (l) fazendo as devidas aproximações com as sobras da figura. A área totalizou 5 borrachas.*

Conforme a descrição do grupo, entendemos que além do planejamento do que medir houve adequação na escolha da grandeza e da unidade de grandeza. A superfície da cartolina foi a grandeza a ser medida e a superfície da borracha foi a unidade de medida escolhida. A medida da superfície da cartolina expressa em cinco borrachas ou cinco vezes uma das superfícies da borracha não está adequada à expressão numérica requerida para grandezas contínuas.

A tentativa do grupo em quadricular a superfície da cartolina nos lembra a forma de medir terreno dos egípcios, na época dos faraós. Procediam quadriculando as superfícies dos terrenos.

Caraça (2003), cita um trecho do livro **Histórias de Heródoto** (historiador grego, no Séc. V.a.c.) que se refere aos Egípcios:

Disseram que esse rei (Sesóstris - século 40 a.C.) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios e que tinha dado a cada um uma porção igual, retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano, um certo tributo. Que, se a porção fosse diminuída pelo rio (Nilo), o dono fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido a sua terra. Que, ao mesmo tempo, o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. (CARAÇA, 2003, p.32)

Ao medir o fio descrevem: *‘Utilizamos como unidade de medida o lápis que fomos contando passo a passo a unidade do lápis. Fio igual a 5 lápis e 1/2.’*

Não podemos afirmar se houve o planejamento do que medir, embora tenham sido adequadas as escolhas da grandeza e da unidade de grandeza e a expressão da medição contemplou a medida de grandezas contínuas uma vez que foi expressa com números racionais.

Para a medição do tronco afirmam: *Utilizamos como unidade de medida o palmo (nosso palmo que padronizamos em um só tamanho), totalizando dois palmos e meio.*

Conforme a afirmação do grupo, supomos que também não houve planejamento para a medição. No entanto, todas as demais etapas da medição foram adequadas, considerando-se a escolha das grandezas e a expressão numérica para representar a medição de grandezas contínuas.

Na medição do copo dizem ter procedido como segue: *‘Medimos o volume do copo com as tampinhas das garrafas. Totalizando 5 tampinhas.’*

Não há indicações que tenham cogitado outras grandezas possíveis de serem medidas no copo. Para a medida desse objeto, somente o grupo B agiu de forma distinta, medindo a altura do copo. Não aparece, também, um entendimento de que o campo numérico que expressa a medida deva ser o dos racionais não naturais, visto que indicam a medida como se tratasse de contagem. Mas, reconhecemos que foram adequadas as escolhas da grandeza e da unidade de medida.

Para esse grupo podemos inferir que houve planejamento do que medir para três dos objetos: pedra, cartolina e garrafa. A escolha da grandeza e da unidade foi adequada para todos os objetos. Para dois objetos, a medida do fio e do tronco de madeira, o grupo expressou o resultado da medição com números racionais. Tal fato evidencia terem feito a medição da grandeza sob o aspecto contínuo.

Concluimos que para os grupos analisados, observamos que os grupos A e B apresentam um movimento do pensamento teórico para medição da cartolina, enquanto no grupo F isto ocorre para as medições do fio e do tronco de madeira. A insistência por eles demonstrada na representação da expressão numérica de algumas medidas com os números naturais nos possibilita inferir sobre a resistência das professoras em trabalhar com os números racionais.

A análise das elaborações sobre medida dos grupos nos possibilita concluir que a forma como estes professores, de nossa pesquisa, propõem exercícios sobre medição aos seus alunos no cotidiano da escola, em geral, não proporcionam a eles condições para o desenvolvimento do pensar teórico sobre a prática da medição. Os exercícios de medição, em sua maioria, especificam o que deve ser medido, adiantando-se ao pensar do aluno sobre as várias grandezas possíveis de serem medidas no objeto. Ou seja, o pensamento teórico do aspecto prático da medida cujo conteúdo entendemos incluir os nexos conceituais definidos, nesta pesquisa, planejar as ações de medir segundo as três fases indicadas por Caraça (2003).

Quando o professor propõe e determina ao aluno o que medir no objeto, pode induzi-lo a generalizar que a grandeza sugerida para a medição é uma característica intrínseca ao objeto, limitando sua reflexão sobre as outras grandezas que poderiam ser associadas ao objeto, para a medição.

Vamos, por exemplo, analisar o que ocorre quando o professor sugere aos alunos para medir o lado da carteira. Primeiramente, isso é entendido pelo aluno como uma simples tarefa de medição na qual basta sobrepor o instrumento de medida ao objeto a ser medido e expressar corretamente o valor numérico da medição. Vejamos quais as conseqüências dessa tarefa:

- ✓ A medição poderá ser entendida, pelo aluno, simplesmente, como uma técnica cujo resultado é mais importante do que o processo. É provável que a necessidade de medir se estabeleça somente no nível pedagógico do professor e não no interesse de medir do aluno;
- ✓ Não é possibilitado ao aluno refletir se o que está medindo é uma grandeza, qual a dimensão da grandeza, se existe a possibilidade de medição de outras grandezas no objeto proposto;
- ✓ Não fica evidente ao aluno a importância da escolha da unidade de medida e de seus múltiplos e submúltiplos;
- ✓ Não é comentado o aspecto contínuo da medição, a diferença entre grandezas contínuas e discretas;
- ✓ Não fica discutida a natureza do campo numérico associado à medida;
- ✓ Não possibilita ao aluno o entendimento dos nexos conceituais da medida;
- ✓ Não desenvolve a generalização teórica defendida por Davidov (1982).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletir sobre a importância do ensino de medidas na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental e sobre como ele é apresentado para os alunos nos instigou a investigar o que os professores, desses níveis de ensino, pensam e como trabalham esse tema com seus alunos. Foi a tentativa de responder a questão “*Quais elaborações as professoras-aluno produzem ao vivenciar atividades de ensino sobre medidas?*” que deu origem a esta pesquisa. Delineamos uma trajetória a ser percorrida juntamente com as professoras para responder a essas nossas inquietações. Ao desenvolver este estudo, obtivemos, sim, algumas respostas, mas nos restaram muitas outras questões.

É como se tivéssemos diante de nós um caminho certo que pensávamos nos levar aonde queríamos chegar, mas ao percorrê-lo, fomos nos deparando com tantas outras ramificações que se tornou difícil tomar sempre a mesma direção do trajeto. Tínhamos o ponto inicial e dele partimos para alcançar nosso objetivo. Apesar da geometria afirmar que a menor distância entre dois pontos é uma reta percebemos que isto nem sempre é verdade quando a trajetória é a da pesquisa. Fomos entendendo que ter o ponto inicial e final não era garantia de uma trajetória retilínea e que a velocidade no trajeto estava longe de ser constante. A cada passo que dávamos, a cada novo entroncamento novos questionamentos colocavam em dúvida se realmente alcançaríamos chegar ao final do percurso. A única certeza que tínhamos era que o tempo que levaríamos para chegar seria maior do que havíamos estimado.

A velocidade com que percorremos esta trajetória foi em função do tempo que necessitamos para responder as novas questões que foram surgindo. Não demos conta de responder a todas. Com isso, esperamos que futuras novas pesquisas sobre o assunto nos auxiliem a respondê-las.

Nosso propósito, nesta conclusão, é fazer uma síntese de alguns pontos de chegada das professoras no processo de elaboração dos nexos conceituais da medida para melhor entender os possíveis resultados a que chegamos.

Buscamos referências na teoria de conhecimento discutida por Kopnin (1978) e Kosik (2002) e nos tipos de generalização de Davidov (1988) para a abordagem conceitual tanto nas atividades quando na análise da pesquisa. Os autores Caraça (2003), Aleksandrov (1988) e a

pesquisa de Lanner de Moura (1995) nos deram a base teórica da medida e de seus nexos conceituais.

Desenvolvemos a pesquisa em situação de sala de aula com alunas de um curso de pedagogia da região de Campinas. Seleccionamos 13 alunas do grupo, sendo todas professoras em exercício na Educação Infantil e anos iniciais do ensino fundamental. Para a construção dos dados da pesquisa, desenvolvemos, em situação de ensino, sete atividades problematizadoras dos nexos conceituais da medida.

Os nexos conceituais da medida como, qualidade, quantidade, grandeza, aspectos discreto e contínuo das grandezas foram considerados referências, ou seja, categorias de análise das informações da pesquisa bem como as fases da medida, indicadas por Caraça: escolha da grandeza a ser medida e da unidade a essa coerente, comparação da unidade com a grandeza, expressão numérica da comparação.

As informações para a pesquisa têm origem nos registros escritos e orais das professoras sobre o desenvolvimento individual e em grupo das atividades propostas pela pesquisa, dos portfólios individuais, onde registravam suas reflexões sobre seus processos em aula, do questionário inicial e da questão final onde informam seu perfil profissional e seus conhecimentos iniciais e aos que chegaram ao final da pesquisa, sobre a importância do ensino da medida para a criança e como a ensinam e pensam ensinar para suas crianças.

Da vivência com a medida, na prática docente das professoras, descrita por elas, no questionário inicial, encontramos indicações de que lhes faltava, ainda, um conhecimento mais profundo sobre grandezas e medidas que lhes permitissem tratar este assunto em sua totalidade, em suas práticas.

Esse conhecimento se mostrou restrito a ensinar medir uma grandeza determinada, como volume, área, altura (as mais enunciadas). Como se essas grandezas fossem entes absolutos e não definidas sobre os movimentos qualitativos e quantitativos da realidade onde estamos inseridos.

Supomos que em função de uma formação matemática fragmentada do pensar a medida como uma forma de modelar movimentos quantitativos da realidade em que se vive e, sobretudo, fragmentada de seus nexos conceituais que tiveram tão pouca prioridade em sua prática ao trabalho com matemática e raramente proporcionam aos seus alunos um espaço pedagógico de problematização e de instigação do pensamento sobre o conceito de medida.

O conhecimento e suas práticas com o ensino da medida revelou uma relação muito restrita com a utilidade e o uso da medida, com uma aprendizagem dos aspectos formais da medida, antes mesmo de terem desenvolvido as relações mais simples que compõem o pensamento da medida. Algumas dizem trabalhar com um padrão não convencional para medir objetos, o que é desejável, pois esse processo pode fazer com que a criança problematize a convencionalidade de uma unidade padrão para todas as medidas de mesma espécie. Mas, nenhuma aborda a medida com as relações qualidade-quantidade, discreto-contínuo e também não mencionam o campo numérico no qual se expressa a medida.

Mesmo após as primeiras atividades não observamos manifestações das professoras que acenassem para esses quando, ao observar objetos representados por figuras, foram solicitadas a considerá-los do ponto de vista de sua quantificação.

Da mesma forma, notamos que não conseguiam distinguir qualidades enumeráveis e não enumeráveis em objetos colocados para sua observação quando solicitadas a considerá-los do ponto de vista de sua numerosidade.

Nessas atividades quando se tratava de identificar qualidades em objetos e definir se eram ou não enumeráveis verificou-se uma tendência inicial a reconhecer qualidades que chamamos de espirituais como beleza, harmonia e outras, quase não ocorrendo a indicação de qualidades denominadas de físicas e passíveis de enumeração.

Isto nos levou a supor que pelo hábito da observação empírica seu olhar sobre os objetos recai, num primeiro momento, sobre os aspectos perceptíveis desses.

Outro aspecto que consideramos para entender suas respostas é de que não tiveram em sua formação conceitual da medida uma abordagem que relevasse os nexos conceituais, que relacionam qualidade-quantidade e discreto-contínuo. Portanto, a problematização desses aspectos, nessas primeiras atividades, deve ter causado estranheza a elas e, por decorrência, uma certa dificuldade em entender a proposta das atividades.

Ao prosseguir nas atividades, foi possível identificarmos um envolvimento maior das professoras e um avanço, ao manifestarem novos elementos a seus conhecimentos de medida. Mostraram um entendimento quanto a objetos enumeráveis e qualidades comuns a eles passíveis de enumeração. Construindo, dessa forma, o conceito de grandeza e o da distinção entre grandezas organizadas em unidades naturais e grandezas contínuas.

Para as seis primeiras atividades, pudemos perceber que significados novos que não faziam parte de seus conhecimentos iniciais de medida foram sendo acrescentados a este conceito. Consideramos que a maioria das professoras ampliou o conceito inicial de medida, restrito ao aspecto técnico e formal, integrando a este as relações qualidade-intensidade-grandeza-número.

Essa compreensão não se manifestou para todas as professoras no mesmo nível e ao mesmo tempo. Foi possível perceber para as mesmas professoras oscilações na apreensão dos novos significados. Em uma determinada atividade manifestavam terem se apropriado de algum significado novo e noutra seguinte, este mesmo significado se fazia ausente. Isto se explica pelo fato de não terem ainda atingido o pensamento teórico de generalização para os nexos avaliados.

Na atividade 7 que propôs medir os objetos que faziam parte de um kit-medida, foi possível analisar nos registros das professoras a presença ou não das três fases da medida das quais falamos anteriormente. Como esta atividade foi desenvolvida, em grupo, fazemos uma síntese das elaborações que ocorreram nos grupos nos quais participavam as professoras da pesquisa.

Para os grupos F, A e B, com relação a medir o objeto pedra, consideramos que seus pensamentos manifestos indicam o status de pensamento que os alunos trazem inicialmente, pois as elaborações referentes a esta atividade as consideramos de natureza empírica. São relações feitas a partir de abstração referentes às qualidades imediatamente observáveis e sensíveis dos objetos e não advindas de generalizações do pensamento da medida, das relações entre qualidades enumeráveis, grandezas discretas ou contínuas, unidade de grandeza, comparação adequada e expressão numérica.

Os grupos A e B apresentam um movimento do pensamento teórico para medição do objeto cartolina, enquanto no grupo F isto ocorre para as medições dos objetos fio e tronco de madeira. Esses grupos apresentam para suas medições um planejamento que inclui as fases da medida segundo Caraça (2003): escolhem, para o objeto, a grandeza a ser medida, definem uma unidade coerente e expressam a comparação da unidade com a grandeza com números racionais. Esses procedimentos incluem pensar que teriam, para aquele determinado objeto, outras qualidades mensuráveis e para a grandeza escolhida outras unidades de mesma natureza desta.

Acrescentamos, ainda, que a insistência por elas demonstrada na representação da expressão numérica de algumas medidas com os números naturais possibilita inferir sobre a resistência das professoras em trabalhar com os números racionais.

Há uma tendência, de senso comum, a arredondar as enunciações de medida expressas em decimais, para número natural. Esta tendência, também, se faz presente na escola, muitas vezes fundamentada pelo argumento de que o número decimal é de difícil compreensão para a criança. Então, o professor tenta evitar que o aluno se depare com a dificuldade de compreender um número novo, trabalhando somente com os números naturais, mesmo no caso da medida.

Da atividade final, observamos que houve mudança de opinião das professoras com relação à importância do trabalho com grandezas e medidas com as crianças. A maioria dos grupos, ao responder a questão sobre a importância da medida no ensino para a criança, respondeu afirmativamente justificando pela própria definição de medida que conseguiram desenvolver ao longo das atividades. Na definição que elaboram estão presentes os nexos das relações qualidade-quantidade, grandeza-unidade que não apareciam em suas respostas ao questionário inicial.

Outro elemento novo que se faz presente em suas respostas a esta questão é a enunciação de que a medida é uma forma de pensar a realidade, de quantificar as qualidades das coisas e, por isso, é importante para a formação do pensamento da criança.

Esta é uma compreensão essencial que dá bases para o professor pensar de maneira formativa e criativa o ensino da medida. Um assunto que é, geralmente, ensinado de uma forma muito árida e técnica.

Inferimos que esta mudança aconteceu porque, também, uma compreensão mais ampla deste conceito ocorreu, o que pode ser comprovado nas respostas que deram a esta atividade e nos depoimentos em seus portfólios.

As análises dos dados, decorrentes das atividades individuais ou em grupo, das reflexões das professoras nos portfólios, nas aulas que fizeram parte da pesquisa, mostram avanços para algumas professoras e recuos para outras. Possivelmente, algumas atividades não foram totalmente compreendidas, ou não foram adequadamente elaboradas de forma a instigar nos professores mudanças nos seus pensamentos sobre estes conceitos.

Apesar disso, pensamos que esta pesquisa possa contribuir, também, para a Educação Matemática no sentido de instigar novas pesquisas e possíveis caminhos para a formação de professores com relação ao ensino e aprendizagem conceitual da medida.

Olhar o mundo sob a medida pode ser um modo inquietante de querer administrar numericamente toda a realidade, ter o controle inalienável de todos os fenômenos e dessa forma, fazer jus à célebre frase “o homem é a medida de todas as coisas”. Mas, olhar o mundo sob a medida pode ser, também, uma forma de pensar que o homem tem ainda muito que avançar no conhecimento da realidade e de si mesmo para se libertar da ignorância e do sofrimento. Por ambos os motivos, não pode ser um assunto do qual o professor tenha um conhecimento apenas técnico e formal, mas que o compreenda nas suas múltiplas relações tanto de sua constituição internamente à matemática quanto nas suas interconexões com outras áreas de conhecimento.

BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A.D. et al.. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial, 1988.

ÁVILA, G. **Grandezas incomensuráveis e números irracionais.** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 5, 1984, p.6-11.

BOHM, D. . **A totalidade e a ordem implicada.** 12ª ed., São Paulo/SP: Cultrix, 1980.

BOGDAN, R.C. & BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Coleção Ciências da Educação – 12 Porto Editora, 1994

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Portugal: Gradiva Edições, 1998.

BRASIL. MEC. (1998b). **PCN de 1ª a 4ª série.** Brasília: MEC/SEF. Disponível em: <http://mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2007.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.** 1996. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CATALANI, E.M.T. - **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração.** 2002. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, 2002.

COBIANCHI, A. S. **Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores.** 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é a matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTZIG, T. **Número:** A linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DAVYDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 2^a. Reimpresión ,Editorial Pueblo y Educación: Ciudad de La Havana, 1982.

DIAS, M. S. **Formação da imagem conceitual da reta real:** Um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. Tese de Doutorado Educação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 2^a.ed., Campinas/SP: Editora da Unicamp, 1997.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 6^a.ed., Cidade?, :Editora Paz e terra. Coleção Leitura, 1997.

FERREIRA, E. S. M. **Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar.** 2005. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP/SP, 2005.

GARNIER, C. BEDNARZ, N. ULANOSKAYA, I. & All. **Após Vygotsky e Piaget:** Perspectiva Social e Construtivista . Escola russa e ocidental. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1966.

GOLDER, M. (org.) **Leontiev e a psicologia histórico-cultural:** um homem em seu tempo. São Paulo: Gepape: Xamã, 2004.

GUILLEN, M. **Pontes para o infinito:** o lado humano das matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1987.

HOFMANN, J. E. **Historia de la matemática.** Traducción al español por Vicente Valls y Angles y Gonzalo Fernández Tomaz. 1^a. Edición en español, México: Talleres Gráficos Toledo S.A., I. Ciencias Matemáticas, U.T.E.H.A., 1961.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática:** influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

_____. **O homem e a ciência:** o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. Primeiro volume. Fundo de Cultura Geral, vol. 7, Editora Globo, 1952.

ICMI. International Commission on mathematical Instruction. **Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90**. Propostas de Didáctica, Kuwait, 1986.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 9^a.ed., São Paulo/SP: Editora Globo, 1998.

KAMII, C. **A criança e o número**. Trad. Regina A. de Assis. 20^a ed. Campinas, SP: Papyrus, 1995.

KARLSON, P. **A Magia dos Números: a matemática ao alcance de todos**. Coleção Tapete Mágico XXXI, Local? Editora Globo, 1961.

KLINE, M. - **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. Sección de obras de ciência y tecnología, México: Conselho Nacional de Ciência y Tecnología, 1998.

_____. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira S.A., v. 123, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. 7^a. ed., Rio de Janeiro/RJ: Editora Paz e Terra, 2002.

KRUTETSKY, V. A. Algumas características do desenvolvimento do pensamento nos estudantes com pouca capacidade para as matemáticas in Psicologia e Pedagogia. In: **Psicologia e Pedagogia: investigações experimentais sobre problemas didáticos específicos**. Local? Biblioteca de Ciências Pedagógicas, Editorial Estampa 1977.

LANNER DE MOURA, A.R. **A medida e a criança pré-escolar**. 1995. Tese de Doutorado. (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, 1995.

_____. **O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores**. Goiânia, XI Endipe - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 26 a 29 de maio de 2002.

_____. **Movimento Conceitual em sala de aula**. In: Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática. CIAEM, Blumenau/SC, 13-17 de julho de 2003.

_____. CUNHA, M. **A criação da medida acontece quando o trabalho humano combina o número e forma.** Encontro de professores de Matemática. Minicurso. Campinas/S.P.: Instituto de Matemática e Estatística. IMEC, 2005.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, consciência, personalidad.** 2ª.reimpresión, Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

LEONTIEV, A. N. **Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil.** In: VIGOTSKII, L.S; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone/Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo.** Lisboa: Horizonte universitário, [1964?].

LIMA, L.C. **Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica.** In: Programa Integrar, Caderno do Professor, Trabalho e Tecnologia, CUT/SP, 1998, p.95-103.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. **A Teoria dos Campos Numéricos:** A longa marcha da criação numérica. São Paulo: CEVEC/CIART, edições de 1992 e 1997.

_____. **Apostila básica de Matemática.** FAEP, Universidade de Mogi das Cruzes/SP, Secretaria de Estado da Educação, Projeto de Educação Continuada, Pólo 3, 1998.

_____. **A variável:** escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1. São Paulo/SP: CEVEC/CIARTE, edições de 1993, 1997 e 2000.

MEC/SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília, 1998.

MOISÉS, R. P. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica:** o problema em movimento. 1999. Dissertação. (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. USP/S.P., 1999.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1991.

MOURA, M.O. A atividade de ensino como ação formadora. In: **Ensinar a ensinar.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

_____. **O educador matemático na coletividade de formação:** uma experiência com a escola pública. 2000. Tese de livre docência (Departamento de Metodologia). Faculdade de Educação, USP/SP, 2000.

_____. **A educação escolar como atividade.** In: Anais do IX Endipe - Encontro Nacional de Didática e prática de ensino: “Olhando a qualidade do ensino a partir da sala de aula”, v. II/2, de 04 a 08 de maio de 1998, Águas de Lindóia/SP, 1998.

PRADO, E. P. A. **Uma reflexão sobre formação de professores no ensino da matemática.** 2000. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo/SP., 2000.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas.** Moscou. Editorial Mir Moscú, 1987.

SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. Proposta curricular para o ensino de Matemática: 1º grau.** SE/CENP: São Paulo, 1986.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Atividades matemáticas: ciclo básico, 1.** 3.ed. São Paulo, 1994.

_____. **Atividades matemáticas: ciclo básico, 2.** 3.ed. São Paulo, 1998.

_____. **Atividades matemáticas: 4ª série do ensino fundamental.** 2.ed. São Paulo, 1998.

_____. **Ciclo básico e a reorganização do ensino de 1º grau: sistema de avaliação.**

São Paulo, 1986.

SILVA, J. S. Pedagogia. Por quê?... **Gazeta de Matemática.** Livraria Sá da Costa, Lisboa, ano III, nº 11, p. 15 - 16, jul. 1942.

SMITH, D. E. **History of Mathematics.** v. I, New York: Dover, 1958.

SOUSA, M. C. **A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da Delegacia de Ensino de Itu, do Movimento Matemática Moderna e de sua influência no currículo atual.**1999. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. UNICAMP/S.P., 1999.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Local?: Ciência aberta, Gradiva, 1987.

VALENTE, W. Educação Matemática e política: a escolarização do conceito de função no Brasil. In: Educação Matemática em revista. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, ano 9, no. 12, p. 16-20, jun. de 2002.

_____. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 - 1930).** São Paulo: Annablume Editora, 1999.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem,** São Paulo: Martins Fontes, 1989.

_____. **A Formação Social da Mente,** São Paulo: Martins Fontes, 1989.

ANEXOS

ANEXO 1

Quadro 2 (Q2)

1) Qual a sua formação? Qual sua experiência com o magistério? Há quanto tempo?
2) Em sua experiência qual área de conhecimento você deu mais ênfase? Por quê?
3) Que lugar ocupa a matemática no seu dia-a-dia da sala de aula (tempo de preparação comparativamente a outras disciplinas/ n° de atividades desenvolvidas)?

Quadros-sínteses QS2.1

Tempo de experiência com o magistério	
Tempo de Magistério	Número de professores
Mais de 10 anos	9
Menos de 10 anos	4
TOTAL	13

Quadro-síntese QS2.2

Nível de atuação	
Nível	Número de professores
Educação Infantil	4
Fundamental	7
Outros	2
TOTAL	13

Quadro Síntese QS2.3

Área de Conhecimento priorizada na prática docente	
Área de Conhecimento	Número de professores
Matemática	2
Outras	11
Total	13

Quadro Síntese QS2.4

Experiência no ensino com o tema grandeza		Número de professores
Trabalharam com grandeza		13
Especificaram A grandeza trabalhada	tempo	2
	quantificação	1
	comprimento	4
	massa	1
Não especificaram a grandeza		5

ANEXO 2

Quadros Q3

4) Você já trabalhou "GRANDEZAS" com seus alunos?
5) Se já, de que forma?
6) Você já trabalhou "MEDIDA" com seus alunos? Em que série? Como o fez?
7) Caso tenha trabalhado recorreu a algum livro? Dê um exemplo de atividade que usou.
8) Você acha importante trabalhar o conteúdo medida? Explique por quê?

Quadro- síntese QS3. 1

Experiência no ensino com o tema Grandeza		Número de Professores
Trabalharam com grandeza		13
Especificaram a grandeza trabalhada	tempo	2
	quantificação	1
	comprimento	4
	massa	1
Não especificaram a grandeza		5

Quadro-síntese QS3. 2

Experiência no ensino com o tema Medida

Experiência no ensino com o tema Medida		Número de Professores
Trabalharam com Medida		13
Especificaram como trabalharam com Medida.	Medida como comparação	13
	Medida como comprimento	6
	Medida como aplicação de um padrão	4
	Padrão não convencional de medidas	3

Quadro-Síntese QS3.3

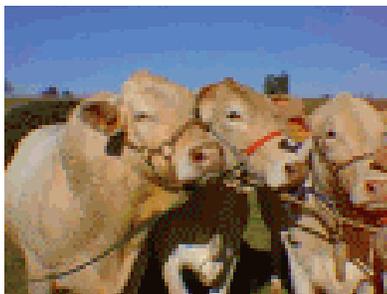
Importância de se trabalhar o conteúdo medidas	
Respostas com relação a importância de trabalhar com medidas	Nº de professores
Importância sem justificativa	1
Importância com a justificativa do uso em função do cotidiano	8
Importância com a justificativa do uso para conceitos matemáticos	3
Discordância da importância do uso	1

ANEXO 3

Quadro Atividade 4 (Q4)

<p>Observe os quadros 1 e 2.</p> <p>1) Quais as qualidades que você observa no quadro 1? Quais as qualidades que você observa no quadro 2?</p>
<p>2) A quais dessas qualidades podemos atribuir intensidade?</p>
<p>3) Quais dessas intensidades são enumeráveis? Por quê?</p>
<p>4) As que são enumeráveis, atribua-lhes um número e explique o porqu da escolha da escolha desse número?</p>

Quadro imagem 1 (QI1)



Quadro imagem 2 (QI2)



Quadro síntese QS4.1

Qualidades	Imagem da Cachoeira:	Imagem do Gado
Qualidades Espirituais: União, graça, carinho vida, fartura, Beleza, frescor, vida, paz, Deus, tranqüilidade, sem natureza	N° de professores 12	N° de professores 10
Qualidades Físicas: Cor, tamanho, força, forma geométricas.	1	3

Quadro-síntese QS4.2

	Tipos Qualidade	Nº/respo
Intensidade	Qualidades Subjetivas Espirituais Beleza, união, tranqüilidade, feiúra, robustez, tudo.	9
	Qualidades de Consenso/ Físicas Cor, forma, profundidade nitidez.	3
	OUTRAS Comparação entre as imagens	1
Enumeração	Qualidades Subjetivas e Físicas Cor, vegetação, calor, velocidade altura, temperatura,força, movimento	8
	Qualidades De Consenso/ Físicas Animais , pois podem ser contados	1
	Nenhuma, pois são quantificáveis, não respondeu	2
	Todos, união	2
Atribuição de um número	Qualidades de Consenso/ Físicas Animais, quantidade de cores.	4
	Qualidades Subjetivas E Físicas Atribuição de número aleatória	6
	Outras Não são enumeráveis	2
	Não respondeu	1

ANEXO 4

Atividade 3: Observe o quadro 3 (cachoeira e pedra). Nele considere os seguintes elementos: pedras, ovelhas e cachoeira. Qual dos dois elementos organizamos em unidades naturais, o das pedras ou das cachoeiras? Qual deles podemos enumerá-los?

Por quê?



Quadro-síntese QS5: a identificação dos elementos organizados em unidades naturais

Figuras	Ovelha	Pedra	Cachoeira
Elementos organizados em unidades naturais	Nº	Nº	Nº
As três figuras	1	1	1
Uma figura	0	0	6
Duas figuras	0	7	7
Nenhuma	1	0	0

ANEXO 5: ATLETAS

1) Os atletas abaixo se apresentaram para o técnico de basquete Amauri Passos para a formação do time que disputará o próximo campeonato. Todos demonstraram grande habilidade com a bola. a) Qual é a qualidade mais importante que deve ser comum a todos os jogadores, além de jogar bem basquete, para o time se apresentar bem na temporada?

1b) Esta qualidade possui quantidade?

1c) Esta quantidade varia?

1d) O homem sabe como conhecer esta quantidade?

Observe as fotos dos atletas:



Identificação de qualidades no time de basquete

Quadro-Síntese 6.1 (QS6.1)

Identificação das qualidades	
Necessidade mais importante para o time	Nº de professores
Jogar bem, espírito de equipe, habilidade com a bola, disposição, união, companheirismo.	6
Altura , velocidade, agilidade, rapidez	7
Conhece e sabe expressar esta quantidade	0

Variação da quantidade

Quadro-Síntese 6.2 (QS6. 2)

Quantificação			
Tipo de resposta	Sim	Não	Não respondeu
Esta qualidade possui quantidade	Nº	Nº	Nº
	10	3	
Esta quantidade varia	11		2
Sabemos expressar esta quantidade	11		2

ANEXO 6

Observe as fotos dos animais:



Quadro-Síntese QS7.1 (QS7.1)

Qualidades que provocam medo	
	Nº
Ferocidade, instinto e irracionalidade	10
Massa, força e som	3

A quantidade da qualidade

Quadro-Síntese 7.2 (QS7.2)

Quantidade da qualidade e seu conhecimento			
	Sim	Não	Não respondeu
Número de professoras	Nº	Nº	Nº
Qualidade admite quantidade	9	3	1
Variação da Qualidade	Nº	Nº	Nº
	11	1	1
Conhecimento da quantidade	Nº	Nº	Nº
	9	2	2

ANEXO 7

ATIVIDADE DA JARRA

Atividade Q8

Uma jarra pode ser enchida de água, de vinho, de suco de laranja, gasolina, etc.
a) Qual é a qualidade comum a todas estas substâncias que as possibilitam preencher totalmente a jarra?
2b) Esta qualidade possui quantidade?
2c) Esta quantidade varia?
2d) O homem sabe como conhecer esta quantidade?

Quadro-Síntese 8.1(Q8.1)

Qualidade comum que permite preencher a jarra	
Quantidade	Nº
Ser líquido	11
Capacidade, volume	2

Quadro-Síntese 8.2 (Q8.2)

Quantidade da qualidade e seu conhecimento		
	Sim	Não
	Nº	Nº
Esta qualidade admite quantidade	13	
Variação da Qualidade	Nº	Nº
	12	1
Conhecimento da quantidade	Nº	Nº
	13	

ANEXO 8

ESTUDO DAS GRANDEZAS

A relação qualidade e quantidade

ATIVIDADE SOBRE GRANDEZA 1) Abaixo estão representados diferentes objetos ou atividades. Neles o homem realiza movimentos com as qualidades que lhes são inerentes, administrando as suas diferentes grandezas.

Quadro 9.1

a) suco 	b) som 	c) território 
d) viagem espacial 	e) medindo 	f) amor 

A partir destes desenhos complete a tabela abaixo:

	MOVIMENTO	GRANDEZA
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Quadro-síntese 9.2 (QS9.2)

IMAGEM	MOVIMENTO	GRANDEZA		
		NNº	Tipo resposta	Nº
	Suco/líquido/cheio	9	Litros	9
	Depositar/mexer	2	Capacidade	1
	Diferentes formas	1	Volume	2
	Sede	1	Medida	1
	Assoprar /soprar	2	Decibéis	7
	Trompete/instrumento.	3	Watts	1
			P.ser méd.	1
	Mus/som /prod.	5	Som	1
Instrumento+ Som	3	Alto/baixo	2	
	Território	1	Km	3
	Mapa/espço	2	Extensão	1
	Contorno	1	Área	3
	Pais/Brasil/	7	Metro quadrado	1
	Deslocamento	1	outros	

IMAGEM	MOVIMENTO		GRANDEZA	
	Tipo de resposta	Qt.	Tipo de resposta	Qte.
	Viagem	5	Km/hora, km/ano-luz	8
	Universo	1	Distância	2
	Planetas,	5	Anos- luz	2
	Espaço	2	Velocidade	1
	medindo altura	7	Metro, cm, altura	7
	medir	3	Compr./altura	
	tamanho	2	metro	1
	brincadeira	1	Medida/comprimento	2
			Altura	1
	Afeto	7	Não dá para ser medido, Intensidade, muito pouco	2
	namoro	2	Não dá para medir	4
	amor	2	calor	1
	sentimento	2	Inocência	1
			Não responderam	5

ANEXO 9

Quadro 10.1

Quadro 10.1-MEDIÇÃO DA PEDRA

<i>PEDRA</i>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
Grupo A	<i>“Montamos uma balança, usando caneta, barbante, um estojo cheio e a pedra (como comparação de peso)”.</i>	<i>A pedra é mais pesada que o estojo.</i>
Grupo B	<i>“Para encontrarmos o peso da pedra improvisamos uma balança usando um pedaço de tronco fino e com um pedaço de barbante encontramos o ponto central do mesmo. A seguir penduramos a pedra em uma das pontas e fomos fazendo varias tentativas usando uma garrafa plástica com água fomos medindo e eliminando a água até equilibrar a balança. Em seguida, medimos o liquido com um copinho”.</i>	<i>1 pedra = 3 copinhos e meio de líquido.</i>
Grupo F	<i>“Foi calculada seu peso, comparando-a com o peso de 2 estojos de lápis. Primeiro comparando os pesos nas mãos e depois improvisando-se uma balança com um cade em cima do encosto da cadeira e equilibrando os 2 pesos”.</i>	<i>Peso da pedra e peso de dois estojos</i>

Quadro 10.2-MEDIÇÃO DA GARRAFA

<i>GARRAFA</i>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
Grupo A	<i>“Pegamos uma garrafa vazia e uma cheia. Para medir a água, usamos um copinho descartável (café) e transportamos a água de um para o outro frasco. Usamos o copinho como uma comparação”.</i>	<i>A medida foi 6 copinhos. Copo é a unidade de medida</i>
Grupo B	<i>“Medimos o conteúdo da garrafa a tampinha da própria garrafa”.</i>	<i>1 garrafa = 15 tampinhas.</i>
Grupo F	<i>“Primeiro medimos a quantidade da garrafa (56 tampinhas/8 gomos), construímos um pêndulo com barbante na mão e fomos retirando a quantidade de água até encontrar o equilíbrio. Resultado, peso 28 tampinhas ou 4 gomos.”</i>	<i>Peso da água. E volume da água</i>

Quadro 10.3- UM PEDAÇO DE CARTOLINA DE FORMA IRREGULAR

<i>MEDIDADA CARTOLINA</i>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
<i>Grupo A</i>	<i>E aí, resolvemos medir a área com tampa de garrafa de água.</i>	<i>Deram 10 tampas e mais 1 tampa aproximadamente.</i>
<i>Grupo B</i>	<i>Medimos o contorno da figura com barbante. Em seguida medimos o barbante com um apontador com depósito</i> <i>Área: unidade de medida: moeda de 10 centavos.</i>	<i>Perímetro = 7 apontadores e meio.</i> <i>Área aproximadamente 29 moedas de 10 centavos.</i>
<i>Grupo F</i>	<i>Quadriculamos a superfície com uma borracha, realizando a multiplicação da h. l., fazendo as devidas aproximações com as sobras da figura</i>	<i>totalizando</i> <i>5 borrachas.</i>

QUADRO 10.4 - MEDIÇÃO DO PEDAÇO DE FIO

<i><u>MEDIÇÃO DO FIO.</u></i>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
<i>Grupo A</i>	<i>Medimos o fio por palmos. Ficamos entre a caneta BIC e o palmo. Optamos por ele por acreditamos mais próximo a nós.</i>	<i>A medida foi de</i> <i>dois palmos da colega J</i>
<i>Grupo B</i>	<i>Utilizando um apontador, fomos medindo o barbante no sentido do comprimento.</i>	<i>Pedaço de fio = 9 apontadores.</i>
<i>Grupo F</i>	<i>Utilizamos como unidade de medida o lápis que fomos contando passo a passo a unidade do lápis</i>	<i>Fio igual a 5 lápis e 1/2.</i>

Quadro 10.5- Pedaco de tronco de madeira de diferentes tamanhos

<u>MEDICÃO DO</u> <u>TRONCO</u>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
<i>Grupo A</i>	<i>Pegamos o barbante primeiro e tentamos pedir por ele, mas não conseguimos atribuir-lhe uma referência. Aí resolvemos usar o relógio da Vanessa como medida.</i>	<i>Deu três pulseiras..</i>
<i>Grupo B</i>	<i>Usaram Lápis e carteirinha.</i>	<i>3lápis + 3/4 do lápis. 5 carteiras e 1/3 de carteirinha.</i>
<i>Grupo F</i>	<i>Para medirmos o tronco utilizamos o barbante dividido em nós</i>	<i>Foi de 7 espaços de nós.</i>

QUADRO 10.6 - COPOS DE PLÁSTICOS

<u>MEDIÇÃO do</u> <u>COPINHO</u>	<i>Procedimentos</i>	<i>MEDIDA</i>
<i>Grupo A</i>	<i>Decidimos medir a altura do copinho</i>	<i>A altura foi de 2 dedos polegares da colega</i>
<i>Grupo B</i>	<i>Unidade de medida - tampinhas da garrafa de água.</i>	<i>Capacidade do copo = 5 tampinhas.</i>
<i>Grupo F</i>	<i>Medimos o volume do copo com as tampinhas das garrafas</i>	<i>totalizando 5 tampinhas.</i>