MARILENE RIBEIRO RESENDE

RE-SIGNIFICANDO A DISCIPLINA TEORIA DOS NÚMEROS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA LICENCIATURA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

MARILENE RIBEIRO RESENDE

RE-SIGNIFICANDO A DISCIPLINA TEORIA DOS NÚMEROS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA LICENCIATURA

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado.***

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

A meus pais: exemplos de luta

A meus filhos: motivos da luta

A meus irmãos, cunhados, sobrinhos: companheiros de luta

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

Especialmente, à professora doutora *Sílvia Dias Alcântara Machado,* que, de modo competente, carinhoso e marcado pelo diálogo e respeito, conduziu a orientação deste trabalho.

Aos professores doutores *Célia Maria Carolino Pires, José Luiz Magalhães de Freitas, Laurizete Ferraqut Passos, Plínio Cavalcanti Moreira,* que, participando da banca de qualificação, contribuíram de modo significativo para o delineamento e conclusão deste trabalho.

Aos professores entrevistados que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa, contribuindo com seus saberes, para o enriquecimento de nossas análises e conclusões. Sem a sua contribuição, certamente este trabalho não teria sido concretizado.

Ao Dr. *Marcelo Palmério*, reitor da Universidade de Uberaba, que favoreceu condições para que eu pudesse me ausentar semanalmente e me dedicar aos estudos.

À minha família, mãe, filhos, irmãos e irmãs, cunhados e cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, que sempre me incentivaram e me deram "colo" em minha caminhada.

Ao *Renatinho, Marquinho, Saron, Pietra e Hector* que me receberam em suas casas de modo aconchegante e prazeroso.

Aos colegas do IFE e da COPESE, pelo incentivo e compreensão.

A todas as pessoas que fizeram parte da minha trajetória de vida, familiares, colegas de trabalho, ex-alunos, em especial, àquelas que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho: *Prof. Newton Mamede, Profa. Leila Maxwell, Profa. Edilia Mendes e Janete Aparecida Pereira Melo.*

RESUMO

Este trabalho se insere dentro da problemática que questiona qual a álgebra deve ser ensinada nos diferentes níveis da escolaridade, em especial na formação de professores de matemática da escola básica. Neste contexto, este estudo foi orientado pela questão: *Qual Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando à prática docente na escola básica?* O objetivo é compreender a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, e buscar elementos para re-significá-la na licenciatura em matemática. Os referenciais teóricos foram buscados em Chevallard, Chervel, Tardif, Macedo e Lopes, para discutir o saber científico e o saber a ensinar; em Shulman, para discutir os saberes dos professores; e em Campbell & Zazkis, para tratar a Teoria dos Números no ensino. Numa abordagem qualitativa de pesquisa, foram analisadas as propostas curriculares das disciplinas que tratam de Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em matemática de doze universidades brasileiras; foram analisados dez livros didáticos, escolhidos dentre os mais citados nos programas das disciplinas pesquisadas; e foram realizadas sete entrevistas semi-estruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática. Para o tratamento dos dados, utilizou-se a *análise de conteúdo*, conforme descrita por Lüdke & André, Laville & Dionne e Bardin. Foi possível concluir que a Teoria dos Números tratada na maioria das universidades pesquisadas não tem a preocupação com a formação do professor da escola básica, pois a abordagem dos conteúdos é axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, o que permite enquadrar o seu ensino na *tendência formalista clássica.* Por outro lado, puderam ser identificados elementos e possibilidades para re-significá-la, considerando que: *tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica,* sendo que os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de matemática nesse nível e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor; *a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar,* como a recorrência, a indução matemática, a divisibilidade; *a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova,* porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova tem diferentes funções e que, no ensino, não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática; *a Teoria* *dos Números é um campo propício para a investigação matemática,* porque permite a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas. Essas potencialidades sustentam a concepção de uma disciplina, que está sendo denominada Teoria Elementar dos Números, que tem como fonte o saber científico, mas também os saberes escolares e as demandas que o seu ensino apresenta ao professor. Constituem tópicos essenciais a serem abordados: os números inteiros em seus aspectos históricos, epistemológicos e procedimentais; a divisibilidade, números primos e equações diofantinas lineares. Seus objetivos e abordagens devem considerar que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, a teoria e a prática devem estar presentes na sua constituição, como elementos indissociáveis e imprescindíveis.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Educação Algébrica; Ensino de Teoria dos Números; Números inteiros.

ABSTRACT

This study is part of the issue that questions which algebra should be taught in the different levels of schooling, especially in the development of mathematics teachers for basic education. In this context, this study was guided by the question: *"Which Number Theory is or should be understood as a piece of knowledge to be taught in mathematics teacher development courses, aiming at teacher's practice in basic education?"* The purpose is to understand the Theory of Numbers from the point of view of knowledge to be taught, and find elements to give it a new meaning in the mathematics teacher development courses. The theoretical references were based on Chevallard, Chervel, Tardif, Macedo and Lopes in the discussion of the scientific knowledge and the knowledge to be taught; on Shulman when discussing teachers' knowledge and on Campbell & Zazkis to discuss the Theory of Numbers in teaching. The research takes on a qualitative approach, thus analyzing the curricular proposals of the subjects which deal with the Theory of Numbers in twelve Brazilian universities; ten school books, chosen from among those which are most mentioned in the programmes of the subjects under scrutiny, were analyzed, and seven semi-structured questionnaires were carried out with teachers and researchers of the Theory of Numbers or Mathematics Education. For the data treatment, the *content analysis* as described by Lüdke & André, Laville & Dionne and Bardin were used. It was possible to conclude that the Theory of Numbers, as worked in the majority of the universities under study, does not have any preoccupation with the development of teachers for basic education, as the content approach is axiomatic, using a predominantly symbolic-formal language, with emphasis on demonstrations, which allows for fitting this teaching into the *classical formalistic tendency*. On the other hand, it was possible to perceive elements and possibilities for giving a new meaning to it, considering that: *topics of the Theory of Numbers are present in basic education,* as the natural and integer numbers occupy a great part of the mathematics curriculums at this level, involving special issues in their teaching, which can not be left out in teacher development; *the Theory of Numbers is a favourable space for the development of relevant mathematical ideas related to natural numbers and some also extended to the integers, present in school mathematics,* such as recurrence, mathematical induction and divisibility; *the Theory of Numbers is a favourable field for a wider approach on the issue of proof,* because it offers rich opportunities for the exploration of the different types of proofs, allowing the teacher-student to understand that the proof has different functions, and that, in teaching, it can not be understood in the same manner as in mathematical research; *the Theory of Numbers is a favourable field for mathematical investigation*, because it allows for exploration of patterns and numerical relations, the use of recursion and mathematical induction, offering the opportunity for development of the abilities of conjecturing, generalizing, testing and validating the conjectures. These potentialities sustain the conception of a subject which is being called Elementary Theory of Numbers, which has as its source the scientific knowledge, but also the school knowledge and the demands which such teaching puts on the teacher. These constitute essential topics for discussion: the integer numbers and historical, epistemological and procedural aspects; divisibility, prime numbers and lineal diophantine equations. Their aims and approaches should take into consideration that the content and the pedagogic knowledge on the content, theory and practice, should be present in its constitution.

Key words: Mathematics Education; Teacher Development; Algebraic Education; Teaching of the Theory of Numbers; Integer Numbers.

RÉSUMÉ

Ce travail s'insère dans la problématique qui questionne quelle algèbre doit être enseignée aux différents niveaux de scolarité, surtout dans la formation de professeurs de mathématique de l'ecole secondaire. Dans ce contexte cette étude a éte orientée vers la question: *Quelle Théorie des Nombres c'est ou pourrait être conçue comme um savoir à enseigner dans le licenciement em mathématique, visant surtout la pratique enseignante à l'école secondaire?* L'objectif, c'est comprendre la Théorie des Nombres en tant qu'un savoir à enseigner et chercher des éléments capablés de la ressignifier dans le licenciement en mathématique. Les référentiels théoriques ont été recherchés d'après Chevallard, Chervel, Tardif, Macedo et Lopes pour discuter le savoir scientifique et le savoir à enseigner; en Shulman, pour discuter les savoirs des professeurs; et en Campbell & Zazkis, pour traiter la Théorie des Nombres dans l'enseignement. Dans um abordage qualitatif de recherche, ont été analisées les propositions curriculaires des disciplines qui traitent la Théorie des Nombres de douze universités brésiliennes; ont été analisés dix livres didatiques, choisis parmi les plus cités aux programmes des disciplines recherchées et encore ont été realisées sept interviews semi-structurées avec des professeur et des chercheurs en Théorie des Nombres ou en Education Mathématique. Pour le traitement des donnés, on a utilisé *l'analyse de contenu* d'aprés Lüdke & André, Laville & Dionne et Bardin. Il a été posible conclure que la Théorie des Nombres traitée dans la majorité des universités recherchées n'a pas le souci avec la formation du professeur de l'école secondaire, puisque l'abordage des contenus est axiomatique, dans um langage préferentiellement symbolique-formel, avec de l'emphase dans les raisonnements dédutifs, ce qui permet d'encadrer cet apprentissage à la tendence *formaliste classique*. D'un autre côte, on a pu être identifiés des éléments et des possibilités pour la re-signifier en considérant que: *des topiques de la Théorie des Nombres sont présents dans l'éducation secondaire*, en considérant que les nombres entiers occupent une grande partie des mathématique dans ce niveaux et son apprentissage a des questions spécifiques qui ne peuvent pas être déconsiderées dans la formation du professeur; *la Théorie des Nombres est um espace propice pour le développement d'idées mathématiques fondamentales, qui se rapportent aux nombres entiers, présents dans la mathématique scolaire* telles que la récurrence, l'induction mathématique, la divisibilité; *la Théorie des Nombres est un champ favorable à un abordage ample de preuve,* parce qu'elle offre de riches opportunités à l'exploration de diferentes sortes de preuve qui permettent au licencié d'apercevoir que la preuve a des diverses fonctions et que dans l'enseignement ne doit pas éter comprise de la même façon que dans la recherche en mathématique; *la Théorie des Nombres est un champ propice à l'investigation mathématique*, parce qu'elle permet l'exploration de étalon et realtions numériques, l'emploi de la récurrence et l'induction mathématique ce qui occasionne le développement des habilités de conjceturer, de géneraliser, tester et valider les conjectures. Ces potentialités soutiennent la conception d'une discipline qui est en trains d'être denominée Théorie Elémentaire des Nombres. Elle a comme source, le savoir scientifique mais aussi les savoirs scolaires et les demandes que cet apprentissage pose au professeur. Les principaux points abordées par cette discipline sont les nombres entiers dans leurs aspects historiques, épistemologiques et procédiraux; la divisibilité, les nombres premiers et les équations diophantines linéaires. Les objectifs et les abordages de cette discipline doivent considérer que la connaisance du contenu et la connaisance pédagogique du contenu, la théorie et la pratique doivent être présentes dans sa constitutions comme des éléments indissociables et indispensables.

Mots clés: Education Mathématiques; Formation de professeurs; Education Algébrique; Enseignement de Théorie des Nombres; Nombres entiers.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho se insere na linha de pesquisa *Matemática na estrutura curricular e formação de professores* do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, dentro da problemática do Grupo de Pesquisa em *Educação Algébrica*.

No contexto dos questionamentos que envolvem a preocupação com a álgebra a ser ensinada nos diferentes níveis de escolaridade, este trabalho trata a disciplina Teoria dos Números na licenciatura em matemática. Sabemos que a discussão da formação inicial do professor de matemática é complexa, pois envolve olhares, questões e interesses diversos, tanto no âmbito das políticas educacionais, quanto no das comunidades científicas (sociedades, departamentos que congregam matemáticos, educadores matemáticos), quanto no das demandas que o ensino da matemática impõe num país marcado por uma profunda desigualdade social.

Concordando com Fiorentini & Lorenzato (2006), partimos do pressuposto de que as atividades profissionais do professor de matemática e as do matemático são diversas, pois têm objetivos, abordagens e públicos diferentes, embora estejam lidando com o mesmo objeto que é a matemática. Assim, a formação desses profissionais deve considerar esses aspectos.

No caso da formação do professor de matemática na licenciatura, não podemos nos esquecer de que se pretende formar alguém que terá como tarefa educar através da matemática. Para esse fim, concorrem saberes diversos, advindos das ciências e das práticas – profissional, social, cultural, dentre outras. Nesse contexto, as chamadas disciplinas “específicas”, ou seja, as que tratam dos conteúdos matemáticos, têm um papel importante, pois estamos formando o professor de matemática. Contudo, a constituição dessas disciplinas, o seu papel e a sua contribuição no processo de formação inicial precisam ser problematizados. Essas questões não são simples e estão a exigir pesquisas, pois, historicamente, as licenciaturas surgiram atreladas aos cursos de bacharelado, com ênfase no conteúdo específico da matemática e nos seus modos de produção acadêmica. Partindo dessas considerações iniciais, é que nos propusemos verificar quais são as concepções de Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, voltado para a formação do professor de matemática da escola básica, e buscar elementos que possam re-significá-la neste contexto.

Assim, no primeiro capítulo, procuramos situar o interesse pelo tema dentro da nossa trajetória profissional, como também dentro do contexto das diretrizes nacionais, estabelecidas nos últimos 10 anos, tanto para o ensino de matemática nos níveis fundamental e médio, como também para a formação de professores da escola básica. Reportamos-nos também a alguns trabalhos no campo da educação algébrica, com o objetivo de situar a nossa preocupação também dentro dessa área. Apresentamos, em seguida as nossas questões, os objetivos, a metodologia e a trajetória metodológica.

No segundo capítulo, procuramos referenciais teóricos para discutir a questão dos saberes – científicos, a ensinar e escolares –, conseqüentemente, discutir o que caracteriza as disciplinas acadêmicas universitárias e as disciplinas escolares. Assim, tratamos a questão da transposição didática, apoiados em Chevallard, e abordamos as contribuições de Chervel, Tardif, Perrenoud, Lopes e Macedo, para a concepção de uma disciplina a ensinar, e as de Shulman, para discutir os conhecimentos do professor.

No terceiro capítulo, com o objetivo de situar a Teoria dos Números dentro da matemática, enquanto um saber científico, pois esse é fonte do saber a ensinar, apresentamos um breve histórico e algumas questões ligadas às suas interfaces com outras áreas da matemática.

Visando mostrar qual é a Teoria dos Números que está sendo ensinada atualmente nos cursos de licenciatura, no quarto capítulo, analisamos as propostas curriculares que tratam de Teoria dos Números em cada uma das doze instituições pesquisadas, e, no quinto capítulo, a análise de livros didáticos indicados nesses cursos.

No sexto capítulo, apresentamos o que pensam os professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática sobre o ensino da Teoria dos Números, com o objetivo de destacar elementos para compreendê-la e re-significá-la como disciplina a ensinar.

Potencialidades, dilemas e tensões da Teoria dos Números como saber a ensinar, percebidas a partir das análises apresentadas anteriormente, são discutidos no sétimo capítulo, com base na literatura em Educação Matemática.

Nas considerações finais, sintetizamos as nossas análises e reflexões, procurando responder às questões levantadas.

CAPÍTULO 1

JUSTIFICATIVAS E QUESTÕES METODOLÓGICAS

1.1. Motivações para o estudo

É na nossa trajetória profissional de mais de trinta anos de magistério, trabalhando desde o ensino fundamental, até a formação inicial e continuada de professores de matemática, que se encontram as raízes do nosso interesse pelo ensino-aprendizagem dos números.

Não há dúvidas de que os números têm um papel central na matemática e na história da matemática. Caraça (1984), em sua obra *Conceitos Fundamentais da Matemática,* considera os números um dos conceitos fundamentais, dedicando-lhes a primeira parte da obra, em que discute os aspectos históricos e epistemológicos da construção dos números naturais, dos racionais positivos, dos irracionais, dos inteiros relativos e dos reais. Neste texto, como em outros de história da matemática, podemos constatar que os números têm raízes históricas longínquas, que remontam à necessidade de contar. No entanto, o seu desenvolvimento, a sua sistematização atravessou séculos, inquietou a muitos matemáticos e leigos, sendo que a busca de respostas para questões relacionadas ao tema, algumas delas ainda em aberto até nossos dias, fez o conhecimento matemático e científico avançarem.

Além do papel de destaque dos números nos campos referidos acima, têm também forte presença na matemática escolar nos anos iniciais, principalmente os inteiros e os racionais. Segundo Lins e Gimenes (1997), o estudo dos números sempre foi um assunto que ocupou grande parte do ensino obrigatório de Matemática em todos os países.

Entretanto, atuando na formação continuada de professores, pudemos observar visões superficiais, simplistas e, até mesmo, concepções equivocadas acerca deste tema. Por exemplo, a compreensão de números naturais de muitos professores se confunde com os símbolos utilizados. Muitas questões tais como: os diferentes significados das operações com os números naturais; os porquês dos algoritmos das operações; a trajetória histórica da representação dos números naturais; a importância da compreensão do sistema de numeração decimal para o trabalho com os naturais no Ensino Fundamental; o significado e a importância dos números primos; o porquê dos critérios de divisibilidade, dentre outras questões, ao serem abordadas nesses cursos, parecem estar praticamente ausentes do conhecimento e da prática de muitos desses professores. Alguns chegam a confessar que essas questões não haviam sido tratadas no seu processo de formação.

Assim, uma pergunta passou a nos intrigar, após vários anos de docência na licenciatura e na formação continuada, qual seja: - Se os números têm uma presença forte na matemática escolar, por que não são tratados com ênfase nos cursos de formação, considerando os diversos aspectos que os envolvem, inclusive os referentes ao seu ensino na escola básica?

Fazendo uma retrospectiva dos currículos da licenciatura em matemática nos quais atuamos como docente ao longo de nossa trajetória profissional, pudemos constatar a ausência de espaços para um tratamento mais aprofundado e significativo dos conteúdos envolvendo os números, quer nas disciplinas específicas, quer na prática de ensino e nos estágios. Sempre estiveram presentes, nesses currículos, até por exigência dos *currículos mínimos*, definidos pelos Órgãos competentes, disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra (com ênfase nas estruturas algébricas), Física, Álgebra Linear, Análise Matemática, Geometria Analítica, que são disciplinas importantes na formação, mas que não tratam os conjuntos numéricos como foco, tendo em vista o seu ensino na escola básica.

Outra constatação que nos inquieta é a crença de que esses conteúdos parecem ser óbvios, aliada a uma outra de que “aquele que sabe o mais sabe o menos”, presente principalmente no ensino superior. Acreditando, ainda, que aquilo, que parece óbvio, deva ser considerado *dado*, não são oferecidas aos alunos oportunidades de retomar esses conceitos e procedimentos, para que a sua compreensão possa ser ampliada e novos significados possam emergir.

Estas vivências como docente têm nos conduzido a muitos outros questionamentos relacionados ao ensino-aprendizagem de números, tanto de natureza conceitual, como epistemológica, como metodológica, considerando, principalmente a formação de professores na licenciatura. - Quais conteúdos sobre este tema devem ser ensinados, levando-se em conta os conhecimentos prévios dos licenciandos? - Com que objetivos? - Qual a importância destes conteúdos na formação desses alunos, considerando o trabalho que eles deverão desenvolver na escola básica, com todos os desafios que o ensino desse tema lhes apresenta? - Devem estes conteúdos merecer uma maior ênfase na formação inicial? - Que tipos de abordagens devem ser priorizadas?

Estas experiências e inquietações foram determinantes para a escolha do tema deste trabalho, direcionando o nosso olhar, após delimitações que se fizeram necessárias, para o estudo dos inteiros na licenciatura em matemática, considerando a disciplina Teoria dos Números. Assim, a problemática desta pesquisa situa-se no campo da formação inicial do professor de matemática na licenciatura e da álgebra que deverá ser ensinada, e tem como objeto de investigação a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar na licenciatura em matemática.

1.2. A formação dos professores e os saberes específicos

Nas últimas décadas, como conseqüência de grandes transformações sociais, culturais e tecnológicas pelas quais tem passado a humanidade, novos paradigmas têm norteado a concepção de homem, de conhecimento, de sociedade e, conseqüentemente, de educação.

Propõe-se uma educação que rompa com a fragmentação, obstáculo à percepção da relação entre as partes e o todo, uma educação em que haja espaço para o contexto, para o multidimensional, para o global e para o complexo, para a diversidade, para a incerteza, para a ética, enfim, para o humano. Uma educação que favoreça a aptidão natural da pessoa em formular e resolver problemas. (MORIN, 2000). Essas constituem algumas das idéias que alteram profundamente a educação escolar e que passaram a exigir um repensar dos sistemas educativos, trazendo novas questões para os pesquisadores e educadores.

No contexto destas idéias e de uma nova ordem política, econômica e social, muitas reformas, incluindo leis, resoluções e diretrizes para a educação brasileira, têm sido discutidas e apresentadas à sociedade, nos últimos dez anos: a *Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional,* de 1996; *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental,* de 1998; *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio,* de 2000.

Assim, as concepções de aprendizagem, com enfoque construtivista, interdisciplinar, e todas as alterações para a educação básica exigiram um repensar da formação de professores. Em maio de 2001, após varias discussões em audiências públicas e reuniões técnicas, envolvendo diferentes associações e instituições, foram aprovadas as *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica*[1] (DCNFPEB), em nível superior. Esse documento aponta algumas questões a serem enfrentadas na formação de professores. Dentre elas destacamos duas que estão relacionadas à problemática deste trabalho, ambas situadas no campo curricular:

[1] Parecer CNE/CP 09/2001, de 08 de maio de 2001 e Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002

- *a desconsideração do repertório de conhecimentos dos professores em formação* – os conhecimentos prévios dos alunos das licenciaturas nem sempre são considerados no planejamento das ações pedagógicas. Muitas vezes idealiza-se o que esses alunos "deveriam saber", no entanto, estudos mostram que os ingressantes têm formação insuficiente, decorrente das condições da escolarização básica; (DCNFPEB, 2001, p. 17)
- *tratamento inadequado dos conteúdos* – nem sempre há clareza sobre quais conteúdos devem ser tratados na formação, considerando o conhecimento objeto de ensino e aquilo que deverá ser ensinado na escola básica. É comum que os cursos de licenciatura que formam especialistas por área de conhecimento coloquem ênfase em conteúdos específicos das áreas, tratando superficialmente (ou mesmo não tratando) os conhecimentos com os quais o futuro professor irá trabalhar no ensino fundamental e médio. (Ibid. p. 18)

> Nos cursos atuais de formação de professor, salvo raras exceções, ou se dá grande ênfase à transposição didática dos conteúdos, sem sua necessária ampliação e solidificação – pedagogismo, ou se dá atenção quase que exclusiva a conhecimentos que o estudante deve aprender – conteudismo, sem considerar sua relevância e sua relação com os conteúdos que ele deverá ensinar nas diferentes etapas da educação básica. (Ibid, p. 18)

Embora o documento trate da formação do professor da educação básica nas diferentes áreas do conhecimento, inclusive da formação do professor polivalente para as séries iniciais, as questões referidas acima são pertinentes em relação à formação do professor de matemática e sinalizam para a necessidade de repensar os conteúdos específicos na licenciatura, tendo em vista a matemática escolar e os conhecimentos prévios dos licenciandos.

O documento apresenta, ainda, os princípios norteadores para um curso de formação, dos quais destacamos um, que também está relacionado com a problemática deste estudo: - *a necessidade de coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do professor*. Neste sentido, apresenta o conceito de *simetria invertida*, isto é, o professor aprende a sua profissão num lugar similar ao que ele exercerá a sua profissão, a escola, mas numa posição invertida. Além disso, ele tem uma experiência vivida como aluno, nas etapas de ensino em que irá atuar, o que certamente irá ser constitutivo da sua identidade profissional. (Ibid, p.26)

As diretrizes para as licenciaturas específicas também estiveram na pauta dos debates, nos últimos anos, sendo que, no caso da licenciatura em matemática, as discussões, por iniciativa da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ganharam espaço em fóruns regionais, durante o ano de 2002, e culminaram com o I Fórum Nacional de Licenciatura em Matemática, realizado na PUC/SP, em agosto do mesmo ano. Para subsidiar o debate, a SBEM publicou um número especial da *Revista Educação Matemática*, em abril de 2002, com diferentes artigos sobre o assunto em questão.

Nesse Fórum, um dos pontos de discussão foi o Parecer 1302/2001 do Conselho Nacional de Educação, para as *Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura,* em que a comunidade de educadores matemáticos se manifestou contrária a esse Parecer, solicitando, inclusive, a sua revogação. No documento aprovado para ser encaminhado às autoridades competentes, foram relacionados vários pontos que justificaram o encaminhamento. Dentre eles, o fato de o Documento tratar a licenciatura de forma inadequada e simplista. Por exemplo, o Parecer propõe garantir ao egresso do Bacharelado "uma sólida formação de conteúdos de Matemática", enquanto ao se referir à licenciatura traz: "por outro lado, desejam-se as seguintes características para o Licenciando em Matemática: *visões de..., visões de..., visões de...",* o que pode remeter a licenciatura a um tratamento de segunda categoria. Conforme, ainda, as discussões do Fórum, não se percebe no Parecer a preocupação com a construção da identidade de um curso de licenciatura, mas considerações que reforçam, inclusive, a dicotomia entre os blocos de conteúdos específicos e o de conteúdos pedagógicos, o que contraria as orientações constantes das *Diretrizes Gerais para a Formação de Professores da Educação Básica em Nível Superior,* também aprovado pelo CNE. Ainda se concluiu dos debates que o Parecer apresenta um rol de disciplinas clássicas para a formação: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica, não fazendo referências a abordagens metodológicas dessas disciplinas, o que não contribui para a constituição de novos modelos curriculares. Essas manifestações demonstram que não houve uma ampla discussão das instituições de ensino superior e das sociedades cientificas na elaboração do Parecer, o que requer a continuidade do debate. Essas discussões continuaram no Seminário Nacional: *Construindo Propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática*, realizado em Salvador, Bahia, em abril de 2003.

É interessante registrar que, nas diretrizes para os cursos de matemática, a Teoria dos Números não é indicada explicitamente, assim como no número especial da revista da SBEM não há artigos que discutam o ensino dos números na licenciatura. Poder-se-ia pensá-la contida em Fundamentos de Álgebra, mas nesta rubrica podem ser incluídos tantos outros assuntos, como o estudo das estruturas algébricas, e não ser incluído o estudo dos inteiros nos aspectos que estão ligados às demandas apresentadas pelo seu ensino na escola básica.

Ainda que esse Documento continue a vigorar, algumas universidades têm re-elaborado os seus projetos pedagógicos, ignorando aspectos desse Parecer, como relatou o professor José Luiz no exame de qualificação. As novas propostas têm buscado incorporar, ainda que no nível do proposto, a produção e as discussões travadas no campo da Educação Matemática, embora se corra o risco de que algumas instituições tenham propostas que fiquem limitadas ao que propõem as Diretrizes.

Deste modo, percebe-se que a problemática da formação de professores é atual e exige pesquisas para fundamentar as discussões e as escolhas curriculares que deverão ser feitas. Ainda que existam muitos estudos sobre formação de professores e Grupos de Trabalhos constituídos em varias associações, inclusive com fóruns específicos, com relação à licenciatura em matemática, ainda há insuficiência de produções, especialmente de estudos que tratem dos saberes específicos a serem desenvolvidos nos cursos de formação inicial.

Em estudo realizado por Fiorentini *et al.* (2002), em que se apresenta o estado da arte da pesquisa brasileira sobre a formação de professores que ensinam Matemática no período de 1978 a 2002, analisando 112 teses e dissertações, pode-se constatar que há uma grande variedade de temas, mas poucos trabalhos sobre temas específicos de matemática que são tratados (ou que deveriam ser) nos cursos de licenciatura. Do total dos trabalhos analisados, 59 têm como foco a formação inicial e foram classificados em 6 subfocos: estudo de programas e cursos (29 trabalhos); prática de ensino e estágios supervisionados (12); estudo de outras disciplinas (6); experiências e atividades extracurriculares (5); formação, pensamento e prática de formadores (4); outras questões específicas da formação docente (8). No subfoco – estudo de outras disciplinas –, no qual foram incluídos trabalhos que investigaram a contribuição de cursos regulares oferecidos na formação inicial do professor da Educação Básica, metade trata da formação do professor que leciona nas séries iniciais, e metade, da licenciatura em matemática. Dois deles abordam disciplinas específicas de conteúdo matemático, um[2] investiga a importância da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na formação, e o outro,[3] o papel do ensino de Cálculo e Análise na licenciatura. Há

[2] KOGA, Miguel Tadayuki. *Uma análise do discurso de alguns professores de Cálculo Diferencial e Integral do curso de licenciatura em Matemática.* (UNESP-RC, 1998, Mestrado).

[3] REIS, Frederico da Silva. *A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* (UNICAMP, 2001, Doutorado).

também um trabalho,[4] classificado no subfoco – *outras questões específicas da formação docente* –, que investigou a importância de um estudo histórico-cultural dos números para o licenciando de Matemática.

Nesse balanço de 25 anos da pesquisa brasileira sobre a formação dos professores que ensinam matemática, os autores, numa tentativa de síntese, indicam que os problemas apontados nas pesquisas nas décadas de 70 e 80 ainda persistem, e, dentre eles, destacam a *ausência de estudos histórico-filosóficos e epistemológicos do saber matemático* e a *predominância de uma abordagem técnico-formal das disciplinas específicas.* Além disso, destacam que estudos *sobre o papel e a relevância destas disciplinas* (referindo-se a Cálculo, Análise, Álgebra, Geometria, Didática da Matemática) *para a formação do professor que ensina matemática, são ainda tímidos no Brasil e este pode ser apontado como um campo fértil e aberto para a pesquisa em Educação Matemática*.(FIORENTINI*, et al*., 2002, p.4;16)

Estudos, como o de Fiorentini *et al.* (2002), têm demonstrado que propor alternativas de trabalho para os alunos da escola básica, que atendam às exigências educacionais e sociais atuais, supõe conhecimentos de matemática, não apenas formais, mas também históricos, epistemológicos, metodológicos por parte do professor. O que estamos ensinando corresponde às necessidades de nossos alunos e às demandas que se colocam para a sua formação? – essa é uma questão fundamental para os formadores. Fiorentini, em debate realizado no IME-USP, faz um depoimento do início de sua carreira como docente na licenciatura, que ilustra essa inquietação. Relata sua experiência de professor iniciante, ministrando Análise e, posteriormente, Prática de Ensino:

> (...) mas ao observar as deficiências desses alunos estagiários, ao tentar explorar as idéias matemáticas, a produzir um ensino de matemática significativo para esses alunos, eu percebia que eles tinham carência de um aprofundamento maior do conhecimento matemático e o conteúdo que eu estava trabalhando em Análise não dava conta dessa formação necessária, dessa flexibilidade de pensamento matemático. (...)
> (...) mas aí eu fui perceber que a formação que eu estava dando de Análise era totalmente inadequada. Eu tinha um ensino tradicional, um currículo também excessivamente tradicional, mais ou menos como eu havia aprendido. (...) eu precisava romper com uma visão de abordagem procedimental e formal da matemática para formar melhor o pensamento matemático desse professor, e o curso de Análise do Elon não me dava conta disso, mas a minha formação de matemático também não dava conta (...) Então, eu busco, a partir daí discutir muito mais as idéias matemáticas, falar muito mais dos significados historicamente produzidos dessas idéias matemáticas, ou seja, explorar as múltiplas formas de representação e significação da Matemática, ou seja, um olhar diferente. Um olhar que na minha formação eu não tinha obtido.

[4] TÁBOAS, Carmem M. G. *O número e sua história cultural: fundamentos necessários na formação do professor.* (UNICAMP, 1993, Doutorado)

Esse depoimento de Fiorentini retrata a inquietação de muitos educadores matemáticos em relação ao "que" ensinar e ao "como" ensinar matemática nos cursos de licenciatura, tendo em vista a prática docente na escola básica. Na sua afirmativa de que os alunos *tinham carência de um aprofundamento maior do conhecimento matemático,* estando ministrando um curso de Análise Matemática, parece haver algo paradoxal, pois há um consenso entre os autores de livros didáticos dessa disciplina de que seu objetivo é justamente o de fundamentar, explicar e convencer o estudante. No entanto, afirma ele que sentiu a necessidade de *romper com uma abordagem procedimental e formal da matemática* e explorar *as múltiplas formas de representação e significação da Matemática.* Essa fala de Fiorentini nos remete para a importância da discussão dos conteúdos matemáticos e das suas abordagens nos cursos de formação de professores para a escola básica, pois não se pode esquecer que também a abordagem formal é uma das maneiras de dar significado à matemática, mas não a única.

Assim, uma das questões centrais do debate e da pesquisa sobre a formação é, sem dúvida: - O que precisa saber um professor de Matemática? Essa pergunta é complexa, pois a construção dos saberes docentes tem várias fontes, incluindo-se aí os conhecimentos matemáticos, e, além disto, não se inicia nem se completa durante o curso de formação inicial. Segundo Sztajn (2002, p. 18), *o que faz de um instrutor um Professor (com P maiúsculo!) é uma rede mais complexa de relações, a qual se estende para além do domínio do conteúdo a ser ensinado (embora não possa dele prescindir).*

Em seu artigo, Sztjan (2002) apresenta uma retrospectiva dessa questão, nos anos 90, a partir da revisão dos artigos de pesquisa publicados em periódicos de língua inglesa, e aponta para a necessidade de caminhar na pesquisa sobre o saber específico do professor de Matemática.

Deste modo, investigar as disciplinas que compõem o currículo dos cursos de licenciatura, tendo em vista a formação do professor para a escola básica, é algo necessário e fundamental na conjutura atual de reformas, de novas diretrizes, de re-elaboração dos projetos pedagógicos das licenciaturas.

1.3. Qual a Álgebra a ser ensinada?

1.3.1. Alguns projetos e pesquisas

Com relação a esta problemática, segundo Coelho, Machado e Maranhão, há uma escassez de trabalhos que buscam estabelecer inter-relações entre disciplinas teóricas e práticas na Licenciatura em Matemática, como também de estudos que relacionam a matemática ensinada na licenciatura e a praticada nas escolas de educação infantil e básica. Deste modo, apontam para a relevância de estudos que procurem clarear o papel da Álgebra na formação, diante das novas demandas - sociais, educacionais, cientificas, incluindo uma nova postura sobre a construção do conhecimento cientifico. (COELHO, MACHADO E MARANHÃO, 2003, p.5)

Quanto à Teoria dos Números, Machado *et. al.* (2005) afirmam que a Teoria Elementar dos Números tem um potencial formador que vem sendo negligenciado em todos os segmentos de escolaridade e indicam algumas potencialidades para o seu ensino:

> auxiliar a reconhecer e compensar limitações de estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros; criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da matemática; instigar as habilidades de estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar essas conjecturas; promover o desenvolvimento de estratégias de prova indutivas e dedutivas. (MACHADO; MARANHÃO; COELHO, 2005, p. 2)

Constatam, ainda, a presença de conteúdos ligados a essa área nos PCN, no bloco intitulado Números. No entanto, alertam para a ênfase dada ao caráter pragmático que os PCN imprimem a este tema, o que traz conseqüências para o ensino da matemática, na medida em que contextos formais ligados a operações, propriedades e estruturas dos números passam a ser abandonados (PCN, 1988, p.12).

Essas preocupações justificaram a criação de um Grupo de Pesquisa na PUC-SP, intitulado *Educação Algébrica,* em que a questão central é: Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? Alguns projetos têm sido propostos pelo grupo, dentre eles, o projeto - *O que se entende por Álgebra? –* cujas metas incluem *fornecer respostas á Educação Matemática sobre possibilidades de restabelecer vínculos entre a Aritmética e a Álgebra ensinada no Ensino Básico e a Teoria Elementar dos Números e a Álgebra ensinada nos cursos superiores*. (MARANHÃO *et al.,* 2004, p. 9)

Alguns trabalhos já foram realizados dentro desse Grupo, dos quais destacamos os resultados de quatro deles por estarem mais ligados ao tema em estudo. Machado *et. al.* (2005) investigaram a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), de professores de matemática em curso de formação continuada e alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, buscando estabelecer uma comparação entre os dois grupos. Foram apresentadas duas questões[5] que envolviam um número decomposto em fatores primos em

[5] 1) Considere o número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ e decida se M é divisível por cada um dos números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 e 23.

cada uma delas e solicitado que os participantes verificassem se eles eram divisíveis por alguns números dados. Embora a maioria deles (66% na primeira questão e 71% na segunda) tenha utilizado a decomposição em fatores primos para decidir e justificar a divisibilidade, indicando o uso implícito do TFA, o uso de algoritmos foi maior no grupo dos professores do que no grupo dos alunos, sendo que na segunda questão nenhum aluno lançou mão desse recurso. Segundo as pesquisadoras, isso mostra que a trajetória destes professores, marcada pela predominância de algoritmos em relação a conceitos, cria uma resistência a outras formas de abordagens, enquanto que alunos expostos a uma formação que enfatiza significados, como os do grupo pesquisado, podem ter maior prontidão para usá-los. Esses resultados apontam para um repensar as abordagens dadas a esses temas no ensino, o que certamente implica mais pesquisas.

Oliveira (2006), em seu trabalho, analisou livros didáticos de matemática do Ensino Médio, com o objetivo de verificar se o objeto de saber "equações diofantinas lineares" é um objeto de ensino nesses manuais. Embora esse tema não faça parte explicitamente dos conteúdos a serem ensinados nesse nível de ensino, Oliveira acreditava que, sendo muitos problemas, envolvendo situações "concretas", modelados por meio de uma equação com coeficientes inteiros e cujas soluções devam ser inteiras, esse assunto pudesse estar presente nos livros didáticos, no estudo de outros temas, como conjuntos numéricos, função afim, progressões aritméticas, matrizes, sistemas lineares, polinômios e equações polinomiais. O autor concluiu que o objeto de saber equação diofantina linear não é considerado um objeto de ensino nas obras analisadas, sendo que os poucos problemas apresentados, envolvendo esse tema, são resolvidos por tentativa e erro. Não foi constatada a discussão da existência de soluções para essas equações, a qual depende do máximo divisor comum entre os coeficientes e poderia ser uma oportunidade para se retomar e ampliar o ensino da Aritmética, em especial o da divisibilidade, o que confirma que esses assuntos ficam restritos aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Rama (2005), em sua dissertação de mestrado, também analisou três coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, para verificar como os autores abordam os números inteiros, particularmente a divisibilidade, focando as demonstrações e o uso de problemas desafiadores para tratar os assuntos. Também analisou os primeiros volumes de onze coleções do Ensino Médio, na parte referente à revisão dos inteiros.

2) Considere o número K = 16.199 = 97 x 167 (97 e 167 são números primos) e decida se K pode ser divisível por: 3, 5, 11, 13 e 17.

Constatou que uma das coleções para o Ensino Fundamental apresenta boas provas informais, usando métodos variados, e explora de modo conveniente problemas envolvendo os inteiros. Outra tem algumas demonstrações adequadas e outras inadequadas, enquanto a terceira coleção apresenta propriedades, sem a preocupação de justificá-las. Quanto às coleções do Ensino Médio, afirma que a divisibilidade nos inteiros aparece em alguns poucos exercícios, pois se faz uma retomada superficial dos inteiros nesse nível. Rama chama atenção para o fato de que, nos livros didáticos analisados, a divisibilidade só é tratada no conjunto dos números naturais, na 5^a e 6^a séries. Quando se introduzem os números negativos, os conceitos e propriedades referentes a esse tema não são estendidos.

Embora o estudo de Rama não tenha focado outros aspectos dos inteiros como a definição por recorrência e a indução matemática, que poderiam estar presentes nos livros do Ensino Médio, as conclusões, como no trabalho de Oliveira, indicam que os aspectos caracterizadores dos inteiros e as potencialidades que o seu ensino oferece não são devidamente explorados na escola básica.

Outro trabalho realizado dentro do Grupo de Educação Algébrica é o de Castela (2005), em que se investiga a concepção de divisão de um grupo de alunos de 6^a série, analisando se eles dominam a técnica da divisão, se utilizam o teorema da divisão euclidiana e se utilizam a divisão para resolver problemas. A autora concluiu que menos da metade dos alunos conhece a técnica da divisão nos moldes estabelecidos por ela e a maior parte dos que estabelecem corretamente a relação entre dividendo, divisor e o resto está dentre os que dominam a técnica. Esses resultados indicam que o estudo dos inteiros não poderia ser abandonado após a 6^a série, pois os alunos deveriam ter outras oportunidades para ampliar a sua aprendizagem sobre o assunto.

O aprendizado desse conjunto não se completa nos anos iniciais do ensino fundamental, como é comum ocorrer, de modo geral, na escola brasileira. Sobre essa questão, Moreira, em sua tese de doutorado, afirma que *a aritmética dos naturais é um tema complexo, cuja apreensão, em níveis considerados satisfatórios, não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais.* (MOREIRA, 2004, p.85).

Esse pesquisador aponta ainda a necessidade de que o licenciando *explore as idéias matemáticas,* em especial idéias aparentemente “óbvias” ou consideradas “dadas” do ponto de vista da matemática acadêmica, das quais se acredita que ele tenha domínio. Nesse sentido, a respeito da construção do conceito de número natural e dos significados das operações elementares com os naturais, afirma Moreira:

> (...) desenvolver o processo de formação matemática num curso de licenciatura a partir de um ponto em que o conjunto dos números naturais é considerado *dado*, juntamente com as operações de adição e de multiplicação, significa desconsiderar questões postas pela prática profissional concreta, para a qual se pretende formar o licenciando. Estabelece-se assim uma forma de distanciamento entre os conhecimentos trabalhados no processo de formação na licenciatura e as questões que se colocam para o professor da escola em sua atividade docente. (MOREIRA, 2004, p.89)

Moreira, com base em estudos históricos e pesquisas empíricas existentes na literatura em educação matemática, apresenta algumas questões que se colocam para o professor da educação básica ao trabalhar com os sistemas numéricos. Com relação aos números naturais, apresenta dados que indicam que as questões referentes aos sistemas de numeração apresentam grande dificuldade para os alunos do Ensino Fundamental e o seu aprendizado demanda um processo longo; os conceitos e idéias matemáticas relativas às operações não se consolidam nas séries iniciais; as operações e suas propriedades não se conectam a situações que lhes dêem significados na escola; erros cometidos pelos alunos ao utilizarem algoritmos têm origem na falta de compreensão da lógica segundo a qual o algoritmo funciona. Deste modo, conclui que

> os conhecimentos matemáticos associados à discussão escolar dos significados das operações como os naturais, da validade de suas propriedades básicas e das várias questões referentes ao sistema decimal de numeração são parte importante dos saberes profissionais docentes. (...) Entretanto, em todo o seu curso, o licenciando não é exposto sistematicamente a uma discussão sobre essas questões. (MOREIRA, 2004, p. 88)

Belfort & Guimarães (2003) defendem que os cursos de licenciatura em matemática incluam disciplinas que permitam aos estudantes refletir sobre a importância de estabelecer conexões entre a Matemática superior e a Matemática escolar, para a sua prática didática futura. Isso supõe, segundo eles, um conhecimento aprofundado e flexível da matemática que eles irão ensinar, que lhes permita estabelecer ligações entre os diversos tópicos desenvolvidos na licenciatura e na escola. Assim têm trabalhado em busca de um saber pedagógico-disciplinar para professores, tomando a Aritmética e a Álgebra como ferramenta. Segundo eles, a análise de experiências realizadas sugere que *a maioria dos alunos não está transferindo seus conhecimentos de Álgebra Superior para a justificativa de resultados de Matemática Elementar que eles deverão ensinar*. (BELFORT & GUIMARÃES, 2003, p.7) Por outro lado, apontam que esses alunos demonstram dificuldades para a aprendizagem da Álgebra Superior, por considerá-la abstrata, o que os leva a conjeturar que a falta de conhecimentos em Aritmética e Álgebra elementares pode estar interferindo no aprendizado da Álgebra Superior.

Em nível mundial, há um interesse crescente dos educadores matemáticos pelo ensino-aprendizagem da Álgebra, em particular pela Teoria dos Números, com pesquisas nos diferentes níveis educacionais, incluindo a formação dos professores. Stephen R. Campbell e Rina Zazkis, pesquisadores que têm se dedicado a este campo, publicaram, em 2002, uma obra: *Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction*, com estudos focados na cognição e no ensino de professores não graduados ou em pré-serviço, cobrindo uma variedade de dimensões do ensino-aprendizagem da teoria dos números, conduzidos nos Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Itália, demarcando uma área de estudos – a Teoria dos Números como Campo Conceitual.

Os trabalhos, divulgados nessa obra, tratam de temas da Teoria Elementar dos Números: divisão e divisibilidade definidas nos naturais e nos inteiros, números primos e compostos, decomposição em primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, relações entre quocientes e restos. Incluem aspectos: conceituais, de representação, operacionais, estratégias de resolução de problemas, processos cognitivos e conceitos envolvidos no raciocínio e prova de alguns teoremas sobre números inteiros e naturais, formulação de conjeturas e provas por indução. Coletivamente, esses estudos fornecem alguma indicação do potencial da teoria dos números para a compreensão mais aprofundada da matemática fundamental, no entanto os pesquisadores apontam para a necessidade de um esforço sistemático por parte da comunidade dos educadores matemáticos e pesquisadores para investigar esse potencial, pois consideram que as pesquisas nesta área têm sido relativamente esparsas e desconectadas.

Deste modo, os trabalhos que vêm sendo realizados ligados à questão de qual álgebra deve ser ensinada nos diferentes níveis de escolaridade e, particularmente, na licenciatura indicam que mais pesquisas sejam realizadas, abordando diferentes aspectos desta problemática.

1.3.2. O que propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Os PCN para a escola básica são referenciais importantes para a discussão dos saberes de matemática, tanto para a escola básica como para a formação dos professores. No Brasil, na escola básica, pode-se constatar que os programas curriculares de matemática para os anos iniciais da escolaridade sempre enfatizaram o estudo de números e operações, ou seja, da Aritmética[6].

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Fundamental (1998), *Números* é um dos quatro blocos de conteúdos. No estudo desse bloco, os PCN propõem que o aluno perceba os diferentes tipos de números, como instrumento para resolver problemas, mas também como objeto de estudo, considerando nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como foram historicamente construídos (PCN, Matemática, v.3, p.54). Nesse bloco estão incluídos: os números naturais e o sistema de numeração decimal; as operações com números naturais, envolvendo o cálculo mental, o exato e o aproximado; números racionais, irracionais e reais; utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e as regularidades, estabelecer relação entre grandezas, modelizar, resolver problemas aritméticos; equações de primeiro e segundo graus e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas).

Como se pode observar, o bloco Números inclui a álgebra a ser estudada no Ensino Fundamental, provavelmente com a intenção de não fragmentação ou de descontinuidade entre a aritmética e a álgebra, embora essa discussão não esteja explícita. Fala-se em “pré-álgebra” nos ciclos iniciais, em que as noções algébricas devem ser trabalhadas de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética.

Tópicos mais específicos ligados à Teoria Elementar dos Números são sugeridos na seção: *Conteúdos Propostos para o Ensino de Matemática no Terceiro Ciclo*[7]*:*

> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. (PCN – Matemática – 5ª e 8ª séries, p.66).

No entanto, ao se referirem aos números naturais não se percebe que sejam destacados elementos que os caracterizam, como a idéia de sucessor, a multiplicação como soma iterada, a questão da divisibilidade e a extensão destas idéias para o conjunto dos números inteiros. Mais, ainda: não são apontadas explicitamente as possibilidades que o estudo desses temas

---

[6]Ver, VALENTE, W.R. (Org.). *O nascimento da matemática no ginásio.* São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

[7] O terceiro ciclo, na escola organizada em séries, corresponderia à 5ª e 6ª séries.

pode ter na compreensão das propriedades dos números inteiros, em especial no desenvolvimento de habilidades de raciocínio matemático, com relação à prova e à demonstração, e não apenas para resolver problemas.

Os PCN sugerem que a argumentação deva ser estimulada no terceiro ciclo, avançando para a prova no quarto ciclo:

> Assim é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas e afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (Ibid, p. 71)

Embora seja feita uma discussão rápida sobre as diferenças entre o argumentar e o demonstrar (Ibid, p. 70), essas questões são polêmicas e o próprio professor não tem uma visão clara do que seja demonstrar. Dos significados atribuídos, por ele, à demonstração, pode estar ausente, inclusive, o processo mental de raciocínio dedutivo, conforme observaram Pais e Freitas (1999), em pesquisa[8] realizada com professores de Matemática do Ensino Fundamental, da rede pública do estado de Mato Grosso do Sul. Essas questões merecem ser discutidas no processo de formação, de forma ampla, inclusive dentro das disciplinas específicas.

Outro aspecto a destacar é que muitos acreditam que o estudo da Aritmética se encerra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como já destacamos anteriormente, no entanto, ao serem apresentados os conteúdos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, a seguinte observação é colocada nos PCN:

> É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo... (Ibid., p.83).

Na seção referente às orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos, ao abordar os números inteiros, são apontados alguns aspectos do tratamento dado ao estudo dos naturais, nos ciclos finais do ensino fundamental, que comprometem sua aprendizagem, dentre os quais:

- desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos, considerados como "raciocínios inferiores" quando comparados aos procedimentos algébricos;
- trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números. (Ibid., p. 97)

---

[8] PAIS, L. C.; FREITAS, L.M. Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental. *Bolema, n.13,1999, p.62-70.*

As considerações anteriores apontam para a pouca ênfase dada ao estudo dos naturais após a 5ª série e, também, para a necessidade de que se desenvolva um trabalho sistemático do estudo desse tema, em diferentes momentos, para que a sua aprendizagem possa ser ampliada. Quanto ao estudo dos números inteiros, os PCN alertam para que as atividades propostas não se limitem às que se apóiam apenas em situações concretas, mas que sejam incluídas atividades que possibilitem a extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, permitindo a compreensão e a justificação das propriedades dos números inteiros.

Deste modo, podemos perceber que há uma demanda forte de que os professores, na sua prática docente, trabalhem com os números, o que certamente exige uma atenção especial nos currículos da licenciatura em matemática. Esse trabalho envolve conceitos e procedimentos que pressupõem conhecimentos de Teoria dos Números.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, com relação ao estudo de números, sugerem que haja espaço para o aprofundamento desses conhecimentos, integrados a outros conceitos, numa perspectiva sócio-histórica e de resolução de problemas. (PCN – Ensino Médio - v.3, p.89). Um dos três *temas* ou *eixos estruturadores* propostos é *Álgebra: números e funções*, em que se deixa claro que a ênfase no estudo dos números recai sobre os reais:

> No ensino médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. (PCN + , 2002, p. 120)

Sobre essa proposta, é necessário ponderar que muitos problemas são modelados no conjunto dos inteiros e não no conjunto dos números reais. É o caso do estudo das seqüências, que é sugerido como um tema a ser abordado conectado à idéia de função. Esse assunto pode ser, inclusive, uma oportunidade para se trabalhar com a idéia de recorrência, caracterizadora do conjunto dos números inteiros positivos. Nesse nível de ensino, nenhum tópico está explicitamente ligado à Teoria Elementar dos Números, cuja presença poderia oportunizar o desenvolvimento de competências como a de *investigação e compreensão*, que é uma das três grandes competências proposta para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Assim, os PCN de matemática apresentam diretrizes para a escola básica que incorporam discussões e pesquisas no campo da Educação Matemática, entretanto estão subjacentes idéias que ainda demandam pesquisas como a discussão dos aspectos caracterizadores do conjunto dos inteiros e o seu ensino e aprendizagem; as relações álgebra e aritmética; as visões de álgebra, enfim qual a álgebra a ser ensinada. Essas questões, dentre outras, como a formação de conceitos, a evolução histórica e epistemológica destes conceitos, as práticas escolares envolvidas no ensino desses temas, certamente têm implicações na formação do professor e justificam pesquisas relacionadas à educação algébrica, tanto na escola básica como na formação de professores.

1.4 A questão e os objetivos

Assim, partindo do pressuposto de que é importante ensinar matemática na escola básica, conseqüentemente Álgebra, faz-se necessário buscar clarear qual a Álgebra a ser ensinada e, de modo mais sistemático, clarear o que se entende por Álgebra e as suas inter-relações com a Aritmética, tanto para a definição e implementação dos currículos da escola básica, como para os cursos de formação de professores de matemática.

Dentro do quadro descrito anteriormente - de mudanças, de debates, de dúvidas, de novas propostas -, no campo da formação do professor, em especial em relação aos saberes específicos que devem ser desenvolvidos nos cursos de licenciatura em matemática, especificamente os saberes relacionados à Álgebra, é que situamos a nossa preocupação.

Tomamos como objeto de estudo o ensino-aprendizagem da Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em matemática, orientando-nos pela seguinte questão, geradora deste estudo: **Qual Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um *saber a ensinar* na licenciatura em matemática, visando a prática docente na escola básica?**

Concepção será considerada neste estudo, no sentido apontado por Morin, *como uma configuração original, formando unidade organizada, engendrada por um espírito humano.* (MORIN, 1999, p. 204). Assim, segundo o autor, a concepção utiliza palavras, idéias, conceitos, teorias; recorre ao julgamento (avaliação); utiliza a imaginação e as diversas estratégias da inteligência; depende das teorias e dos paradigmas nos quais se inscreve e está sujeita a ser insuficiente, inadequada e errônea.

Como *concepção* designa tanto o ato de conceber quanto o objeto concebido, em alguns momentos estaremos investigando a Teoria dos Números, enquanto objeto concebido, e, em outros, buscando concebê-la como um saber fundamental à formação do professor que vai ensinar matemática na escola básica.

Considerando que as concepções a respeito do objeto em estudo podem ser buscadas em diferentes fontes, orientamo-nos pelos seguintes questionamentos:

- Qual Teoria dos Números tem sido ensinada na licenciatura em matemática, no Brasil, atualmente?
- Como professores e pesquisadores em Teoria dos Números e em Educação Matemática concebem a Teoria dos Números e o seu ensino?
- Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como *saber a ensinar* na licenciatura em matemática, visando à formação do professor na escola básica?

Assim, este estudo se situa na esfera do compreender. Como há várias concepções a respeito dessa forma de conhecimento, consideramos importante esclarecer o significado que será adotado neste trabalho. No *Dicionário de Filosofia*[9] de Abbagnano (2003), o compreender é colocado como uma atividade cognoscitiva específica, diferente do conhecimento racional e de suas técnicas explicativas, tanto na filosofia medieval, como na filosofia contemporânea, embora por razões diferentes. Morin (1999), no entanto, afirma que as noções de compreensão e de explicação, numa primeira análise, parecem justapor-se, mas a relação compreensão/explicação comporta uma complementaridade não menos fundamental que a sua oposição, o que faz evocar a configuração em *yin-yang*. Para Morin, a compreensão é um modo fundamental de conhecimento que busca captar os significados de uma situação ou fenômeno, movendo-se na esfera do concreto, da intuição global, do subjetivo, enquanto a explicação move-se na esfera do lógico, do analítico, do objetivo. A compreensão inclui, portanto, subjetividade, sentimentos, pensamentos, finalidades e relação com os valores, por isso *comporta limites e riscos de erro, inclusive o risco da incompreensão, pois uma compreensão só pode compreender o que compreende...* . Isso indica que a compreensão deve ser combinada com procedimentos de verificação, isto é, deve haver uma relação dialógica[10] entre compreensão e explicação (MORIN, 1999, p.158).

Assim, este estudo tem como objetivos:

- compreender a Teoria dos Números, enquanto um *saber a ensinar* voltado para a formação do professor da escola básica, nos cursos de licenciatura em matemática;

[9] ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia.** São Paulo: Martins Fontes, 2003, p. 157
[10] O princípio dialógico pode ser definido como a associação complexa (complementar/concorrente/antagônica) de instâncias necessárias em conjunto à existência, funcionamento e ao desenvolvimento de um fenômeno organizado. (MORIN, 1999, p.110)

- buscar elementos e possibilidades para re-significar a Teoria dos Números na formação do professor de matemática da escola básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em Teoria dos Números, necessário para fundamentar a Aritmética e a Álgebra a ser ensinada na escola básica e que possibilite o desenvolvimento de idéias matemáticas "relevantes".

A nossa assunção é de que a Teoria dos Números deve ser parte essencial da formação matemática na licenciatura, porque proporciona ao futuro professor e ao aluno da escola básica o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes. Certamente, para isso devem ser buscados elementos que a caracterizem como uma disciplina a ensinar, inserida num projeto pedagógico de formação do professor de matemática da escola básica.

1.5 A metodologia e a trajetória metodológica

Como explicitado anteriormente, este estudo se insere na esfera do compreender. Assim, não é adequada uma abordagem empírico-analítica, pois não se enquadra num modelo de aplicação do *método científico* em que se formula um problema, levantam-se hipóteses, testam-se pressupostos, confirmam-se ou se refutam as hipóteses. É um estudo que tem características de uma abordagem qualitativa, pois tem o pesquisador como seu principal instrumento, os dados são predominantemente descritivos, a ênfase está colocada nos significados explícitos e implícitos atribuídos pelas pessoas ao objeto em estudo. (Lüdke e André, 1986)

Entendemos, fundamentados em Morin (1999), que a busca de compreensão não é neutra, traz marcas de idiossincracia, do subjetivo, daí a necessidade da relação dialógica entre o compreender e o explicar. Neste sentido, não buscamos consensos, mas "ver" o objeto de estudo em suas múltiplas relações e significados a partir de várias fontes e dos referenciais teóricos adotados, reconhecendo tensões e dilemas, frutos de conflitos de interpretações e de significados, pois estaremos lidando com diferentes visões de mundo, de homem, de educação, de matemática.

Quanto ao processo de coleta de dados, envolve um estudo documental e pesquisa de campo. Inicialmente, buscando delimitar o objeto de estudo, ao lado de leituras sobre o tema, realizamos uma busca na biblioteca da USP de livros textos de Teoria dos Números. Encontramos um vasto acervo, sendo a quase totalidade dos títulos de autores estrangeiros.

Separamos alguns que tratavam da Teoria Elementar dos Números, com o objetivo de analisar o prefácio e o sumário.

Ainda como parte de um estudo exploratório, realizamos um levantamento das propostas curriculares de disciplinas em que são tratados conteúdos de Teoria dos Números, constantes dos currículos de dezesseis universidades brasileiras. A escolha dessas instituições foi intencional, considerando a facilidade de acesso e a respeitabilidade da instituição na área de pesquisa em Educação Matemática e em Matemática. O acesso ao material foi realizado através de catálogos institucionais ou pela *Internet*. O objetivo dessa pesquisa documental aos currículos e aos livros era verificar qual teoria dos números está sendo ensinada no Brasil atualmente.

Iniciamos, verificando se na proposta curricular havia a disciplina Teoria dos Números. Em caso negativo, passamos a buscar as ementas de disciplinas que poderiam conter tópicos desta área. Em seguida, organizamos as informações referentes às ementas, à carga horária, aos objetivos, ao conteúdo programático e à bibliografia dessas disciplinas. Nem sempre foi possível ter acesso a todos os elementos citados anteriormente.

Com base na bibliografia indicada e no levantamento dos livros-texto, realizado na USP, fizemos um fichamento de onze obras, indicando os dados bibliográficos, os conteúdos abordados e um resumo do prefácio, buscando registrar a quem se destina a obra e os pré-requisitos para o estudo.

Após o exame de qualificação, decidimos, por sugestão da banca, ampliar e aprofundar os estudos documentais, referentes aos livros didáticos e às disciplinas pesquisadas anteriormente. Com relação à Teoria dos Números nos currículos da licenciatura em matemática, procuramos analisá-la como uma disciplina acadêmica que inclui finalidades, conteúdos e formas de abordagem, inserida no projeto político-pedagógico do curso. Assim, passamos a analisar as disciplinas de doze universidades, eliminando quatro das quais não tivemos acesso aos elementos que decidimos analisar.

Com relação aos livros didáticos, procuramos também analisá-los de modo mais profundo. Selecionamos dez obras, sendo nove delas escolhidas dentre as mais citadas nos programas das disciplinas relacionadas à Teoria dos Números, nos currículos da licenciatura em matemática pesquisados; e que duas são de autores estrangeiros, consultadas na língua original, citadas, inclusive, pelos autores dos livros nacionais. Apenas um dos livros não faz parte da lista dos indicados nos programas de ensino, pois foi lançado em 2005, escolhido pelo fato de o autor destiná-lo explicitamente para a formação de professores e por ser um livro mais recente.

As obras foram divididas em dois grupos para a análise. O primeiro grupo é constituído de seis delas, das quais realizamos uma análise mais global, a partir do prefácio, do índice ou sumário e dos capítulos referentes aos naturais e aos inteiros, no caso dos livros de Álgebra, e os capítulos referentes à divisibilidade nos de Teoria dos Números. Posteriormente, consideramos um segundo grupo constituído de quatro livros, os mais citados nos currículos dos cursos de licenciatura pesquisados, para uma análise mais detalhada de alguns temas, aqueles que têm uma relação mais estreita com a matemática da escola básica. Assim, analisamos os capítulos referentes à introdução dos números inteiros, ao tratamento da recorrência e da indução matemática e ao estudo da divisibilidade.

Tanto para analisar as propostas curriculares, como os livros didáticos, usamos a *análise de conteúdos*, conforme caracterizada por Bardin (1977, p. 38 e 46), como *um conjunto de procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens (...), para evidenciar os indicadores que permitem inferir sobre uma realidade que não a da mensagem.*

A partir dos resultados da investigação exploratória inicial, detectamos a necessidade de clarear alguns aspectos referentes: ao papel da Teoria dos Números nos currículos; às relações entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números; e à necessidade de buscar elementos para re-significar o estudo da Teoria dos Números na licenciatura, de modo a constituir uma disciplina que poderia ser denominada Teoria Elementar dos Números. Optamos, então, por realizar uma entrevista semi-estruturada com pesquisadores em Teoria dos Números, com educadores matemáticos envolvidos com educação algébrica e com professores da disciplina.

Segundo Laville & Dionne, a entrevista semi-estruturada consiste em *uma série de perguntas abertas, feitas verbalmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador pode acrescentar perguntas de esclarecimento.*(LAVILLE & DIONNE, 1999, p.188) Preparamos, então, três questões abertas, direcionadoras da entrevista, com base nos elementos levantados na pesquisa documental e no referencial teórico.

Realizamos, em seguida, a análise *a priori* das questões (Anexo1). Segundo Machado (1999), a análise *a priori* tem um caráter descritivo e também previsivo, e é concebida como uma análise de controle de sentido, para que os objetivos de cada questão possam ser atingidos.

Para a seleção dos entrevistados, realizamos uma busca na *Internet,* em instituições tradicionais de pesquisa em matemática, para consultar nomes de pesquisadores e professores com produção cientifica na área de Teoria dos Números. Selecionamos três professores, doutores em Teoria dos Números, que atuam na graduação e em programas de pós-graduação, orientando trabalhos no campo e que são também autores de livros didáticos sobre assuntos da área. Além destes, escolhemos quatro professores e pesquisadores em Educação Matemática envolvidos de alguma forma com Teoria dos Números: um doutor em Álgebra e autor de livro didático que trata de conteúdos de Teoria dos Números; outro, doutor em Educação Matemática, com mestrado em Teoria dos Números; um doutor em Educação, envolvido com educação algébrica e formação de professores; e, ainda, um professor doutor em matemática, atualmente pesquisando em ensino de matemática e lecionando essa disciplina na licenciatura. Os sete convidados aceitaram prontamente a colaborar com o estudo.

As entrevistas foram realizadas no local de trabalho dos entrevistados (exceto duas), para os quais nos deslocamos para a aplicação do instrumento de pesquisa. Foram gravadas em cassete, tendo uma duração de 30 a 40 minutos cada. A transcrição das entrevistas foi feita integralmente, sendo que apenas um dos entrevistados solicitou fazer a revisão do texto transcrito.

Após esse trabalho, iniciamos a *análise de conteúdo,* conforme descrita por Lüdke & André (1986) e Laville & Dionne (1999) e Bardin (1977), buscando decompor o material, para depois recompô-lo a fim de fazer surgir a sua significação. Após várias leituras de cada entrevista, começamos o trabalho de codificação, procurando identificar as *unidades de análise,* entendidas como unidades de sentido ou de contexto[11] além das unidades de registro[12], definidas por tema.

Assim, optamos por analisar, primeiro, individualmente cada entrevista, para procurar, conforme indicam Lüdke e André, fazer *a consideração tanto do conteúdo manifesto quanto do conteúdo latente do material* (LÜDKE & ANDRÉ, 1986, p.48), sem perder a visão de conjunto do pensar do entrevistado, isto é, dentro do contexto próprio daquele que fala. Finalmente, fizemos uma recomposição dos discursos nas categorias, tentando estabelecer

[11] Segundo Bardin (1977, p. 107), *unidade de contexto* serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro. (...) A referência ao contexto é muito importante para a análise avaliativa e para a análise de contingência.

[12] *Unidade de registro* é a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização (...). Fazer uma análise temática, consiste em descobrir os 'núcleos de sentido' que compõem a comunicação e cuja presença, ou freqüência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido. (Bardin, 1977, p. 105)

relações entre as unidades de análise e buscando interpretá-los à luz do referencial teórico escolhido.

De acordo com os objetivos do trabalho, da entrevista e, especificamente, com os objetivos de cada uma das questões direcionadoras, as categorias foram definidas na análise *a priori,* não de maneira rígida, mas com a abertura necessária para novas categorias que poderiam surgir, a partir da leitura mais aprofundada do discurso dos entrevistados. Desse modo, podemos dizer que a opção foi por um *modelo misto* de construção das categorias analíticas, conforme classificação de Laville & Dionne, pois, levando em consideração todos os elementos que se mostraram significativos, pudemos fazer uma subdivisão de categorias, o que permitiu explorar o material de maneira mais completa e aprofundada.

Do discurso dos entrevistados emergiram potencialidades, dilemas e tensões relacionadas à Teoria dos Números, como saber a ensinar, o que nos conduziu a uma busca bastante ampla na literatura em Educação Matemática, de referenciais teóricos, de pesquisas e de trabalhos, envolvendo aspectos ligados ao argumentar, ao demonstrar e ao provar.

É importante considerar que essa trajetória não foi linear como apresentada, mas incluiu muitas idas e vindas, formulações e reformulações das questões, dos objetivos e das análises.

CAPÍTULO 2

SABER “SÁBIO” – SABER A ENSINAR – SABER ESCOLAR E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

2.1 Introdução

As relações entre o saber “sábio” ou científico, o saber a ensinar, o saber escolar e os saberes dos professores têm sido, nas últimas décadas, alvo de preocupação dos pesquisadores em educação. Nesse movimento de explicitar as relações entre esses saberes, várias análises têm sido feitas, buscando referenciais em campos diversos, especialmente na epistemologia, na sociologia da educação e na história das disciplinas escolares, com posições diversificadas acerca dessas relações.

Neste capítulo, procuramos fazer um estudo sobre o tema, reportando-nos às contribuições dos teóricos que abordaram a questão dos saberes no ensino, com o objetivo de clarear esses conceitos e de tomá-los como referenciais de análise na busca da compreensão da Teoria dos Números como um saber a ser ensinado na licenciatura. O tema é complexo e instigante, há diferentes pontos de vista dos quais abordaremos alguns, destacando elementos que fundamentarão esse trabalho.

Considerando que o saber cientifico, o saber a ensinar e o saber ensinado têm relações entre si, que não são de dependência direta e hierárquica, pois têm modos de produção, lógicas, condicionantes e funções diferenciadas, abordaremos inicialmente cada um desses saberes e, em seguida, as contribuições da teoria da transposição didática de Chevallard. Como o objeto deste trabalho é uma disciplina da licenciatura em matemática, trataremos também das contribuições de Shulman, no que se refere aos saberes dos professores.

2.2. Saber “sábio” ou saber científico

Inicialmente, é necessário observar que a concepção de saber é complexa, empregada muitas vezes como sinônimo de conhecimento, conceito sobre o qual não há consenso entre filósofos e entre estudiosos da cognição humana. Nesse estudo, iremos usar os termos saber e conhecimento como palavras sinônimas e de uma forma mais ampla, não restrita ao conhecimento científico, compreendendo-o como uma das formas de saber.

De acordo com Tardif (2002), seria um exagero considerar que tudo é saber, isto é, aceitar que todos os construtos humanos, todas as práticas humanas, toda forma de viver se constituam em saber. Para ele, o saber, na cultura da modernidade, foi definido de três modos, em função dos "lugares" em que ocorre: a subjetividade, o julgamento e a argumentação.

A primeira concepção, considerando o sujeito e a representação do objeto, concebe o saber como algo produzido pelo pensamento racional subjetivo. Pode ocorrer de duas maneiras: por uma intuição intelectual, sendo, assim, uma apreensão global e instantânea de um objeto ou de um fato, como também pode resultar de uma cadeia de raciocínios dedutivos ou indutivos. Essa concepção está na base da maioria das pesquisas da cognição, como na de Piaget e Chomsky, nas quais o saber é *abordado em termos de representações mentais que se referem seja à gênese (Piaget), seja à estrutura inata (Chomsky) do pensamento, com seu equipamento próprio, seus mecanismos e seus procedimentos, suas regras e seus esquemas.* (Tardif, 2002, p.194). Assim, o saber é saber subjetivo, que se dá por um processo de equilibração ou de processamento da informação, na relação com o objeto.

O segundo tipo de saber é o saber como juízo verdadeiro, isto é, como juízo que afirma, com razão, alguma coisa sobre algo. Assim, o saber é considerado como resultado de uma atividade intelectual, do ato de fazer julgamentos da realidade, mais do que uma representação subjetiva. É uma concepção assertórica, discursiva, empirista, pois a validação de um juízo ocorre na adequação aos fatos da realidade.

Finalmente, o saber, como argumento, é uma atividade discursiva *que consiste em validar, por meio de argumentos e de operações discursivas (lógicas, retóricas, dialéticas, empíricas, etc) e lingüísticas, uma proposição ou uma ação* (Ibid, p.196). Nesse sentido, o saber se dá na relação com o outro, e a validade ocorre por meio de acordos comunicacionais, nas trocas discursivas entre seres sociais. A racionalidade está baseada na capacidade de argumentar, de convencer o outro. Tardif afirma existir entre as concepções algo em comum, que é a exigência de racionalidade, que é colocada em lugares diferentes em cada uma das concepções de saber, descritas acima.

Desse modo, Tardif chama de *"saber" unicamente os pensamentos, as idéias, os juízos, os discursos, os argumentos que obedeçam a certas exigências de racionalidade* (ibid, p.199), entendida como, capacidade do individuo de justificar o seu discurso para um interlocutor que o questiona sobre a pertinência, a adequação e o valor desse discurso, por meio de razões, de declarações, de procedimentos, etc. É essa visão que iremos adotar neste estudo.

Essa concepção de saber não se restringe ao conhecimento científico, embora haja a exigência de racionalidade, pois o saber científico supõe, ainda, um corpo organizado, sistematizado de conhecimentos, com regras mais rigorosas e específicas de validação, compartilhadas por uma comunidade e apresentado numa linguagem própria.

Assim, o saber "sábio" é o saber produzido principalmente pelos pesquisadores de um determinado campo de conhecimento, nos institutos de pesquisa ou nas universidades. Alguns chamam também de saber científico, pois são, geralmente, oriundos das ciências. O saber "sábio" tem características próprias, sendo que a questão da validade é fundamental, mesmo que não seja absoluta, isto é, que possa ser alterada com os avanços da própria ciência. Essa validade é conferida, consolidada por uma comunidade, que é, geralmente, a comunidade dos que pesquisam na área, regida por regras, relações de poder e demarcações de territórios próprios.

Quanto ao saber matemático, ainda que não haja consenso sobre a sua natureza filosófica, quando nos referimos ao saber matemático "sábio", estamos pensando no conhecimento científico estruturado, organizado, validado pelas comunidades científicas da área, de acordo com regras próprias de construção. Esse discurso é descontextualizado dos processos de criação, dizem respeito a um produto: novos conceitos, novas teorias, novos procedimentos.

Esse saber matemático, assim como o de outras ciências, aparece organizado em campos ou áreas, que podem ser chamadas de disciplinas científicas, cujo entendimento, segundo Lopes (2000), é razoavelmente consensual. Constituem *uma maneira de organizar e delimitar um território de trabalho, de concentrar a pesquisa e as experiências dentro de um determinado ângulo de visão* (TORRES SANTOMÉ, 1988, apud LOPES, 2000, p. 156)[13].

Assim, por exemplo, Equações Diferenciais ou Equações Diferenciais Ordinárias podem se constituir numa disciplina científica, dependendo dos interesses da comunidade dos pesquisadores, dos órgãos de fomento, do poder de forças desses pesquisadores. Apoiando-se em Boaventura Santos, Lopes e Macedo, dentro de uma abordagem sociológica, afirmam que a constituição de uma disciplina científica depende de processos argumentativos do grupo proponente, mas também de ações institucionalizantes. Essas acabam envolvendo objetivos sociais que irão garantir força política para se constituir como grupo capaz de produzir conhecimento científico.

[13] TORRES SANTOMÉ, J. **Globalização e interdisciplinaridade – o currículo integrado.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1988, p. 55.

Assim, os saberes científicos, organizados em disciplinas científicas, devem ser transmitidos às novas gerações. Modernamente, isto é feito através da escola. No entanto, esses saberes, para se constituírem em objetos de ensino, devem passar por processos de transformação, para que sejam compreensíveis por aquele que aprende. Uma das instâncias desse processo de transformação é a constituição da disciplina acadêmica universitária.

2.3 Saber a ensinar: a disciplina acadêmica universitária

A maioria dos trabalhos e dos textos que tratam dos saberes se preocupa com a discussão da relação entre os saberes científicos e os saberes escolares, esses últimos entendidos como os veiculados nas escolas de educação básica ou nos níveis equivalentes em outros países. No entanto, há, entre esses saberes, um nível intermediário que também carece de ser questionado, que são os saberes veiculados no ensino superior, onde se dá a formação inicial formal de profissionais, nas diversas áreas. Esse questionar é não só pertinente, mas necessário, quando se pensam os currículos de formação de professores, pois a relação entre os saberes científicos e os escolares pode ter repercussões substanciais no processo de formação, como também a formação pode ter sobre esses saberes.

A lógica e os condicionantes que regem a organização desses níveis de saberes – científicos, acadêmicos universitários e os escolares – são diferentes e merecem ser tratados, sabendo-se que há relações entre eles, mas que carecem de ser explicitadas.

A maioria dos currículos acadêmicos é constituída em torno de disciplinas, tendo por referência uma ou mais áreas do conhecimento científico. Ainda que possa ser mais forte a relação da disciplina acadêmica com a disciplina científica de referência, do que desta com a disciplina escolar, outros aspectos, que interferem na constituição da disciplina no meio universitário, não devem ser negligenciados.

Lopes e Macedo (2002), ao se referirem às disciplinas escolares, afirmam que elas são instituições sociais, espaços que definem caminhos para a formação dos alunos, garantem *status* aos professores e o atendimento a padrões sociais externos. A mesma compreensão entendemos poder ser estendida às disciplinas acadêmicas, considerando-as também instituições sociais, e não, apenas, recortes de um campo científico transposto para o ensino, mesmo porque são também frutos de uma negociação. Nesse sentido, Perrenoud (2000) afirma que as disciplinas universitárias são também disciplinas de ensino, que se referem a um campo complexo de saberes e de práticas, com uma legitimidade própria. Segundo ele, *pode-se concluir que, na universidade como na escola, as disciplinas de ensino são construtos* *sociais cujas origens, as fontes de legitimidade e o* status *epistemológico e praxeológico são muito diversos. (*PERRENOUD, 2000, p.3).

Desse modo, podemos deduzir que as disciplinas acadêmicas não são cópias fiéis das disciplinas científicas, são construções próprias que incluem outros elementos ligados às questões do ensino, como as finalidades do curso onde a disciplina está inserida, o perfil do profissional que se pretende formar, dentre outros aspectos.

Na definição das disciplinas acadêmicas, entram em jogo, segundo Lopes (2000), a autonomia universitária, os conflitos entre os departamentos, a relação maior ou menor com os grupos de pesquisa, as lutas por recursos e espaços, os modos de avaliação dos docentes. Nesse sentido, a constituição das disciplinas acadêmicas se diferencia do modo de constituição das disciplinas escolares, em que há uma interferência maior do contexto externo: parâmetros curriculares, definidos sem a participação do professor; avaliações sistêmicas; pressões dos pais e da sociedade em geral.

Neste estudo, iremos considerar que as disciplinas universitárias ou acadêmicas são um conjunto de: conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática; finalidades; elementos pedagógicos e outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral; organizado de modo a manter uma unidade científica e didática.

Nesse sentido é que queremos compreender a Teoria dos Números como disciplina na formação do professor de matemática.

2.4 As disciplinas escolares

Por que tratar aqui das disciplinas escolares, se a nossa preocupação se situa no campo das disciplinas acadêmicas? A resposta é simples, porque na licenciatura preparamos o professor para trabalhar com as disciplinas escolares. Assim: O que são elas? Quais as relações delas com as disciplinas acadêmicas e, de modo mais geral, quais as relações delas com o processo de formação do professor? São questões que a pesquisa na área da educação, em especial na área da Educação Matemática, deve procurar clarear.

O termo *disciplina escolar* é utilizado pela maioria dos pesquisadores e teóricos do campo educacional, para designar os componentes dos currículos da escola básica, ou de níveis equivalentes.

Nas últimas décadas, as disciplinas escolares, em especial a história das disciplinas, têm sido alvo de pesquisas, que buscam clarear a sua gênese, a sua função e o seu funcionamento, e compreender o seu papel e significado na constituição dos currículos escolares, bem como clarear o conhecimento por elas produzido.

Segundo Chervel (1990), as definições de disciplina escolar são vagas ou, demasiadamente, restritas, às vezes, confundidas com "matéria" ou "conteúdo". É interessante assinalar que, de acordo com Chervel, o termo *disciplina escolar,* até o século XIX, estava ligado à idéia de ordem, de vigilância, de repressão de condutas indesejáveis.

Luckesi (1998), ao apontar as origens da pedagogia tradicional, no século XVI, reforça essa abordagem, referindo-se às obras *Ratio Studiorium*, proposta pelos jesuítas, e a *Didática Magna*, de Comenius. Eram ambas, conjunto de normas para garantir a disciplina e o controle sobre as escolas jesuíticas, no primeiro caso; ou protestantes, no segundo.

Assim, outros termos eram utilizados para designar conteúdos de ensino: "faculdades", "objetos", "ramos", "partes". Na segunda metade do século XIX, o verbo *disciplinar* foi utilizado, na França, como "*ginástica intelectual*" e, somente a partir da I Guerra Mundial, foi introduzido para significar matéria de ensino.

Uma das questões fundamentais da discussão sobre as disciplinas escolares diz respeito a sua constituição: São as disciplinas escolares adaptações das disciplinas científicas? São elas frutos de um jogo social? Ou são produtos da escola? Cada uma dessas questões remete a um viés de análise, de natureza diversa – análise epistemológica, análise sociológica, análise histórica.

Segundo Hasni (2000), *há três componentes principais que podem interagir na determinação das disciplinas escolares consideradas do ponto de vista de seus conteúdos e de suas finalidades – a escola com suas realidades e suas exigências, a sociedade com suas influências e expectativas e as disciplinas cientificas como fontes de saber confirmado...(*HASNI, 2000, p.3).

Num aspecto parece haver consenso - os saberes a ensinar não são exatamente os saberes científicos, tais como são apresentados pela comunidade científica que os produziu, devem sofrer transformações adaptativas.

Por outro lado, muitos pesquisadores (Chervel, 1990; Perrenoud, 2000; Develay, 1991; Lopes, 1997) questionam posições que consideram as disciplinas escolares como meras adaptações ou prolongamentos do saber científico, postulando que as disciplinas escolares possuem uma constituição epistemológica e sócio-histórica própria, que não coincide com a das disciplinas científicas.

Segundo Lopes (2000) e Hasni (2000), uma corrente de pensamento pedagógico que defende a identidade entre as disciplinas escolares e científica é a proposta por Paul Hirst e Richard Peters. Defendendo uma proposta de educação que deve ser fundada na própria natureza do conhecimento, esses autores não colocam ênfase na aquisição de conceitos e fatos, mas na aquisição de esquemas conceituais, de técnicas e de diferentes tipos de raciocínios advindos das ciências. Assim, para esses autores, as disciplinas escolares são meios elaborados para fins educacionais, isto é, para introduzir os alunos nas lógicas de determinados tipos de pensamento. Uma das críticas a essa corrente é que ela se baseia numa visão absolutista do conhecimento científico, como se esse fosse imutável e a-histórico, conforme aponta Lopes.

Opondo-se à visão epistemológica da constituição das disciplinas escolares, aparece uma visão sociológica. Essa visão opta pela desmistificação dos saberes científicos, ao considerar que as disciplinas escolares não transmitem um saber científico desinteressado, pois refletem e mantêm a distribuição de poder dentro da sociedade, conforme analisa Hasni (2000). Neste sentido, são socialmente determinadas e não visam apenas aos saberes científicos ou apenas ao desenvolvimento do espírito, mas visam formar pessoas que sejam capazes de dominar o ambiente social. Essa corrente também sofre críticas por desviar o interesse sobre os conteúdos de ensino para o estudo das lutas sociais.

A outra corrente poderia ser chamada de histórica ou de sócio-histórica. Os autores que se apóiam nessa visão rejeitam o determinismo das disciplinas científicas ou da sociedade em geral, característico das correntes anteriormente citadas.

André Chervel é um dos defensores dessa corrente. No contexto da história das disciplinas escolares como campo de pesquisa, considera que elas não são meras simplificações de um conhecimento produzido fora da escola, quer pela ciência ou pela sociedade. Tomando o exemplo da história da gramática, afirma que essa matéria não é uma vulgarização científica, mas, ao contrário, foi criada historicamente pela escola, na escola e para a escola. Afirma ele:

> Com ele [o termo disciplina] os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios de uma classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história. (CHERVEL, 1990, p.180)

Questiona também a tarefa dos pedagogos de arranjar métodos que permitam aos alunos assimilar de modo mais rápido e mais eficiente os conteúdos das ciências de referência. Concebe os métodos pedagógicos como componentes internos do ensino, aquilo que transforma ensino em aprendizagem, e não manifestações de uma ciência pedagógica.

Para traduzir as relações que considera inadequadas das disciplinas escolares com as ciências de referência e com a pedagogia, cria duas imagens – *disciplina-vulgarização* e *disciplina-lubrificante*, afirmando que elas não deixam espaço para que se perceba a existência autônoma das disciplinas.

Ao considerar que a disciplina escolar não comporta apenas as práticas docentes da sala de aula, mas também as finalidades que fundamentaram a sua construção, Chervel reivindica um papel central para a história das disciplinas, cujo estudo levaria a destacar o caráter criativo do sistema escolar. Além disso, as finalidades do ensino em cada época também poderiam ser estudadas a partir da história das disciplinas escolares, pois:

> A instituição escolar é, em cada época, tributaria de um complexo de objetivos que se entrelaçam e se combinam numa delicada arquitetura da qual alguns tentaram fazer um modelo. É aqui que intervém a oposição entre educação e instrução. O conjunto dessas finalidades consigna à escola sua função educativa. Uma parte somente entre elas obriga-a a dar instrução. (...) Sua função [das disciplinas escolares] consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa. (CHERVEL, 1990, p.188)

Como as finalidades mudam e muitas vezes nem são explicitas, as disciplinas escolares se constituem, se transformam ou são extintas por um longo processo que ocorre no interior da escola, no qual também interferem outros aspectos: o sucesso ou fracasso de um procedimento didático, a taxa de renovação do corpo docente, a população que se deseja alcançar, a transformação social e cultural desse público. Desse modo, Chervel estabelece para a escola uma dupla função: a de instruir as crianças e a de criar as disciplinas escolares.

Para Chervel, a disciplina escolar é uma combinação de vários componentes: *um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico (*estudo cientifico dos exames*), os quais funcionam (...) em ligação direta com as finalidades* (Ibid., p. 207). O que ele chama de práticas de incitação que buscam despertar o gosto, a disposição para a aprendizagem, envolve o selecionar os conteúdos, os textos, os exercícios, as abordagens.

Essa concepção de disciplina escolar, apresentada por Chervel, amplia uma visão corrente, principalmente no meio universitário, de que a disciplina é uma lista de conteúdos a serem ministrados de forma neutra, imune ao contexto e às finalidades. Permite questionar a separação entre teoria e prática pedagógica, na medida em que afirma que os métodos pedagógicos são componentes internos do ensino, aquilo que transforma ensino em aprendizagem. Isso, levado a sério, afeta substancialmente o processo de formação do professor, não só a chamada formação específica, como também a formação pedagógica, na medida em que postula que elas coexistem: o pedagógico permeia o específico, pois se está lidando com disciplina de ensino, e o específico dá vida ao pedagógico.

No entanto, no caso específico da matemática, não podemos negar que o conhecimento científico é uma fonte de referência para o conhecimento escolar, devendo ser transformado, podendo assim se constituir em algo novo, mas não completamente autônomo.

Lopes (2000), ao abordar as disciplinas escolares como construção sócio-histórica, aponta que há disciplinas que, em seu processo histórico de construção, assumiram maior relação com as disciplinas de referência, como a Física, a Química, a História; outras foram constituídas como tentativa de integração de várias outras, como é o caso das Ciências Naturais, Estudos Sociais; outras são consideradas disciplinas temáticas, como Moral e Cívica, Orientação Sexual. Embora a autora não faça referência à Matemática, pensamos que ela poderia ser incluída no primeiro grupo.

Mesmo considerando que algumas disciplinas escolares mantêm uma relação estreita com a disciplina de referência, Lopes afirma que a disciplina escolar não é constituída de um sistema de pensamento, de métodos de investigação, de proposições e de conceitos, tal qual aparecem nas disciplinas científicas.

Podemos dizer que há um movimento de adaptação dos conceitos, dos métodos, e nesse processo de adaptação surgem idéias, procedimentos que são verdadeiras criações didáticas que, muitas vezes, não fazem parte do conhecimento científico.

No caso da matemática escolar, isso pode ser constatado, quando no ensino das operações fundamentais no conjunto dos números naturais, há uma preocupação com a construção das idéias que as operações encerram, por exemplo, a exploração das idéias: subtrativa, comparativa e aditiva da subtração; as idéias de repartição e de medida na divisão. No entanto, para a matemática acadêmica, interessa definir a diferença e o quociente e a condição de existência dos mesmos. O mesmo ocorre com os algoritmos para o cálculo das operações, com os cálculos mentais, cálculos por estimativa, etc. Esses conceitos e procedimentos, bem como as atividades de contextualização, através da resolução de problemas, não advêm das disciplinas científicas, nem das disciplinas acadêmicas, são criações da escola.

Como, neste estudo, estamos interessados em re-significar uma disciplina acadêmica específica, a relação entre a matemática escolar e a matemática desenvolvida nessa disciplina acadêmica, para a qual existe um saber cientifico de referência bem definido, é um aspecto que cabe ser questionado.

O distanciamento entre a formação e a prática docente na escola básica, conforme apontamos anteriormente, tem sido objeto de pesquisas, nos últimos anos. Pensando essa questão sob a ótica das disciplinas, cabe perguntar: Não seria esse distanciamento fruto de uma desconsideração, ou mesmo da pouca clareza, das relações entre disciplinas acadêmicas e disciplinas escolares? Quais saberes devem ser construídos no processo de formação, tendo em vista a prática docente na escola básica? E como deve ocorrer essa construção? O que constitui os saberes dos professores? São questões que ainda carecem de pesquisa.

2.5 A transposição didática

A noção de transposição didática tem-se constituído em algo presente na maioria dos estudos que tratam das relações entre as disciplinas a ensinar e as ciências de referência. No Brasil, tem aparecido também nos textos legais que tratam do ensino na escola básica, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais[14] e nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica[15].

Estudos mais recentes têm ampliado a concepção acerca dos saberes com fins educacionais. Como vimos anteriormente, esses saberes incluem não só os conhecimentos científicos, mas outras modalidades e fontes, como o produzido no interior da escola. Conseqüentemente, os estudos sobre a transformação dos saberes para fins educacionais, ou transposição didática, também têm sido amplamente discutidos.

2.5.1 A transposição didática, segundo Chevallard

O estudo da transposição didática tem em Chevallard um de seus pioneiros, cujo trabalho se situa no campo da didática da matemática, considerada uma ciência. Na obra *La*

[14] O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passiveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fieis dos objetos da ciência. (Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática – vol.3., 2000, 39)

[15] Sem a mediação da **transposição didática**, a aprendizagem e a aplicação de estratégias e procedimentos de ensino tornam-se abstratas, dissociando teoria e prática. Essa aprendizagem é imprescindível para que, no futuro, o professore seja capaz tanto de selecionar conteúdos como de eleger as estratégias mais adequadas para a aprendizagem dos alunos, considerando sua diversidade e as diferentes faixas etárias. (D.C.N.F.P.E.B., 2001, p.18)

(...) Isso se justifica porque a compreensão do processo de aprendizagem dos conteúdos pelos alunos da educação básica e uma **transposição didática** adequada dependem do domínio desses conhecimentos. (Ibid, p.32)

(...) Este âmbito refere-se ao conhecimento de diferentes concepções sobre temas próprios da docência, tais como, currículo e desenvolvimento curricular**, transposição didática**, contrato didático, ... (Ibid.,p.40)

(...) Para superar a suposta oposição entre *conteudismo* e *pedagogismo* os currículos de formação de professores devem contemplar espaços, tempos e atividades adequadas que facilitem a seus alunos fazer permanentemente a **transposição didática**, isto é, a transformação dos objetos de conhecimento em objetos de ensino. (Ibid, p.47) *transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné,* publicada inicialmente em 1985, ele expõe os principais conceitos de sua teoria, dentre eles o de sistema didático, o de sistema de ensino, o de noosfera e o de transposição didática.

Para Chevallard, o objeto da didática da matemática é o *sistema didático* e mais amplamente o *sistema de ensino*. O sistema didático é constituído por três elementos: o professor, os alunos, um saber matemático e as relações entre eles. O sistema de ensino é o que engloba um conjunto de sistemas didáticos, em que estão presentes meios estruturais diversificados que garantem o funcionamento didático.

Existe ainda, na periferia do sistema de ensino, uma instância essencial ao funcionamento didático, chamada por Chevallard de *noosfera.* Nessa instância, ocorre a interação entre o sistema didático *stricto sensu* e a sociedade em geral, nela se estabelecem os conflitos, as negociações, as decisões que interferem diretamente nos sistemas didáticos. Dela fazem parte: os pais, os matemáticos que se interessam por assuntos do ensino, os representantes dos professores e do sistema de ensino, cada um com suas expectativas, visões de mundo, de educação e de matemática.

Esse embate muitas vezes é acalorado, como o que se deu no Brasil, em 2003, pela imprensa, entre a então presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, Suely Druck, e o ex-presidente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, professor Rômulo Lins. Ao analisarem os resultados apontados como analfabetismo funcional em matemática, a primeira atribuiu as causas a uma *supervalorização dos métodos pedagógicos em detrimento do conteúdo matemático na formação dos professores*[16]. O segundo afirmou que outros, ao contrário, *vêem uma supervalorização do conteúdo matemático* e que ele, particularmente, não vê nem uma coisa nem outra. Ele vê *professores e professoras sem condições de trabalho adequadas e isolados, sem apoio efetivo para que possam continuar seu desenvolvimento profissional de forma contínua e em resposta a suas próprias perguntas*[17]. Assim, a noosfera é um espaço de lutas, de demarcação de territórios, não é um espaço neutro, mas um espaço onde há expectativas, objetivos e interesses diversos.

Segundo Chevallard, para que o sistema de ensino seja possível, deve haver uma compatibilização do sistema com os ambientes que o envolvem. No que se refere ao saber, essa compatibilização deve ser tal que não pareça tão distante do saber sábio, o que poderia

[16] Folha de São Paulo, 25/03/03 – Folha Sinapse
[17] Folha de São Paulo, 29/04/03 – Folha Sinapse

afetar a sua legitimidade e, por outro lado, deve ser tal que não seja tão próxima do saber dos "leigos", ou saber do senso comum, pois isso poderia banalizar o saber.

Assim, no sistema didático, o saber é um dos elementos da terna - professor, aluno e saber - mas qual é esse saber, e quais as relações do saber ensinado com o saber sábio, são questões que, segundo ele, cabe à didática considerar. O conceito de transposição didática remete então ao estudo da passagem do saber "sábio" ao saber a ensinar, ao admitir uma eventual e obrigatória distância entre eles, sendo, assim, tomado como uma teoria. Entretanto, a transposição didática é, ao mesmo tempo, considerada uma ferramenta que permite ao didata se afastar, interrogar as evidências de seu objeto de estudo, é uma forma de exercer sua *vigilância epistemológica,* para que os objetos de saber que serão ensinados não sejam deturpados, substituídos, mas apenas transformados.

Ao considerar a existência da transposição didática e procurar desvendá-la, o saber passa a ser uma questão problemática para a didática, avançando para além das questões do ensino-aprendizagem, isto é, da relação professor-aluno. Este é um aspecto importante da contribuição de Chevallard, pois problematiza a questão do saber, trazendo-a para o campo da didática, que assim passa a se preocupar com saberes específicos, como é o caso do saber matemático.

Segundo esse autor, *todo projeto social de ensino e de aprendizagem* se constitui dialeticamente com a identificação e a *designação de conteúdos de saberes* como *conteúdos de saberes a ensinar.* (CHEVALLARD, 1991, p.39, destaques como no original). Ao processo de passagem de uma forma de saber à outra, por meio de transformações adaptativas, ele dá o nome de *transposição didática:*

> Um conteúdo de saber, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar dentre os objetos de ensino. O "trabalho" que de um objeto de saber a ensinar o torna um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (...) O estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da didática da matemática) supõe levar em conta a transposição didática no sentido lato, representado pelo esquema: objeto de saber → objeto a ensinar → objeto de ensino. (CHEVALLARD, 1991, p. 39, grifos e aspas do autor)*

Ainda que o termo *transposição* nos traga a idéia de algo fixo, "arrastado" de um contexto a outro, o próprio Chevallard o caracteriza como deformarção, o que traz um sentido de algo novo, de uma transformação epistemológica do objeto de saber que poderá, assim, ser considerado uma verdadeira *criação didática.* Cita, como exemplo, no movimento de reforma, denominado matemática *moderna*, a criação de diversos objetos de ensino por exigência da transposição didática, como os *diagramas de Venn,* no estudo dos conjuntos.

Chevallard denomina "transposição didática *stricto sensu*", a passagem de um conteúdo de saber a uma versão didática deste objeto, mas reafirma que o estudo científico da transposição didática supõe considerá-la no sentido *lato*, de acordo com o esquema: *objeto de saber → objeto a ensinar → objeto de ensino.* (Ibid., p. 39)

Um objeto de saber só é introduzido no sistema didático se ele for considerado *útil à economia do sistema* didático, o que não significa que, uma vez estabelecido como objeto a ensinar, não sofra outras transposições.

Chevallard caracteriza, como objetos de saber, as *noções matemáticas* que o professor pretende que o aluno seja capaz de: definir, ou retraçar a construção; de dar as suas propriedades e demonstrá-las; de reconhecer certo número de ocasiões de emprego, etc Convivendo com as noções matemáticas, temos as *noções paramatemáticas*, que são objetos de saber auxiliares, necessários ao ensino dos objetos matemáticos, propriamente ditos, não se constituem, portanto, em objeto de ensino diretamente. São exemplos de noções paramatemáticas a equação, a demonstração. Para ele, existe, ainda, um conjunto de noções, mobilizadas implicitamente, que são as *noções protomatemáticas*, por exemplo, a noção de "modelo" implícita na fatoração de polinômios. Assim, *noções matemáticas, noções paramatemáticas e noções protomatemáticas constituem estratos profundos do funcionamento didático,* segundo Chevallard, e são importantes para a análise didática. A classificação de uma noção em um desses níveis não é rígida, pois uma noção pode ser paramatemática em um contexto e ser considerada uma noção matemática em outro. É o caso, por exemplo, da demonstração que pode ser considerada um objeto para a lógica matemática, portanto uma noção matemática, e, não, paramatemática, como classificada anteriormente.

Essas considerações de Chevallard clareiam a posição dos objetos de saber no ensino, na medida em que trazem uma centralidade para as noções matemáticas, entendidas como aquilo que é objeto de ensino, propriamente dito. A posição dos objetos de saber tem sido, muitas vezes, enfraquecida ou obscurecida por propostas de ensino que esvaziam a escola dos objetos de saber próprios de cada área do conhecimento, confundindo objetos de ensino com objetivos de ensino.

No processo de transposição didática, há o que Chevallard chamou "constrangimentos" didáticos, que modificam a natureza do saber sábio ao transformá-lo em objeto de ensino. Assim, podem ser citados e devem ser analisados os processos de *descontextualização*, de *desincretização*, de *despersonalização* e de *descontemporalização.*

O saber a ensinar é um saber exilado de suas origens, desligado de sua produção histórica dentro do saber sábio. É, portanto, um saber descontemporalizado e descontextualizado, cuja legitimação não está ligada à autoridade de um produtor. O saber a ensinar supõe, desse modo, um processo de naturalização e é sobre essa natureza de "dado" que a escola exerce a sua jurisdição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 17).

O processo de descontextualização do saber consiste no desligamento dos problemas que lhe deram sentido. Nesse processo há, inicialmente, um invariante, em geral um significante, e há também uma variação, um afastamento, resultante da descontextualização dos significantes (por exemplo, "distância"[18]), para em seguida se fazer uma recontextualização dentro de um discurso de outra espécie.

Outro processo a ser considerado é o da despersonalização que começa ocorrer já na comunidade científica. Um saber, na sua origem, está intimamente ligado ao seu produtor. No entanto, devido à necessidade de dar publicidade a esse saber, ele sofre já um processo de despersonalização, pois deve ser comunicado numa linguagem própria e deve atender a padrões de legitimação. No ensino, esse processo é mais completo, pois não está submetido às regras de produtividade, há outros aspectos a considerar. Assim, o processo de despersonalização supõe que o saber, ao ser apresentado, não revela o processo de produção, como o produtor o trabalhou, mas mostra o produto - o processo de produção desaparece, para dar lugar à apresentação do produto.

O processo de desincretização pode ser tomado como resultado da textualização do saber em que o todo é estruturado em partes, ocorrendo, assim, uma "desintrincação" do saber. Por esse processo, há uma delimitação do que constitui o campo de saber a ser ensinado, evidenciando as noções matemáticas, objeto do discurso presente no texto e as noções paramatemáticas necessárias para a construção do texto. A textualização do saber tem, ainda, relação direta com o processo de descontextualização e com o processo de despersonalização. Além disso, ao efetivar a publicidade do saber, permite também o *controle social das aprendizagens.*

Embora esses processos estejam presentes na transposição didática e sejam necessários para caracterizar os saberes escolarizáveis, conforme afirma Chevallard, apoiado em Michel

[18] Yves Chevallard e Marie-Alberte Johsua apresentaram um exemplo de transposição didática, usando a noção de distância. Mostraram as transformações sofridas por esse conceito, a partir de sua introdução, em 1906, por Fréchet, no "saber sábio", dentro da análise funcional, até sua introdução nos programas de geometria da sétima série, em relação com a reta, como distância entre dois pontos. (DEVALAY, 1991, p. 48)

Verret[19], pensamos que uma análise cuidadosa deles é importante, para que esses processos não tragam dificuldades para o ensino-aprendizagem de um dado saber. Por exemplo, o processo de descontemporalização pode introduzir, no sistema didático, a visão de um saber a-histórico, como muitas vezes ocorre com o conhecimento matemático no ensino, o que contrapõe à necessidade de situar historicamente os conhecimentos. Como também o fenômeno da descontextualização, inerente aos processos de textualização do saber e de transposição, pode conduzir a uma negligência da necessidade de re-contextualização, visando garantir que os saberes tenham significado para o aluno. Outro risco é o de que o processo de desincretização conduza a uma fragmentação excessiva dos saberes, em que as relações das partes entre si e das partes com o todo passam a não mais ser percebidas. São "constrangimentos didáticos", conforme colocou Chevallard, próprios da transposição didática, mas que merecem vigilância, principalmente na transposição didática interna, aquela que ocorre no sistema de ensino.

Chevallard aponta ainda uma questão importante com relação aos saberes – o desgaste – a que ele chamou desgaste biológico e desgaste moral. O envelhecimento biológico ocorre com os avanços científicos da área, isto é, o saber ensinado se afasta do saber sábio. Aquilo que tinha um lugar importante por determinados motivos passa a ser desnecessário, ou menos importante, pelos avanços científicos e tecnológicos. O envelhecimento moral se dá quando o saber se banaliza, torna-se próximo do senso comum. Assim, o saber passa a não corresponder aos anseios e às necessidades da sociedade em geral. Em ambos os casos, ocorre uma incompatibilidade entre o sistema de ensino e o seu ambiente. Faz-se necessária a introdução de novos saberes, via transposição didática. A noosfera busca o equilíbrio, via alteração de conteúdos ou de métodos, avaliando uma relação de custo/benefício. A primeira via é mais simples e assegura um controle, através dos manuais, dos referenciais oficiais, etc. A segunda via, a dos métodos, é mais complexa, pois menos sujeita a controles externos. Assim, a noosfera opta, geralmente, por uma manipulação dos saberes, selecionando elementos do saber sábio que serão designados como saberes a ensinar e que serão submetidos ao trabalho de transposição didática. É, pois, na noosfera que se opera o que Chevallard denomina trabalho externo da transposição didática. O trabalho interno é realizado dentro do próprio sistema didático que tem, assim, uma autonomia relativa.

Há também um outro desequilíbrio, apontado pelo autor, entre o sistema de ensino e a sociedade, é o que ocorre no espaço dos alunos. O saber não "*passa*" *mais*, *os alunos não*

[19] Michel Verret foi quem introduziu o termo transposição didática em sua tese *Le temps des études,* defendida em 1975, na França.

conseguem mais absorvê-lo (...) na impossibilidade de mudar os alunos, será necessário mudar os saberes. (Chevallard, 1991, p.32)

Estabelece-se, assim, uma *crise do ensino.* Diante da crise, os professores esperam que a noosfera resolva os problemas de aprendizagem, de modo a devolver aos alunos a vontade de aprender. Diante dessa situação, há dois caminhos a considerar: abandona-se o saber que se apresenta como problemático para a aprendizagem ou se propõe uma reorganização do saber, até que uma verdadeira reforma se estabeleça. A primeira via é simplista, aceitável em alguns casos, mas é preciso ter cuidado para que não ocorra um esvaziamento dos conteúdos o que acaba acontecendo em determinadas épocas de muita abertura do sistema de ensino. A segunda alternativa é mais complexa e supõe a continuidade dos saberes e a sua reorganização dentro de alguns limites.

Nesse sentido, *o texto do saber* é importante, pois, segundo o autor, é a ferramenta essencial da prática do professor. Num movimento de reorganização do saber ou de reforma dos saberes, a noosfera busca construir um novo texto, visando estabelecer um *bom* ensino, mas *a ordem didática, que não se curva a nossos desejos, vem lembrar que um ensino, antes de ser bom, deve ser simplesmente possível* (Ibid., p. 37). Assim, quando os programas são elaborados, no âmbito da noosfera, um outro trabalho se inicia, que é o da transposição didática interna.

2.5.2 Outras contribuições

O conceito de transposição didática foi tratado por Chevallard no âmbito da didática da matemática, como vimos anteriormente, mas se mostrou profícuo para discutir a didática de outras áreas, como a das ciências. Ao se estender essa teoria para outros campos, é natural que novos aportes sejam incorporados, mesmo porque a natureza do conhecimento matemático é diferente, por exemplo, da natureza das ciências naturais. As ciências, como a biologia, a física e a química, devem levar em conta o real existente que elas pretendem explicar e prever, enquanto o critério de verdade da matemática não se restringe à experimentação.

Assim, Astolfi e Develay (1991) situam as preocupações didáticas relativas às ciências naturais, também no campo da epistemologia, buscando examinar a estrutura do saber ensinado: os principais conceitos, leis e teorias; as relações entre eles, as retificações sucessivas de sentido que ocorrem ao longo da história, os obstáculos epistemológicos.

Estabelece-se assim o que eles chamam de epistemologia escolar, em que as características de uma epistemologia das ciências definem o questionamento didático correspondente.

Dentre os conceitos da didática das ciências, tomados emprestados de áreas vizinhas com as inevitáveis remodelagens, conforme afirmam os autores, colocam o de transposição didática, assim descrito:

> (...) a designação de um elemento do saber sábio como objeto do ensino modifica-lhe muito fortemente a natureza, na medida em que se encontram deslocadas as questões que ele permite resolver, bem como a rede relacional que mantém com os outros conceitos. Existe assim, uma "epistemologia escolar" que pode ser distinguida da epistemologia em vigor nos saberes de referência. (ASTOLFI e DEVELAY, 1991, p. 48).

Desse modo, os autores compreendem que o saber sábio, ao se constituir como saber de ensino, sofre transformações em seu estatuto epistemológico, passando por processos de descontemporalização e despersonalização, isto é, por um processo de naturalização, de reificação do saber, estudado por Develay com relação ao conceito de memória.

Assim, consideram que a transposição didática é inerente ao processo educativo, pois a escola não ensina saberes tal como foram produzidos pela ciência, mas conteúdos de ensino resultantes de uma complexa interação entre uma lógica conceitual, um projeto de formação e exigências didáticas. No entanto, consideraram outros elementos na sua sistematização, como as práticas sociais de referência[20], os níveis de formulação de um conceito e as tramas conceituais. Nesse sentido, re-interpretam o conceito e, até mesmo, fazem uma crítica à concepção de Chevallard, que considera como fonte de saber apenas o saber sábio.

As práticas sociais de referência não se restringem às atividades de pesquisa e de produção, mas incluem outras atividades, como as culturais, que podem servir de referência às atividades escolares, pois a transposição didática, para eles, não se resume ao *texto do saber*, como coloca Chevallard, mas também às atividades correspondentes. Assim, a transposição didática deve considerar aspectos da prática de ensino, tais como o referencial empírico do ensino científico, as funções sociais da ciência e as atitudes que se quer desenvolver nos alunos, os instrumentos materiais e o saber produzido ao longo da atividade.

Chevallard rebate essas críticas no posfácio da segunda edição de seu livro, reafirmando que a pertinência cultural não é suficiente para garantir a confiança que se pode ter em um saber, isto é, garantir a sua credibilidade. Faz-se necessária a legitimidade epistemológica. Nesse contexto é que ele coloca o saber sábio.

[20] O termo *práticas sociais de referência* foi tomado, por Astolfi, de Jean-Louis Martinand que analisou o processo de transposição didática para o conceito de "elemento químico".

Segundo ele, a escola depende da legitimidade que a sociedade lhe dá ou lhe recusa. Assim, ao ter como fonte o saber sábio, ela vai libertar o professor de uma obrigação moral de legitimidade e de buscar se fundamentar em valores apologéticos.

As ligações entre práticas sociais e saberes tendem a se dissolver, quando se consideram os ensinos "fundamentais", como é o caso do ensino da matemática. Esses são caracterizados como tais fora da escola, pois são indispensáveis ao funcionamento da sociedade, mas, ao mesmo tempo, são invisíveis e culturalmente frágeis, o que nos parece paradoxal.

Lopes (1997)[21] também discute a transposição didática no ensino de ciências. Parte do pressuposto *de que o conhecimento escolar é uma instância de conhecimento própria, processo de (re)construção do conhecimento científico,* através de um processo de transposição didática. Defende que o conhecimento escolar não deve ser fruto de deturpação e de banalização do conhecimento cientifico, pelo uso excessivo de metáforas e analogias, o que poderia impedir a ruptura entre conhecimento comum e conhecimento cientifico. No entanto, Lopes, acreditando que o termo *transposição* não traduz adequadamente o processo de (re)construção dos saberes, pois traz uma idéia de reprodução, utilizou o termo *mediação didática*. Esse termo, explica ela, não é tomado no sentido de "ponte", mas no sentido dialético: *processo de constituição de uma realidade através de mediações contraditórias, de relações complexas, não imediatas, com um profundo sentido de dialogia.* (LOPES, 1997, p.564).

Desse modo, pensamos que a *mediação didática* é uma re-interpretação do conceito de transposição didática, adaptado às ciências naturais, particularmente à química, objeto de seu trabalho, pois no nível da noosfera, Chevallard já apontava a existência de embates e de relações complexas. A re-interpretação de Lopes traz, contudo, uma ampliação do conceito, ao apontar para a inexistência de uma hierarquização de cima para baixo do conhecimento científico em relação ao conhecimento escolar. No entanto, ao falar em dialogia, pensamos que a autora não esteja se referindo a uma relação de mão dupla entre saber escolar e saber científico pois, de modo geral, as preocupações dos cientistas não advêm de preocupações ligadas ao ensino. Acreditamos que esteja se referindo ao que ocorre no âmbito da noosfera.

No sistema didático, em que o aluno é um dos componentes ao lado do professor e do saber, em que ocorre o que Chevallard chamou de transposição didática interna, as concepções que os alunos trazem do senso comum devem ser aproximadas do conhecimento

[21] LOPES, A. R. C. ***Conhecimento escolar: quando as ciências se transformam em disciplinas,*** tese de doutorado apresentada na UFRJ, 1996.

científico, por meio de rupturas, de construções e reconstruções, numa relação dialética, o que gera novos conhecimentos. Nesse sentido, Lopes aponta um aspecto paradoxal do papel da escola e, portanto, do conhecimento escolar: *o de produzir configurações cognitivas próprias e socializar o conhecimento cientifico*, pois, ao mesmo tempo em que a escola é um espaço de veiculação de conhecimento científico, transformado em conhecimento escolar, é também espaço de veiculação do saber cotidiano. Contudo, ao "consumir" saber, a escola produz novos objetos e ou novas significações, assim o processo de didatização não é uma mera adaptação do conhecimento produzido em outras esferas.

Para Macedo e Lopes (2002), há um consenso no campo do currículo de que o conhecimento escolar não é fruto apenas de critérios epistemológicos, mas também de uma complexidade de fatores, como os socioculturais, políticos e econômicos. Lopes (2000), partindo do pressuposto de que o conhecimento escolar tem uma constituição epistemológica e sócio-histórica diferente das disciplinas científicas, reafirma a rejeição da idéia de que as disciplinas escolares correspondam a uma mera didatização das ciências de referência.

Pensamos que, embora existam críticas à teoria da transposição didática de Chevallard, principalmente o considerar o saber sábio como única fonte do saber a ensinar, ao discutir uma disciplina, acadêmica ou escolar, essa ferramenta é indispensável, tanto no âmbito geral, o da noosfera, como nos sistemas de ensino ou no sistema didático. Cabe à escola o papel de transmitir conhecimentos que a humanidade acumulou, garantindo uma formação científica aos seus alunos, necessária ao desenvolvimento pleno do ser humano e ao desenvolvimento da própria sociedade, mas esses conhecimentos devem se tornar ensináveis, não apenas pela via da reprodução, mas pela via da re-construcão, da re-elaboração.

Neste trabalho, ouvindo elementos da noosfera e do sistema didático, consultando os programas das disciplinas acadêmicas, os livros didáticos que envolvem saberes da Teoria dos Números, analisando trabalhos produzidos sobre o ensino de tópicos dessa área, buscaremos levantar elementos que possam contribuir para uma "boa" transposição didática, ou seja, aquela que, além de tornar os saberes científicos ensináveis, torna-os significativos na formação do professor.

2.6 Os conhecimentos do professor e a transformação dos saberes segundo Shulman

Como a disciplina que estamos tomando como objeto de estudo se insere num currículo de formação de professores, é importante analisá-la na perspectiva dos conhecimentos dos professores. Com essa preocupação, tomaremos como referência o modelo proposto por Lee Shulman.

A contribuição de Shulman para esta pesquisa se situa no campo de dois modelos criados por ele - o do *conhecimento do professor* e o do *raciocínio e ação pedagógica*, em que a questão da transformação dos saberes é considerada essencial.

Em um artigo intitulado: *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching,* Shulman rebate a máxima de Bernard Shaw: *He who can, does. He who cannot, teaches* (Aquele que pode, faz. Aquele que não pode ensina), considerando-a um insulto à profissão docente. Sua argumentação estabelece o conhecimento do professor como elemento central para o exercício da profissão docente.

Faz críticas a políticas e avaliações padronizadas para professores nos EEUU, na década de 1970, que enfatizavam as capacidades para ensinar fundamentadas nas pesquisas sobre competências para tal, deixando em segundo plano os conteúdos. Eram pesquisas classificadas como "eficiência do ensino", estudos "processo-produto" que tinham como preocupação central o estudo do comportamento dos professores para identificar modelos de ensino que pudessem aumentar o desempenho dos alunos. Sobre essas pesquisas, afirma Shulman: *em sua necessária simplificação das complexidades do ensino na sala de aula, investigadores ignoraram um aspecto central da vida da sala de aula: a matéria de ensino.* (SHULMAN, 1986, p. 6). Continua questionando que ninguém perguntou como o conteúdo é transformado de conhecimento do professor para conteúdo de ensino. Ele e seus colegas se referiram a essa ausência de foco sobre o conteúdo de ensino nos paradigmas de pesquisa como o problema do "paradigma perdido".

Preocupados com questões tais como - De onde vêm as explicações dos professores? Como os professores decidem o que ensinar? Quais as representações utilizadas por eles no processo de ensino? Quais são as fontes do conhecimento do professor? Como o novo conhecimento é adquirido, o velho é revisitado e ambos combinados para constituir um novo conhecimento base? Como o professor transforma o seu conhecimento em conteúdo de ensino, para que o aluno possa compreendê-lo? - Shulman e seu grupo investem seus esforços num programa denominado *Knowledge Growth in Teaching.* A preocupação principal desse programa era verificar como o estudante recém-formado transformava o seu conhecimento em conhecimento a ser ensinado, ou seja, como ele empregava o seu domínio de conteúdo, para gerar novas explicações, representações. Esse trabalho, segundo o autor, não tinha a pretensão de denegrir a importância da compreensão pedagógica ou das habilidades para desenvolver o ensino, mas mostrar que o conhecimento do conteúdo é tão importante quanto a habilidade para ensinar.

Essa questão tratada por Shulman, no final da década de 1980, parece ser atual e oportuna, podendo se constituir num alerta, num momento em que, novamente, se observa uma ênfase nas competências para ensinar, como se pode observar nas diretrizes oficiais para a formação do professor.

A preocupação com o conhecimento do professor para ensinar encontra fundamentação nos trabalhos de Shulman e nos leva a pensar sobre a relação entre a formação especifica e a pedagógica no processo de formação do professor e a questionar: Deveriam ser elas tão disjuntas? As competências para ensinar existem independentes dos conteúdos que o professor e a escola têm por função colocar à disposição do aluno? Para dar significado a uma disciplina específica no curso de licenciatura, essas questões são fundamentais, pois trazem centralidade para o saber do professor com a finalidade de ensinar.

Na busca de uma estrutura teórica para explicar o domínio e as categorias do conhecimento do professor para ensinar, Shulman distingue: *o conhecimento do conteúdo de ensino* (ou conteúdo específico); *o conhecimento pedagógico do conteúdo; o conhecimento curricular.*[22]

O *conhecimento do conteúdo específico* refere-se ao conhecimento da matéria que o professor irá ensinar, por exemplo, a matemática na escola básica. Inclui não só o conhecimento e compreensão de fatos, conceitos, processos, procedimentos, mas também o conhecimento das estruturas próprias da área, tanto as *substantivas,* como as *sintáticas.* Shulman entende por estruturas *substantivas* os vários modos pelos quais os conceitos e princípios básicos são organizados, e por estruturas *sintáticas* os modos pelos quais o conhecimento é validado, constituindo-se num conjunto de regras que permitem dizer o que pode ser considerado verdadeiro e o que fere as regras e que, portanto, deve ser considerado falso.

[22] No original *content knowledge; pedagogical content knowledge; curricular knowledge.*

Assim, o professor deve ser capaz de não só dizer que alguma coisa é verdadeira, mas de explicar por que o é, estabelecendo relações com outras proposições. No caso específico da matemática, poderíamos dizer que o professor deve conhecer os modos pelos quais os conceitos e as proposições se organizam: de modo formal, a partir de conceitos e proposições primitivas, numa linguagem própria, ou de forma intuitiva, a partir da necessidade da resolução de problemas, ou de outras formas possíveis. O conhecimento do conteúdo deve lhe permitir saber o que é central e o que é periférico ao trabalhar com um dado assunto. Além disso, o professor precisa saber provar ou demonstrar a veracidade de uma afirmação para casos gerais, de acordo com métodos e instrumentos que são próprios para a validação do conhecimento matemático, por exemplo, através do método lógico dedutivo ou da indução matemática.

Esse domínio abrangente e profundo do conteúdo é fundamental para que o professor tenha autonomia intelectual, o que lhe permitirá fazer escolhas seguras do que irá ensinar, escolher representações adequadas, imprimir a sua marca pessoal no tratamento do conteúdo. Um professor que possui um domínio limitado do conteúdo que ensina tende, por exemplo, a reproduzir o que o livro didático traz, usando a mesma seqüência, os mesmos exemplos, as mesmas representações que o autor propõe. O conhecimento do conteúdo específico, embora seja imprescindível, não é suficiente para garantir o sucesso do ensino, assim Shulman apresenta o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que não nos parece uma categoria distinta, mas uma síntese, ou melhor, o resultado de uma transposição didática, embora ele não use essa terminologia.

O *conhecimento pedagógico do conteúdo*[23], segundo o autor, é o conteúdo compreendido e transformado para ser ensinado, indo além da matéria em si mesma. Nesta categoria, Shulman inclui para o ensino de tópicos específicos da matéria: *as mais úteis formas de representação daquelas idéias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações – em uma palavra, os modos de representação e formulação da matéria que a torna compreensível para os outros.* (Ibid., p. 9). Essas formas de representação poderiam vir das pesquisas ou da sabedoria da prática, aponta Shulman.

O conhecimento pedagógico do conteúdo deve incluir ainda a compreensão do que torna a aprendizagem de um tópico fácil ou difícil, o conhecimento de estratégias que

[23] O termo tem várias traduções: conhecimento pedagógico do conteúdo (MIZUKAMI, 2004; MOREIRA, 2004); conhecimento didático da matéria (FIORENTINI et al.,1988; MANRIQUE e ANDRÉ, 2006); conhecimento pedagógico do professor (PIETROPAOLO, 2005); saber pedagógico-disciplinar (STAJN, 2002).

permitem superar pré-concepções ou concepções errôneas a respeito de um assunto. Nesse ponto, ele vê uma proximidade entre pesquisa sobre aprendizagem e o ensino.

Podemos dizer que o conhecimento pedagógico do conteúdo supõe uma transformação dos conteúdos específicos para fins de ensino. É uma categoria que não prescinde das demais, mas que aponta para um caráter de originalidade, de individualidade, pois consiste na transformação de algo que se sabe, em algo que possa ser compreendido pelo outro, na sua individualidade, no seu contexto. No entanto, essa categoria de conhecimento nos conduz a alguns questionamentos: São os conhecimentos pedagógicos do conteúdo passíveis de serem construídos durante o processo de formação inicial do professor, mesmo sabendo que serão continuamente modificados durante o exercício profissional? Em caso afirmativo, em que espaços devem ocorrer? A sua construção deve ser uma preocupação das disciplinas de formação pedagógica ou específica, ou de ambas? Deve ocorrer apenas na Prática de Ensino e no Estágio? Em caso afirmativo, são esses espaços suficientes e adequados para que todos os temas que deverão ser ensinados sejam abordados nesta perspectiva? Esses conhecimentos não seriam uma forma de reduzir o fosso entre a formação e a prática da docência? São questões que, a nosso ver, precisam ser discutidas e supõem diálogo entre os formadores e entre estes e os professores da escola básica.

O terceiro tipo de conhecimento de base é o *curricular,* representado pelos programas desenhados para o ensino de assuntos e tópicos num dado nível, a variedade de materiais disponíveis e as orientações para a implementação das propostas de programas ou de materiais, em condições particulares. Shulman aborda a importância do conhecimento *lateral* do currículo, pois o professor, conhecendo o que os alunos estão estudando em outras matérias, poderá relacioná-las com a que está ensinando, além do conhecimento do currículo *vertical,* que corresponde ao que os estudantes trabalharam em anos anteriores ou irão trabalhar posteriormente.

Shulman inclui, ainda, outros conhecimentos, como das diferenças individuais, dos modos de organização da sala, da estrutura e funcionamento da escola, isto é, conhecimentos advindos de outros campos: da história e da filosofia da educação, da psicologia, da didática, os quais constituem o que chamamos formação pedagógica geral.

Ainda que esse modelo, que constitui a base para ensinar, formado pelos três tipos de conhecimentos apresentados por Shulman, seja limitado e não esgote o que é desejável e necessário para a complexa tarefa docente, pois sofre das limitações próprias de qualquer modelo, entendemos que ele traz elementos importantes para a discussão das licenciaturas.[24] Inicialmente, porque destaca a importância do domínio do conteúdo para o exercício da profissão docente, e, segundo, porque explicita essa dimensão do pedagógico acoplado ao conteúdo, defendida também por outros autores, como Chervel (1990), Lins (2003), pois, na ação docente, conteúdo e pedagogia não estão separados.

O outro modelo proposto por Shulman e colaboradores, o do *processo de raciocínio e de ação pedagógica,* visa explicitar momentos da preparação da ação pedagógica em que o professor passa de uma visão pessoal da matéria para uma proposta que possa promover a compreensão do outro. Esse processo se organiza em seis etapas, segundo eles: *compreensão, transformação, o ensino, a avaliação, a reflexão e uma nova compreensão.* Portanto não é um processo fechado, poderia ser pensado como algo que ocorre em espiral.

Duas dessas etapas merecem ser refletidas, quando se pensa a formação específica do professor: as fases de *compreensão* e de *transformação.* O professor precisa ter uma compreensão da matéria que ensina, isto é, o *conhecimento do conteúdo específico*, tanto dos conceitos, processos e procedimentos, como das estruturas *substantivas* e *sintáticas*, conforme abordado anteriormente. Compreender supõe ter a capacidade de "manejar" os conteúdos, traduzindo-os, interpretando-os, analisando-os, sintetizando-os, fazendo julgamentos, generalizando-os, demonstrando-os, selecionando-os, estabelecendo o que é central e o que é periférico, etc. Nesse sentido é que Shulman afirma que o conhecimento garante liberdade, flexibilidade para julgar alternativas, para raciocinar sobre meios e fins. (SHULMAN, 1986, p.13).

A *transformação* é a essência do raciocínio pedagógico e envolve, segundo os autores, quatro sub-processos: *a interpretação crítica* (dos manuais, dos programas, dos objetivos e de outros materiais); a *representação* (do conteúdo de diferentes formas: analogias, metáforas, exemplos, demonstrações, levando em conta os condicionantes do ensino, como o aluno, o contexto, o tempo); a *seleção* (das formas de atividades); a *adaptação às características do aluno* (idade, dificuldades, cultura, motivação, classe social). No nosso modo de compreender, é a transformação que permite o surgimento do conhecimento pedagógico do conteúdo, isto é, a imbricação do pedagógico no conteúdo.

Ao abordar a questão do conhecimento do professor e o processo de raciocínio pedagógico, Shulman resgata a figura do professor como alguém que compreende o conteúdo

[24] Sobre essa limitação do modelo de Shulman, ver FIORENTINI, SOUZA Jr , MELO, 1998, p. 315 – 319.

que ensina e que é capaz de transformá-lo para ensiná-lo a outrem, e conclui o artigo a que nos referimos no início, dizendo:

> Nós rejeitamos Mr. Shaw a sua calúnia. Com Aristóteles nós declaramos que o último teste de compreensão permanece na habilidade de transformar o seu conhecimento em ensino. Aquele que pode, faz. Aquele que compreende, ensina. (SHULMAN, 1986, p. 14)

2.7. À guisa de conclusão

Com base nos referenciais teóricos abordados anteriormente, alguns aspectos merecem ser ressaltados, como elementos direcionadores para pensar uma disciplina acadêmica num curso de formação de professores, como pretendemos fazê-lo no âmbito deste trabalho, em relação à Teoria dos Números.

Um dos aspectos a ser considerado é o de que os saberes profissionais dos professores, no sentido amplo, envolvem conhecimentos, competências, habilidades e atitudes, ou seja, trata-se de saber, de saber-fazer e de saber-ser. São plurais e heterogêneos, pois provêm de diversas fontes: da formação na universidade, da experiência profissional, da história de vida, por isso são também temporais e personalizados.

Shulman, no entanto, alerta-nos de que para ensinar é necessário compreender o que se sabe, para fazer com que o outro compreenda o que se quer que ele aprenda. Nesse movimento de busca de compreensão do saber, para ensinar, o saber cresce. Quantas vezes, ao preparar ou ao ministrar uma aula, o professor visualiza aspectos de um conceito, de um processo, de uma teoria, estabelece relações entre elementos, que antes estavam obscuros ou implícitos.

Assim, ainda que os saberes dos professores sejam plurais e que exijam uma interação complexa entre os saberes disciplinares, curriculares, das ciências da educação, da experiência, há um consenso de que os saberes específicos disciplinares são um componente importante da formação, embora não sejam suficientes, e a formação inicial, apenas, um momento desse processo de apropriação dos saberes. Nesse contexto é que situamos a nossa preocupação em compreender a Teoria dos Números, como uma disciplina acadêmica, um dos componentes da formação específica, cuja apropriação não se completa na formação, mas que pode ser enriquecida e complementada com a prática.

Outro aspecto a ser considerado é o de que a disciplina acadêmica, conforme caracterizada, não é cópia de um saber "sábio", embora possa estar mais próxima desse do que a disciplina escolar. A constituição de uma disciplina acadêmica deve levar em conta as finalidades educativas presentes no projeto de formação no qual está inserida. No caso da licenciatura em matemática, há uma finalidade clara, explicita, que é a de formar o professor, em especial, para a escola básica. Sendo assim, a disciplina tem uma função instrumental.

Além disso, não podemos nos esquecer de que, ao trabalhar com a matemática, a escola cria conhecimentos, coloca desafios, que não fazem parte da matemática cientifica, mas que o futuro professor deve conhecer. Nesse sentido, não pensamos em uma via de mão única, hierarquizada de saberes, em que as disciplinas escolares sejam cópias empobrecidas da disciplina acadêmica, mas em uma via de mão dupla, em que as disciplinas escolares com seus objetivos, conteúdos, abordagens pedagógicas estejam de alguma forma presentes no processo de formação.

Assim, apesar das críticas que se fazem a Chevallard, a questão da transposição didática é algo que não se pode negar, não só na constituição das disciplinas escolares como também na das disciplinas acadêmicas. O saber presente nas disciplinas, quer na escola, quer na universidade, não é mera adaptação do saber científico, mas uma criação didática, pois deve atender a objetivos de ensino. Trazer a centralidade para a discussão dos saberes e para os processos de transformação que eles sofrem para se tornarem ensináveis é uma contribuição importante de Chevallard.

Podemos dizer, ainda, que nesse aspecto há uma proximidade entre a teoria da transposição didática, no sentido estrito, aquela que ocorre na passagem do saber a ensinar para o saber ensinado, e a transformação dos saberes de que fala Shulman. Ao colocar essa etapa como a essência do raciocínio e da ação pedagógica, Shulman resgata a autonomia do papel do professor, a qual é muitas vezes limitada, quando se pensa na transposição didática *lato senso*, isto é, aquela que ocorre no âmbito da noosfera. A possibilidade da transformação dos saberes traz também um caráter dinâmico para a constituição da disciplina, especialmente no sistema didático, em que ocorre a relação professor-aluno-saber.

Ao procurar compreender a Teoria dos Números como uma disciplina a ensinar, na licenciatura em matemática, vamos aceitar que a transposição didática é inevitável e estaremos ouvindo membros da *noosfera,* pesquisadores da área, educadores matemáticos, e também professores que poderão explicitar como a Teoria dos Números é ou deveria ser constituída como um componente da formação específica do professor de matemática, pois os programas não são suficientes para que possamos compreender uma disciplina.

Outro aspecto que deverá se constituir em um referencial importante de análise é o apontado por Shulman – *o conhecimento pedagógico do conteúdo.* Esse componente dos saberes dos professores, o qual inclui formas de representação das idéias, dos conceitos, dos procedimentos, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações, visando tornar compreensível ao aluno o que se quer ensinar, deveria estar presente na definição e no desenvolvimento de uma disciplina específica num curso de formação de professores. Acreditamos que uma das causas do distanciamento da formação e da prática docente pode estar na negligência desse tipo de saber do professor, durante a formação, considerando que cabe ao professor construir esse conhecimento ao deixar a universidade e assumir o ensino.

Pensamos que o conhecimento pedagógico do conteúdo não se confunde com o saber experiencial. Ele pode crescer com a prática, mas não é fruto exclusivo dela. O saber experiencial, segundo Tardif (2002), é um saber que é adquirido, modelado, mobilizado na prática, na interação entre o professor e os demais atores educativos; é um saber sincrético e plural, pois advém de várias fontes de conhecimento; é um saber complexo, pois impregnado dos comportamentos, regras, concepções do ator; é personalizado; é temporal, evolutivo e dinâmico. Assim, esse tipo de saber é construído no exercício da profissão de professor, enquanto que o saber pedagógico do conteúdo pode ser alvo da formação inicial, podendo se enriquecer, ao incorporar esse saber experiencial, mas não se confundindo com ele. No entanto, permanece em aberto uma questão crucial: onde trabalhar o conhecimento pedagógico do conteúdo? Apenas nos estágios e nas práticas de ensino? Ou esse tipo de conhecimento cabe também nas disciplinas específicas?

CAPÍTULO 3

A TEORIA DOS NÚMEROS ENQUANTO SABER CIENTIFICO – ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

3.1 Introdução

O que é a Teoria dos Números, enquanto um saber científico? Essa pergunta é muito ambiciosa, em se tratando de uma área da matemática tão antiga e tão vasta. Poderia ser respondida, fazendo diferentes leituras, considerando, por exemplo, o seu desenvolvimento histórico, ou a natureza do objeto de que trata, ou, ainda, os métodos de criação e sistematização. Embora estejamos interessados na Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, considerações com relação a essa área da matemática se fazem necessárias, pois este saber científico é uma das fontes de constituição da disciplina acadêmica que queremos compreender.

Assim, faremos uma breve incursão na História da Matemática, com base principalmente em Boyer (1974) e Howard (2002), para buscar elementos que permitam a contextualização da Teoria dos Números em suas origens, o que certamente contribui para uma melhor compreensão desse campo, embora não seja nossa intenção fazer uma análise histórica do desenvolvimento da área.

Apresentaremos, ainda, neste capítulo, algumas questões ligadas às interfaces da Teoria dos Números com outras áreas da matemática, com base na literatura pesquisada.

3.2 Um sobrevôo histórico

O surgimento dos números naturais, devido à necessidade de contar, está nas raízes da história da Teoria dos Números e presente nas civilizações mais antigas. Assim, podemos observar que a matéria prima dessa importante área da matemática está posta desde épocas remotas, e o estudo das propriedades e das relações envolvendo os números inteiros foi sendo realizado, mesmo que ainda de modo não-formal e não-sistematizado, ao longo da história das civilizações.

Os povos egípcios e os babilônios buscaram formas de representar os números naturais e modos de operar com eles. Registraram relações, como se pôde observar na tábua Plimpton

322, escrita pelos babilônios por volta de 1900 a 1600 a.C. e descoberta recentemente. Nela estão registradas triplas de números, que mais tarde foram denominados números pitagóricos, pois satisfazem o teorema conhecido como de Pitágoras.[25] Essa tabela tem um importante significado na Teoria dos Números, pois os ternos pitagóricos primitivos são soluções para as equações do tipo $x^2 + y^2 = z^2$, mais tarde chamadas de equações diofantinas.

Foi na Grécia, no entanto, que o estudo dos inteiros positivos ganhou caráter mais formal, atrelado a um forte misticismo, em especial na escola pitagórica. A filosofia desta escola baseava-se no pressuposto de que a causa última das coisas são os números naturais. Isto levava conseqüentemente a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido da teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia. Os pitagóricos levaram ao extremo a admiração aos números, baseando neles a sua filosofia e seu modo de viver. O número *um*, diziam eles, é o gerador dos números, o número da razão; o *dois* é o primeiro número par ou feminino, o número da opinião; o *três,* o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia; o *quatro* é o número da justiça; o *cinco* é o número do casamento, união do masculino e do feminino; o *seis* é o número da criação; e o *dez* é o mais sagrado, pois representava a soma de todas as dimensões geométricas[26].

É importante considerar que, na Grécia, a palavra *número* se referia apenas aos números inteiros. Uma fração não era considerada número, mas uma razão entre dois números inteiros. Assim, a ênfase no número como instrumento de cálculo ou de aproximações de medidas era reduzida. A arte de calcular era chamada pelos gregos de *logística,* e o estudo das relações abstratas era chamado de *aritmética*, hoje conhecida como *teoria dos números* (COUTINHO, 2000, p.8). Deste modo, a aritmética passou a ser considerada uma disciplina intelectual e não apenas uma técnica.(BOYER, 1974, p.39).

Vários conceitos envolvendo números são atribuídos aos pitagóricos, por exemplo, o conceito de *números amigáveis,* ou seja, dois números são considerados amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores do outro, excluindo o próprio número, por exemplo, 220 e 284. Também os conceitos de números *perfeitos, deficientes e abundantes* são atribuídos a eles. Um número se diz *perfeito,* se é igual à soma de suas partes[27], por exemplo, 6. Um

[25] Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos.

[26] Um ponto gera as dimensões; dois pontos distintos determinam uma reta de dimensão um; três pontos não colineares determinam um triângulo com área de dimensão dois; quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro de dimensão três; a soma dos números que representam estas dimensões é dez. Assim 10 = 1 + 2 + 3 + 4 (Boyer, 1974, p. 39).

[27] BOYER, 1974, p. 84.

número é considerado *deficiente,* se excede a soma de seus divisores próprios, por exemplo, o número 15, e *abundante* se é menor que esta soma, por exemplo, o número 12.

Até 1952, só se conheciam doze números perfeitos, todos pares. A ultima proposição do nono livro dos *Elementos* de Euclides prova que se $2^n - 1$ *é um número primo, então* $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito. Os números perfeitos dados pela fórmula de Euclides são números pares, e Euler provou que todo número perfeito par tem essa forma. A existência ou não de números ímpares perfeitos é uma questão aberta em Teoria dos Números. Em 1952, com a ajuda de computadores, foram descobertos mais cinco números perfeitos, na fórmula de Euclides. Esses números correspondem a valores de n iguais a 521, 607, 1279, 2203, 2281. A partir dessa época, mais números perfeitos foram descobertos com a ajuda de computadores.

Muitos dos problemas da Teoria dos Números foram tratados por Euclides nos *Elementos*, em três dos treze livros. Os livros VII, VIII e IX, que têm no total cento e duas proposições, tratam do que poderia ser chamado de teoria elementar dos números. Neles encontram-se: a definição de número primo, o algoritmo, hoje denominado euclidiano que é um método para determinar o máximo divisor comum entre dois números, o estudo de números perfeitos, a demonstração de que há infinitos números primos, feita por absurdo e que ainda hoje é encontrada nos livros.

Outro matemático grego que deu contribuição significativa para a Teoria dos Números, foi Diofanto de Alexandria. Acredita-se que ele tenha vivido no século III de nossa era, teve uma importância enorme para o desenvolvimento da Álgebra e uma grande influência sobre os matemáticos que se dedicaram mais tarde à Teoria dos Números. Diofanto escreveu três trabalhos, sendo um deles *Arithmetica,* uma obra diferente das anteriormente publicadas, pois era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidades matemáticas. É uma abordagem da teoria algébrica dos números. Contém 130 problemas que levam a equações de primeiro e segundo graus e uma cúbica. Não há métodos gerais, mas resoluções engenhosas para problemas específicos. Diofanto só admitia respostas que fossem números racionais positivos, e satisfazia-se com, apenas, uma resposta do problema. Há, em sua obra, enunciados que mereceram a atenção de matemáticos, como Viète, Fermat, Lagrange e Euler. Os problemas algébricos indeterminados em que se devem achar soluções inteiras tornaram-se conhecidos como equações diofantinas. Porém, Diofanto não foi o primeiro a se preocupar com estes problemas, mas talvez tenha sido o primeiro a dar uma notação algébrica. Ele tinha notações para a incógnita, para potências da incógnita até a de expoente seis, para a subtração, para igualdade e para inversos. Foi um passo importante para avançar da álgebra retórica para a álgebra sincopada. Por isso é considerado o fundador da álgebra.

Embora a matemática continuasse a ser estudada em outras civilizações, nos séculos seguintes ao III d.C, somente a partir do século XVII, a Teoria dos Números ganhou novo impulso, em especial, com as contribuições de grandes nomes da matemática, como os de Fermat, Euler, Lagrange e Gauss.

Pierre Fermat (1601-1665), magistrado francês, não era matemático por profissão, no entanto marcou o despertar da Teoria dos Números, pois, após Diofanto, que havia trabalhado sobre os números racionais, foi o primeiro a se restringir ao domínio dos números inteiros, o que para ele constituía o que é próprio da aritmética. Tendo entrado em contato com uma tradução da obra *Arithmetica* de Diofanto, leu o texto, anotando nas margens as idéias que lhe ocorriam. Deste modo e também através de correspondências com outros matemáticos, Fermat enunciou muitos teoremas ligados à Teoria dos Números, contribuindo também em outras áreas da matemática. Investigou números perfeitos e amigáveis, números figurados, quadrados mágicos e, sobretudo, os números primos. A sua famosa conjectura: *Não existem inteiros positivos x, y, z, n de modo que* $x^n + y^n = z^n$, com $n>2$, conhecida como *o Último Teorema de Fermat*, desafiou matemáticos durante mais de três séculos, embora Fermat afirmasse que tinha uma demonstração para ela, mas a margem do papel era muito estreita para contê-la. A busca da prova para essa conjectura suscitou muitos conhecimentos novos em matemática (por exemplo, a teoria dos *ideais)*, tendo sido provada e publicada em 1995, por A. Wiles com a colaboração de R. Taylor.

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, altamente produtivo, também muito contribuiu para a Teoria dos Números, a partir do trabalho de Fermat, provando muitas das conjecturas por ele estabelecidas. Provou, por exemplo, o pequeno teorema de Fermat: P*ara todo número primo p e todo número a não divisível por p, tem-se* $a^{p-1} \equiv 1 (\text{módulo } p)$. Demonstrou também que todo número primo da forma 4n + 1 é a soma de dois quadrados, fez uma teoria dos divisores das expressões $a^n + b^n$ e demonstrou o teorema de Fermat para n = 3 e n = 4.

Joseph L.Lagrange (1736-1813), nascido em Turim, na Itália, grande matemático, deu contribuições importantes também à Teoria dos Números, provando que a equação Pell-Fermat, $x^2 - Ay^2 = 1$, tem infinitas soluções. Provou ainda que todo número inteiro positivo é a soma de, no máximo, quatro quadrados perfeitos, chamado o teorema de Lagrange dos quatro quadrados. Escreveu um livro sobre a Teoria dos Números em 1798.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), um dos matemáticos mais produtivos de todos os tempos, chamado o "Príncipe dos Matemáticos", publicou uma obra fundamental para a moderna Teoria dos Números, *Disquisitiones arithmeticae,* em que desenvolveu a álgebra da relação de congruência. Segundo Dahan-Dalmedico & Peiffer (1987), com essa obra a Teoria dos Números deixou de ser um conjunto de resultados isolados, produto de intuições e descobertas geniais, para se transformar em uma nova disciplina, dotada de métodos próprios, mais profundos, fonte e modelo para as teorias aritméticas do século XIX. Em 1825, Gauss introduziu os números inteiros gaussianos[28], uma extensão da idéia de número inteiro, *pois descobriu que muito da antiga teoria de Euclides sobre fatoração de inteiros poderia ser transportada para esse conjunto com conseqüências importantes para a Teoria dos Números*. (MENOCHI, 2006, p.1). Gauss afirmou "a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática", o que demonstra a sua preferência e apreciação desse campo.

A Teoria dos Números continuou a se desenvolver nos séculos XIX e XX com vários resultados importantes, ligados ao desenvolvimento de outros campos da matemática. No século XX, a prova do *Último Teorema de Fermat*, segundo Singh (2005), foi um marco para a Teoria dos Números, pois ligou as conquistas do campo desse século, incorporando-as em uma poderosa demonstração. *Ele* (Wiles) *criou técnicas matemáticas completamente novas e as combinou com técnicas tradicionais de um modo que nunca fora considerado possível.(...) a prova é a síntese perfeita da matemática moderna e uma inspiração para o futuro.* (SINGH, 2005, p. 282)

Essas considerações nos mostram que a Teoria dos Números tem raízes longínquas, mas é um campo novo, enquanto conhecimento sistematizado, em pleno desenvolvimento, com contribuições importantes para a matemática, ainda que muitos dos procedimentos exijam um conhecimento avançado de teorias, tecnologias e técnicas, como é o caso da demonstração do *Último Teorema de Fermat.*

3.3 Interfaces com outras áreas e implicações para o ensino

A Teoria dos Números tem interfaces e elementos de intersecção com outros campos da matemática, em especial com a Álgebra e com a Aritmética. Este fato tem trazido algumas interpretações indevidas no ensino. Tem justificado, inclusive, a ausência ou pouca ênfase

[28] Inteiros gaussianos são números complexos da forma $a + bi$, onde a e b são números inteiros e $i^2 = -1$

dada à Teoria dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino, não só no Brasil, como em outros países, conforme apontam Campbell e Zazkis (2002). Segundo esses pesquisadores, conteúdos de Teoria dos Números são incluídos nos cursos de Álgebra ou de Aritmética, em contextos menos formais, ou contextos do dia-a-dia, o que não lhes garante, muitas das vezes, uma posição de destaque e de importância nas propostas curriculares.

No Brasil, conjecturamos que a situação não tem sido diferente. Como os *currículos mínimos* de antes e as *diretrizes curriculares* de agora, indicam a Álgebra como matéria a ser ensinada nas licenciaturas, a ênfase é colocada em outros assuntos, como nas estruturas algébricas. Na escola básica, alguns temas de teoria elementar dos números, por uma falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos por não ter uma aplicação imediata.

Essas várias concepções desses ramos da matemática parecem ter raízes históricas. Segundo Boyer (1974), os gregos estabeleceram uma distinção clara entre a aritmética, entendida no sentido da teoria dos números, e a logística, considerada como a arte de calcular, estabelecendo, assim, uma separação entre os aspectos teóricos e computacionais. Para Platão, a logística deveria interessar aos comerciantes e guerreiros, enquanto os filósofos deveriam raciocinar sobre os números de forma abstrata. Como para os gregos, número significava números naturais, Aritmética e Teoria dos Números se confundiam. Isso parece ainda prevalecer para muitos.

Teoria dos Números e Aritmética em várias situações parecem ser equivalentes, em outras parecem ter particularidades próprias que não ficam muito claras. De acordo com o *Dictionnaire des mathèmatiques (1979)*[29], a Aritmética foi inicialmente limitada aos procedimentos de cálculo com os inteiros naturais, em seguida, passou a ter como alvo, as relações entre os números racionais e as operações entre eles. Teve a sua eficácia aumentada com a introdução do cálculo literal, abrindo caminho para os métodos algébricos. À medida que outras teorias de números foram desenvolvidas - números algébricos, transcendentes, números *p*-ádicos - uma aritmética foi a eles associada. Nesse sentido, a Aritmética parece estar ligada aos procedimentos de cálculo com os números.

No *Dictionnaire raisonné de mathèmatiques (1966)*[30], a Aritmética é definida como o estudo de dois conjuntos particularmente, *N* e *Z*, respectivamente conjunto dos números naturais e conjunto dos inteiros, incluindo também em alguns casos o conjunto *Q*, conjunto

[29] BOUVIA, A. et al. **Dictionnaire des mathèmatiques.** Universitaires de France. Paris, 1979.
[30] WARUSFEL, A. **Dictionnaire raisonné de mathèmatiques.** Paris: Editions du Seuil, 1966.

dos números racionais. Quando esse estudo deixa de ser elementar[31], a Aritmética passa a ser denominada Teoria dos Números. Segundo o autor, o conjunto fundamental, *N*, é o primeiro ser matemático conhecido sobre o qual se definem as operações de adição e de multiplicação, servindo, pois, de modelo para toda a Álgebra. A Aritmética estuda estas operações, suas características particulares e a divisibilidade; enquanto em Teoria dos Números intervêm problemas mais especializados de Matemática, tais como os envolvendo números primos. Teoria dos Números é um campo em que os enunciados são aparentemente simples, fáceis de serem enunciados e compreendidos, mas cujas demonstrações requerem muitas vezes engenhosidade. Assim, de acordo com esse dicionário, a Aritmética estuda as operações no conjunto dos inteiros, incluindo a divisibilidade, enquanto a Teoria dos Números tem como foco problemas mais específicos, envolvendo principalmente os números primos.

Assim, a Teoria dos Números, hoje um vasto campo da matemática, tem como objeto de estudo as propriedades dos números inteiros, sendo que alguns estudos em Teoria dos Números focalizam propriedades dos números racionais, dos reais e dos complexos que dependem diretamente das propriedades dos inteiros. Pode ser dividida, de acordo com os métodos que são usados e com as questões que são investigadas, em:

- Teoria Elementar dos Números: utiliza os métodos elementares da aritmética para a verificação e comprovação das propriedades essenciais do conjunto dos números inteiros e em particular as propriedades dos números primos;
- Teoria analítica dos números: utiliza a análise real e análise complexa, especialmente para estudar as propriedades dos números primos;
- Teoria algébrica dos números: utiliza álgebra abstrata e estuda os números algébricos;
- Teoria geométrica dos números; utiliza modelos geométricos, algébricos e analíticos.

(retirado de http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria _dos_n%C3%BAmeros). Acesso em 29/10/2006)

LeVeque (1968) e Campbell (2002) buscam definir a Teoria dos Números a partir da classificação dos problemas de que ela trata, embora alertem que as classificações feitas não são únicas e que as categorias não são disjuntas, podendo um mesmo problema ser considerado em mais de uma delas.

Para LeVeque, as questões em Teoria dos Números podem ser classificadas em três categorias. A primeira inclui os problemas multiplicativos que envolvem as propriedades da divisibilidade dos inteiros. É central o teorema fundamental da Aritmética ou teorema da fatoração única - que afirma que um número inteiro pode ser expresso de forma única,

[31] O significado de elementar não está explícito no texto, mas podemos inferir que está ligado aos métodos utilizados.

independentemente da ordem, como um produto de um ou mais números primos - tendo múltiplas e variadas aplicações. São questões incluídas nesta categoria: Quantos divisores têm um número natural *n*? Qual a relação entre *n* e o número de divisores de *n*?

A segunda categoria diz respeito aos problemas da teoria aditiva dos números, envolvendo aspectos da representação de um inteiro como uma soma de inteiros de uma classe especificada. Por exemplo, a representação de qualquer inteiro positivo como uma soma de quatro quadrados de inteiros não-negativos. Essa conjetura, que parece ter sido levantada por Diofanto, foi demonstrada por Fermat em 1636 e provada de modo mais geral por Hilbert, em 1909. A resolução de problemas de escrever um inteiro positivo como soma de quadrados tem sido objeto de estudo de grandes matemáticos, como Fermat, Euler, Lagrange e Gauss. No século XX, segundo Shokranian *et. al.* (1999), a resolução desses problemas sob um ponto de vista mais geométrico deu origem à teoria geométrica dos números. A conjectura de Goldbach, ainda não demonstrada, de que qualquer inteiro par maior que 4, é a soma de dois primos impares, é também um tipo de problema desta segunda categoria.

Na terceira classe, LeVeque inclui as equações diofantinas, as lineares, por exemplo, $ax + by = c$, cujas soluções inteiras podem ser calculadas, mediante determinadas condições, e as equações do tipo $x^n + y^n = z^n$ que não têm soluções inteiras, diferentes de zero, para $n > 2$, conforme provado recentemente.

A classificação feita por Campbell (2002) é semelhante à realizada anteriormente, desdobrando a última categoria em duas: a dos problemas lineares, baseados no *algoritmo da divisão* ou *algoritmo euclidiano,*considerado um dos teoremas fundamentais na Teoria dos Números, e a dos problemas, envolvendo equações não-lineares.

Há outros ramos da Teoria dos Números que constituem a Teoria dos Números Avançada, incluindo problemas e métodos de abordagens algébricos, geométricos e analíticos mais avançados, como a teoria das formas quadráticas, a teoria analítica dos números, a geometria dos números, dentre outras, conforme indica LeVeque.

Para Campbell (2002), a compreensão da Teoria dos Números em relação à Álgebra e à Aritmética envolve a questão da divisão, o que exige cuidados especiais no ensino-aprendizagem, principalmente a divisão com resto, a divisibilidade e a decomposição em fatores primos. A questão da divisibilidade, nos conjuntos numéricos (N, Z, Q e R), só faz sentido quando tratada sobre os inteiros. A divisão, no conjunto dos inteiros, é fundamentalmente diferente da divisão com números racionais e números reais, pois no conjunto dos inteiros o inverso multiplicativo nem sempre existe. Assim, a divisão com resto ou divisão euclidiana é uma questão fundamental que tem conseqüências importantes no estudo dos inteiros. Em outras palavras, o conjunto dos inteiros tem estrutura de *anel de integridade*, enquanto os números racionais e os reais têm uma estrutura de *corpo comutativo.*

Assim, a existência de inversos para todos os elementos (exceto para o zero na multiplicação) em uma estrutura de corpo comutativo permite que as operações de subtração e de divisão sejam respectivamente definidas a partir da adição e da multiplicação do seguinte modo: $x - y = y + (-x)$ e $y: x = y. (1/x)$. No conjunto dos inteiros, sem inversos multiplicativos, a divisão não pode ser definida e compreendida do mesmo modo.

Estas considerações têm implicações no ensino-aprendizagem, pois tratar os inteiros, simplesmente, como subconjuntos dos números reais, pode conduzir a simplificações que desprezam aspectos fundamentais, como os apresentados anteriormente. Segundo Campbell, pesquisas têm mostrado que dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão da Teoria dos Números têm raízes no pensamento da divisão com resto, pois este assunto não é tratado na escola básica como algo que é fundamental no conjunto dos inteiros.

Diante deste quadro, não muito claro, de interfaces entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números no ensino é que nos propusemos a verificar como a Teoria dos Números aparece nos cursos de licenciatura em matemática, considerando que a disciplina acadêmica que trata de temas ligados a este campo, na nossa concepção, tem origens nesse saber científico, embora a ele não se limite, pois inclui finalidades, métodos, abordagens, práticas, que supõem um processo de transposição didática e, no caso das licenciaturas, a consideração dos saberes veiculados na escola básica.

CAPÍTULO 4

A DISCIPLINA TEORIA DOS NÚMEROS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

4.1 Introdução

No capítulo 2, caracterizamos as disciplinas acadêmicas como um conjunto de conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática, incluindo finalidades, elementos pedagógicos e outros do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizado de modo a manter uma unidade cientifica e didática. Assim, as disciplinas acadêmicas da licenciatura em matemática são artefatos sociais que incorporam valores, finalidades, e não podem ser vistas como meras listas de conteúdos, organizadas lógica e cronologicamente, por esse motivo devem ser analisadas no contexto do projeto pedagógico do curso de matemática de cada instituição.

Nesse sentido é que pretendemos compreender a Teoria dos Números como saber a ensinar na formação do professor de matemática da escola básica, tendo como fonte os currículos propostos pelas instituições de ensino pesquisadas. Conforme anunciado na metodologia, realizamos um levantamento das propostas curriculares de disciplinas em que são tratados conteúdos de Teoria dos Números, constantes dos currículos de doze universidades brasileiras. O objetivo desta pesquisa documental aos currículos é verificar qual teoria dos números está sendo ensinada atualmente nos cursos de licenciatura em matemática, no Brasil.

No entanto, é preciso ponderar que a análise das disciplinas, a partir das propostas curriculares, tem os seus limites, pois a maioria dos currículos disponibilizados em catálogos eletrônicos ou impressos são “econômicos”, não apresentando todos os elementos importantes para a sua compreensão; e, também, considerar que a disciplina a ensinar será, ainda, reinterpretada, transformada, por um docente e por um grupo de estudantes que lhes dará vida própria dentro de um contexto pessoal e institucional, num processo de transposição didática interna.

4.2 Análise das propostas curriculares que tratam de Teoria dos Números por instituição

4.2.1 Na USP

Na **Universidade de São Paulo – USP**, o curso de licenciatura em matemática tem organização própria, independente da do bacharelado, e o objetivo apresentado na proposta pedagógica do curso é o de formar o professor de matemática para a segunda fase do ensino fundamental e para o ensino médio, como profissional da educação. Os conteúdos são organizados em grandes áreas, sendo uma delas a de Álgebra, assim descrita:

> **Álgebra -** Nesta área deve ser feito, de um ponto de vista abstrato, a teoria elementar dos números (aritmética) e as propriedades dos anéis de polinômios, bem como deve ser tratada a necessidade de ampliação do corpo dos reais e a introdução dos números complexos. Os objetivos fundamentais são a revisão crítica da álgebra elementar, o cuidado no trato do raciocínio lógico-algébrico e a contextualização histórica destes conteúdos.
>
> (Projeto Pedagógico, *http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/projeto_pedagogico.html.* Acesso em 29/07/2006)

A disciplina **Álgebra para licenciatura I** faz parte desta área e é ministrada, como obrigatória, no 3º semestre, no curso diurno, e no 5º semestre, no noturno, com 4 créditos, ou seja, 60 horas.

> **Objetivo**
>
> Familiarizar o estudante com problemas da teoria elementar de números e justificar a introdução de conceitos de álgebra abstrata.
>
> **Programa**
>
> Números inteiros: apresentação axiomática. Axioma de indução finita e princípio do menor inteiro. Aplicações. Divisibilidade: divisão inteira. Algoritmo de Euclides. MDC e MMC. Teorema Fundamental da Aritmética. Congruências. Equações diofantinas lineares. Teorema chinês do resto. Teorema de Fermat, Euler e Wilson. Inteiros módulo m. Números racionais e reais. Numeração decimal.
>
> **Bibliografia**
>
> GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
>
> MONTEIRO, J. *Elementos de Álgebra.* IMPA – Ed. Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1969.
>
> MILIES, F. C. P. e COELHO, S. P. *Números: uma introdução à matemática.* EDUSP, São Paulo, 2000.
>
> (*Universidade de São Paulo – Instituto de Matemática e Estatística – Catálogo de Graduação – 2003)*

Como o currículo da USP prevê o cumprimento de um determinado número de créditos em disciplinas optativas de aprofundamento, com o objetivo de propiciar um maior contato do aluno com alguma das áreas do currículo, a disciplina **Introdução à Teoria dos Números** é uma das cinco constantes do bloco de Álgebra, dentro do qual o aluno deverá escolher duas. Esta disciplina, com 4 créditos, também é optativa para o bacharelado em matemática.

Objetivo

Estudo da divisibilidade descritiva, números primos, equações diofantinas.

Conteúdo

Divisibilidade, decomposição em primos. Conseqüências. Lei de reciprocidade quadrática. Funções aritméticas. Algumas equações diofantinas.

Bibliografia

NIVEN, H. S. *An introduction to the Theory of Numbers*. 3rd. ed., John Wiley, New York, 1972.

Universidade de São Paulo – Instituto de Matemática e Estatística – Catálogo de Graduação – 2003)

O objetivo apresentado para a disciplina Álgebra para a licenciatura I é um objetivo geral que traduz a preocupação com problemas referentes à teoria elementar dos números, no entanto, não expressa realmente as finalidades desta disciplina no processo de formação do professor para a segunda fase do ensino fundamental e do ensino médio, embora ao descrever a área Álgebra estejam explícitos os objetivos de rever criticamente a álgebra elementar, o cuidado com o raciocínio lógico-algébrico e a contextualização histórica dos conteúdos. Como, muitas vezes, o professor de uma dada disciplina não se inteira do projeto pedagógico do curso, corre-se o risco de que, no desenvolvimento da disciplina, esses objetivos específicos da área não sejam norteadores do curso, ficando, assim, negligenciada a preocupação com a formação do professor e com a sua prática docente.

O foco dos conteúdos propostos está colocado no estudo dos inteiros, nos aspectos que os caracterizam: o princípio da boa ordem, a indução, a divisibilidade, embora haja um tópico que se refere aos racionais e aos reais.

Para os que quiserem se aprofundar no assunto, há a disciplina Introdução à Teoria dos Números, optativa, cujo objetivo traduz a preocupação em desenvolver o conteúdo, não deixando explícitas as finalidades desse estudo.

Outro aspecto a observar está relacionado à bibliografia. Na disciplina Álgebra para a licenciatura 1, são indicados três livros, sendo que dois deles não são mais editados e dois são de autores ligados à própria Instituição, o que aponta para uma endogenia. Para a disciplina Introdução à Teoria dos Números, há apenas uma indicação, de um livro em língua inglesa, da década de 1970. Embora esteja explícita na descrição da área Álgebra a preocupação com a contextualização histórica dos conteúdos, nenhum livro de história da matemática é indicado.

4.2.2 Na UFMG

Na **Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG,** o curso de matemática é oferecido nas modalidades de licenciatura e de bacharelado. O curso de licenciatura tem o objetivo de preparar profissionais para atuar nos ensinos fundamental, médio e superior, e o bacharelado habilita o aluno para trabalhar no magistério superior, bem como o prepara para prosseguir os estudos na pós-graduação nas diversas áreas afins. Há disciplinas que são comuns às duas modalidades e disciplinas que são específicas. Para a licenciatura, são específicas as disciplinas pedagógicas, e, para o bacharelado, as matérias de conteúdo matemático avançado.

Dentre as comuns, está a disciplina **Fundamentos de Álgebra Elementar, (**MAT 215), cursada no 4º período, no curso diurno, com uma carga horária de 60 horas. No curso noturno, a disciplina **Fundamentos de Álgebra (**MAT 028**)** é ministrada no 4º período, com uma carga horária de 90 horas. Os objetivos das disciplinas não foram apresentados.

A ementa, os programas e a bibliografia da disciplina Fundamentos de Álgebra Elementar estão a seguir:

Ementa: Números inteiros. Polinômios de uma variável sobre R e C.

Programa:

Números inteiros: os princípios de indução matemática e da boa ordenação. Divisibilidade e algoritmo da divisão. Sistemas de numeração. Números primos e o teorema fundamental da aritmética. MDC. Equações diofantinas lineares. MMC.
Polinômios sobre R e C: Definições e operações com polinômios. Divisibilidade e o algoritmo da divisão. Raízes de polinômios. MDC. Irredutibilidade e fatoração única. Irredutibilidade sobre R e C. O método das frações parciais.

Bibliografia básica

GRUPO DE ÁLGEBRA – UFMG. *Introdução à Teoria dos Números.* UFMG, 1988.

SHOCKLEY, J.E., *Introduction to Number Theory*

CHILDES, A. *Concrete Introduction to Higher Algebra*

BIRKHOFF *and* MACLANE, *A Survey of Modern Algebra*

JACY MONTEIRO, L.H. *Elementos de Álgebra.*

GRUPO DE ÁLGEBRA-UFMG. *Introdução ao Estudo dos Polinômios* – UFMG, 1988.

(*http:www.mat.ufmg.br/disciplinas.* Acesso em 01/08/2006)

No planejamento da disciplina Fundamentos de Álgebra, estão propostos:

Ementa: Teoria dos números: princípio da boa ordenação, números primos, fatoração e teorema fundamental da aritmética, congruências, divisibilidade. Polinômios : raízes, divisibilidade, polinômios irredutíveis, fatoração, MMC e MDC. Anéis.

Programa:

O Conjunto dos Naturais N: Princípio da Indução - Boa ordenação.

O Conjunto dos Inteiros Z: Lema de Euclides, múltiplos e divisores, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, MDC, MMC, critérios de divisibilidade por 3,4,5,7,8,9 e 11, o fundamento geral desses critérios e a representação dos naturais na base 10. Representação dos naturais em outras bases. Congruências.

Polinômios: O conjunto dos números reais e complexos enfatizando suas propriedades de corpo. Polinômios sobre Q, R e C. Raízes : Existência e as fórmulas para encontrá-las no caso de polinômios do 2^0, 3^0 e 4^0 graus. Lema de Euclides, divisibilidade, múltiplos e divisores, polinômios irredutíveis sem Q[x], R[x] e C[x] . Algoritmo de Briot-Ruffini. Fatoração em R[x] e C[x]. Teorema Fundamental da Álgebra. MDC e MMC de polinômios sobre Q, R e C. Raízes reais de polinômios sobre R.

Anéis: Exemplos e definição. Z, Q[x], R[x] e C[x] como exemplos de anéis euclidianos.

Bibliografia básica:

DOMINGUES, H. H., *Fundamentos da Aritmética* - Capítulos I, II e III - Atual Editora - São Paulo, 1991.

FERNANDES, A. M.V. e MAZZIEIRO, A. S., *Matemática* - vol. 3 Álgebra II - Geometria Plana II - Capítulos 1, 2, 3 e 4 - Programa de aperfeiçoamento de professores de Ciências e Matemática da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais. Belo Horizonte - MG.

IELZZI, G. e DOLCE, O., *Álgebra III* - Editora Moderna - 1973.

GRUPO DE ÁLGEBRA - Dep. de Matemática da UFMG. *Introdução ao Estudo dos Polinômios* - Belo Horizonte, 1988.

GRUPO DE ÁLGEBRA - Dep. de Matemática da UFMG. *Introdução à teoria dos números* - Belo Horizonte, 1988.

FRANK AYRES JR. - *Álgebra Moderna* - Mcgraw-Hill do Brasil, 1971.

(*http:www.mat.ufmg.br/disciplinas.* Acesso em 01/08/2006)

Como se pode observar, as disciplinas Fundamentos de Álgebra e Fundamentos de Álgebra Elementar parecem ter finalidades diferentes. A primeira visa atender à licenciatura e ao bacharelado, enquanto a segunda apenas à licenciatura. Esta constatação pode ser comprovada pela inclusão de alguns tópicos no programa da segunda, como os critérios de divisibilidade e as estruturas algébricas, corpos e anéis, além das diferenças observadas na indicação da bibliografia básica. A falta de explicitação dos objetivos nos leva a inferir que o que importa é definir uma lista de conteúdos, ou seja, ensinar matemática pela matemática, sem considerar o profissional que se quer formar. Os demais elementos, como os objetivos, que, dentro de nossa concepção, são partes integrantes da disciplina e norteadores do curso, ficam a cargo de quem vai ministrá-la.

Quanto aos conteúdos, em se tratando de um curso de fundamentos de álgebra, o foco não é apenas o estudo dos inteiros que parecem ser considerados “dados”, mas o estudo dos anéis dos inteiros e dos polinômios, abordando a questão da divisibilidade, dentre outros aspectos próprios de cada um deles. No caso do conjunto dos números inteiros, ainda são tratados o princípio da boa ordenação, o princípio da indução matemática, números primos, o teorema fundamental da aritmética e congruências, sendo que o tópico, equações diofantinas, aparece no programa de Fundamentos de Álgebra Elementar, mas não no de Fundamentos de Álgebra.

Quanto à bibliografia básica, no caso de Fundamentos de Álgebra Elementar estão indicadas duas apostilas do grupo de Álgebra da UFMG, da década de 1980, três livros em língua inglesa e o livro de Jacy Monteiro, que não mais é editado, o que confirma as observações feitas no caso da USP, a presença de endogenia. Na disciplina Fundamentos de Álgebra, voltada apenas para a licenciatura, estão citadas as duas apostilas da UFMG, uma delas contendo a parte referente ao estudo dos inteiros, o livro de Domingues, que não está disponível para venda; uma obra voltada para o estudo de polinômios, também usada no ensino médio, e um material preparado para a capacitação de professores. Deste modo, no que se refere à Teoria dos Números, a apostila parece ser a bibliografia básica para o aluno.

4.2.3 Na UNESP- Rio Claro

Na **Universidade Estadual Paulista – UNESP - Campus de Rio Claro**, o projeto pedagógico foi re-elaborado recentemente, tendo entrado em vigor em 2006. Partindo do pressuposto de que a intersecção entre a licenciatura e o bacharelado não é desprezível, é proposto um núcleo comum a ambos. Nesta proposta, considera-se que a questão da metodologia das disciplinas envolve os objetivos de cada curso, advertindo, entretanto, que a definição de objetivos muito específicos tem que ser vista com cuidado, pois podem não corresponder às perspectivas profissionais.

A licenciatura tem o objetivo de formar o professor para atuar nas escolas de ensino fundamental e médio, com competência, compromisso e liberdade, com a possibilidade de também ingressar em cursos de pós-graduação, enquanto o bacharelado visa preparar o aluno para a pós-graduação, onde vai completar a sua formação, indo posteriormente, na maioria dos casos, atuar na docência no 3º grau.

O projeto prevê que a construção da estrutura cognitiva seja o objeto das disciplinas de "conteúdo matemático", ressaltando que a metodologia tradicional não deva ser única no tratamento destes conteúdos, sendo recomendável que o aluno seja exposto a diferentes metodologias, como condição para a sua liberdade metodológica no exercício da docência, tanto na licenciatura como no bacharelado. Prevê, ainda, que as disciplinas de "conteúdo matemático" devam se ocupar do aprofundamento dos domínios discreto e contínuo, bem como dos aspectos de fusão destes domínios. Assim, a álgebra elementar é colocada como um conteúdo que deve ser de aprofundamento no domínio do discreto. Na perspectiva da fusão conceitual e operatória dos dois domínios, é proposta a construção do pensamento diferencial e a do pensamento algébrico.

O pensamento algébrico é descrito do seguinte modo:

> O pensamento algébrico constrói-se a partir da Geometria Analítica, prossegue com a Álgebra Linear e Multilinear, depois com outras estruturas algébricas (grupos, anéis, corpos) e tem um acabamento natural nas construções com régua e compasso, justificadas pela Teoria de Galois. (Reestruturação Curricular do Curso de Matemática – *http://www.rc.unesp.br/igce/matemática*. Acesso em 01/08/2006)

Segundo os elaboradores da proposta, para contornar o problema de insatisfação dos alunos em relação à desconexão entre as diversas disciplinas, os conteúdos foram agrupados em áreas que não são disjuntas. Na área de Álgebra, estão incluídos os seguintes conteúdos: Conjuntos, Funções, Álgebra Linear, Grupo, Anéis, Corpos, Teoria de Galois.

Neste contexto, a disciplina **Teoria dos Números** é obrigatória, tanto para a licenciatura como para o bacharelado, alocada no 5º semestre, com 60 horas. O objetivo, a ementa, os conteúdos e a bibliografia estão a seguir:

Ementa: divisibilidade, teorema fundamental da aritmética, restos quadráticos, equações diofantinas, teorema de Fermat

Objetivo: o conhecimento da aritmética dos números é um requisito essencial tanto para o futuro professor de matemática, como para o futuro pesquisador. Este curso procura cobrir aqueles assuntos usualmente associados à disciplina teoria dos números, sendo recomendado o curso de Estruturas Algébricas como requisito prévio.

Conteúdo programático

1.Divisibilidade;representação na base *a*; algoritmo de Euclides, MDC; MMC; Teorema fundamental da Aritmética; função maior inteiro

2.Congruências, resolução do teorema chinês do resto; raízes primitivas da unidade; a função de Euler.

3.Restos quadráticos, Lema de Gauss, Teorema Fundamental.

4.Equações diofantinas. O teorema de Fermat.

5.Noções sobre o problema de distribuição dos primos.

Bibliografia

GENTILE, E.R. *Aritmética Elemental*. Monografia OEA n. 25, 1986.

SIDKI, S. *Introdução a Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977

WEIL, A. *Number Theory for Beginners*. Berlim: Springer, 1978.

WEISS, E. *First Course in Álgebra in Number Theory*. Academic Press, New York, 1971

(*http://www.rc.unesp.br/igce/matemática*. Acesso em 01/08/2006))

Assim, a Teoria dos Números tem um espaço próprio neste currículo, embora no projeto pedagógico, ao se fazer referência ao desenvolvimento do pensamento algébrico, ela não tenha sido colocada, assim como também ao se separar os conteúdos em áreas, também ela não foi mencionada na área de álgebra e em nenhuma outra. O objetivo apresentado expressa uma justificativa mais do que as finalidades da disciplina na formação do professor ou do bacharel, não traduzindo, assim, como ela poderá contribuir para que o perfil do profissional descrito no projeto possa ser atingido.

Quanto ao conteúdo programático apresentado, são abordados assuntos usualmente associados à disciplina Teoria de Números, incluindo tópicos que vão além do que poderia ser tratado em um curso de teoria elementar dos números, exigindo, inclusive, como pré-requisito a disciplina Estruturas Algébricas. É importante destacar que, no projeto pedagógico do curso, há a preocupação de que tanto o aluno da licenciatura como o do bacharelado seja exposto a várias metodologias que, incluam outros valores, e não exposto apenas à metodologia tradicional utilizada nas disciplinas de "conteúdo matemático": exposições introdutórias, exercícios, livro texto, provas escritas, etc. No entanto, a proposta deixa claro que o objeto das disciplinas de conteúdo matemático é o desenvolvimento das *estruturas cognitivas,* não especificando outras preocupações, o que não deixa de ser limitador. Quanto à bibliografia, a única obra em língua portuguesa é a de Sidki, não mais editada. São obras das décadas de 1970 e uma da década de 1980.

4.2.4 Na UNICAMP

Na **Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,** o curso de licenciatura em matemática é ofertado no período noturno e no diurno, sendo que no diurno tem uma parte comum com o bacharelado. O curso de licenciatura visa à formação do professor de matemática para o ensino fundamental e médio, como também preparar o aluno para a pós-graduação em Educação Matemática, em Matemática ou em áreas afins.

No diurno, faz parte do currículo obrigatório a disciplina **Teoria Aritmética dos Números,** com uma carga horária de 60 horas, cujo objetivo não foi apresentado.

Programa

Números inteiros. Divisibilidade e congruências. Congruências e sistemas de grau um. Equações diofantinas. Somas de quatro quadrados. Congruências de grau dois. Símbolo de Legendre. Lei da Reciprocidade quadrática. Criptografia R.S.A.

Bibliografia

NIVEN, H. S. *An introduction to the Theory of Numbers*. 3rd. ed., John Wiley, New York, 1972.

COUTINHO, S.C., *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro, IMPA-SBM, 2000.

SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números.* Colecão Matemática Universitária, IMPA, 2003

(*http://www.unicamp.br/graduação.html/matematica.* Acesso em 02/08/2006)

No curso noturno, a disciplina é denominada **Teoria dos Números,** também com a carga horária de 60 horas, e tem como objetivo *o estudo de certos tópicos da T*eoria *dos Números, visando fortalecer os conceitos básicos que o aluno tem da aritmética elementar.*

Programa

Números inteiros, divisibilidade, números primos e congruências;
Sistemas completos e reduzidos dos restos;
Congruências de grau um; teorema de Bezout;
Teorema de Fermat, de Euler e aplicacões;
Sistemas lineares de congruências, teorema chinês dos restos, aplicacões;
Equacões diofantinas elementares, ternas de Pitágoras, a equacão diofantina $x^4+y^4=z^4$;
Representacão de números naturais como soma de quatro quadrados;
Congruências de grau dois, símbolo de Legendre;
Lei da reciprocidade quadrática e aplicacões.

Referências:

Texto básico: SANTOS, J. P, O., *Introducão à Teoria de Números*. Colecão Matemática Universitária, IMPA, 2003.

ANDREWS, G.E., *Number Theory*, Dover Publications, 1971.

COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*, Série Computacão e Matemática, IMPA, 1997.

KIM, S. Y. *An Elementary Proof of the Quadratic Reciprocity Law,* American Mathematical Monthly 111, January, 2004.

KOBLITZ, N. *A Course in Number Theory and Cryptography*, Springer-Verlag, 1987.

NIVEN, I., ZUCKERMAN, H. S. e MONTEGOMERY, H. L., *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5th edition, Wiley, 1991.

SERRE, J. P., *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, 1973.

VINOGRÁDOV, I. M., *Fundamentos de la Teoría de los Números*, Editorial MIR, 1977.

WEIL, A., *Number Theory for Beginners*, Springer-Verlag, 1979.

(*http://www.unicamp.br/graduação.html/matematica.* Acesso em 02/08/2006)

Embora as disciplinas tenham nomes e códigos diferentes, o conteúdo programático é praticamente o mesmo, incluindo os assuntos de um curso introdutório de Teoria dos Números, além de outros tópicos como a lei da reciprocidade quadrática e congruência de grau dois. É um programa extenso para um curso de 60 horas-aula. Somente para a primeira disciplina foi apresentado o objetivo, que não traduz nenhuma preocupação com a formação do professor, embora essa disciplina seja ministrada apenas para a licenciatura.

Quanto à bibliografia, o texto básico é o de Santos (2003), professor da própria instituição, além de um grande número de obras em língua estrangeira.

4.2.5 Na PUC-SP

O curso de licenciatura em matemática da **Pontifícia Universidade Católica de São Paulo** tem o seguinte objetivo descrito em seu projeto pedagógico, implantado em 2006:

> (...) o curso de Licenciatura tem como objetivo central a formação de professores de Matemática para atuar em diferentes níveis de ensino, visando a constituição de competências profissionais referentes ao comprometimento com os valores inspiradores da sociedade democrática, à compreensão do papel social da escola, ao domínio do conhecimento pedagógico, ao conhecimento de processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica, ao gerenciamento do próprio desenvolvimento profissional e relativas ao domínio dos conteúdos a serem socializados, de seus significados em diferentes contextos e de sua articulação interdisciplinar. (Projeto pedagógico do curso, p. 18)

Como podemos observar a partir do objetivo, o foco do curso de matemática da PUC-SP é a formação de professores para atuar em diferentes níveis de ensino, não se restringindo, portanto, à formação de professores para o ensino fundamental e médio. A formação está centrada no desenvolvimento de competências referentes: aos conteúdos matemáticos a serem socializados; ao comprometimento com os valores de uma sociedade democrática; à compreensão do papel social da escola e ao domínio do conhecimento pedagógico.

O projeto explicita que o desenvolvimento do conhecimento matemático visa aos aspectos substantivos[32] e aos sintáticos[33], assim como ao didático, o que define um direcionamento para a abordagem das chamadas disciplinas específicas. Estas foram agrupadas em um núcleo denominado *Núcleo de área,* cujo objetivo é oferecer os fundamentos teórico-epistemológicos que caracterizam o conhecimento matemático. Neste núcleo se inserem duas disciplinas que tratam de conteúdos relacionados à Teoria Elementar dos Números, denominadas *Aritmética e Álgebra* e *Teoria Elementar dos Números,* descritas a seguir:

Aritmética e Álgebra	
Semestre: 1º	**Período: 1º.**
Dimensão do componente curricular: CCNCC	**Carga horária: 68**
Núcleo responsável: NA	**Créditos: 4**
Ementa Um estudo dos Números Inteiros, nos campos da aritmética e da álgebra.	
Objetivo(s) geral(is) Compreender a interação entre aspectos intuitivos, algorítmicos e formais no estudo dos Números Inteiros, utilizando-os como contexto para desenvolver habilidades de conjecturar, argumentar e demonstrar.	
Objetivo(s) específico(s) Formalizar conceitos, definições e princípios construídos pelos alunos de forma intuitiva ao longo da Educação Básica, relativamente aos Números Inteiros.	
Temas Centrais: Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética.	
Bibliografia Básica DOMINGUES, H., Fundamentos da Aritmética, Ed. Atual, S. P., 1991. HEFEZ, A., Curso de Álgebra, Vol. I, IMPA, R. J., 1993. MILIES, C & COELHO, S. Números: uma introdução Matemática, EDUSP, S. P., 2001. SIDKI, S. Introdução à Teoria dos Números, IMPA, R. J., 1975 (Projeto pedagógico – p.80)	

Teoria Elementar dos Números	
Semestre: 2º	**Período: 2º.**
Dimensão do componente curricular: CCNCC	**Carga horária: 68**
Núcleo responsável: NA	**Créditos: 4**
Ementa Um estudo do Anel dos Números Inteiros e da Aritmética modular.	
Objetivo(s) geral(is) Construir conceitos e ferramentas para a Álgebra, desenvolvendo competências para utilizar e demonstrar teoremas, compreendendo procedimentos dedutivos e formais.	
Objetivo(s) específico(s) Construir noções básicas da teoria elementar dos números, aprofundando e ampliando conhecimentos algébricos para resolver problemas. Demonstrar propriedades e teoremas fundamentais da Teoria Elementar dos Números.	
Temas Centrais: Equações diofantinas lineares. Congruências lineares; o teorema Chinês do resto; Aritmética módulo m: congruência	

[32] Conhecimentos substantivos referem-se aos conceitos específicos, às definições, convenções, procedimentos.
[33] Conhecimentos sintáticos referem-se aos paradigmas de investigação da disciplina, aos critérios de validade, tendências e perspectivas.

módulo m, Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler e Teorema de Wilson; Inteiros módulo m. Elementos inversíveis e divisores de zero nos inteiros módulo m.
Bibliografia Básica DOMINGUES, H., Fundamentos da Aritmética, Ed. Atual, S. P., 1991. HEFEZ, A., Curso de Álgebra, Vol. I, IMPA, R. J., 1993. MILIES, C & COELHO, S. Números: uma introdução Matemática, EDUSP, S. P., 2001. SIDKI, S. Introdução à Teoria dos Números, IMPA, R. J., 1975 SHOKRANIAN, S. et al., Teoria dos Números, Ed. UNB. Brasília, 1998. (Projeto pedagógico, p. 89)

A disciplina *Aritmética e Álgebra,* ministrada no primeiro período, tem como foco o o estudo dos números inteiros, não apenas em seus aspectos formais como muitas vezes ocorre, mas também em seus aspectos algorítmicos e intuitivos, propondo fazer uma interação entre eles, além de buscar associar o conhecimento que o licenciando traz da escola básica sobre os temas com os novos conhecimentos. Percebe-se nessa proposta um avanço no sentido de tornar as disciplinas específicas significativas no processo de aprendizagem do aluno, na medida em que associa o conhecimento "novo" ao "antigo", como também se percebe uma oportunidade para reduzir a distância entre a formação e a prática docente. No entanto, é preciso ponderar que se trata do proposto e que a concretização dependerá do formador e das transposições didáticas que deverão ser realizadas. Embora a disciplina não tenha sido denominada também Teoria Elementar dos Números, entendemos que poderia ser inserida nesse campo, considerando os conteúdos, os objetivos e a bibliografia básica apresentados.

A disciplina ministrada no segundo semestre do curso dá continuidade aos temas tratados na disciplina *Aritmética e Álgebra*, com foco nos aspectos algébricos do anel dos inteiros e da aritmética modular, inclusive tendo a mesma bibliografia básica. É importante observar que dois dos livros indicados, o de Domingues e o de Sidki, encontram-se esgotados.

No conjunto, as duas disciplinas propostas abordam os temas e aspectos da Teoria Elementar dos Números, que poderiam ser considerados essenciais na formação do professor de matemática. Não há uma sobrecarga de conteúdos, considerando as cargas horárias propostas, o que pode permitir que as competências referentes ao conteúdo, ao conhecimento didático do conteúdo, possam ser trabalhadas.

4.2.6 Na UFSCar

Na **Universidade Federal de São Carlos – UFSCar,** o curso de licenciatura em matemática visa formar o professor para atuar no ensino fundamental (5ª a 8ª séries) e no ensino médio, bem como preparar o estudante para a pós-graduação em ensino de matemática ou em matemática, devendo, nesta última situação, cursar disciplinas do bacharelado. Algumas disciplinas são comuns à licenciatura e ao bacharelado, tanto disciplinas de "conteúdo matemático", como também as disciplinas Didática e Educação e Sociedade.

Os três princípios norteadores da proposta pedagógica do curso são: a noção de competência, a coerência entre a formação recebida e a prática profissional e a pesquisa. Dentre as competências a serem desenvolvidas, destacamos: conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação; compreender noções de axioma, conjectura, teorema, demonstração; explorar situações problema, levando o aluno a procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica; apreciar a estrutura abstrata que está presente na matemática; desenvolver a Arte de Investigar em Matemática, experimentando, formulando e demonstrando propriedades; compreender os processos de construção do conhecimento matemático.

A disciplina **Introdução à Teoria dos Números** é comum à licenciatura e ao bacharelado, ministrada no primeiro período, com uma carga horária de 60 horas.

Objetivos:

Estudar a Aritmética e sua relação com a cultura dos povos.
Compreender a relação desenvolvimento dos sistemas de numeração com o progresso cultural e científico.
Perceber a importância da presença da Aritmética nas escolas fundamental e média.
Flexibilizar o estudo tradicional da Aritmética e dos conceitos iniciais de Teoria dos Números, usando tanto os métodos da Álgebra quanto os da Matemática Discreta (algoritmos).
Dar oportunidade para o estudante adquirir confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas.
Vivenciar a Arte de Investigar em Matemática e em Teoria dos Números.
Propiciar a vivência da criatividade, iniciativa e trabalho coletivo.

Ementa:

História da Aritmética e da Teoria dos Números;
Sistemas de representações numéricas e operações aritméticas;
Divisibilidade, m.d.c e m.m.c;
Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética;
Equações diofantinas lineares;
Introdução às congruências e aplicações;
Algoritmos computacionais aplicados à Teoria dos Números.

Bibliografia

CURTON, D. M., *Elementary Number Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1980.

DOMINGUES, H.H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo, Editora Atual, 1991.

FIGUEIREDO, D. G., *Números Irracionais e Transcendentes*, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

GLASER, A., *History of Binary and other Nondecimal Numeration*, Tomash Publishers, USA, 1971.

IFRAH, G. *Os Números*. São Paulo, Editora Globo, 1989.

LIMA, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1987.

NIVEN, I., *Números: racionais e irracionais*, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática,Rio de Janeiro, 1984.

PATERLINI, R. R., *Curso de Aritmética para Licenciandos em Matemática.*, em preparo.

PLANTE, J. F., *Algebra,* University of North Carolina.

ROSEN, K. H., *Elementary Number Theory and its Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1986.

WEIL, A., *Number Theory for Beginners*, Springer Verlag, 1979.

Revistas de Ensino: Revista do Professor de Matemática, Arithmetic Teacher, Mathematics Teacher.

(*http: //www.dm.ufscar.br/cursos/grad/default.html)*

Analisando o planejamento da disciplina, podemos perceber uma forte identidade e coerência entre este e o que é proposto no projeto pedagógico do curso. Os objetivos expressam a preocupação com a formação do professor de matemática, colocando o estudo da aritmética como um meio para o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades importantes neste processo. Há uma preocupação com a abordagem histórica, com o vivenciar a arte de investigar, com o desenvolvimento da criatividade, da confiança pessoal e da iniciativa, com o trabalho coletivo, com a prática docente futura. Deste modo, os objetivos não dizem respeito apenas à construção do conhecimento de elementos de Teoria dos Números, enfatizando um único tipo de abordagem, mas incluem o desenvolvimento de habilidades e atitudes que o trabalho com estes conteúdos pode propiciar.

Os temas propostos cobrem aquilo que é essencial num curso introdutório de Teoria dos Números, pois, certamente, a diversificação de abordagens exige uma seleção de conteúdos mais criteriosa, que considere outros aspectos, que não apenas aqueles ligados aos próprios conteúdos.

A bibliografia inclui uma grande quantidade de livros estrangeiros, em língua inglesa, mas é mais diversificada, pois inclui livros de história dos números, revistas dedicadas ao ensino e cita uma obra, em preparo, específica para os licenciandos.

No planejamento da disciplina, há também a indicação de alguns temas para o desenvolvimento do projeto de pesquisa:

Propostas de temas para projetos de pesquisas

Sistemas de numeração de tribos brasileiras; Sistemas de numeração de tribos primitivas; Sistema de numeração dos antigos gregos; Sistema de numeração dos maias; Sistema de numeração de povos africanos; O problema de representar grandes números e seu uso nas civilizações históricas; História do sistema de numeração hindu-arábico; História dos sistemas de numeração posicionais; Sistemas de medida em desuso; História das frações; História do ábaco (exceto o ábaco japonês); O ábaco japonês; História das máquinas de calcular (mecânicas e digitais); Jogos aritméticos e seu uso no ensino; Estratégias para o cálculo aritmético mental e seu uso no ensino; Estratégias para o cálculo aritmético aproximado e seu uso no cotidiano; A aritmética usada pelos computadores; Como usar uma calculadora digital para o ensino da aritmética; Métodos diversos para adicionar e subtrair; Métodos diversos para multiplicar e dividir; A presença do número em nossa sociedade: como ele aparece na mídia; As constantes matemáticas; As constantes físicas; Número e Arte; Como os analfabetos lidam com números (entrevistas); Histórias sobre números; Uma peça teatral sobre números; Teorias sobre a construção psicológica do número; Números e misticismo; Paul Erdös e os números; Ramanujam e os números; C. Aitken e os números; O computador e os números. (Plano de ensino da disciplina)

Os temas apresentados para os trabalhos de pesquisa revelam mais uma vez a preocupação com a formação do professor, pois podem conduzir à ampliação do conhecimento do licenciando de temas que ele deverá tratar na escola básica, além de possibilitar o desenvolvimento de outras habilidades e atitudes, colocadas como objetivos da disciplina.

4.2.7 Na UnB

Na **Universidade de Brasília – UnB,** o curso de licenciatura em matemática visa formar o professor de matemática de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental e do Ensino Médio com uma visão geral de matemática, tendo desenvolvido experiências e estratégias metodológicas alternativas para aplicar ao longo de sua carreira. Algumas disciplinas da licenciatura são comuns ao bacharelado, como é o caso da disciplina **Teoria dos Números**, ofertada no quarto período da licenciatura e no sexto do bacharelado.

Os objetivos da disciplina não são explicitados, mas os outros elementos, os conteúdos e a bibliografia apresentados nos permitem inferir que a disciplina visa garantir a visão geral de matemática, anunciada no objetivo do curso.

Ementa:

Representação posicional dos inteiros. O teorema fundamental da aritmética. Problemas sobre os números primos. Congruências. O teorema Euler-Fermat. Estrutura do anel Z_m e suas unidades. Reciprocidade quadrática. Testar se um numero é primo. Equações diofantinas. A equação de Fermat. O problema de Waring.

Conteúdo:

- Disibilidade: representação posicional dos inteiros, gênesis dos sistemas decimal, o máximo divisor comum, o algoritmo euclideano, o teorema fundamental da aritmética, o crivo de Erastothenes, a função do maior inteiro. Problemas sobre primos: a distribuição dos primos, a conjectura de Goldbach, fatoração em extensões quadráticas dos inteiros, congruências, teorema de Wilson e Euler-Fermat, resolução de congruências, o teorema do resto chinês, congruências lineares e quadráticas, a função de Euler, estrutura do anel dos inteiros módulo m, estrutura do grupo C(M) das unidades de Zm, teoremas de decomposição para grupos comutativos finitos, expansão decimal de m*/n*, o problema dos elementos primitivos , infinitude dos primos da forma $a^n +1$, reciprocidade quadrática, o lema de Gauss, o teorema da reciprocidade quadrática, testar se n é primo.
Equações diofantinas: equações de Fermat $x^n+y^n = z^n$, n = 2, 4; o problema de Waring, o teorema de Euler-Lagrange, outros tópicos.

Bibliografia

NIVEN, H. S. *An introduction to the Theory of Numbers*. 3rd. ed., John Wiley, New York, 1972.
CURTON, D. M., *Elementary Number Theory*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1980.
SIDKI, S. *Introdução a Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977

(http//www.unb.br/deg/daa/ementa/113115.html. Acesso em *8/7/2005)*

É um curso extenso e abrangente, com uma carga horária de 90 horas, incluindo vários tópicos que não aparecem nos programas dos cursos de outras instituições, como a estrutura do anel dos inteiros, teoremas de decomposição para grupos comutativos finitos, a expansão decimal de m/n, reciprocidade quadrática, equações diofantinas não lineares. Ao incluir tantos tópicos, certamente considerados importantes num curso de introdução à Teoria dos Números, que tem por objetivo dar uma visão geral da área, podemos inferir que abordagens e mesmo conteúdos e questões referentes ao ensino dos inteiros com as quais o professor da escola básica irá se defrontar estarão ausentes. Esta hipótese se confirma pela bibliografia indicada, em que dois dos livros indicados estão em língua inglesa, publicados nas décadas de 1970 e 80.

4.2.8 Na UFRJ

Na **Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ,** a licenciatura em matemática é um dos cursos oferecidos pelo Instituto de Matemática, com uma estrutura curricular independente da dos cursos de bacharelado, e tem como objetivo:

> (...) oferecer às instituições de formação básica, licenciados em matemática com sólida formação matemática e conhecimento da dimensão cultural, social, política e econômica da educação. Portanto, o licenciado deve estar ciente da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos, ter visão de seu papel social de educador com capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos alunos, ter consciência de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos e estar ciente de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.
> (*http://www.im.ufrj.br/licenciatura)*

Na proposta curricular, algumas disciplinas não têm os nomes convencionais, como as disciplinas *Números* e *Polinômios.* As atividades desenvolvidas no curso são divididas em grupos. Um deles é o de estudos avançados em matemática, cujo objetivo é propiciar uma formação sólida de matemática ao licenciando. Neste grupo, estão o Cálculo, a Análise, a Álgebra Linear, Álgebra e Estruturas Algébricas, Geometria Euclidiana e não Euclidianas. Um outro grupo é constituído pelas disciplinas de Fundamentos da Aritmética e Álgebra, das Funções e Conjuntos e da Geometria, cujo objetivo é propiciar ao futuro professor a capacidade de análise crítica de material didático e a habilidade de criar formas de introdução de conceitos matemáticos para seus alunos. Há ainda outros grupos, como o de disciplinas afins e o de pedagógicas.

Neste cenário, faz parte do currículo a disciplina **Os Números,** que trata dos inteiros e dos racionais, não explicitamente enquadrada nos grupos de atividades anteriores, alocada no segundo período do curso, com uma carga horária de 60 horas,

Ementa Números inteiros; propriedades algébricas da adição e da multiplicação de inteiros; algoritmo da divisão, máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum; algoritmo euclidiano; equações diofantinas; teorema da fatoração única. Aritmética modular: o conjunto dos inteiros módulo *n*, pequeno teorema de Fermat, a função de Euler, aplicações. Os números racionais: construção dos racionais a partir de Z, operações com números racionais.

Embora não estejam disponíveis no *site* da UFRJ outros elementos, como objetivos e bibliografia, podemos observar que a disciplina contém tópicos de teoria elementar dos números, importantes na formação dos professores do ensino básico, como também elementos que lhes possibilitarão avançar no conhecimento matemático. Por esse motivo, supomos que a disciplina esteja na intersecção dos dois grupos apresentados acima. O título da disciplina, sem o acesso à ementa, parece vago. No entanto, valoriza a abordagem do tema Números na licenciatura. Dentre os conteúdos propostos, há um específico para o tratamento dos inteiros, o que pode sugerir, dependendo da abordagem, uma discussão de questões ligadas a eles, para que não pareçam "dados". A bibliografia não estava disponível no *site*.

4.2.9 Na UFSC

Na **Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC,** o objetivo do curso de licenciatura em matemática é formar um professor crítico, seguro e criativo, capaz de relacionar e integrar os assuntos em temas mais amplos e capaz de responder às necessidades dos alunos da escola básica. Tem uma proposta curricular diferente da apresentada para o bacharelado em matemática e computação científica, cujo objetivo é formar profissionais para as empresas, preparar o aluno para a pós-graduação, para a pesquisa e para o ensino superior.

A disciplina **Fundamentos de Matemática 1** é ministrada na fase 01 do curso de licenciatura, tanto no curso noturno, como no diurno, com uma carga horária de 90 horas-aula, e nela são tratados temas de teoria elementar dos números, como se pode ver abaixo:

Ementa:

Números Naturais e Inteiros. Números Racionais. Polinômios. História da Matemática relacionada com o conteúdo.

Objetivos:

1. Ampliar os conhecimentos a respeito de sistemas numéricos.
2. Explicitar situações do cotidiano que podem ser modeladas na linguagem de números e de polinômios.
3. Organizar, comparar e aplicar os conhecimentos adquiridos.
4. Desenvolver o senso crítico em relação a textos sobre o conteúdo.
5. Adquirir informações sobre o contexto histórico no qual os conhecimentos matemáticos se produziram.

Conteúdo

1. **Números Naturais**: 1.1) Sistema de números naturais: contagem; 1.2) Múltiplos; 1.3) Algoritmo da divisão; 1.4) Máximo divisor comum; 1.5) Mínimo múltiplo comum; 1.6) Números primos: motivação histórica de Euclides; divisibilidade de produtos naturais por primos. 1.7) Fatoração: teorema fundamental da aritmética e aplicações: MDC e MMC e números de divisores; 1.8) Números primos entre si: fórmula função de Euler. 1.9) Bases de sistemas de numeração: motivação histórica; 1.10) Critérios de divisibilidade; 1.11) Princípios de Indução.

2**. Números Inteiros**: 2.1) Números Inteiros: necessidade, contagem regressiva; 2.2) Valor absoluto; função sinal; 2.3) Extensão das definições anteriores aos números inteiros; 2.4) Congruências

3. **Números Racionais**: 3.1. Números Racionais: necessidade; solução de equações do tipo ax=b com a e b inteiros; 3.2. Notação histórica; forma irredutível; 3.3. Aritmética dos racionais; 3.4. Notação decimal e limite da soma de uma progressão geométrica; dízimas periódicas; 3.5. Aritmética dos racionais em notação decimal; 3.6. Decomposição de racionais em frações simples; 3.7. Comparação de racionais. Densidade; 3.8. Números irracionais.
4**. Polinômios:** 4.1. Apresentação de situações práticas que levam à idéia de polinômio; 4.2. Função polinomial; 4.3. Aritmética de polinômios; 4.4. Grau de polinômio; 4.5. Algoritmo da divisão; 4.6. Teorema de Bezout. Raízes de polinômios; 4.7. Relação entre coeficientes e raízes; 4.8. Produtos notáveis; 4.9. Representação de um número em notação posicional arbitrária; 4.10. Motivação.

Bibliografia

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética.*

BAUMGART, J. K. *Álgebra*

NIVEN, I. *Números: racionais e irracionais*

GUNDLACH, B. H. *Números e numerais.*

DAVIS, H.T. *Computação.*

http: //www.mtm.ufsc.br/ensino/programas/5210.htm . Acesso em 05/08/2006

Ao analisarmos os objetivos da disciplina Fundamentos de Matemática 1, observamos que há uma preocupação com a formação de professores, pois estes não traduzem apenas intenções relacionadas ao desenvolvimento do conteúdo matemático. Coerente com os objetivos gerais do curso, nesta disciplina busca-se a contextualização dos conteúdos na história da matemática e no cotidiano, o desenvolvimento da capacidade crítica em relação aos textos sobre os conteúdos, a organização e aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Embora nesta disciplina não seja tratado apenas o estudo dos números inteiros, mas também o dos racionais e o dos polinômios, os principais tópicos de teoria elementar dos números aí estão incluídos, sendo abordado inicialmente o conjunto dos números naturais: a contagem, algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos, teorema fundamental da aritmética, critérios de divisibilidade, indução. Na segunda unidade, esses tópicos são estendidos para o conjunto dos números inteiros, incluindo noções de congruências.

Quanto à bibliografia, o livro indicado para o estudo dos naturais e dos inteiros é o de Domingues, que se encontra esgotado.

4.2.10 Na UFSM

Na **Universidade Federal de Santa Maria - UFSM,** o curso de licenciatura em matemática tem o objetivo geral de formar profissionais competentes para atuar no Ensino Fundamental e Médio em matemática e na pesquisa na área de ensino de matemática. Tem os seguintes objetivos específicos:

Proporcionar ao licenciado uma visão da evolução histórica dos conceitos matemáticos, sua relação com as demais áreas do conhecimento e importância para o ensino.
Proporcionar ao licenciado uma formação sólida de conteúdos matemáticos.
Proporcionar ao licenciado, meios para elaborar e organizar programas de conteúdos em Matemática.
Propiciar ao licenciado, meios para analisar e selecionar criticamente textos de cunho matemático e redigir formas alternativas para os mesmos.
Propiciar ao licenciado, meios para elaborar, selecionar e organizar material didático para o ensino da Matemática.
Formar profissionais conscientes de sua responsabilidade como formadores de opinião.
(http://www.ufsm/matematica. Acesso em 07/08/2006)

A UFSM oferece também o bacharelado em matemática com o objetivo de formar profissionais para a pesquisa na área e para o magistério em nível superior. A licenciatura e o bacharelado têm algumas disciplinas comuns, dentre elas **Álgebra 1**, ministrada no segundo período, com 60 horas-aula.

Objetivo
Identificar os axiomas e usá-los nas demonstrações de propriedades dos números inteiros. Relacionar as propriedades de lógica e aplicá-las nas demonstrações de teoremas.

Ementa
Noções elementares de lógica, relações, números inteiros

Programa
1.Noções elementares de lógica: proposições e operações; equivalência lógica e implicação lógica; proposições associadas a uma condicional; sentenças abertas e quantificadores.
2. Relações: conjuntos; produto cartesiano; relações entre conjuntos; relações de equivalência, relações de ordem; aplicações.

3. Números inteiros: construção axiomática dos inteiros, divisibilidade, Algoritmo de Euclides, números primos, teorema fundamental da aritmética, congruência, equações diofantinas lineares, teorema chinês do resto.

Bibliografia

HEFEZ, A. *Curso de álgebra*. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

MILIES, C. P. & COELHO, S. *Números uma introdução à matemática*. EDUSP, São Paulo, 2000.

SANTOS, J. P. O. *Introdução à teoria dos números*. Colecão Matemática Universitária, IMPA, 2003

SHOKRANIAN, S. et alli, *Teoria dos Números*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

SIDKI, S. *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

(http: //drosophila.si.ufsm.br/ementario/disciplina.jsp?codigo=MTM176) . Acesso em *8/7/2005*

Trata-se de uma disciplina de introdução à álgebra, em que uma das unidades aborda o conjunto dos números inteiros, abrangendo tópicos referentes à construção dos inteiros, à divisibilidade, números primos e teorema fundamental da aritmética, congruência e equações diofantinas lineares. Embora não seja uma disciplina específica de Teoria dos Números, pela bibliografia indicada, pelos objetivos apresentados e pelos conteúdos propostos nas outras unidades, podemos deduzir que a ênfase seja nos aspectos referentes aos inteiros.

Os objetivos estão relacionados ao domínio dos conteúdos, sem traduzir aspectos direcionados à formação do professor, conforme prevêem os objetivos específicos apresentados na proposta do curso. Quanto à bibliografia, os livros, com exceção ao de Sidki, estão dentre os mais atuais, publicados no Brasil.

4.2.11 Na UFPE

Na **Universidade Federal de Pernambuco - UFPE,** o curso de licenciatura em matemática tem o objetivo de formar profissionais da educação com formação matemática e pedagógica para atuar nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. A instituição oferece também o bacharelado em matemática, com outra estrutura curricular, com o objetivo de formar o professor para atuar no nível superior e o pesquisador em matemática e em áreas que utilizem o conhecimento matemático.

Não há no currículo obrigatório uma disciplina específica de Teoria dos Números. Tópicos da área são tratados em **Estruturas Algébricas 1,** disciplina ofertada com 90 horas-aula.

Conteúdo programático

Linguagem e notação de conjuntos. Propriedades dos inteiros e racionais (indução, algoritmo da divisão, sistemas de numeração, construção dos racionais). Álgebra dos inteiros (divisibilidade, ideais e fatoração). Aritmética dos inteiros (primos, equações diofantinas lineares e de Pitágoras). Congruências (o anel de classes modulo m, a função de Euler, congruências lineares). Anéis, homomorfismos, ideais, anel quociente. Construção de extensões finitas de Q. os inteiros de Gauss e aplicações. Outros tópicos: a construção do corpo dos reais via seqüência de Cauchy. O corpo dos números complexos.

Referência Bibliográfica

HEFEZ, A. Curso de álgebra 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.
(*http://www.ufpe.br/cursos_grad.html.* Acesso em 07/08/2006)

Como podemos observar, pelo conteúdo programático proposto que coincide exatamente com os conteúdos tratados no livro texto indicado, o foco são as estruturas algébricas, ainda que grande parte dos tópicos se refira à álgebra dos inteiros e à aritmética dos inteiros. Nestes são abordados os conteúdos que podem ser considerados o núcleo de um curso introdutório à Teoria dos Números para a graduação. Os objetivos da disciplina não são apresentados, o que dificulta ter clareza da sua contribuição na formação do professor, embora possamos inferir, inclusive pela abordagem da única referência bibliográfica, que seja uma disciplina que visa desenvolver o conteúdo matemático, sem a preocupação de uma relação com a prática docente futura do licenciado.

É proposta como eletiva uma disciplina intitulada **Teoria dos Números,** que dá prosseguimento ao abordado na disciplina descrita anteriormente, tratando da infinitude dos primos, da reciprocidade quadrática e de equações diofantinas.

4.2.12 Na UFBA

Na **Universidade Federal da Bahia - UFBA,** as propostas de reestruturação dos cursos de licenciatura e de bacharelado foram aprovadas recentemente, em 12 de julho de 2006. Os dois cursos têm um grupo de disciplinas comuns obrigatórias, dentre elas a disciplina **Introdução à Teoria dos Números,** com uma carga horária de 68 horas-aula, ministrada no segundo semestre do curso.

Objetivo geral

Desenvolver a capacidade de compreensão e utilização hipotético-dedutiva de estruturas e objetos definidos por um conjunto de axiomas. Desenvolver a capacidade de compreensão da noção de número e suas propriedades aritméticas.

Habilidades e competências

O aluno deverá ser capaz de: demonstrar e utilizar as propriedades aritméticas básicas de números inteiros; calcular MDC por meio do método das divisões sucessivas; compreender e utilizar a relação fundamental entre MMC e MDC de números inteiros; compreender a noção de congruência e sua utilização para obtenção de critérios de divisibilidade; compreender e utilizar o princípio de indução finita; demonstrar e utilizar as propriedades aritméticas básicas de números racionais, números reais e números complexos.

Ementa

Conjunto dos números naturais, ordem, princípio de indução, conjunto dos números inteiros, Teorema Fundamental da Aritmética, algoritmo de Euclides, bases e representação numérica, congruência e o princípio da casa dos pombos, critérios de divisibilidade, equações diofantinas e o Teorema Chinês dos restos. Números perfeitos, de Fibonacci, de Fermat e de Mersenne. Criptografia RSA.

Conteúdo programático

1. Números naturais:
1.1 Números naturais como cardinais de conjuntos finitos; 1.1.1 Operações aritméticas. 1.2 Axiomas de Peano. 1.3 Relação de ordem. 1.4 Princípio do menor elemento. 1.5 Representação numérica dos números naturais: o sistema romano, o sistema babilônico, o sistema egípcio, o sistema decimal.

2. Números inteiros
2.1 A construção de Dedekind. 2.2 Princípio do menor inteiro. 2.3 Princípio da indução. 2.4 Ordem. 2.5 Operações aritméticas e propriedades básicas: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. 2.6 Divisores e números primos. 2.7 Algoritmo da divisão euclidiana. 2.8 Bases e representação numérica. 2.9 MDC e MMC: teorema de Bezout; algoritmo de Euclides para cálculo de MDC. 2.10 Teorema Fundamental da Aritmética. 2.11 Congruências: sistema completo de resíduos e o princípio da casa dos pombos; operações aritméticas com congruências; Teorema de Wilson; Pequeno Teorema de Fermat; Critérios de divisibilidade; equações diofantinas lineares, Teorema Chinês dos restos. 2.12 Função de Mobius; 2.13 Números perfeitos. 2.14 Números de Fibonacci. 2.15 Números de Fermat. 2.16 Números de Mersenne. 2.17 Criptografia RSA.

Bibliografia principal

HEFEZ, A. *Curso de Álgebra,* vol. 1. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993

NIVEN, I. *Números racionais e irracionais.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática,Rio de Janeiro, 1984.

SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números.* Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1970.

COUTINHO, S.C., *Números Inteiros e Criptografia RSA.* Rio de Janeiro, IMPA-SBM, 2000.

MONTEIRO, J. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Livro Técnico e Cientifico, 1974.
(*htpp://www.colmat.ufba.br/reforma-curric-06-6/FluxogLic/programs/IntrodTeorianum.pdf.* Acesso em 07/08/2006)

A disciplina Introdução à Teoria dos Números não existia no currículo anterior da licenciatura da UFBA. Havia uma disciplina denominada *Álgebra 1 – Inteiros e Grupos,* em que eram abordados tópicos do estudo dos inteiros, como indução, divisibilidade e congruências. Pelos objetivos, conteúdo programático e bibliografia da disciplina Introdução à Teoria dos Números, é possível perceber uma mudança de ênfase. Os objetivos são mais claros e não se limitam apenas ao domínio do conteúdo, mas valorizam a capacidade de compreensão dos inteiros e de suas propriedades aritméticas. Contudo enfatizam, ainda, a abordagem hipotético-dedutiva, isto é, a construção axiomática da teoria.

Quanto aos conteúdos, envolvem os tópicos essenciais de um curso de introdução à teoria dos números, no entanto podemos perceber a inclusão de temas que estão presentes na escola básica e que em outros programas são considerados "dados", como os números naturais como cardinais de conjuntos finitos, as operações no conjunto dos naturais, os sistemas de numeração de vários povos, a construção dos números inteiros e as operações nesses domínios. A bibliografia indicada ainda inclui obras da década de 1970, mas também livros mais recentes, como o de Coutinho e de Santos, esse último reeditado em 2003.

O currículo reestruturado inclui a disciplina **Matemática para a Educação Básica 1,** que complementa e amplia a anterior, pois tem como foco a preparação do professor para a escola básica. São objetivos desta disciplina:

Objetivo geral

Trabalhar conteúdos a serem ensinados no Ensino Fundamental. Adquirir desenvoltura, linguagem matemática correta na apresentação de seminários.

Habilidades e competências
O aluno deverá ser capaz de: demonstrar familiarização com as propriedades algébricas e de ordenação dos diversos subconjuntos dos números reais; apresentar seminários com linguagem adequada mostrando familiaridade com o tema; elaborar material didático, como estudos dirigidos, listas de exercícios etc., com bom embasamento teórico e com linguagem adequada aos cursos do ensino fundamental; resolver aplicações e exercícios do ensino fundamental.
(*http://www.colmat.ufba.br/reforma-curric-06-6/FluxuogLic/programas/MatEducBas%201.pdf)* Acesso em 07/08/2006)

O conteúdo programático inclui todos os tópicos sobre o conjunto dos naturais e sobre os números inteiros (exceto congruências) tratados na disciplina Introdução à Teoria dos Números, mas com uma abordagem diferente, que visa à formação do professor da escola básica. Inclui uma introdução aos números racionais e aos reais. A bibliografia indicada é adequada aos objetivos propostos, incluindo livros do ensino fundamental e médio, além de revistas sobre ensino de matemática.

Bibliografia principal

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética.* Textos Universitários, SBM, 2005.

DOMINGUES, H. H. Fundamentos de Matemática. São Paulo, Editora Atual, 1991.

LIMA, E. L. *A matemática do ensino médio*, vol.1, Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Bibliografia complementar

RPM – *Revista do Professor de Matemática*

EUREKA – *Revista da Olimpíada de Matemática.*

DI PIERRO NETTO, S. *Pensar matemática, para o ensino fundamental.* Editora Scipione.
Livros do ensino fundamental em geral.

http://www.colmat.ufba.br/reforma-curric-06-6/FluxuogLic/programas/MatEducBas%201.pdf) Acesso em 07/08/2006)

Estas duas disciplinas se complementam, embora haja um aspecto que pode ser limitador desta complementaridade, que é o fato de não serem ministradas no mesmo semestre. Caso fossem trabalhadas num mesmo semestre, a inter-relação entre elas poderia ser mais profícua, permitindo múltiplas relações, inclusive as "pontes" entre o antigo e o novo, entre a formação e a prática docente futura, já que o conteúdo programático é praticamente o mesmo, com objetivos e abordagens diferentes, mas que se complementam, visando à formação do professor da escola básica.

4.3 Em busca de conclusões

Como já havíamos pontuado anteriormente, a análise das disciplinas que compõem um currículo deve ser feita no contexto geral do projeto pedagógico do curso. Assim pudemos observar que nos encontramos em um momento em que algumas universidades estão re-elaborando os seus projetos, inclusive para se adaptar às novas diretrizes curriculares para a formação de professores, como é o caso da UNESP- Rio Claro, da PUC-SP e da UFBA, que estão implantando novas propostas curriculares a partir de 2006, e da UFSCar, que implantou em 2004. Essas propostas têm procurado incorporar discussões e resultados de pesquisas que estão sendo realizadas no campo da formação de professores de modo geral e no da Educação Matemática, de modo particular.

Em todas as universidades pesquisadas, o curso de licenciatura tem um objetivo claro, que é o de formar o professor de matemática para atuar na segunda fase do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, sendo que a UFMG e a PUC-SP também manifestam a preocupação com a formação para atuar nos diferentes níveis de ensino. Algumas instituições, como a UFMG, a UNICAMP, a UNESP, a UFSCar e a UFSM, incluem o objetivo de preparar para a pós-graduação, especialmente na área de ensino da matemática. Deste modo, não resta dúvida de que qualquer disciplina que venha a ser incluída na proposta curricular deve estar direcionada pela finalidade de formar o professor para a escola básica.

Dentre os princípios norteadores da formação, encontramos a competência, o compromisso e a liberdade (UNESP-RC); competência, coerência entre formação recebida e a prática profissional (UFSCar); sólida formação matemática, conhecimento da dimensão cultural, social, política e econômica da educação (UFRJ); formação sólida dos conhecimentos matemáticos, com visão da sua evolução histórica e com o domínio pedagógico do conteúdo (UFSM); visão geral de matemática e desenvolvimento de experiências e estratégias alternativas para o ensino (UnB); a formação como processo contínuo; relação dos processos de formação de professores de Matemática com o desenvolvimento organizacional da escola; articulação e integração na formação de professores de Matemática, dos conteúdos propriamente acadêmicos e disciplinares e da formação pedagógica dos professores; integração de teoria e prática (PUC-SP). Assim, entendemos que, embora os princípios sejam de natureza diferente e revelem concepções diversas de homem e de educação, que cada instituição escolhe ou prioriza, eles são direcionadores das disciplinas que compõem o currículo e se materializam através delas. Nenhuma proposta tem como princípio apenas o conhecimento sólido da matemática, embora seja este um princípio presente em todas a que tivemos acesso.

A maioria das universidades pesquisadas oferece o bacharelado e a licenciatura em matemática. Em algumas delas, como na USP, UNICAMP (noturno), UFMG (noturno), UFRJ, UFSC e UFPE, as propostas curriculares são independentes. Na UFMG (diurno), UNESP-RC, UNICAMP (diurno), UnB, UFSM e UFBA, há disciplinas comuns, sendo uma delas a que trata dos números inteiros. O fato de as propostas serem comuns a ambas as modalidades de curso pode ter implicações positivas ou negativas, dependendo da forma como a disciplina vai ser abordada e das ênfases que serão dadas. A proposta da UNESP-RC defende a oferta comum, com a argumentação de que grande parte dos bacharéis também se direcionará para a docência no ensino superior, o que implica a formação para ser professor, propondo que as disciplinas tenham abordagens diversificadas e não uma metodologia única, pois esta opção pode ser comprometedora, principalmente quando há a opção pela abordagem axiomática-formal, com um ensino tradicional. Pelo que pudemos constatar, quando ocorre a oferta comum, há uma densidade e uma amplitude maior de conteúdos além de objetivos restritos ao conteúdo matemático.

O estudo dos números inteiros é tratado em disciplinas com diferentes denominações, até mesmo nos currículos diurno e noturno de uma mesma universidade, como constatamos na UNICAMP e na UFMG. Assim temos: Álgebra 1 para a licenciatura, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Álgebra Elementar, Álgebra 1, Estruturas Algébricas 1, Fundamentos de Matemática 1, Teoria dos Números, Teoria Aritmética dos Números, Introdução à Teoria dos Números; Aritmética e Álgebra; Teoria Elementar dos Números e Os Números.

O fato de ter denominações diversas pode parecer irrelevante, desde que se garanta que tópicos de Teoria dos Números sejam tratados e abordados de modo a atender aos objetivos do curso e ao perfil de profissional que se pretende formar. Entretanto, analisado com mais cuidado, revela-nos concepções de matemática, de ensino e de formação de professores, como também ênfases que serão dadas no tratamento dos conteúdos. Confirma, inclusive, o que foi discutido sobre as disciplinas acadêmicas e escolares, ou seja, na constituição de uma disciplina há uma transposição didática dos saberes científicos, mas esta transposição envolve escolhas, negociações, lutas de poder, o que transforma a disciplina em uma instituição social.

A Teoria dos Números é um campo da matemática, estruturado e organizado, mas, ao se constituir em disciplina acadêmica, ela sofre transformações que trazem, como pudemos observar, uma variedade de denominações, expondo, mesmo que não de maneira explícita, as suas inter-relações com a Álgebra e com a Aritmética. Quando a disciplina é denominada Álgebra, por exemplo, constatamos que há uma pulverização maior dos conteúdos e os inteiros são tratados como exemplos de estruturas algébricas, sendo que ficam negligenciados aspectos e abordagens deste estudo que interessariam ao professor da escola básica.

Essa diversidade permite inferir, ainda, que o estudo dos números inteiros não tem um lugar próprio e talvez não tenha para muitos a importância que outras disciplinas mais consolidadas têm, como é o caso do Cálculo Diferencial e Integral, da Álgebra Linear e da Análise.

As disciplinas que tratam de assuntos de Teoria dos Números, mencionadas anteriormente, são ministradas em todas as instituições na primeira metade dos cursos, geralmente com uma carga horária de 60 horas. Considerando que os alunos ainda têm pouca experiência na atividade matemática, em especial com a abordagem axiomática, expressa nos objetivos, os programas são extensos, o que pode impedir metodologias que demandem um tempo maior de construção por parte do aluno.

Quanto aos objetivos, consideramos que a sua apresentação é fundamental, pois são eles que garantem a identidade da disciplina e que expressam a contribuição desta na formação do profissional. De acordo com Chervel, as finalidades constituem o que imprime o caráter educativo e não apenas o instrutivo a uma disciplina, permitindo que a disciplina cumpra a sua função de colocar um conteúdo a serviço de uma finalidade educativa. No entanto, a análise das disciplinas nos permitiu verificar que, em algumas das instituições, os objetivos não são apresentados, ficando a impressão de que a ementa é suficiente para definir o papel de uma disciplina dentro do curso. Na maioria delas, os objetivos são restritos, pois visam ao domínio do conteúdo pelo conteúdo, ou estão ligados à familiarização do estudante com o método axiomático, não traduzindo, portanto, a preocupação com a formação do professor para a escola básica.

Em três instituições apenas, os objetivos são mais amplos, incluindo também comportamentos, valores, atitudes, competências e habilidades, como: estudar a Aritmética e sua relação com a cultura dos povos; perceber a importância da presença da Aritmética nas escolas fundamental e média; flexibilizar o estudo tradicional da Aritmética e dos conceitos iniciais de Teoria dos Números, usando tanto os métodos da Álgebra quanto os da Matemática Discreta (algoritmos); dar oportunidade para o estudante adquirir confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas; vivenciar a arte de investigar em matemática e em Teoria dos Números; propiciar a vivência da criatividade, iniciativa e trabalho coletivo; explicitar situações do cotidiano que podem ser modeladas na linguagem de números; desenvolver o senso crítico em relação a textos sobre o conteúdo. Esses objetivos traduzem uma concepção de ensino que não se restringe aos conteúdos e a uma única forma de abordagem, mas que aponta para a arte de investigar, para os aspectos históricos e culturais dos conteúdos, para a criatividade, para o trabalho coletivo. A operacionalização desses objetivos pode promover uma real transposição didática dos conteúdos, bem como o surgimento do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Quanto aos conteúdos programáticos, como em algumas instituições a disciplina não é específica de Teoria dos Números, há uma grande diversidade de tópicos abordados, incluindo o estudo dos números racionais, reais e complexos; estudo dos polinômios; das estruturas algébricas; das relações binárias; noções de lógica; linguagem e notação de conjuntos. No entanto, há um núcleo que está explicitamente presente em todas as propostas, constituído do estudo da divisibilidade; algoritmo da divisão euclidiana; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum; números primos e teorema fundamental da aritmética; congruências e equações diofantinas lineares. Também constam da maioria dos programas os teoremas de Fermat, Euler e Wilson. A abordagem axiomática dos inteiros aparece explicitamente em metade delas, e outras abordagens dos inteiros são explícitas, em apenas uma. O estudo da contagem e dos sistemas de numeração, as operações aritméticas, os critérios de divisibilidade, a abordagem histórica da aritmética e dos números, presentes na matemática escolar na educação básica, são raramente citados, o que confirma que não há uma preocupação com a formação do professor. Em disciplinas específicas de Teoria dos Números, em, no máximo, três instituições, ainda constam tópicos como: restos quadráticos, lei da reciprocidade quadrática, equações diofantinas não-lineares, congruência de grau dois; distribuição de primos; criptografia RSA.

Embora em apenas dois dos documentos consultados esteja indicada a metodologia a ser utilizada, os objetivos e a bibliografia apontam para um ensino tradicional em que são apresentados os conceitos, as proposições e as suas demonstrações, numa abordagem lógico-dedutiva. Apenas em uma delas estão mencionadas metodologias tais como a pesquisa bibliográfica, a orientação de estudos, seminários e atividades de investigação.

Quanto à bibliografia, há uma variedade de obras indicadas. Nos cursos de Álgebra, os mais citados são: Gonçalves (1977), Monteiro (1969) e Hefez (1993). Os dois primeiros não são mais publicados, e o de Hefez teve uma terceira edição em 2003, mas também está esgotado, sem previsão de republicação. Quanto aos livros de Teoria dos Números, os mais citados são: Sidki (1977), Domingues (1991), Milies (2000), Santos (3.ed. 2005), Coutinho (2003), também aparece Shokranian (1999) e uma variedade de livros em língua estrangeira, em inglês, sendo o mais indicado o de Niven (1972). O livro de Sidki foi publicado apenas uma vez, e o de Domingues também não está disponível para a venda. Quanto à bibliografia, é interessante observar que algumas propostas curriculares falam de ênfase nos aspectos históricos dos conteúdos, mas livros de história da matemática praticamente não são indicados. Os livros mais citados serão analisados no próximo capítulo.

Assim, o estudo dos inteiros está presente nos currículos pesquisados, em disciplinas com nomes, conteúdos, bibliografias e ênfases diversas, mas os elementos analisados indicam que na maioria deles não há uma preocupação com a prática docente do professor de matemática da escola básica, apontando para uma disciplina que não tem claro o seu papel na formação. Em algumas instituições cujos currículos da licenciatura em matemática foram reformulados recentemente, há indícios de mudanças, pelo menos em nível do proposto.

CAPÍTULO 5

A TEORIA DOS NÚMEROS NOS LIVROS DIDÁTICOS

5.1 Introdução

Os livros didáticos têm se constituído ao longo do tempo num importante recurso de ensino, em qualquer nível educacional. Segundo Munakata (2003), citando Lajolo, o livro didático é aquele escrito, editado, vendido e comprado para ser usado em um curso, de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de uma dada área do conhecimento, consolidada como disciplina escolar.

Entretanto, é importante ponderar que eles não são meros instrumentos de ensino, neutros e a-históricos. Assim, os livros didáticos de matemática são objetos culturais, produzidos num tempo e num espaço, revelando: concepções de matemática e de seu ensino nos diferentes níveis; paradigmas educacionais vigentes; trajetória histórica e também expectativas sociais em relação ao ensino. São, ainda, reveladores do trabalho de transposição didática, pois tomam um saber científico e procuram transformá-lo num saber a ensinar, isto é, em algo singular, que possui finalidades próprias. Essa transposição é variável de acordo com os níveis ensino, sendo a proximidade de um tipo de saber em relação a outro, como também a interferência de outros saberes, dependente destes níveis de ensino. É de se esperar que um livro didático voltado para o ensino superior tenha maior proximidade com o saber científico do que um livro voltado para o ensino de uma dada disciplina na escola básica. Sobre esta questão, é importante ponderar que nem todos os livros didáticos revelam uma transposição didática original, pois pode ocorrer o que Chervel (1990) chamou o *fenômeno da vulgata*, que diz respeito à similaridade das produções dos textos didáticos que ocorre numa dada época. Os conceitos apresentados, os exemplos, a organização dos temas, os tipos de exercícios são praticamente os mesmos ou apresentam pouca variação em todos os livros didáticos. (VALENTE, 2001, p.2)

Assim considerados, os livros didáticos envolvem aspectos de seleção e organização do conhecimento e de métodos de ensino, além de aspectos produtivos, inclusive mercadológicos e constituem importante objeto de pesquisa na área educacional, pois acabam por direcionar as escolhas curriculares e pedagógicas.

Neste trabalho, os livros didáticos serão considerados com o objetivo de buscar elementos que possam contribuir para a compreensão da Teoria dos Números como um saber a ensinar, na formação do professor de matemática da escola básica, procurando desvelar o que se ensina, o por que e o como.

Conforme expusemos na metodologia, selecionamos dez livros, sendo que as obras foram divididas em dois grupos para a análise. O primeiro grupo é constituído de seis delas, das quais realizamos uma análise mais global, a partir do prefácio, do índice ou sumário e dos capítulos referentes aos naturais e aos inteiros, no caso dos livros de Álgebra, e dos capítulos referentes à divisibilidade, no caso dos livros de Teoria dos Números. Das quatro obras do segundo grupo, fizemos uma análise mais detalhada de alguns temas, aqueles que têm uma relação mais estreita com a matemática da escola básica, analisando os capítulos referentes à introdução dos números inteiros, ao tratamento da recorrência e da indução matemática e ao estudo da divisibilidade.

Na análise das obras do primeiro grupo, procuramos situá-las historicamente e levantar: os objetivos e os pressupostos teóricos (ou concepção de matemática) que levaram à elaboração da obra; os conteúdos propostos; o público a que se destina; os pré-requisitos para o estudo, apresentados pelo autor; a concepção de Teoria dos Números explicitada e as estratégias/metodologias sugeridas para a utilização da obra, a existência de facilitadores técnicos e pedagógicos[34].

Para a análise dos livros do segundo grupo, partimos do pressuposto de que o livro didático de matemática apresenta um conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas relações, retratando, portanto, uma *organização matemática.* Segundo Chevallard, esta organização é uma *praxeologia*[35], pois apresenta dois aspectos inseparáveis: *a práxis,* constituída de um conjunto de tarefas e de técnicas, e o *logos,* discurso a respeito desta prática, que é constituído de tecnologias e de teorias.

[34] Serão considerados *facilitadores pedagógicos*: a apresentação clara dos objetivos da obra e de cada capítulo; a adequação dos objetivos aos cursos aos quais se destina; a apresentação de organizadores prévios na introdução dos assuntos (pontos que vão ser abordados, ligação com conteúdos e atividades precedentes, pré-requisitos); apresentação de organizadores cognitivos posteriores(como resumo, quadro síntese); a sugestão de recursos auxiliares. Como *facilitadores técnicos,* serão considerados: a apresentação de prefácio ou introdução; apresentação de sugestões de utilização para o professor e para o aluno; a existência de anexos, glossário, bibliografia, índice remissivo. (Adaptado de GÉRARD, F-M.; ROGIERS, X.; **Conceber e avaliar manuais escolares.** Porto Editora)

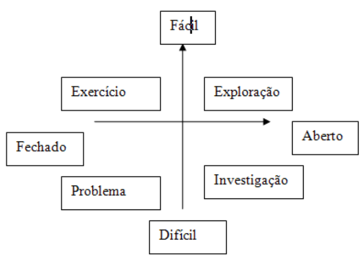
[35] Segundo Chevallard, na atividade matemática, como também em outras atividades, existem duas partes que não podem viver uma sem a outra. Uma é constituída pelas tarefas e pelas técnicas, que pode ser chamada de "prática" ou, em grego, *práxis* e a outra constituída das tecnologias e das teorias, o *logos.* Daí o termo *praxeologia*, uma organização que junta prática e teoria. As tarefas estão na raiz da noção de praxeologia, são artefatos, obras, construtos institucionalizados, cuja reconstrução em uma instituição se constitui em um problema. As técnicas se referem a uma certa maneira de realizar uma tarefa, diz respeito ao saber fazer. As tecnologias se referem ao discurso racional sobre a técnica, cujos objetivos são justificar racionalmente e explicar a técnica. A teoria é um nível superior de justificação – explicação – produção. (CHEVALLARD, 1999)

Sobre as tarefas, referenciamo-nos, ainda, na contribuição de Ponte (2003), que possibilitou enriquecer a análise da *praxeologia matemática* presente no livro didático. Esse autor, considerando que as tarefas têm uma grande importância no processo ensino-aprendizagem, pois acabam determinando o tipo de atividade matemática que o aluno irá realizar, estabelece para elas quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo necessário para executá-la. Associando as duas primeiras dimensões, classifica as tarefas em[36]: *exercícios*, tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada; *problemas*, tarefas com elevada dificuldade e fechadas*; investigação*, grau de dificuldade elevado e com estrutura aberta; *exploração,* tarefas fáceis e com estrutura aberta. Pondera, entretanto, que as características não são absolutas, intrínsecas às tarefas, mas dependem de quem as realiza.

Assim, na análise das obras do segundo grupo, resultantes de notas de aulas também para os cursos de licenciatura, além dos aspectos considerados para a análise das obras do primeiro grupo, procuramos levantar outros, tais como: a apresentação e o desenvolvimento do conteúdo, tomando como referência a organização praxeológica da atividade matemática proposta por Chevallard e os tipos de tarefas de Pontes; a concepção de ensino subjacente à apresentação e ao desenvolvimento dos conteúdos selecionados; as oportunidades que a obra oferece para o desenvolvimento de competências necessárias ao trabalho docente; a relação com o saber cientifico e com o saber escolar e, também, a presença ou não de elementos reveladores do conhecimento pedagógico do conteúdo, conforme proposto por Shulman.

5.1 Análise dos livros do primeiro grupo

[36] Ponte apresenta o seguinte esquema para a visualização dos tipos de tarefas, considerando o grau de dificuldade e o de abertura:



5.1.1 HEFEZ, A. *Curso de Álgebra.* v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993

Trata-se de um livro que compõe a *Coleção Matemática Universitária,* publicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Num prefácio sintético, o autor apresenta a obra como fruto de material utilizado por professores do Departamento de Matemática da UFES (Universidade Federal do Espírito Santo), durante alguns anos, embora não explicite em quais cursos ela é usada. Não há indicações de objetivos e pressupostos teóricos, de estratégias e metodologias de utilização. Hefez não aponta a necessidade de pré-requisitos para o seu uso. São abordados os seguintes conteúdos:

1.A linguagem dos conjuntos: conjuntos; operações com conjuntos; funções; funções bijetoras e funções inversas.
2.Os números inteiros e racionais.

3. Propriedades dos inteiros: indução matemática; divisão com resto; sistemas de numeração; Euclides.

4. A Álgebra dos inteiros: divisibilidade, ideais, fatoração.

5. A Aritmética dos inteiros: números primos; sobre a distribuição de números primos; algoritmo de Euclides; equações diofantinas; o despertar da Aritmética.

6. Congruências: propriedades, as classes residuais e a sua aritmética; congruências lineares, a função de Euler; o legado de um gigante.

7. Anéis: anéis; homomorfismo e ideais; anéis quocientes;

8. Os números reais: seqüências convergentes, corpos arquimedianos, seqüências fundamentais; ordenação do complemento; relação com a Análise.

9. Os números complexos: o corpo dos números complexos, conjugação e módulo; forma trigonométrica dos números complexos; raízes de números complexos; raízes das unidades.

10. Os inteiros gaussianos: o anel dos inteiros gaussianos; elementos primos de Z[i]; a equação pitagórica, quocientes do anel dos inteiros gaussianos; o exemplo de Kummer.

Como se pode perceber pelos conteúdos abordados, não é um livro que trata exclusivamente do conjunto dos números inteiros, mas de 10 capítulos, 5 tratam especificamente deles. A abordagem é axiomática, envolvendo o estudo das estruturas algébricas, a partir dos conjuntos numéricos. Embora não esteja explícito, o objetivo é introduzir axiomaticamente, com ênfase nas estruturas algébricas, os conjuntos numéricos: inteiros, racionais, reais e complexos.

Chamam a atenção, na organização dos capítulos, as denominações dadas aos capítulos 4 e 5, respectivamente – *A álgebra dos inteiros* e a *A aritmética dos inteiros*, o que revela um modo de conceber a Teoria Elementar dos Números. O autor estabelece esta distinção, considerando que, em matemática, há vários tipos de teoremas de existência. Alguns são de natureza construtiva, isto é, a demonstração exibe um algoritmo que, pelo menos teoricamente, permite calculá-lo, por exemplo, o algoritmo da divisão euclidiana. A abordagem de resultados deste tipo ele chamou *A aritmética dos inteiros.* Outros teoremas são de natureza mais conceitual, garantindo a existência de um objeto matemático, mas não apresentando um modo para calculá-lo. Resultados deste tipo, ele incluiu no capítulo a que denominou *A álgebra dos Inteiros.* É uma opção do autor que revela esta relação meio nebulosa entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números, a qual não teria importância no ensino se não definisse prioridades e ênfases. Como no caso desse livro, em que o objetivo do autor é o estudo das estruturas algébricas, o conjunto dos inteiros com suas particularidades aparece como um exemplo daquelas.

Nos capítulos referidos anteriormente, são abordados o estudo da divisibilidade e o da fatoração única em um anel. O autor esclarece, na introdução do capítulo 4, que a noção de divisibilidade tem um papel importante no estudo dos anéis, dado que nesse tipo de estrutura algébrica nem sempre é possível dividir um elemento por outro. Assim, neste contexto, é possível garantir a existência do máximo divisor comum e relacioná-lo com o conceito de ideais e também abordar a questão da fatoração única. Toma como referência o anel dos inteiros por considerar que ele tem uma estrutura bem simples, o que acarreta conseqüências algébricas notáveis. Assim, no capítulo 4, aborda aspectos da divisibilidade e da fatoração única, apresentando resultados de forma mais conceitual, e, no capítulo 5, estuda propriedades específicas dos inteiros, chamadas de propriedades aritméticas, dando ênfase aos aspectos computacionais ou algorítmicos, incluindo-se, aí, o Crivo de Eratóstenes, o algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum e as equações diofantinas.

Desta forma, podemos inferir que o autor concebe os inteiros como o exemplo natural para o estudo dos anéis e destaca a importância da divisibilidade nesses domínios. Revela um modo de tratar o estudo dos inteiros, considerando os aspectos algébricos e os aritméticos ou algorítmicos. Como afirmamos anteriormente, é um livro citado em cursos que abordam o estudo dos números na licenciatura em matemática, porém o desenvolvimento das estruturas algébricas é o objetivo principal.

Assim, a concepção de matemática subjacente é a concepção estrutural-formalista[37], em que se enfatizam as estruturas, a linguagem formal, e o rigor e a concepção de ensino é a de ensino da matemática pela matemática.

[37] Segundo Fiorentini (1995), a concepção estrutural-formalista vem no bojo do Movimento da Matemática Moderna que foi influenciado pelos trabalhos do grupo francês "Bourbaki", trazendo um retorno ao formalismo matemático, com ênfase na apreensão da estrutura subjacente. Enfatiza-se o uso preciso da linguagem matemática e o rigor.

5.1.2 GONÇALVES, A.; *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

Segundo o autor, é um texto de álgebra, fruto de suas experiências docentes na Universidade de Brasília, destinada aos alunos do bacharelado (ou licenciado[38]), apresentado no 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado em 1977. É considerado, pelo autor, como um material elementar, quanto ao grau de dificuldade, *suficientemente interessante* para quem pretende prosseguir os estudos num curso de pós-graduação, como também para aqueles que vão ensinar. O objetivo é abordar as noções de: conjunto, função, relação de equivalência, apresentadas de modo sucinto no primeiro capitulo; anéis, corpos, polinômios e grupos, consideradas pelo autor, indispensáveis a qualquer texto que tenha os objetivos apresentados, sendo o principal, segundo o autor, chegar ao Teorema Fundamental de Galois. Quanto à formalização da criação dos conjuntos numéricos: N, Z, Q, R e C, Gonçalves afirma que isto pode ocorrer fora de um curso de Álgebra, em disciplinas como Matemática do Ensino Médio ou Evolução da Matemática, cabendo aos algebristas utilizá-los, sem perder tempo com essas formalizações. Os conteúdos apresentados são:

1. Noções preliminares: conjuntos, funções, relação de equivalência.

2. Os números inteiros: propriedades elementares; boa ordenação; algoritmo de Euclides; ideais e mdc; números primos e ideais maximais; fatorização única; os anéis Z_n.

3. Anéis, ideais e homomorfismos: definições e exemplos; subanéis; ideais e anéis quocientes; homomorfismos e anéis; o corpo quociente de um domínio.

4. Polinômios de uma variável: definições e exemplos, o algoritmo de Euclides, ideais principais e m.d.c.; polinômios irredutíveis e ideais maximais; fatorização única.

5. Extensão algébrica dos racionais: o critério de Eisenstein; adjunção de raízes; corpo de decomposição de um polinômio; grau de extensões; construção por meio de régua e compasso.

6. Grupos: definição e exemplo; subgrupos e classes laterais; classes de conjugação: grupos quocientes e homomorfismo de grupos; a simplicidade dos grupos A_n, $n \geq 5$.

7. Teoria de Galois elementar: extensões galosianas e extensões normais; a correspondência de Galois; solubilidade por meio de radicais.

Embora seja uma das obras indicadas nos programas dos currículos pesquisados, trata-se de um livro em que a preocupação do autor, manifestada no prefácio, é o desenvolvimento de conteúdos ligados às estruturas algébricas, visando à preparação do aluno para a pós-graduação ou para o ensino. O anel dos inteiros é tratado no capítulo 2, com a intenção de

[38] Nomenclatura e indicação usada pelo autor no prefácio.

associá-lo com o anel dos polinômios no capítulo 4, não sendo, assim, o foco da atenção do autor.

Na apresentação da obra não há elementos que permitam inferir uma preocupação com o ensino e a aprendizagem dos mesmos, embora o autor afirme acreditar que seja interessante para aqueles que vão ser professores. Pelo exposto, podemos afirmar que está subjacente à obra uma concepção estrutural-formalista da matemática e a de ensino da matemática pela matemática. Como o objetivo principal não é o estudo dos inteiros e a formação do professor de matemática da escola básica, não a consideraremos para uma análise mais aprofundada.

5.1.3 MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1971.

É também uma publicação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), dentro do objetivo de criação de uma literatura científica brasileira, conforme manifestado pelo então diretor desse instituto, Elon Lages Lima, na apresentação da obra. Foi publicada pela primeira vez, em 1969. No prefácio, o autor apresenta o seguinte objetivo: *a uniformização do ensino da Álgebra nas Faculdades de Filosofia através de uma unificação da linguagem e de uma sistematização dos conceitos que usualmente são desenvolvidos no estudo da Álgebra Moderna.* Não há nenhuma referência a formas metodológicas de utilização e o autor não considera a necessidade de pré-requisitos para o seu uso, a não ser a recomendação de que o professor deverá selecionar as partes que julgar mais importantes em cada capítulo, de acordo com o tempo, pois o livro foi planejado para um curso de dois anos. Os conteúdos propostos são:

1. Teoria elementar dos conjuntos: conjuntos; relações; aplicações.
2. Números naturais: monóides e grupos; números naturais.
3. Números inteiros: o anel Z dos números inteiros.
4. Anéis e corpos: anéis; corpo de frações de um anel de integridade.
5. Corpo dos números reais e corpo dos números complexos.
6. Anéis de polinômios: introdução, anel de polinômios com uma indeterminada; funções polinomiais; anéis de polinômios com diversas indeterminadas.
7. Anéis fatoriais: introdução; propriedades gerais dos anéis fatoriais; anéis euclidianos; anel de polinômios sobre um anel fatorial; ideais; anéis quadráticos.
8. Grupos: introdução; propriedades gerais dos grupos; grupos cíclicos e grupos de permutações; teoremas de Silow; seqüências de composição; produtos de grupos; grupos abelianos finitos.

É uma obra publicada no período do Movimento da Matemática Moderna, tendo como objetivos - sistematizar os conceitos de álgebra e unificar a linguagem – adequados, portanto, às propostas desse movimento no ensino. Nos programas das universidades pesquisadas, foi a mais citada, como também aparece na bibliografia dos livros dos demais autores nacionais.

Embora não seja uma obra específica de Teoria dos Números, nos capítulos 2 e 3, o autor aborda, sob o ponto de vista das estruturas algébricas, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros, respectivamente. No capítulo 2, embora o título seja *Números Naturais*, o autor introduz os conceitos de operação e define as propriedades, associativa, comutativa, elemento neutro, elemento simetrizável; em seguida, os conceitos de monóides, semigrupos e grupos, para depois introduzir os números naturais como um semi-grupo ordenado, tratando aí a definição por recorrência e o princípio da indução finita.

No capítulo 3, após construir os inteiros, traz um tópico a que denominou *Noções sobre a Teoria dos Números,* abordando as noções de divisores e de números primos, o algoritmo da divisão, sistemas de numeração, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, o teorema fundamental da aritmética, congruências e equações diofantinas. Esses tópicos constituem o que poderíamos denominar Teoria Elementar dos Números e, com exceção de congruências, são assuntos que constam dos programas de matemática da escola básica. A presença desses capítulos e a abordagem dada pode ser um dos motivos para que a obra seja a mais citada nos programas pesquisados.

Ao analisarmos os capítulos 2 e 3, embora a abordagem seja axiomática e formal, pudemos perceber a existência de facilitadores técnicos e pedagógicos, como: a presença de introdução no início do capítulo; resumos; notas históricas; dispositivos práticos, comentários e exemplos que podem permitir ao aluno associar o conteúdo "novo" aos conhecimentos anteriores, ou "antigos".

O livro tem características de uma produção que pretende dar uma nova organização ao ensino de álgebra no Brasil. Nesse sentido, parece se constituir numa nova *vulgata*, capaz de influenciar e de direcionar publicações posteriores.

Na análise desses três primeiros livros, que não são específicos de Teoria dos Números, pudemos perceber que o conjunto dos números naturais e o dos inteiros são tratados sob o ponto de vista das estruturas algébricas, monóides, grupos e anéis, como exemplos naturais destas, dentro de uma concepção estrutural-formalista da matemática. Portanto, o objetivo principal é o estudo das estruturas algébricas, e não o estudo dos aspectos que caracterizam os números inteiros. Outro ponto a destacar é que fica subentendido que a Teoria Elementar dos Números faz parte do ensino de álgebra, entretanto os conteúdos referentes a este tema são tratados de forma sucinta nesses manuais, pois não constituem o foco, como observamos. Embora sejam livros didáticos, não há uma preocupação explícita com a aprendizagem significativa dos temas abordados, isto é, uma aprendizagem que se ancora nos conhecimentos anteriores dos alunos, exceto no de Monteiro. Nem mesmo orientações metodológicas sobre a utilização das obras são apresentadas.

5.1.4 NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTGOMERY, H. L. *An introduction to the Theory of Numbers*. 5th ed. New York: John Wiley, 1991.

A primeira edição da obra é de 1960. É citada por autores nacionais como Sidki (1975), Monteiro (1971) e Hefez (1993), e também na bibliografia de uma das universidades pesquisadas. Segundo os autores, é destinado a um primeiro curso de Teoria dos Números na graduação, sendo os capítulos iniciais, contendo tópicos para um curso elementar, considerados menos pretensiosos; e os tópicos não elementares, considerados mais desafiadores, exigindo, como pré-requisito, um domínio de um curso padrão de álgebra linear e de cálculo avançado. Os autores sugerem para um curso elementar os seguintes tópicos:

TÓPICOS PARA UM CURSO ELEMENTAR

1.Divisibilidade: introdução, divisibilidade, primos, o teorema binomial.

2. Congruências: congruências, soluções de congruências, o teorema chinês do resto; técnicas de cálculo numérico; chave-pública de Criptografia; potências de primos; raízes primitivas;

4. Algumas funções da teoria dos números: função maior inteiro; funções aritméticas; a fórmula da inversão de Möbius.

5. Algumas equações diofantinas: a equação ax+by=c; triângulos pitagóricos;

6. Frações de Farey e números irracionais: seqüências de Farey; aproximações racionais.

Para cursos mais avançados, propõem:

TÓPICOS NÃO ELEMENTARES

2.Congruências: congruências de grau dois, módulo primo; teoria dos números do ponto de vista algébrico; grupos, anéis e corpo.

3. Reciprocidade quadrática e formas quadráticas.

5. Algumas equações diofantinas: equações lineares simultâneas; formas quadráticas ternárias; curvas elípticas.

6. Frações de Farey e números irracionais: os números irracionais; a geometria dos números.

7. Frações contínuas simples

8. Primos e teoria dos números multiplicativa

9. Números algébricos

10. A função partição

11. A densidade da seqüência de inteiros

Os autores concebem a Teoria dos Números como um assunto amplo com forte ligação com outros campos da matemática, especialmente com a álgebra abstrata, como também com a álgebra linear, combinatória, análise, geometria e mesmo topologia. Na introdução do capítulo sobre Divisibilidade a definem como o estudo das propriedades dos números inteiros, mas lembram que as provas não são sempre dadas dentro destes domínios e se baseiam em diferentes idéias e métodos. Destacam dois princípios que consideram básicos, um deles é o conhecido como Princípio da Boa Ordem, e o outro é o Principio da Indução Matemática, conseqüência lógica do primeiro.

Apontam, ainda, alguns aspectos importantes para o trabalho com a Teoria dos Números no ensino. Um deles diz respeito à importância das observações empíricas como fontes para resultados em Teoria dos Números. Afirmam eles:

> De qualquer modo, observações empíricas são importantes na descoberta de resultados gerais e para testar conjecturas. Elas também são úteis na compreensão de teoremas. Ao estudar um livro sobre teoria dos números, vocês são bem aconselhados a construir exemplos numéricos, especialmente se um conceito ou um teorema não é inicialmente bem compreendido.* (NIVEN, 1991, p. 3)

Outro aspecto diz respeito à Teoria dos Números como uma diversão popular, especialmente na sua forma elementar, incluindo as curiosidades numéricas, quebra-cabeças e enigmas. Embora esta parte não seja objetivo desse livro, os autores acreditam que o estudo da teoria pode ser útil para explicar a matemática recreativa.

Afirmam que o objetivo deles, nesse livro, é apresentar uma visão equilibrada da área, lembrando que, embora se possam provar teoremas avançados, usando técnicas elementares, preferem, algumas vezes, buscando *otimizar o valor instrucional do texto*, provas mais longas que possam oferecer mais *insights* do que provas menores e conhecidas, que podem falhar no convencimento do espírito dentro da pesquisa corrente, sendo, assim, menos valiosas para um iniciante que queira ter uma percepção da área.

Os autores iniciam com o estudo da divisibilidade no primeiro capítulo, considerando-a como o conceito fundamental da Teoria dos Números, aquilo que a distingue de outros domínios da matemática. Abordam, de forma sucinta, o algoritmo da divisão euclidiana, o máximo divisor comum, o teorema da fatoração única e números binomiais, tratando as definições e os teoremas que são fundamentais de uma forma bastante simples. Os autores inserem, ainda, elementos que podem ser considerados como pedagógicos do conteúdo, como observações e comentários que enriquecem o texto. Além disso, utilizam exemplos que poderíamos considerar genéricos,[39] como na apresentação do algoritmo da divisão euclidiana e do máximo divisor comum, em que ilustram com um caso particular para depois generalizar e provar o procedimento. Há um grande número de exercícios, com referencial de respostas e sugestões para os mais trabalhosos.

No capítulo 2, tratam de modo abrangente o estudo de congruências, considerando que a congruência é nada mais que uma afirmação sobre divisibilidade. Entretanto, vêem-na como mais que uma notação conveniente, pois torna mais fácil descobrir provas e sugere problemas que nos conduzem a novos e interessantes tópicos. Nesse capítulo, tratam os teoremas de Fermat, Euler e Wilson e o Teorema do Resto Chinês, indicados como tópicos elementares, isto é, que exigem conhecimentos matemáticos de calouros. Outros tópicos do capítulo são classificados como não recomendados para iniciantes, como congruência de grau dois e Teoria dos Números de um ponto de vista algébrico.

Embora a obra seja indicada para um primeiro curso de Teoria dos Números na graduação, os próprios autores orientam quanto ao que consideram elementar, auxiliando o professor na seleção dos conteúdos e na definição da profundidade com que quer tratar o curso e cada assunto.

Quanto à abordagem, ela é axiomática, atenuada pelos elementos citados acima, podendo ser enquadrada dentro de uma tendência formalista clássica[40], em que há a preocupação com a sistematização lógica do conhecimento a partir de elementos primitivos e postulados, e depois de definições e teoremas.

5.1.5 LeVEQUE, W. J. Elementary Theory of Numbers. Canada: General Publishing Company, Ltd., 30, 1990.

Obra publicada pela primeira vez em 1962. LeVeque é citado por autores nacionais, como Hefez (1993), Monteiro (1969), Shokranian (1999), pois tem várias produções[41] em Teoria dos Números. No prefácio, descreve preocupações com o ensino de matemática na

[39] *Generic example* é o nome dado por Rowland (2002-A) para o uso de estratégia de prova particular-mas-genérica, para convencer os estudantes da verdade de teoremas e de conjecturas produzidas por eles.

[40] Segundo Fiorentini (1995), a tendência formalista clássica se apóia no modelo euclidiano cuja característica é a sistematização lógica do conhecimento matemático, a partir de elementos primitivos e postulados, em seguida apresentando definições e teoremas. No ensino, essa seqüência é repetida na apresentação do conhecimento matemático, vindo, em seguida, os exercícios de aplicação da teoria.

[41] LeVEQUE, W. J., *Topics in Number Theory*, vol. I e II, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1958).
LeVEQUE, W. J., *Fundamentals of Number Theory,* Addison-Wesley (Reading), 1977.
LeVEQUE, W. J., *Reviews in Number Theory,* vol. 1-6, Amer. Math. Society (Providence), 1974.
LeVEQUE, W. J., *Studies in Number Theory,* Math. Assoc. of America (Washington), 1969.

época, afirmando que existe um interesse, tanto no ensino médio como no profissional, pela matemática, e reconhece que os cursos ofertados não abrangem toda a matemática desejável para esses níveis. Afirma, ainda que:

> (...) nem todas as matemáticas modernas são acessíveis; algumas são demasiado abstratas para serem compreendidas se não se tem maturidade matemática e outras requerem um maior conhecimento técnico do que aquele que um estudante jovem já assimilou. Felizmente, a teoria dos números não apresenta nenhuma destas dificuldades. O material é concretamente o conjunto dos números inteiros, as regras são aquelas que o estudante tem usado desde o nível de estudos elementares e não supõe um conhecimento prévio especial.[*] (LeVeque, 1990, prefácio)

Desse modo, explicita a sua concepção sobre o ensino de Teoria dos Números, acrescentando, ainda, que é difícil encontrar um ramo da matemática como este no qual o estudante pode encontrar uma variedade de tipos de demonstrações e problemas que podem desafiar sua curiosidade, desenvolver habilidades, ampliando a sua formação matemática. Assim, segundo o autor, esse livro tem o objetivo de apresentar a matéria de tal modo que pessoas com menor preparo matemático possam lê-lo. É destinado ao ensino de Teoria dos Números para alunos do nível universitário e politécnico e **na capacitação de professores**. Contém os seguintes tópicos:

1. O que se entende por teoria dos números: fundamentos, demonstração por indução; demonstração indireta.

2. O algoritmo euclidiano e suas conseqüências: divisibilidade; algoritmo euclidiano; m.d.c; teorema da fatoração única; equação diofantina linear; m.m.c.

3. Congruências: propriedades elementares; classes residuais e aritméticas; congruências lineares, congruências polinomiais.

4. Potências de um número inteiro

5. Frações contínuas: desenvolvimento de um número racional como uma fração contínua simples; desenvolvimento de número irracional.

6. Inteiros gaussianos: divisibilidade; m.d.c.; teorema da fatoração única; primos em Z[i]; outro domínio quadrático.

7.Equações diofantinas: a equação $x^2 + y^2 = z^2$; a equação $x^4 + y^4 = z^4$; a equação $x^2 - d y^2 = 1$; a equação $x^2 - d y^2 = -1$; equação de Pell e frações continuadas.

É uma obra escrita na época do Movimento da Matemática Moderna, no entanto o autor faz uma crítica a esse movimento ao afirmar que há uma abstração demasiada, o que pode trazer dificuldades para o ensino. A sua abordagem não faz menção às estruturas algébricas, pois o seu objetivo é torná-la acessível aos que estejam iniciando um curso universitário. Todavia, está implícito em seu discurso que a formação matemática passa pelo exercício da demonstração, apontando a Teoria dos Números como um campo propício para esse fim.

O autor dedica um capítulo ao esclarecimento do que é a Teoria dos Números, contando um pouco da sua história e estabelecendo uma categorização dos problemas encontrados nesse campo. Pontua que é a generalidade o que distingue a Teoria dos Números da simples aritmética, embora exista uma gradual relação entre elas, o que leva alguns a denominá-la aritmética superior. Preocupa-se, ainda, em responder a questão - por que foi criada e estudada a Teoria dos Números, apontando como principal causa a insaciável curiosidade do homem, aguçada por problemas especiais que conduzem à criação de métodos gerais, contribuindo, assim, para o avanço da matemática.

Aborda, ainda, alguns aspectos importantes relacionados à demonstração, inclusive dando uma orientação, que podemos considerar metodológica, ao sugerir que o estudante faça um esforço para abstrair e reter a essência das demonstrações apresentadas, pois assim começará a perceber modelos e não apenas *truques* diversos que são utilizados em cada situação. Desse modo, o autor sugere que o estudante atente para o caminho que está sendo utilizado, a fim de que possa criar um repertório de métodos possíveis.

O capítulo referente à divisibilidade é sucinto, em quinze páginas, com a apresentação dos teoremas principais, ou seja, o algoritmo de Euclides e o da fatoração única, numa abordagem formalista clássica, apresentando poucos exercícios para serem resolvidos. Não há elementos que poderiam ser caracterizados como referentes ao conhecimento pedagógico do conteúdo, embora o autor considere a Teoria dos Números um campo em que se pode encontrar problemas que desafiam a curiosidade e um campo propicio para o desenvolvimento de habilidades. Os demais capítulos, inclusive o de congruências, seguem a mesma abordagem.

5.1.6 SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. *Teoria dos Números*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2 ed., 1999.

Grande parte do material do livro, segundo os autores, foi usada por eles, em diversas ocasiões na Universidade de Brasília, embora não explicitem em que nível ou cursos. No prefácio, apresentam a Teoria dos Números como o estudo dos inteiros e de suas relações e propriedades, pontuando que a pesquisa na área, hoje, é efervescente, com muitos resultados importantes tanto para a matemática pura como aplicada. Consideram essa obra como uma introdução à Teoria dos Números, num nível elementar, principalmente os quatro primeiros capítulos, indicando-os para um curso básico de graduação de um semestre. Os três últimos capítulos são mais avançados e indicados para um curso de pós-graduação. Não fazem qualquer menção a estratégias e metodologias de utilização. Afirmam que a leitura da obra não exige nenhum pré-requisito. São abordados os seguintes conteúdos:

1.Divisibilidade: princípio da indução finita; divisibilidade; os números primos.
2. Conceitos algébricos: relação de equivalência; as operações módulo *m*; grupos, anéis e corpos; o anel dos polinômios.
3. As equações de congruência: introdução, as equações de grau um; sistemas de equações de grau um; equações de grau maior que um; o teorema de Chevalley.
4.Reciprocidade de Gauss: raízes primitivas; índices; reciprocidade quadrática de Gauss
5. Os números *p*- Ádicos: os inteiros *p*- Ádicos*;* os números *p*- Ádicos; convergência em Q_p; os quadrados de Q_p; formas quadráticas diagonais.
6. Soma de quadrados: método de Fermat; soma de quatro quadrados; o método de Minkowski.
7. Noções sobre curvas elípticas: introdução; as retas racionais; as cônicas racionais; as cúbicas racionais; o teorema de Mordell; conclusões e exemplos.

O primeiro capítulo, destinado ao estudo de divisibilidade, contém, segundo os autores, assuntos básicos e indispensáveis a qualquer estudo que se queira fazer de Teoria dos Números. Assim, abordam o princípio da indução matemática; o algoritmo da divisão; a definição de m.d.c e de m.m.c; o algoritmo de Euclides para o m.d.c.; a definição da equação diofantina de primeiro grau a duas variáveis e sua resolução; números primos e o teorema fundamental da aritmética. Todos esses assuntos são tratados em 20 páginas, de forma clara, porém concisa, retratando a suposição de que os alunos tragam da escola básica conhecimentos e habilidades que lhes permitam desenvolver, sem dificuldades, esses temas de uma forma axiomática.

A abordagem é estrutural-formalista, embora no capítulo sobre divisibilidade não haja referência às estruturas algébricas. Os autores inserem comentários, inclusive históricos, e observações a respeito dos temas, como também exemplos e exercícios que permitem que os estudantes possam fazer uma "ponte" com o que aprenderam na escola básica.

5.2 Análise dos livros do segundo grupo

5.2.1 MILIES, C. P.; COELHO, S. P., *Números: uma introdução à matemática*. 3.ed. São Paulo: EDUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

O livro é resultado de notas de aulas, no período de 1977 a 1980, do curso de Álgebra 1, ministrado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. No prefácio, os autores manifestam a preocupação com a familiarização do estudante com o método axiomático, afirmando que irão adotar como estratégia para atingir esse objetivo, a apresentação de uma grande quantidade de demonstrações. Afirmam, também, que a obra introduz muitas informações históricas com os seguintes objetivos: apresentar as motivações que levaram ao desenvolvimento dos temas tratados, procurando mostrar a sua importância; dar uma formação ao estudante, que visa não só ao domínio de aspectos técnicos de um conteúdo, mas também ao conhecimento do contexto histórico de seu desenvolvimento.

Quanto aos conceitos abordados, consideram-nos bem conhecidos do aluno. São tratados os seguintes temas:

1.Números Inteiros: introdução, uma fundamentação axiomática; o Principio da Indução Completa; o teorema do binômio.

2. Divisibilidade: algoritmo da divisão; numeração, ideais e máximo divisor comum; o algoritmo de Euclides; mínimo múltiplo comum; o teorema fundamental da aritmética; a distribuição dos primos.

3. Congruências: equações diofantinas lineares; congruências; resolução de congruências lineares; sistemas de congruências lineares; os teoremas de Fermat, Euler e Wilson; inteiros módulo *m*.

4. Números racionais: relações de equivalência; construção de Q.

5. Apêndice: Número natural: axiomática de Peano; a construção dos números inteiros.

No Capítulo 1, os autores introduzem os números inteiros, iniciando com algumas notas históricas acerca do desenvolvimento dos números. Reconhecem que a maioria dos livros apresenta o conhecimento matemático organizado de tal forma que não deixa transparecer o processo de construção desses conhecimentos, dando uma falsa idéia da natureza da matemática. No entanto, manifestam que é esse o caminho que também eles irão adotar. Assim os números inteiros são introduzidos de uma forma axiomática, através de alguns axiomas, referentes às operações de adição e de multiplicação e à relação de ordem.

O princípio de indução completa é um dos temas apresentados, sendo introduzido com uma breve diferenciação entre indução empírica e indução matemática. A importância dessa ferramenta para a demonstração de proposições definidas para números inteiros e as situações em que ela deve ser utilizada são apresentadas, mas não se dá ênfase ao fato de que a indução é algo próprio ao trabalho com os números inteiros, podendo, assim, ser considerada um elemento caracterizador desse conjunto. Caberá ao leitor fazer essas inferências acerca desse fato, dado que de alguma forma ele está presente no texto.

O mesmo pode ser observado para o método de recorrência, bastante utilizado, mesmo na escola básica, no estudo de vários assuntos como potências de expoentes inteiros não negativos, fatorial, somatórios, progressões aritméticas e geométricas, dentre outros. Esses tópicos são apresentados, nesse capítulo, como exemplos ou como exercícios, supondo que o aluno já tenha conhecimento suficiente deles. O teorema do binômio mereceu um destaque maior, com vários exercícios, inclusive, alguns que não envolvem demonstrações. Em número muito reduzido, são as tarefas em que o aluno tem que fazer investigações, isto é, formular conjecturas, testar e refinar estas conjecturas, fazer generalizações e daí fazer tentativas de provas, embora seja esse um tema propicio para esse objetivo.

O capítulo 2 trata do estudo de divisibilidade. É introduzido com a equação $bx = a$, com a e b inteiros, cuja solução no conjunto dos inteiros depende dos valores de a e b. Em seguida, define-se divisor de um número inteiro e demonstra-se uma série de propriedades elementares da divisibilidade. Introduz-se o estudo do algoritmo da divisão, a partir de um exemplo numérico, fazendo-se posteriormente a demonstração. Os sistemas de numeração são introduzidos com uma rápida abordagem histórica, usando-se, em seguida, o teorema da divisão para provar que todo número inteiro pode ser representado de maneira única, numa base $b \geq 2$. O que se entende por base não é discutido.

Os critérios de divisibilidade são propostos como exercícios suplementares, para serem demonstrados, a partir da representação do número inteiro positivo na base 10. O estudo do máximo divisor comum é feito, em seguida, considerando o estudo de ideais. Introduz-se o algoritmo de Euclides axiomaticamente, para depois mostrar como ele pode ser usado em um caso particular. Uma analogia interessante é feita, relacionando o papel dos números primos na aritmética e o papel dos átomos no estudo da estrutura da matéria. O teorema fundamental da aritmética é abordado em seguida de forma estritamente axiomática, com algumas notas históricas, assim como o item sobre a distribuição dos primos. A introdução às equações diofantinas do tipo $ax + by = c$ é feita no capítulo sobre congruências.

Desse modo, podemos observar que, embora os autores tenham a consciência de que a evolução do conhecimento matemático não se dá de forma sistematizada, partindo de axiomas e demonstrando ordenadamente as propriedades subseqüentes, preferem mantê-la, inserindo apenas algumas notas históricas, o que não poderia ser caracterizado como uma abordagem histórica dos conteúdos tratados.

Quanto ao fato de iniciar com um capítulo sobre os números inteiros, é uma proposta interessante, pois os temas tratados neste capítulo e no de divisibilidade abordam conteúdos presentes na escola básica. No entanto, como os autores fizeram opção por uma abordagem estritamente axiomática, há poucas oportunidades para o aluno associar o conhecimento “novo” com o “antigo” e com o que deverão ensinar.

Tomando como referência a *praxeologia matemática* definida por Chevallard, que une a prática matemática e o discurso teórico que a sustenta, procurei verificar o gênero das tarefas propostas pelos autores, no capítulo referente à introdução dos números inteiros e no que trata da divisibilidade. Coerente com o objetivo colocado, que é o de familiarizar o aluno com o método axiomático, há uma predominância de tarefas do gênero provar. De 146 tarefas propostas nos dois capítulos referidos (incluindo os exercícios suplementares), 89, ou seja, 60% são do gênero provar; 14, o que corresponde a 10% , são do gênero demonstrar; 8, ou 5%, do gênero mostrar; 32, ou 22%, do gênero escrever, calcular ou determinar; apenas 3, ou seja, 2%, são do gênero verificar a veracidade de uma proposição. Desta forma, as técnicas, isto é, o saber fazer, envolvem uma noção paramatemática, a demonstração formal, que, não sendo um objeto matemático, acaba por não ser um objeto de ensino, colocando-nos uma questão crucial, neste tipo de abordagem: como os alunos aprendem a demonstrar? Seria por imitação, observando demonstrações feitas e fazendo muitas outras? Podemos, assim, observar que as tecnologias, discurso racional sobre a técnica, são algo que fica implícito, o que pode ser uma das causas das dificuldades dos alunos com relação a estes tipos de tarefas. Embora os autores em algumas delas usem o comando provar, em outras demonstrar e ainda mostrar, não fazem nenhum comentário a respeito deles, o que nos leva a inferir que não fazem diferenças entre eles.

As teorias, constituídas de definições e teoremas, são apresentadas no texto, aliás, não em função de uma tarefa, pois precedem qualquer tarefa, o que pode acarretar um afastamento dos dois aspectos: a *práxis* e o *logos*. Assim, podemos dizer que a abordagem é formalista clássica, o que conduz a um ensino tradicional, em que inicialmente são apresentadas as definições e as propriedades, ou seja, a teoria, e, depois, as tarefas, que raramente são dos tipos investigação[42] ou exploração, segundo classificação de Ponte (2003).

Pelo modo como as demonstrações são feitas, mesmo em se tratando de provas de proposições simples, os autores parecem supor que o estudante tem familiaridade com o método axiomático, propondo, após a demonstração de alguns poucos teoremas, uma grande

[42] Consideraremos atividades de investigação aquelas que são abertas em que o aluno tenha que procurar regularidades, formular, testar e validar conjecturas, generalizar, provar ou demonstrar.

quantidade de exercícios, a maioria envolvendo mostrar, provar, demonstrar, como registramos anteriormente.

Assim, podemos observar o que Chevallard considera uma ilusão de naturalidade das técnicas próprias de uma instituição I, no caso das técnicas próprias da comunidade dos matemáticos. Fazer assim é natural, e outras alternativas não são aceitáveis ou não são cogitadas. Apenas estas são institucionalmente reconhecidas. No entanto, é preciso lembrar que a Instituição na qual a atividade matemática apresentada no livro didático se desenvolve é outra. Trata-se de uma Instituição de ensino, ainda que seja de ensino superior.

Mesmo sendo um livro também destinado a alunos de licenciatura em matemática, podemos perceber que a transposição didática dos temas tratados é tímida, ainda cautelosa, muito mais próxima do saber sábio do que do saber escolar que o licenciado deverá ensinar. Por esse motivo, acreditamos que o conhecimento pedagógico do conteúdo, como descrito por Shulman, esteja presente também de maneira tímida, pois há poucos exemplos (a não ser de demonstrações), poucos contra-exemplos, analogias e representações diversas para os problemas. Como as tarefas propostas, em sua maioria são demonstrações, poucas são as oportunidades para o desenvolvimento de habilidades, tais como conjecturar, aplicar, generalizar, necessárias à prática docente.

No entanto, voltamos a reafirmar, a abordagem é coerente com o objetivo da obra, qual seja, o de familiarizar o aluno com o nível de rigor necessário ao desenvolvimento da matemática superior, através da resolução de uma grande quantidade de exercícios.

5.2.2 SIDKI, S., *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.

É uma obra também patrocinada pela IMPA, preparada para o 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, em 1975. O objetivo da publicação é apresentar alguns aspectos da Teoria dos Números, considerados elementares. Não há uma destinação específica para um determinado curso, mas o autor aponta como pré-requisito para o seu estudo um curso de Álgebra Moderna, como o apresentado por Jacy Monteiro e os primeiros cursos de Cálculo. Sobre a Teoria dos Números, afirma que o seu charme foi muito cantado pelos matemáticos, e, sobre a sua importância, destaca que uma parte apreciável da árvore matemática brotou dos números inteiros.

São tratados os seguintes assuntos:

1.Divisão: divisibilidade, representação posicional dos inteiros; m.d.c e m.m.c. – algoritmo euclidiano; teorema fundamental da aritmética; a função do maior inteiro.
2. Problemas sobre primos: a seqüência dos primos – alguns problemas famosos; o número de primos; saltos entre primos; $\sum 1/p_i$ é divergente; primos gêmeos; Progressões Aritméticas, a distribuição dos primos, Conjectura de Goldbach; fatorização em $Z[\sqrt{n}]$ e K[x]
3..Congruências: congruências (sistema completo de resíduos, prova dos noves fora, cancelamento, inversos módulo *m*, Teorema de Wilson, Teorema de Fermat – Euler); resolução de congruências; congruências de graus gerais; a função de Euler.
4. O anel Z_m: estrutura quociente de Z; estrutura de anel Z_m; U (m); a expansão decimal de m/n.
5. Reciprocidade quadrática.
6. Equações diofantinas.

Como não há um objetivo explícito de destinação da obra para um dado curso ou nível de ensino, o autor considera os números inteiros como "dados", iniciando com o estudo da divisão, no primeiro capítulo. Trata do que é essencial sobre a divisibilidade: a relação *a* divide *b*, o algoritmo da divisão, a representação dos inteiros numa base *a*, a generalização de alguns critérios de divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, o teorema fundamental da aritmética. O capítulo 2 é dedicado a problemas com números primos, infinitude, densidade dos primos e fatorização, exigindo alguns pré-requisitos, principalmente do cálculo diferencial e integral.

A abordagem é formalista e tradicional, incluindo alguns comentários e notas históricas. Embora no capítulo 1 o autor trate assuntos abordados na escola básica, e chegue a afirmar que são noções que o estudante conheceu na infância (p. I - 13), a "ponte" do conhecimento "novo" com o "anterior" fica a cargo do estudante, que poderá percebê-la ou não, uma vez que as abordagens são diferentes.

Em termos da *praxeologia matemática* apresentada, também no caso desta obra, há a predominância de tarefas do gênero mostrar. De 25 exercícios propostos no capítulo 1, onde estão tratados os temas que estamos focando na análise, 11 (44%) são do gênero provar, 5 (20%) do gênero demonstrar e 9 (36%) dos gêneros determinar, calcular, aplicar. Esse autor não usou o comando provar, preferindo, na maioria das tarefas, o termo *mostrar*. Não são propostas tarefas de investigação ou de exploração. As observações feitas em relação à *praxeologia* adotada no livro anteriormente analisado permanecem em relação a este, como a questão das técnicas e a da apresentação das tecnologias e da teoria precedendo as tarefas.

Fica, assim, evidente a preocupação com a apresentação do conteúdo matemático sistematizado, mas não com o seu ensino.

5.2.3 DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991

O livro é resultado do curso de Teoria dos Números, ministrado na Unesp, *campus* de São José do Rio Preto, na graduação em matemática. O objetivo do autor é apresentar uma obra para estudantes e professores de matemática, inclusive os do ensino médio. Por esse motivo, manifesta que há uma preocupação com o aspecto didático, buscando justificar algoritmos utilizados pelos alunos na escola, desde cedo, mas de forma mecânica. Segundo o autor, não há exigência de pré-requisitos para a leitura do texto, pois procurou torná-lo auto-suficiente.

Apresenta o capítulo I como uma introdução histórica à aritmética, por considerar que há *ligações quase orgânicas entre as origens da matemática e da aritmética.* Segundo o autor, a Teoria dos Números é abordada nos capítulos II e III, num nível básico e elementar. Nos capítulos IV e V, são tratados os números racionais, chegando ao conjunto dos números reais, no capítulo V. Os conteúdos abordados nesses capítulos são:

Capítulo I: Números, sistemas de numeração: introdução histórica.
Capítulo II: Os números naturais: introdução; operações – relação de ordem; indução; divisibilidade em N; sistemas de numeração posicional - base; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum; números primos; a função sigma e números perfeitos; os ternos pitagóricos; a seqüência de Fibonacci.
Apêndice I – Axiomas de Peano.
Capítulo III: Os números inteiros: números negativos; os inteiros; operações e relação de ordem em Z; indução; valor absoluto; aritmética em Z; equações diofantinas lineares; congruências; congruências lineares; sistemas de congruências; a função de Euler; restos quadráticos – Teorema de Wilson; raízes primitivas.
Apêndice II – Construção lógico-formal do conjunto dos números inteiros.
Apêndice III – Aritmética módulo m.
Capítulo IV: Os números racionais: introdução; a divisão em Z; números racionais: construção, operação, relação de ordem; valor absoluto; a função maior inteiro (sobre Q); números racionais decimais.
Capítulo V: Os números reais: medidas de um segmento; cortes em Q; os números reais; a representação geométrica de R; seqüência de números reais; séries infinitas de números reais; representação decimal de um número real; a teoria da representação decimal em Q.

No capítulo I, conforme proposto, o autor faz uma abordagem histórica sobre a evolução da contagem e o conceito de número natural; sobre sistemas de numeração utilizados por algumas civilizações; sobre os números figurados, situando-os no contexto da escola pitagórica. Ainda que não seja um capítulo específico de Teoria dos Números, pensando na formação do professor de matemática para a escola básica, consideramos que é interessante, porque dá oportunidades ao licenciando de rever conteúdos já estudados, possibilitando ampliar a compreensão sobre esse tema que está presente naquele nível de ensino. Pode, ainda, desenvolver a curiosidade sobre o estudo da Teoria dos Números e também desenvolver habilidades de generalizar, de argumentar, de demonstrar algebricamente um resultado. O objetivo didático que o autor apresenta pode ser observado neste capítulo, embora não haja a necessidade de que se constitua em um estudo a parte, podendo ser inserido em outros momentos, como parte do conhecimento pedagógico do conteúdo.

No capítulo II, são abordados os números naturais. Conforme afirma o autor, não é feita uma construção lógica de N, o que pode ser encontrada no Apêndice I, onde se introduz a axiomática de Peano. Como embasamento teórico para a aritmética dos naturais, considera as propriedades da adição e da multiplicação em N. Define a relação de ordem em N e demonstra algumas propriedades relacionadas com essa relação. Introduz, em seguida, a indução, sem qualquer referência ao que ela representa, limitando-se à abordagem formal. Ao utilizar o princípio da indução como ferramenta para fazer demonstrações, parece supor que o aluno já tenha familiaridade com esse instrumento. Propõe uma série de exercícios em que o estudante terá que usar o princípio da indução, sem qualquer comentário sobre a sua utilização. Ainda no item sobre indução, trata a definição por recorrência, definindo, por esse processo, a adição e a multiplicação de m ($m \geq 2$) números naturais, usando a notação de somatório e de produtório. Usando o método de recorrência, define também a potência *n-ésima* de a, sendo a e n, números naturais e $a \neq 0$.

A abordagem da indução e do método de recorrência não é coerente com o objetivo didático proposto, pois o tratamento dado ao assunto supõe que se trata de algo conhecido dos alunos e não explora a oportunidade de desenvolver outras habilidades, por exemplo, através de tarefas favorecidas por esse assunto, como as do tipo exploração ou investigação. Como também não aborda outros conceitos que podem ser definidos por recursão, dos quais os alunos têm algum conhecimento da escola básica e os quais os futuros professores deverão ensinar, como é o caso das progressões aritméticas e geométricas, a noção de fatorial, o binômio de Newton. A ênfase parece cair, neste item, na notação de somatório e de produtório.

Neste capítulo, também é abordada a divisibilidade em N, iniciando com a definição de divisor e com algumas propriedades da relação $x \mid y$ em N. Em seguida, discute-se o algoritmo da divisão, utilizando várias representações, formal, geométrica, numérica, algorítmica. Retoma a questão dos sistemas de numeração posicionais e da base, sem, contudo, referir-se ao estudado no capítulo I. Explora a mudança de uma base para outra e a adição e a multiplicação em qualquer base, como análogas à base 10. Os critérios de divisibilidade são apresentados como algo bem conhecido pelos estudantes, mas o autor se preocupa em justificá-los, usando a representação de um número natural na base 10. Os exercícios propostos, sobre divisibilidade, não se limitam a demonstrações.

O máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e números primos são os próximos assuntos tratados no capítulo II. Também a abordagem não é estritamente formal, sendo que o autor faz várias "pontes" entre o conhecimento "antigo" e o "novo", o mesmo ocorrendo com os exercícios propostos. Trata, ainda, os números perfeitos, números de Mersenne, ternos pitagóricos e seqüência de Fibonacci e as propriedades aritméticas dos números que a compõem.

Em relação á organização matemática deste capítulo, ou seja, a *praxeologia* adotada, considerando os gêneros de tarefas, há uma maior diversificação em relação às obras anteriores, embora a abordagem da teoria e das tecnologias ainda seja formalista e tradicional, iniciando pelas definições e pelos teoremas, seguindo-se os exemplos e as tarefas. De 114 tarefas propostas, 38 (33%) são do gênero provar; 20 (18%) são do gênero mostrar, em apenas 2 (2%) usa o comando demonstrar; 44 (38%) são do tipo calcular, escrever, determinar, resolver; apenas 6 (9%) são do gênero verificar a veracidade, estabelecer condições, generalizar e justificar. O autor resolve várias tarefas, sendo que, para outras, apresenta sugestões, geralmente para aquelas que poderiam trazer maiores dificuldades para os alunos, ou melhor, para aquelas cujas técnicas / tecnologias disponíveis não seriam suficientes.

No capítulo III, são abordados os números inteiros, de modo análogo ao que foi feito com os naturais, estendendo os conceitos para esse novo campo e tratando as ampliações possíveis que essa extensão permite. Neste capítulo, também são abordadas as equações diofantinas lineares com duas e com três incógnitas, propondo exercícios, usando diferentes representações, inclusive várias situações-problema cujas resoluções dependem de uma equação diofantina. Ainda no capítulo III, o autor trata o estudo de congruências lineares, incluindo sistemas de congruências e o teorema chinês do resto[43], a função de Euler, restos quadráticos e o teorema de Wilson.

A abordagem desses assuntos é formal, tradicional. Entretanto, o autor se utiliza de exemplos numéricos, de dados históricos, de exemplos ligados a assuntos que os alunos podem já ter estudado na escola básica, como os critérios de divisibilidade e a prova dos noves para as operações fundamentais com números naturais, justificadas a partir da representação na base dez ou usando congruência. Com relação às tarefas deste capítulo, excetuando-se as referentes ao estudo de congruências, de 93 propostas, 49 (53%) são do gênero provar; 22 (24%) do gênero mostrar; em apenas uma é solicitado demonstrar; 21 (22%) são do gênero calcular, escrever, determinar, resolver. Deste modo, percebemos que também não estão presentes tarefas do tipo exploração ou investigação.

Quanto à forma de distribuição dos assuntos, os capítulos são longos. Por exemplo, o segundo é praticamente um curso de teoria elementar dos números. Outro aspecto que mereceria ser mais bem estudado é a separação do estudo dos naturais e dos inteiros, o que poderia exigir um curso mais longo, mas que, por outro lado, poderia trazer alguma vantagem que o autor não explicita.

Podemos concluir que, nos capítulos analisados dessa obra, conforme relatado anteriormente, embora a abordagem seja formalista e tradicional, há uma preocupação com a transposição didática dos temas abordados e a explicitação de objetivos de ensino, manifestadas pelo autor no prefácio e que podem ser observadas na apresentação da maioria dos temas. Podemos identificar, inclusive, vários elementos de aproximação com o saber escolar, embora não sejam exploradas todas as possibilidades, como apontamos, por exemplo, em relação ao estudo da indução matemática. Desta forma, podemos dizer, também, que há elementos que podem ser identificados como pertencentes à categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo, conforme descrito por Shulman, como notas históricas, exemplos, analogias e varias representações para os objetos matemáticos tratados.

5.2.4 HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[43] Alguns autores, como Domingues e Milies e Hefez usam Teorema Chinês do Resto, e outros, como Sidki e Shokranian e Niven, usam Teorema do Resto Chinês.

O livro é fruto de notas de aula de um curso semestral de Aritmética, ministrado pelo autor em 2003, no âmbito do *Projeto de Melhoria de Ensino da Matemática no Estado do Rio de Janeiro*, organizado pela Sociedade Brasileira de Matemática e patrocinado pela FAPERJ.

Destina-se a um primeiro curso de Aritmética na graduação em matemática como também à formação continuada de professores do ensino fundamental e médio. O autor afirma acreditar que, embora os temas tratados no livro não sejam abordados da mesma forma na escola básica, constituem parte da *bagagem mínima* de todo professor de matemática. É interessante observar na destinação da obra que, ao mesmo tempo em que ela é indicada para um primeiro curso de Aritmética, é também indicada para a formação continuada de professores, o que leva a inferir que o autor pensa que os professores em exercício ou não tiveram em seus currículos esses conteúdos ou os tiveram de forma inadequada ao exercício da docência.

O objetivo manifestado pelo autor é o de *estudar as propriedades dos números naturais, junto com suas operações de adição e de multiplicação, enfatizando as questões relacionadas com a divisibilidade.*

Hefez concebe a Aritmética como sendo a parte elementar da Teoria dos Números. Assim, trata no livro os seguintes assuntos:

1. Os números naturais: adição e multiplicação; subtração; axioma de indução.
2. Aplicações da indução: definição por recorrência; binômio de Newton; propriedade da boa ordem; aplicações lúdicas.
3. Divisão nos naturais: divisibilidade; divisão euclidiana; a aritmética na Magna Grécia.
4. Representação dos números naturais: sistemas de numeração; jogo de Nim.
5. Algoritmo de Euclides: máximo divisor comum; propriedades do mdc; mínimo múltiplo comum.
6. Aplicações do máximo divisor comum: equações diofantinas lineares; expressões binômias; números de Fibonacci.
7. Números primos: teorema fundamental da Aritmética; sobre a distribuição dos números primos; pequeno teorema de Fermat; o renascimento da Aritmética.
8. Números especiais: primos de Fermat e de Mersenne; números perfeitos; decomposição do fatorial em fatores primos; Euler, um gigante da matemática.
9. Congruências: aritmética dos restos; aplicações; congruências e números binomiais; Gauss, um príncipe da matemática.
10. Os teoremas de Euler e Wilson: teorema de Euler; teorema de Wilson.
11. Resolução de congruências: resolução de congruências lineares; teorema chinês dos restos; congruências quadráticas; lei da reciprocidade quadrática.

O autor sugere que, por limitação de tempo, os assuntos – jogo de Nim; expressões binômias; números de Fibonacci; números perfeitos; decomposição do fatorial em fatores primos; congruências e números binomiais, congruências quadráticas; lei da reciprocidade quadrática – possam ser omitidos, o que não comprometeria a compreensão do todo.

No início do capítulo 1, sobre os números naturais, o autor afirma que a abordagem será axiomática, considerando as operações de adição e de multiplicação como bem definidas, e as suas propriedades básicas, como axiomas. Neste capítulo trata, ainda, da indução matemática, introduzindo-a de forma axiomática, destacando como uma propriedade que só os naturais possuem, apresentando-a através de uma analogia com uma situação não matemática e alguns exemplos.

No capítulo 2, denominado de *aplicações da indução*, trabalha a definição por recorrência, abordando vários assuntos que são do conhecimento do aluno desde a escola básica, como: somatório; fatorial; potenciação e suas propriedades básicas e o binômio de Newton. As progressões aritméticas e geométricas que também poderiam estar dentre eles foram colocadas como exercícios no tópico sobre indução, para que o estudante prove a fórmula do termo geral e a da soma de n termos. No final do capítulo, traz algumas situações a que chamou de lúdicas, incluindo a Torre de Hanói e a Seqüência de Fibonacci. Na organização da atividade matemática destes dois primeiros capítulos, quanto ao tipo de tarefas, de 21 tarefas propostas 16 (76%) são do tipo mostrar, o autor não usou provar ou demonstrar; 2(10%) são tarefas do tipo calcular; 3 (14%) do tipo conjecturar e generalizar. Embora a organização praxeológica seja axiomática, há uma maior proximidade com a matemática escolar, apresentando, de uma outra forma, tecnologias e teorias de assuntos já estudados pelos estudantes na escola básica, permitindo-lhes, assim, ampliar o que já foi construído ou, ainda, associar o conhecimento "novo" ao "antigo". Além disso, há elementos que apontam para a presença do conhecimento pedagógico do conteúdo, como exemplos diversos, analogias, aplicações extra-matemáticas, inclusive atividades lúdicas.

Nos capítulos 3, 4, 5 e 6, o autor trata a questão da divisibilidade, com uma abordagem formalista clássica. Quanto ao tipo de tarefas, são propostas 90, das quais 52 (58%) são do gênero mostrar; 29 (32%) dos gêneros calcular, resolver ou determinar; 7 (8%) de conjecturar ou discutir; 1 (1%) de gênero generalizar, e 1 (1%), justificar. Ainda que a maioria das tarefas seja do gênero mostrar, nota-se uma variedade maior em relação à maioria das obras analisadas, aparecendo, inclusive, tarefas que conduzem ao desenvolvimento de outras habilidades como discutir, generalizar e conjecturar, ou seja, tarefas que poderão ser tratadas como de exploração ou de investigação. Há a presença de facilitadores técnicos e metodológicos, como notas de rodapé, esclarecendo algum aspecto do que está sendo apresentado, ou indicando fontes para ampliar o estudo; informações históricas sobre os assuntos tratados; exercícios suplementares; alguns exemplos interessantes e mesmo lúdicos, como o Jogo de Nim, para ilustrar o uso do algoritmo da divisão. Podemos afirmar que há a presença de elementos do conhecimento pedagógico do conteúdo, também, nestes capítulos.

No capítulo 4, em que trata a representação dos números naturais, associa o conhecimento “anterior” com o “novo”, partindo do que o aluno já sabe, o que não ocorre em outros capítulos, como no que aborda o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum e o capítulo sobre números primos.

As equações diofantinas lineares aparecem como aplicações do m.d.c. no capítulo 6, com foco na resolução da equação, ficando a sua utilização na resolução de problemas, inclusive extra-matemáticos, como exercícios, o que constitui marcas de uma abordagem tradicional.

Os números primos, considerados pelo autor como um dos conceitos mais importantes de toda a matemática, a distribuição dos primos e o pequeno teorema de Fermat são apresentados no capítulo 7, e números primos especiais, no capítulo 8. A apresentação e a discussão de números especiais, como o de Fermat e o de Mersenne, é interessante, pois pode conduzir a atividades de exploração ou de investigação, assim como a apresentação de problemas que ainda estão em aberto.

Quanto ao tipo de tarefas, nestes capítulos há a predominância de tarefas do gênero mostrar, de 47 tarefas, 34 (72%) são deste gênero e 4 (8,5%) do gênero provar; 4 (8,5%) do gênero calcular, determinar, e apenas 1 de cada um dos tipos conjecturar, generalizar e verificar a veracidade. Os demais capítulos tratam da congruência e dos teoremas de Euler, Wilson e o teorema chinês do resto.

Assim, o livro de Hefez tem como um dos objetivos a formação do professor, inicial ou continuada, representando já um avanço, no sentido da transposição didática dos temas tratados, buscando em alguns pontos aproximá-los do saber escolar. Traz para o texto temas que o futuro professor, no caso da formação inicial, já estudou na escola básica, os quais deverá ensinar, fundamentando-os, possibilitando-lhes uma visão mais ampliada deles. Há elementos que podem ser identificados com o conhecimento pedagógico do conteúdo, como: exemplos, atividades lúdicas, analogias, problemas interessantes, informações históricas, embora a abordagem seja formalista. A questão das técnicas e das tecnologias necessárias para realizar as tarefas do tipo mostrar ou provar (muito raramente, o autor usa demonstrar), apresentada anteriormente, permanece, pois podemos perceber também nessa obra, a naturalização dessas técnicas e tecnologias.

O autor indica o que considera essencial para um curso semestral, embora, saibamos que, dependendo de outros fatores, tais como: conhecimento prévio dos alunos sobre os temas; tempo disponível para estudo; familiaridade com o método axiomático; carga horária; semestre em que está alocado o curso, o que foi proposto e da forma como o foi é inviável, neste tempo. Como o livro trata apenas dos números naturais, também pode ser colocada, neste caso, a questão de abordar separadamente os naturais para depois estender para os inteiros. Em que momento essa extensão seria feita, no caso da adoção desta obra, para um curso inicial de Teoria dos Números?

5.3 O que mostraram os livros didáticos

Pudemos observar que os livros nacionais analisados são fruto do esforço para atender à necessidade de criação de uma literatura científica brasileira, com a publicação de obras voltadas para atender ao ensino superior. Essa preocupação foi manifestada por Elon Lages de Lima, ex-diretor do IMPA, no prefácio do livro de Jacy Monteiro. Assim é que seis deles têm vinculação com o IMPA ou com a Sociedade Brasileira de Matemática.

A maioria dos livros é resultado de notas de aulas, ministradas pelos autores, nos cursos de matemática, em universidades brasileiras. No entanto, dos livros analisados, em apenas três, LeVeque, Domingues e Hefez (2005), os autores afirmam explicitamente que a obra se destina também à formação de professores, embora possamos deduzir que, ao se referirem a cursos de matemática, estejam incluindo a licenciatura. A metade das obras foi escrita nas décadas de 1960 e 1970, e as demais, na década de 1990, e uma, em 2005.

A maior parte dos autores se preocupa em caracterizar a Teoria dos Números, seja como parte da álgebra; ou como o estudo dos números inteiros, sendo estes tomados como exemplo natural de algumas estruturas algébricas; ou como fonte de problemas para outros campos da matemática; ou como aritmética, no caso da teoria elementar dos números; ou como fonte de problemas curiosos, embora alguns dos livros analisados sejam de Álgebra, com ênfase nas estruturas algébricas, contendo algum capítulo relacionado ao estudo dos números inteiros.

LeVeque teve a preocupação de dedicar um capítulo à caracterização da Teoria dos Números, agrupando os problemas tratados em três categorias, ponderando que essa classificação é aproximada e não exclusiva, o que já foi abordado no capítulo 3.

Alguns autores preferiram usar no título a denominação *aritmética*, como o fez Hefez (2005), usando *Elementos de Aritmética,* tratando apenas dos números naturais, enfatizando as questões relacionadas com a divisibilidade, pois considera que a aritmética é a parte elementar da Teoria dos Números. Domingues também usou *Fundamentos de Aritmética,* ao invés de Teoria dos Números, pois não se limitou a tratar o conjunto dos inteiros.

Embora sejam livros didáticos, também não encontramos, na maioria deles, no prefácio e nos capítulos analisados, justificativas explícitas para o ensino de Teoria dos Números nos cursos de matemática, a não ser referências à sua importância dentro da própria matemática, o que nos leva a inferir que se concebe um ensino de matemática pela matemática. Fica claro, contudo, que é *locus* para o exercício da prova, pois são predominantes as tarefas deste gênero, embora haja poucas oportunidades para o desenvolvimento de outras habilidades como a de conjecturar, a de generalizar, a de discutir a veracidade de uma afirmação, dentre outras. Hefez (2005) se refere aos assuntos estudados como componentes da *bagagem mínima* de matemática necessária ao professor para ensinar, e Milies e Coelho apontam para o objetivo de familiarizar o estudante com o formalismo que ele irá encontrar à medida que avança no estudo da matemática.

Também não há indicações de metodologias/estratégias para a utilização da obra, ou seja, não apontam orientações de cunho didático para que o estudante e mesmo o professor que utiliza o livro possam se guiar no desenvolvimento dos temas. Em LeVeque, apenas, conforme registramos anteriormente, encontramos uma sugestão para o trabalho com as demonstrações, quando indica que o leitor busque a essência do processo, para que as estratégias não sejam meros *truques*, mas que possam se constituir em métodos que o estudante poderá utilizar, quando lhe for solicitada esta atividade.

Todos os autores consideram os conteúdos abordados, elementares em Teoria dos Números, assuntos, de alguma forma, já conhecidos dos estudantes. Acreditam que a abordagem não exige pré-requisitos. Apenas Sidki faz referência à necessidade de um curso de álgebra e de um primeiro curso de cálculo, e Niven aponta a necessidade de um curso de Álgebra Linear e de Cálculo Avançado. Os livros são, assim, destinados à introdução da Teoria dos Números nos cursos universitários, ou seja, a um primeiro curso na área. Alguns deles sugerem tópicos que consideram essenciais e indicam outros que poderiam deixar de ser tratados sem comprometer o curso, como o fez Hefez (2005), ou ainda, tópicos que consideram elementares e tópicos não elementares, como o fizeram Shokranian e Niven.

Grande parte dos autores inicia com o estudo dos inteiros e de suas propriedades, exceto Hefez (2005), cuja obra se restringe ao estudo dos naturais, e Domingues, que inicia com os naturais para depois estender o estudo aos inteiros. De modo geral, os autores supõem os números naturais ou os inteiros como “dados”, considerando as propriedades fundamentais da adição e da multiplicação, como axiomas, trabalhando, ainda, com o princípio da indução matemática, com o método da recorrência e com o princípio da boa ordenação. Niven, Sidki, Leveque, Shokranian não dedicam um capítulo ao estudo destes tópicos, devem supor que o seu aprendizado já tenha sido consolidado na escola básica.

Todos os livros tratam das questões ligadas à divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, números primos, teorema fundamental da aritmética. A abordagem é quase que exclusivamente lógico-formal-dedutiva, inclusive, a maioria das tarefas propostas exige a demonstração de proposições apresentadas numa linguagem simbólico-formal. Deste modo, estão ausentes as tarefas de investigação ou de exploração, que poderiam aproximar a tarefa do aluno da tarefa do matemático, permitindo uma visão construtiva de matemática em que teoria e prática dialoguem e que possam ser compreendidas como componentes indissociáveis da atividade matemática, ou seja, como elementos constitutivos da *praxeologia matemática*. Outros assuntos são tratados em todos eles, como é o caso do estudo de congruências e equações diofantinas.

Pensando na formação do professor de matemática para a escola básica, retomar os conteúdos ligados aos inteiros, como a sua representação, as operações e suas propriedades e a divisibilidade, é de fundamental importância, pois são assuntos que estão presentes no ensino básico. No entanto, a supervalorização da abordagem lógico-formal-dedutiva pode distanciar esses saberes dos saberes escolares, não permitindo que o licenciando associe o que ele já sabe ao conhecimento que lhe é apresentado, isto é, o conhecimento “novo” ao “antigo”, reduzindo, assim, as oportunidades de que o licenciando possa discutir, refletir, repensar, reconstruir, ampliar os significados dos conhecimentos que deverá ensinar.

Sobre essa questão, Moreira (2004), analisando o conhecimento matemático do professor na formação e na prática docente na escola básica, especificamente em relação ao estudo dos números naturais, afirma que a discussão dos significados das operações com os naturais, a validade de suas propriedades básicas, as questões referentes ao sistema de numeração decimal, a compreensão dos algoritmos das operações, a divisão de números naturais e as questões ligadas à divisibilidade são parte importante dos saberes profissionais docentes. No entanto, na exposição dos conteúdos nos livros didáticos analisados, essas preocupações estão ausentes. Até mesmo nos exercícios propostos, são raras as oportunidades em que essas questões são apresentadas, já que a grande maioria deles exige a demonstração formal de alguma proposição. Assim, podemos nos posicionar, concordando com Moreira:

> Os matemáticos, na condição de produtores de conhecimento de fronteira, realmente não têm que se ocupar com a questão da construção do conceito de número e nem com a questão dos significados das operações elementares com os naturais. Contudo, o que pretendemos é mostrar que assumir a posição do matemático diante dessas questões e desenvolver o processo de formação matemática num curso de licenciatura a partir de um ponto em que o conjunto dos números naturais é considerado *dado*, juntamente com as operações de adição e multiplicação, significa desconsiderar questões postas pela prática profissional concreta, para a qual se pretende formar o licenciando. (MOREIRA, 2004, p.89)

Do mesmo modo, poderíamos pensar em relação a conteúdos como a indução matemática e a definição por recorrência, presentes em assuntos abordados no ensino médio, como em progressões aritméticas e geométricas, fatorial, números binomiais, que, na maioria dos livros analisados, são tratados de forma sucinta, às vezes apenas nos exercícios, supondo que o aluno já tenha domínio suficiente deles.

Ainda sobre esta questão de retomar o estudo dos números inteiros, é interessante ponderar que há um consenso, fundamentado, inclusive, nas avaliações sistêmicas, como ENEM e SAEB, e mesmo pelos resultados dos vestibulares, de que os alunos têm chegado aos cursos de licenciatura cada vez menos preparados. Por esse motivo, tanto educadores matemáticos, quanto professores que atuam na educação básica parecem ser favoráveis a que conteúdos do Ensino Médio sejam incluídos na licenciatura e tratados com maior profundidade, conforme detectado por Pietropaolo (2005). Este seria o caso dos assuntos enumerados acima. No entanto, nos livros didáticos analisados parece haver uma hipótese de que o conhecimento desses conteúdos esteja consolidado.

A concepção de matemática, neste caso a de Teoria dos Números, subjacente aos livros analisados, é a concepção formalista em que os conhecimentos matemáticos são construídos de forma lógica dedutiva, a partir de alguns conceitos primitivos e de algumas proposições consideradas verdadeiras (axiomas). Conseqüentemente, a abordagem dos conteúdos é axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, como se o estudante já tivesse familiaridade com o método dedutivo, especialmente com as demonstrações.

Deste modo, podemos perceber que o ensino desta área pode ser enquadrado, de acordo com Fiorentini (1995), na *tendência formalista clássica,* em que a ênfase é colocada na forma e não no significado dos conteúdos tratados, com base no modelo euclidiano. Nesse modelo se enquadram as abordagens de Hefez (2005), de Domingues, de Sidki e de Milies. Podemos perceber também em alguns manuais, como seria de se esperar, principalmente nos de álgebra, a *tendência formalista moderna,* ligada ao Movimento da Matemática Moderna.

Essa tendência dá ênfase aos aspectos estruturais, enfatizando o uso preciso da linguagem matemática, o rigor e as estruturas algébricas.

O ensino, nessas tendências, segundo Fiorentini, tende a ser livresco, centrado no professor, que exerce o papel de transmissor e de expositor do conteúdo, e a aprendizagem resultante da repetição de inúmeros exercícios, muitas vezes por imitação. Acrescenta, ainda, que, nessas tendências, *a significação histórico-cultural e a essência ou a concretude das idéias e conceitos ficariam relegados a segundo plano* (FIORENTINI, 1995, p.15).

Sobre essa forma de abordagem, quase que exclusivamente axiomática, alguns pontos merecem ser considerados. Um deles é a valorização do produto, e não do processo de produção, correndo-se o risco de o aluno perceber a matemática como um conhecimento pronto e a-histórico. Assim, alguns autores tentam amenizar esse risco, introduzindo notas históricas, o que provavelmente não alterará muito a concepção dos estudantes e a sua aprendizagem, pois a eles são apresentados resultados prontos na exposição dos conteúdos, e, nas atividades, a ênfase é colocada nas demonstrações de algo que já se sabe ser verdadeiro.

Outro aspecto diz respeito a uma hipótese que parece estar subjacente à forma como os autores expõem os conteúdos – a de que os alunos da licenciatura têm familiaridade com o método dedutivo, em particular com as demonstrações. É importante ponderar que, embora haja um consenso por parte dos educadores matemáticos e nos documentos oficiais vigentes de que a prova deva estar presente nos currículos da educação básica, podemos suspeitar que as experiências dos egressos do Ensino Médio sejam mínimas com relação a este aspecto, uma vez que mesmo os concluintes dos cursos de licenciatura em matemática têm apresentado grandes dificuldades nesse tema, conforme aponta Pietropaolo (2005).

Outro fato que corrobora essa suspeita, também apontado pelo mesmo autor, é o de que as provas não estão presentes em todas as coleções de livros didáticos do Ensino Médio, e, quando aparecem, não estão alicerçadas em um sistema axiomático no sentido mais estrito do termo.

Outro aspecto, também detectado por Pietropaolo, sobre o qual também há convergências, é o que se refere às dificuldades em se trabalhar com a demonstração, tanto dificuldades de natureza intrínseca, como de outra espécie, como a falta de motivação de alunos e professores, conduzindo inclusive a certo desânimo. Segundo Pietropaolo, essa dificuldade tem preocupado os educadores matemáticos, estando presente nos últimos congressos da área, como no ICME, realizado em 2004.

Assim, preocupa a naturalização desta abordagem, presente nos livros didáticos analisados, que são resultados de notas de aulas nos cursos de graduação em matemática, incluindo-se aí a formação de professores. Como o aluno da licenciatura, que teve pouca ou nenhuma experiência com esta abordagem no Ensino Médio, supera as dificuldades próprias desse trabalho, em situações em que ela parece ser natural e familiar? Esta é uma questão instigadora e que merece ser estudada, podendo trazer luz para as formas de se trabalhar a prova na educação básica.

Considerando a formação do professor da escola básica, um terceiro ponto que merece ser questionado com relação ao tratamento, exclusivamente, lógico-formal-dedutivo, diz respeito às competências que o professor em formação deve desenvolver, para que ele possa, na prática do ensinar matemática, trabalhar com seus alunos. Pires (2002) inclui dentre as competências específicas a serem construídas por um professor de matemática as seguintes: explorar situações problema; procurar regularidades; fazer generalizações; fazer conjecturas; pensar de maneira lógica; argumentar; comunicar-se matematicamente através de diferentes linguagens; compreender noções de conjectura, teorema, demonstração. A Teoria dos Números parece ser um campo propício para o desenvolvimento dessas competências. No entanto, nos livros analisados são raras as oportunidades em que o aluno é convidado a utilizar estas habilidades, pois o foco é colocado no conhecimento substantivo dos conteúdos, ficando o conteúdo sintático como algo naturalizado e restrito a um gênero de tarefa.

Ainda podemos inferir que os livros analisados tratam os conteúdos matemáticos na perspectiva da matemática científica, que exige definições precisas, demonstrações rigorosas e a abordagem axiomática, em que as demonstrações se apóiam em definições e provas desenvolvidas anteriormente, além de uma linguagem formal. Deste modo, acabam se constituindo num instrumento didático que contribui para o distanciamento entre a formação e a prática docente.

Como a maioria dos livros é fruto de notas de aulas em universidades brasileiras, os aspectos revelados neste capítulo permitem retratar qual Teoria dos Números vem sendo ensinada na formação dos professores.

Finalizando, entendemos que essa análise não é intrínseca aos objetos estudados, no caso, os livros analisados, mas uma avaliação realizada a partir de um certo ponto de vista, que é o uso desses manuais na formação do professor de matemática da escola básica.

CAPÍTULO 6

A TEORIA DOS NÚMEROS COMO SABER A ENSINAR – O QUE PENSAM OS PESQUISADORES DA ÁREA, OS EDUCADORES MATEMÁTICOS E PROFESSORES DA DISCIPLINA.

6.1 Introdução

Conforme descrevemos no capítulo referente à metodologia, as entrevistas foram realizadas com o objetivo de verificar como grupos acadêmicos, pesquisadores em matemática, em educação matemática e professores concebem o ensino de Teoria dos Números, buscando desvelar aspectos que justifiquem a sua presença na formação do professor de matemática da escola básica.

Para facilitar a leitura, vamos apresentar as questões e os seus objetivos:

PRIMEIRA QUESTÃO

> Campbell e Zazkis, pesquisadores em Educação Matemática, afirmaram:
>
> *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*
>
> Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.
>
> No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina.
>
> **Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos currículos?**

Essa questão tem o objetivo de investigar o pensar de pesquisadores e professores brasileiros, envolvidos com Teoria dos Números, acerca do papel que ela tem na Matemática, na História da Matemática e principalmente nos currículos escolares, a partir do que afirmaram Campbell e Zazkis, dois pesquisadores em Educação Matemática com vários trabalhos publicados sobre o ensino dessa área. Assim, buscar elementos para justificar a presença da Teoria dos Números nos currículos de matemática, em especial nos cursos de licenciatura, bem como elementos para compreendê-la como saber a ensinar.

Segunda questão

> Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**.**
> **Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

Essa questão tem como objetivo investigar elementos que possam clarear a relação entre Aritmética - Álgebra - Teoria dos Números: o que há de comum entre esses campos, as características próprias de cada um, para que se possa compreender a Teoria dos Números que é ou poderia ser ensinada na formação do professor de matemática da escola básica.

Terceira questão

> Estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a uma disciplina constituída dos seguintes conteúdos e objetivos:
> *Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.*
> Objetivos: familiarizar o aluno com a questão da prova em matemática; desenvolver a investigação matemática; discutir assuntos e questões sobre os números inteiros com as quais o professor poderá se defrontar em sua prática docente.
> **Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?**

O objetivo dessa questão é instigar os entrevistados a pensar sobre qual Teoria dos Números deveria ser concebida como um saber a ensinar, visando à formação do professor de matemática na licenciatura. Os elementos apresentados, conteúdos e objetivos foram levantados a partir da análise das propostas curriculares e dos livros didáticos.

Os entrevistados não foram identificados pelos seus respectivos nomes, mas por sobrenomes fictícios, iniciados com as primeiras letras do alfabeto. Essa opção de anonimato possibilita aos entrevistados maior liberdade de expressão, e ao pesquisador, realizar as análises sem constrangimentos de ordem ética. Assim o primeiro entrevistado foi identificado pelo sobrenome Avelar; o segundo, por Borges; o terceiro, por Cunha; o quarto, por Dias; o quinto, por Elias; o sexto, por Gomes, e o último, por Félix. Ao nos referimos a cada um deles, usaremos sempre o gênero masculino, independente do sexo.

Optamos por fazer uma análise de conteúdo de cada entrevista, buscando unidades de significado, inseridas nas concepções, crenças, conhecimentos e experiências de cada entrevistado, para em seguida fazer uma categorização, revelando convergências e modos próprios de ver a Teoria dos Números e o seu ensino.

6.2 Análise da Entrevista de Avelar

O entrevistado é autor de livro texto sobre Teoria dos Números, doutor em Matemática, com tese em Álgebra, professor e também pesquisador na área de Educação Matemática em uma instituição privada de ensino, tendo atuado também em uma instituição pública estadual.

Ao abordar a primeira questão, sobre o papel da Teoria dos Números na História da Matemática e nos currículos, a partir da afirmação de Campbell e Zaskis, afirma:

> Bem, eu concordo com eles, a Teoria dos Números tem papel central na História da Matemática e de alguma maneira é surpreendente que ela não ocupe lugar mais destacado nos currículos, em particular nos de licenciatura.
>
> Eu não sei se isso é devido a uma certa prioridade que as pessoas responsáveis pelos currículos dão às estruturas algébricas ou se, é ainda, um efeito retardado da Matemática Moderna que se reverteu sobre o currículo universitário também. (...)

Assim, o entrevistado concorda com Campbell e Zazkis quanto ao papel central que essa área tem na História da Matemática, embora não tenha focado esse aspecto. Preocupou-se mais com o papel da Teoria dos Números nos currículos, buscando razões para o fato de ela não ter um papel de maior destaque nos currículos da licenciatura em matemática. Assinala como causa uma possível conseqüência do movimento da Matemática Moderna, em que a ênfase foi colocada nas estruturas algébricas, o que podemos deduzir contribuiu para o distanciamento entre a formação e as exigências da prática docente na escola básica, onde Números é um bloco de conteúdos, cujo ensino tem questões próprias, colocadas ao professor, conforme apontam vários estudos, dentre eles o de Moreira (2004).

> Eu acredito que dar as estruturas algébricas, sem que os alunos tenham uma experiência rica sobre alguns exemplos concretos de estrutura, em particular sobre os números inteiros, com uma grande familiaridade, não vale a pena a gente estar explorando estruturas algébricas. (...)
>
> (...) o que eu penso é assim o que aconteceu foi que a partir de um certo ponto as pessoas quiseram não ver essa idéia de que aqueles números poderiam ser uma forma para a álgebra superior, mas foram diminuindo o papel deles aí em nome de dar o destaque adequado às estruturas algébricas. Então acho que isso que você retrata, na realidade é o fim, é o pedaço de um percurso histórico que chegou nesse momento.

Avelar destaca a importância do estudo dos inteiros como uma experiência que pode contribuir para a compreensão das estruturas algébricas, levando-nos a inferir a possibilidade de mudança do foco ou da ênfase verificada em alguns cursos e livros didáticos, em que os inteiros são tratados como um exemplo de determinadas estruturas algébricas, ficando negligenciados, ou em segundo plano, elementos que lhes são próprios ou elementos que são importantes para a prática docente na escola básica. O entrevistado destaca que o licenciando deve ter um conhecimento rico do conjunto dos inteiros, para que possa dar significado às estruturas algébricas.

Quanto à presença de conteúdos ligados à Teoria dos Números no currículo da escola básica, considera:

> Eu acho que eles deveriam ter mais destaque, talvez não como conteúdos específicos, porque fica um pouco difícil você abordar estes conteúdos específicos (...)
>
> (...) do ponto de vista pedagógico, na Teoria Elementar dos Números, o que pode ser refletido para a educação básica, justamente, é o fato de existirem problemas que podem ser formulados de uma maneira muito clara, porque são conceitos que, facilmente, as crianças podem dominar, sendo uma coisa que pode ser do dia-a-dia, são interessantes e que exigem, às vezes que a criança trabalhe com argumentos. Então a forma de você propiciar o exercício da argumentação já em faixas etárias bem baixas.

Do exposto acima, podemos perceber que o entrevistado, ao considerar que seja complicado tratar elementos de Teoria dos Números como conteúdos específicos, esteja se referindo a conteúdos mais avançados, pois, conforme apresentado anteriormente, tópicos de Teoria dos Números são propostos nos PCN; ou esteja se referindo a um tratamento estritamente formal, o que fugiria dos objetivos do ensino fundamental, certamente. No entanto, ao falar do ponto de vista pedagógico, esclarece o seu posicionamento, considerando que existem questões interessantes que podem ser trabalhadas, estimulando o desenvolvimento da capacidade de argumentar, o que é também sugerido nos PCN. Dessa forma, aponta para um dos valores do ensino da Matemática, indicado por D'Ambrósio (1990), o valor formativo, que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades, no caso, a de argumentar, a partir de problemas interessantes que a Teoria dos Números permite propor.

Ainda pensando sobre a presença de tópicos de Teoria dos Números na educação básica, conjectura:

> (...) pois uma das minhas conjecturas sobre o fato de que a Teoria dos Números, não a Teoria dos Números, mas questões envolvendo números inteiros, não tenham uma presença mais forte nos currículos da educação básica, ou seja, trabalhados na prática efetivamente, é que os professores não têm familiaridade para mexer com esse tipo de questão (...) E essas questões aparecem nas olimpíadas por alguma razão. Elas não são assim tão difíceis. Às vezes, os alunos por não terem na cabeça estes temas de uma maneira preconcebida, eles são capazes de resolver os problemas e os professores ficam surpreendidos. São problemas que eles poderiam ter trabalhado com eles lá.

Essa hipótese apresentada pelo entrevistado, de que questões envolvendo números inteiros não têm uma presença mais forte na educação básica pela falta de familiaridade dos professores, vem corroborar a existência de um distanciamento entre a formação e a prática profissional, no que se refere ao tratamento dado aos números inteiros. Pode estar associada também ao que aponta Moreira (2004), os inteiros são abordados de maneira estritamente formal ou como “dados”, o professor não percebe a possibilidade de exploração de atividades ligadas a este tema que conduzam à investigação e à argumentação, pois não vivenciou esta experiência na licenciatura.

Quanto à segunda questão sobre a relação – Teoria dos Números, Álgebra e Aritmética –, afirma:

> Eu vejo a Teoria dos Números como uma parte da Álgebra Moderna.
>
> Já entre Aritmética e Álgebra aí sim, eu acho que a relação já é mais problemática. (...) pensar quando se introduz variáveis, letras, etc, a gente está no campo da Álgebra, mas eu vejo, quando a gente trata de questões de Aritmética que a gente encontra um certo... como é que a gente poderia chamar isso....poderia chamar de uma certa visão que trabalha ou uma idéia de invariante, ou uma idéia de seqüência, problemas, então aí a gente está mais entrando no domínio da Álgebra, que da aritmética propriamente dita.

Assim, o entrevistado deixa clara a sua concepção de que Teoria dos Números é uma parte da Álgebra Moderna, embora não tenha esclarecido as particularidades de uma e de outra. Percebe a relação entre Álgebra e Aritmética como mais problemática, ficando subjacente ao seu discurso que não as concebe de forma isolada, pois deixa claro que, ao se trabalhar com características do pensamento algébrico, como a percepção de “invariantes”, já se está no domínio da álgebra. Essa concepção parece corroborar posições como a de e Lins e Gimenez (1997), de que a educação algébrica e a aritmética coexistem, estando uma imbricada no desenvolvimento da outra.

Indagado sobre o que é específico de Teoria dos Números, deixa claro que se limitará ao domínio dos inteiros e afirma:

> Mas o que eu acho que é específico de Teoria dos Números é esse tipo de tratamento que é dado aos números inteiros, que aborda os inteiros como um conjunto, as operações, a noção de

> números primos é uma coisa central, e aqueles conceitos que eu já falei: máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, o teorema fundamental da aritmética e todas as idéias ligadas á teoria dos números inteiros.

Assim, o entrevistado enumera alguns tópicos específicos de Teoria dos Números, os quais podemos tomar como básicos, pois estão presentes, inclusive, no ensino fundamental. Nos currículos dos diferentes níveis de ensino, o estudo desses temas poderia permitir aos alunos compreender o que é próprio do conjunto dos inteiros, o que, segundo Campbell, pode ficar obscurecido, quando se tratam os inteiros como um subconjunto dos números racionais ou dos reais.

Avaliando o que propomos como Teoria Elementar dos Números para os cursos de licenciatura, diz:

> Esses tópicos eu dou, eu considero essenciais, até o teorema fundamental da aritmética. O papel da Aritmética módulo *m,* congruência modulo *m*,..... tem um papel que está na notação dela e que eu acredito, pode ser tratado independentemente dessa notação, isto eu estou de acordo. O interesse da Aritmética módulo *m* é introduzir um tipo de .. um sistema, um conjunto em que você tem uma aritmética um pouco diferente da aritmética dos números inteiros, justamente para criar experiências dos alunos para depois introduzir a idéia de anel, de uma maneira mais geral. Então eu vejo que esse tema não é essencial. Teoremas de Fermat, Euler e Wilson, eu acho que tem um valor histórico importante. Mostram como a Teoria Elementar dos Números pode apresentar questões interessantes, envolvendo números primos, mas eu não consideraria essencial. Entre a aritmética módulo *m* e os teoremas de Euler, Fermat e Wilson, eu ficaria com os últimos, se eu tivesse tempo de acrescentar no meu curso e também equações diofantinas lineares. Estou totalmente de acordo com você.

Assim, Avelar confirma os conteúdos que considera essenciais num curso de Teoria dos Números, pois já os havia indicado anteriormente, porém não justifica a seleção em função da formação do professor. Esclarece a sua posição com relação à aritmética módulo *m,* colocando-a como um tópico que poderia ser suprimido por se tratar de uma forma de notação, cujas idéias poderiam ser tratadas independentemente dela. Indica, ainda, alguns elementos para a seleção / priorização dos demais tópicos propostos, como o valor histórico e o tempo disponível.

Em síntese, Avelar:

- reconhece que a Teoria dos Números deveria ser mais enfatizada nos cursos de licenciatura de matemática;
- considera que em Teoria dos Números existem problemas que podem ser formulados de maneira clara, envolvendo conceitos que as crianças podem dominar;
- aponta para o valor formativo de seu ensino na escola básica, como fonte de questões que podem conduzir ao desenvolvimento da capacidade de argumentar;

- considera o estudo do conjunto dos inteiros importante para a compreensão do estudo das estruturas algébricas;
- conjectura que questões envolvendo os inteiros não têm uma presença mais forte nos currículos da educação básica, pela falta de familiaridade dos professores com este tipo de questões;
- percebe a Teoria dos Números como parte da Álgebra Moderna;
- considera como conteúdos básicos de Teoria dos Números, essenciais na licenciatura: o conjunto dos inteiros, operações, a noção de número primo, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, teorema fundamental da aritmética;
- concorda com a proposta de Teoria Elementar dos Números apresentada. Considera o estudo da Aritmética módulo m não essencial, por se tratar de uma notação. Os teoremas de Euler, Fermat (o pequeno) e o de Wilson são vistos como importantes historicamente, envolvendo questões interessantes sobre primos. Incluiria equações diofantinas lineares num curso de Teoria Elementar dos Números, caso houvesse tempo disponível;
- indica, como critérios para a seleção de conteúdos, o valor histórico e o tempo disponível.

Assim, o entrevistado concebe a Teoria dos Números, enquanto saber científico como parte da Álgebra Moderna e, do ponto de vista de saber a ensinar, como um conjunto constituído de alguns tópicos básicos da área, percebe, no entanto, que o seu ensino ainda é marcado pela influência do Movimento da Matemática Moderna, em que a ênfase recai nas estruturas algébricas e nos aspectos formais.

6.3 Análise da Entrevista de Borges

O entrevistado é autor de livro texto de Teoria dos Números, doutor e pesquisador nessa área e também professor na graduação e na pós-graduação em uma instituição pública federal.

Sobre a afirmação de Campbell e Zazkis a respeito do papel da Teoria dos Números no ensino, Borges considera:

> A Teoria dos Números pode colaborar muito no ensino, porque ela não só traz a beleza que está escondida nos números, mas também uma maneira de pensar mais científica, que é valorizar a questão das hipóteses, e como a partir das hipóteses, se chegar numa tese.
>
> E aproveitando este elo que existe hoje entre a informática, através da criptografia, da teoria dos códigos, a Teoria dos Números pode ser tornada prática e motivada na sala de aula, porque todo mundo hoje é interessado em computação. (...) E por que o sistema de senhas funciona? O sistema mais famoso de criptografia hoje é chamado RSA e é baseado na fatoração em primos. Qualquer pessoa pode entender, se tiver um conhecimento básico de Teoria dos Números.
>
> Além disso, a Teoria dos Números, eu acredito, pode fazer um elo da matemática, com a história da matemática, colocar a matemática no contexto da civilização humana. A matemática se desenvolveu ao longo dessa civilização. Por que todo mundo se preocupa com os números? Por que isso é tão importante para nós? E por que isso vem sendo estudado há milhares e milhares de anos? A Teoria dos Números pode fazer esse elo de maneira bastante natural.

Borges concorda com Campbell e Zazkis sobre o papel central que a Teoria dos Números tem na História da Matemática e que poderia ter nos currículos, apresentando alguns elementos que esclarecem o seu posicionamento. Nos trechos de sua fala apresentados acima, identificamos aspectos que podem se constituir em valores no ensino da matemática, como o cultural e o formativo, de acordo com D'Ambrósio (1990), os quais podem contribuir para justificar a presença da Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em matemática.

Ao citar a beleza escondida nos números, Borges aponta para o valor estético, que, segundo D'Ambrósio, poderá ser percebido pelos alunos de modos muito diversos, pois depende da sensibilidade, podendo ser despertado, por exemplo, a partir do estudo de aritméticas do sagrado ou místicas. Ao destacar uma forma de pensar que parte de hipóteses para provar uma tese, o entrevistado indica um valor formativo. Para D'Ambrósio, o manejo de hipóteses e resultados prévios para alcançar novos resultados é muito importante para o desenvolvimento do raciocínio, citando inclusive o estudo dos números primos, como um conteúdo para explorar essa possibilidade. Quando o entrevistado fala da aplicação da Teoria dos Números à teoria dos códigos, ou criptografia, indica o valor utilitário ou instrumental. Também está presente em seu discurso o valor cultural, ao apresentar o estudo dos números como forma de situar o desenvolvimento da matemática no desenvolvimento da história da civilização humana e a importância do número no pensar e no fazer humanos.

No entanto, pensamos que esses valores não têm um caráter absolutista ou metafísico, eles dependem, na instituição escolar, das relações que ocorrem, no sistema didático, entre professor-aluno-saber. Ao mesmo tempo em que uma abordagem que parte de hipóteses para chegar a uma tese pode ter um valor formativo, possibilitando uma forma de pensar com clareza, pode também afastar muitos alunos da matemática, ao não promover a atribuição de significado aos conteúdos e processos. Assim como o valor estético pode não ser percebido, pois não impele ou inspira a atividade matemática.

Ao considerar que a Teoria dos Números é o estudo dos inteiros, Borges comenta:

> Há várias correntes filosóficas que dizem: os números naturais existem. Outras dizem é uma invenção da mente humana. Então, quando você olha a sua volta, você vê uma árvore, duas árvores, 40 estrelas, um sol. Então essa enumeração é uma invenção da mente humana? Se aparecessem extraterrestres, será que eles não contariam? Será que esse contar, essa associação, não é algo que já está aí? (...) Mas sem contar, sem associar, é possível fazer alguma coisa? Para nós, pensar e os números estão relacionados intrínsicamente. A gente pensa com números. Hoje em dia se alguém quer te convencer de alguma coisa, a primeira coisa que ele faz é te apresentar o gráfico, as estatísticas. Essa é a maneira de tentar te convencer.

Nesse trecho, o entrevistado se refere às visões filosóficas de Matemática: visão platônica – quando questiona se *os números naturais existem* – e visão aristotélica – ao perguntar se os *números naturais são uma invenção da mente humana*. Segundo Davis e Hersh (1986), no platonismo, os objetos matemáticos são reais, não são físicos ou materiais, isto é, existem fora do espaço e do tempo da experiência física, não foram criados. Segundo Machado (1987), Aristóteles os considera criações humanas, não descartando a experiência sensível e admitindo a possibilidade de abstrair as características matemáticas de um objeto. Embora Borges não explicite a sua opinião a respeito, destaca a importância dos números no pensar e no fazer do homem, principalmente do homem de hoje que usa os números para quantificar, para explicar, para convencer. Refere-se também a uma idéia que, segundo Caraça (1984), é básica em Matemática – a idéia de associar, origem do processo de contagem.

Sobre a abordagem de conteúdos ligados à Teoria dos Números na escola básica, sugere uma série de perguntas instigadoras que poderiam ser tratadas, em particular, no ensino médio:

> A Teoria dos Números pode colaborar com isso, porque naturalmente, aparecem as perguntas que precisam ser demonstradas. Quando (...) você ensina uma criança a calcular o m.d.c, no ensino fundamental, a coisa é difícil, mas no ensino médio, tem muita coisa que pode ser feita, né. Quando você ensina os cálculos do m.d.c, do m.m.c, ensina que um número pode ser dividido pelo outro... uma pergunta que é natural, ao invés de partir imediatamente para o algoritmo, de como fazer isso, uma pergunta mais natural seria: Todo par de números tem m.d.c? Por que existe o m.d.c? E como o aluno já está tão familiarizado com os números, com o algoritmo que ele aprendeu na 5ª ou na 6ª série, uma pergunta que se deveria fazer é: Por que esse algoritmo funciona? (...) Tem uma maneira de me convencer e de convencer a todo mundo de que realmente dois números têm sempre o m.d.c? (...) A partir daí vem todo um crescimento, até chegar ao Teorema Fundamental da Aritmética que diz que todo número inteiro é um produto de primos. Mas por que isso é chamado Teorema Fundamental da Aritmética? Por que o adjetivo fundamental foi acrescido a esse teorema? Por que ele é tão fundamental assim? Por que todo número é produto de primos de uma maneira única, por que isso abre portas para mim, para entender todas essas coisas que estão escondidas nos números? Por que existem infinitos números primos? Se você fizer uma lista de números primos, é difícil que alguém passe do número 100. Por que existem infinitos números?

Desse modo, o entrevistado está sugerindo questões que podem conduzir a uma atividade investigativa, instigando a necessidade de explicar, de convencer, de argumentar, de provar e de demonstrar, levando, conseqüentemente, ao diálogo científico entre os atores envolvidos na aprendizagem.

É uma possibilidade para o ensinar em que se provoca a curiosidade e possivelmente a "necessidade intelectual"[44] de que fala Harel (2000). No entanto, é preciso lembrar que estes assuntos não são atualmente abordados no Ensino Médio, podendo se constituir em sugestão para o tratamento desses temas na graduação.

O entrevistado explicita o que entende por Teoria dos Números e procura situá-la em relação a outros campos:

> A Teoria dos Números, como a gente conhece, de uma maneira mais simplista, é o estudo dos números inteiros, das propriedades, (...)
>
> (...) mas tem colegas, que são especialistas em Teoria dos Números, e só fazem Análise. As técnicas que eles usam são todas da Análise. Tem colegas da Teoria dos Números que usam técnicas da Geometria. Então a Teoria dos Números tem os mistérios dos números que você quer resolver e para isso você resolve do jeito que você conseguir resolver. Se você conseguir com métodos algébricos, tudo bem, com métodos analíticos, excelente, com métodos geométricos (...)

Essas afirmações esclarecem que o objeto da Teoria dos Números é o estudo dos números inteiros e de suas propriedades, mas as ferramentas usadas para resolver questões de Teoria dos Números são buscadas também em outras áreas da Matemática, como na Análise e na Geometria. Assim, Borges mostra que as diversas áreas da Matemática têm as suas especificidades, mas não são fragmentadas.

Sobre a relação Teoria dos Números e Álgebra, esclarece:

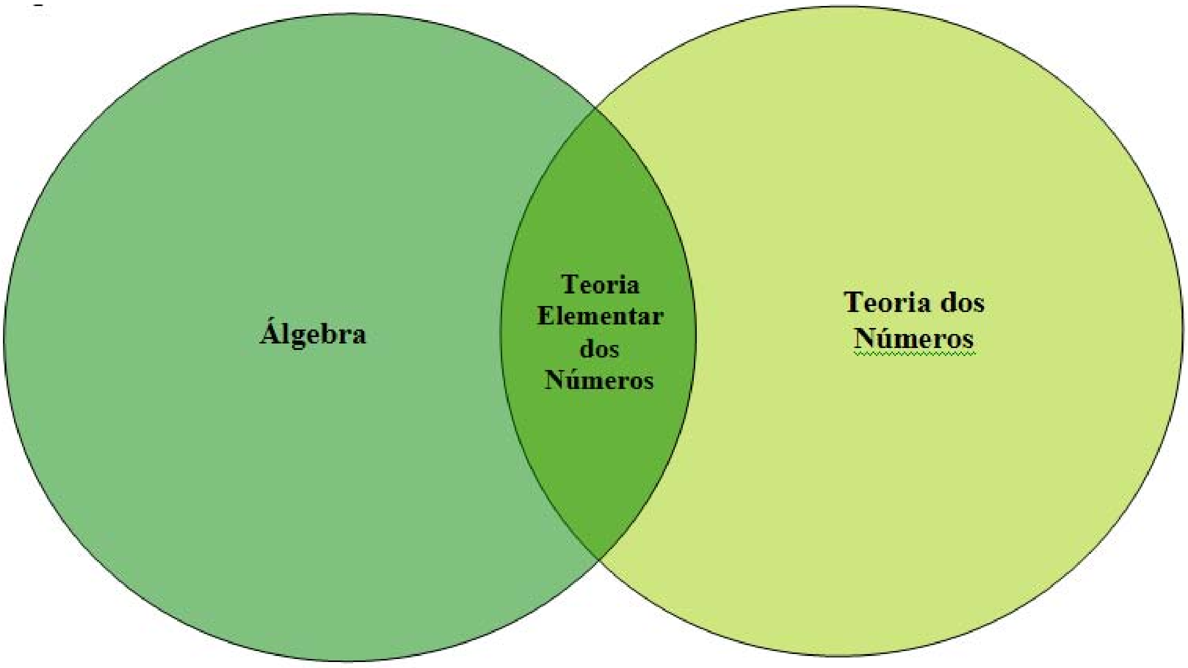
> (...) a Teoria dos Números é tradicionalmente colocada dentro da álgebra, basicamente no Brasil é colocado assim, pelas agências de fomento, como CNPq, (...)
>
> Então, quando você estuda m.d.c., m.m.c., teorema fundamental da aritmética e depois sobe para congruências e coisas assim, os conceitos de Álgebra começam a aparecer. Quando você, tomando números inteiros, consegue somar, subtrair, dividir e, quando você olha do ponto de vista algébrico, então você vai falar isso é um anel, então o anel dos inteiros, enquanto outros conjuntos, como o das matrizes, não formam um anel. Então tem várias outras coisas que você agrupa nessa grande área, chamada Álgebra. Então se você focaliza no anel dos inteiros, você vai estudar Teoria dos Números, a Teoria Elementar dos Números.

---

[44] Para Harel, esse princípio está alinhado com a teoria de Piaget e a teoria desenvolvida por educadores matemáticos franceses, como Brousseau e Balacheff. A necessidade intelectual está relacionada à existência de *conflitos cognitivos* ou a uma *desequilibração* na resolução de problemas, mas problemas que foram apropriados pelo aprendiz. Segundo esse princípio o aluno precisa ser desafiado, para que busque o aprender como uma necessidade e não como uma imposição. Por exemplo, conjeturar é uma atividade que resulta em uma situação problemática que pode conduzir a uma necessidade intelectual. O autor identifica três formas de necessidade intelectual: a necessidade de *cálculo*, a necessidade de *formalização* e a necessidade de *elegância*.

> Se você se interessa pela Teoria dos Números, especificamente os números inteiros, se você vai estudar e se aprofundar nisso, se você quer saber quantos números primos existem entre 1 e um determinado x qualquer, então a Álgebra não vai te ajudar, você vai precisar da Análise, para resolver esta questão.

O entrevistado estabelece com clareza a relação Teoria dos Números e Álgebra. Mostra que, embora a Teoria dos Números esteja incluída tradicionalmente dentro da Álgebra, inclusive pelas agências governamentais de fomento, como CNPq, trata-se de uma intersecção que não caracteriza inclusão. Essa intersecção é justamente o que ele chama de Teoria Elementar dos Números. Considera que a Álgebra tem outras questões e objetos que vão além do estudo dos inteiros, ao mesmo tempo em que a Teoria dos Números utiliza métodos que não são apenas algébricos. O seu modo de relacionar pode ser assim esquematizado:



Ressalta que, embora haja especificidades, esses campos têm uma gênese comum.

> Então as perguntas vão mudando, mas a gênese é comum. Você vê que a álgebra moderna começa com a Teoria de Galois, estudava o que? Como resolver, encontrar soluções para um polinômio. É uma coisa tanto da Teoria dos Números, mas ao mesmo tempo essas soluções nem sempre são inteiras, então você começa a acrescer conjuntos. (...) Então à medida que você vai avançando em alguma direção, o conhecimento vai avançando também. Então vai avançando na área da Álgebra, da Análise, das Variáveis Complexas, mas a gênese é - como é que eu resolvo um polinômio, como é que eu encontro raízes de um polinômio.

Borges, referindo-se à construção do conhecimento matemático, afirma que muitos deles têm uma mesma gênese, ou seja, um problema que precisa ser resolvido. Na busca da resolução, novas questões vão surgindo, novas possibilidades se abrem e novos campos começam a se desenvolver. Isso aponta para a dinamicidade do conhecimento matemático, que, muitas vezes, principalmente aos olhos do aluno, parece pronto, acabado e fragmentado.

Sobre a relação Teoria dos Números e Aritmética, afirma:

> Teoria dos Números e Aritmética, eu nem sei como separar os dois. Você tem um livro famoso da Teoria dos Números, chamado Aritmética Superior e é só Teoria dos Números. Minha dúvida é: eu devo me preocupar com isso? Eu devo me preocupar com tantas separações? Desde o 2º grau começar a colocar caixas: agora eu vou estudar isso, agora isso. Vamos estudar, depois a gente vê se é necessária ou não a classificação. Vamos primeiro despertar o interesse, ver as belezas ali, depois a gente vê se é necessária ou não toda essa classificação. Álgebra, em essência, é abstrata. Então no meu ponto de vista, quando você começa estudando estruturas algébricas no 2º grau, você começou de cabeça pra baixo. Para que estruturas? Estudar coisas abstratas e deixar os alunos completamente confusos, perguntando: Para que ?

Ao abordar a relação entre a Aritmética e a Teoria dos Números, vários aspectos importantes são ressaltados. Inicialmente, a dificuldade e até mesmo a pouca importância para o ensino, de estabelecer separações, ou de modo mais enfático "caixas" entre as diferentes áreas da Matemática. Borges remete, assim, à questão da fragmentação que vem sendo questionada nas diferentes áreas do conhecimento e de modo particular no ensino, nas disciplinas escolares, por pensadores do nosso tempo, como Edgar Morin (2000, 2001). Outro aspecto, já citado anteriormente pelo entrevistado, é a questão da beleza do conhecimento matemático, ou seja, o valor estético no seu ensino, o qual deve ser despertado nos alunos, ao invés de se lhes impor um conhecimento formalizado, fragmentado. Ao comentar que iniciar o estudo de Álgebra, no ensino médio, pelo estudo das estruturas algébricas é começar de "cabeça para baixo", está subjacente uma crítica ao Movimento da Matemática Moderna, que chegou ao ensino, nos anos sessenta e setenta, em que o estudo das estruturas deveria ser a base do ensino da Matemática, com ênfase no formal, no lógico e no axiomático. Está presente também a concepção de Álgebra como estudo das estruturas algébricas.

Borges continua:

> Então não é melhor evoluir naturalmente as coisas. Então se você começa a estudar números inteiros, a partir daí você pergunta: tem outros conjuntos que têm essas propriedades? É natural. Aí você começa a entrar mais na esfera da Álgebra. Então eu preciso ver: quais são as propriedades que os números inteiros têm. E como eu abstraio essas propriedades dos números inteiros. Se eu consigo isso, eu consigo transportar para outros conjuntos. Se eu não tenho antes uma intuição a partir de uma coisa concreta que são os números, vai ser difícil fazer essa transição.

Nesse trecho, o entrevistado apresenta o estudo dos inteiros e de suas propriedades como o caminho natural para chegar à compreensão das demais estruturas algébricas, isto é, como um modelo, por ele considerado "concreto", ou seja, algo conhecido.

Ao avaliar a proposta de Teoria Elementar dos Números, apresentada na terceira questão, propõe:

> (...) então eu iria até mais, além disso, eu tentaria chegar num teorema muito bonito que é o Teorema da Reciprocidade Quadrática de Gauss. Porque Gauss tem que aparecer num curso de Teoria dos Números, o nome de Gauss tem que aparecer de alguma maneira, porque Gauss é uma pessoa que muitos consideram a pessoa mais inteligente. (...) É um teorema tão bonito que o próprio Gauss demonstrou de cinco maneiras diferentes.

Novamente, o entrevistado aponta para a beleza da matemática de maneira enfática, sugerindo que um curso de Teoria Elementar dos Números deva incluir o Teorema da Reciprocidade Quadrática de Gauss[45], porque é bonito e permite falar de Gauss. Em se tratando de um pesquisador na área, podemos observar que a beleza para ele está ligada à avaliação de um produto que tem diferentes formas de ser apresentado. Outros, contudo, poderão não enxergar essa forma de beleza.

Borges continua se referindo ao curso de Teoria dos Números na Instituição em que trabalha:

> Aqui, geralmente um curso de Teoria dos Números, por exigir um pouco mais de maturidade do professor acontece quando ele está no terceiro semestre, quarto semestre, meio do curso, que coincide, mais ou menos, com a introdução do raciocínio matemático. É a primeira vez que o professor, futuro colega, tem entendimento do que é matemática, porque ele está fazendo cálculo, fazendo vários teoremas, mas está aplicando, aplicando, aplicando. E aí numa prova de Teoria dos Números, ele vai pegar a prova e vai estar escrito lá: prove que os números primos são infinitos. E aí vai falar: prove. Mas o que é provar? Ele vai escrever, um, dois, três, cinco, sete, onze... provar exige algo a mais.

Assim, para ele, é com a Teoria dos Números que se dá a introdução do raciocínio matemático, expressando uma concepção de "fazer Matemática" ligada a uma abordagem formalista, própria da matemática como saber científico, em que a prova é considerada essencial, pois é o critério de verdade da Matemática. Aponta para a Teoria dos Números como uma disciplina em que há a exigência da prova e ressalta que provar não é verificar com exemplos. Essa concepção de "fazer matemática" não é consensual, revela um modo de ver do entrevistado. A prova é um momento fundamental na construção da matemática, enquanto

---

[45] *Sejam p e q primos ímpares e distintos, então* $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}$

$\left(\frac{p}{q}\right)$ *representa o "símbolo de Legendre" assim definido:*

Sejam q um primo ímpar e $p \in N$ *tais que (p,q) = 1, define-se* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *= 1, se p é resíduo quadrático módulo q e* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *= -1, caso contrário*

Seja p um número primo. Dizemos que a $\in IN$ *é um "resíduo quadrático módulo p"quando a equação* $x^2 \equiv a \pmod p$ *tem solução com* $x \in \{1, \ldots\ldots p-1\}$

saber científico, pois valida junto a uma comunidade o que foi conjecturado, mas a atividade de construção da matemática envolve outros aspectos e momentos, como os da investigação, da tentativa, do erro, principalmente no ensino.

Sobre o que ensinar em Teoria dos Números, continua:

> Você, quando entra no Cálculo III, se você não sabe derivação, integração, séries de uma variável, vai ser muito difícil entender de várias variáveis. Em Teoria dos Números, não, você começa tão elementar, começa com coisas tão familiares a eles, que é possível avançar. É claro, como você apontou depende muito da clientela, mas se você não coloca um alvo alto, você só chega aonde é possível. (...) No noturno, são alunos que trabalham durante o dia, e tem conseguido aprender o conteúdo. Claro que são três vezes por semana que nos encontramos, mas têm conseguido aprender. O teorema de Gauss, vale a pena o esforço pra chegar lá".

Assim, Borges destaca que a Teoria dos Números não exige pré-requisitos em termos de conteúdos, como outras disciplinas, pois as questões são simples e familiares aos alunos. De sua fala anterior, podemos inferir que o conteúdo é selecionado em função do próprio conteúdo, daquilo que o aluno é capaz de aprender, mas não em função das finalidades de um curso de formação de professores.

Sintetizando, o entrevistado:

- concorda com a afirmação de Campbell e Zazkis de que a Teoria dos Números poderia ter um papel mais importante nos currículos de licenciatura em matemática e justifica a sua presença no ensino a partir de elementos que podem ser identificados com os valores – utilitário (aplicações na informática, na teoria dos códigos)**,** formativo (possibilita uma forma de pensar em que se parte dos dados para provar uma tese)**,** cultural (importância do número no pensar e no fazer humanos) e estético (beleza da matemática);
- sugere uma metodologia de ensino investigativa para Teoria dos Números no ensino médio, apresentando algumas questões instigadoras que poderiam ser apresentadas;
- considera que as questões, discutidas na disciplina Teoria dos Números, não exigem muito em termos de pré-requisitos, são familiares aos alunos;
- afirma que a Teoria dos Números é uma parte da Álgebra, assim considerada, inclusive, pelas agências de fomento, como o CNPq, sugerindo a Teoria Elementar dos Números como a intersecção entre esses campos;

- esclarece que a Teoria dos Números é o estudo dos números inteiros e de suas propriedades, utilizando métodos algébricos, geométricos e analíticos para a resolução de problemas;
- questiona a fragmentação do conhecimento matemático no ensino o que pode impedir ver a beleza da Matemática;
- afirma que o estudo dos inteiros e de suas propriedades é o caminho natural para a compreensão das demais estruturas algébricas, pois é uma forma de concretizá-las;
- aponta a disciplina Teoria dos Números como um campo em que se faz necessária a demonstração;
- sugere que um curso de Teoria dos Números para a licenciatura em matemática deveria incluir, além dos tópicos apresentados, o estudo de Reciprocidade Quadrática de Gauss.
- pensa a seleção de conteúdos com base nos próprios conteúdos, naquilo que o aluno é capaz de aprender.

Desta forma, o entrevistado concebe a Teoria dos Números como o estudo dos inteiros, sendo a Teoria Elementar dos Números um campo de intersecção entre Álgebra e Teoria dos Números. Enfatiza a abordagem dedutiva, mas aponta também aspectos de natureza estética, cultural e formativa, a partir dos quais procura justificar o ensino de conteúdos referentes à Teoria dos Números. Esses parecem ser concebidos como intrínsecos aos conteúdos..

6.4 Análise da entrevista de Cunha

Cunha é doutor, pesquisador e professor na área de Teoria dos Números em uma instituição pública federal e autor de livro didático nesse campo.

Sobre a primeira questão, assim se manifesta:

> Concordo, acho que a Teoria dos Números poderia exercer um papel mais fundamental na licenciatura e isto poderia ser passado para o ensino médio e até para o ensino fundamental.
>
> Outra coisa, que tem muito em Teoria dos Números e que ajuda de uma maneira geral, é lógica, lógica de demonstração.
>
> (...) tem muitos problemas em Teoria dos Números em que a formulação é extremamente elementar, quer dizer, por ex., tem problemas de equações diofantinas que você enuncia de

> maneira muito simples, que nem o próprio 'Último Teorema de Fermat'[46], que é uma equação diofantina. O enunciado é inteligível para qualquer aluno do ensino médio. Até no final do ensino fundamental, ele já tem condição de saber qual seria aquele problema e, como ele, tem outros problemas de Teoria dos Números que são interessantes, atraentes e, com isto acho que pode desenvolver o gosto pela matemática se você consegue expor esses problemas, exigindo um conhecimento muito pequeno de sua platéia.

Cunha concorda que a Teoria dos Números poderia ter um papel de maior destaque nos currículos e aponta duas justificativas para que ela esteja presente: a possibilidade do trabalho com a demonstração e a existência de problemas interessantes e atraentes que podem desenvolver o gosto pela matemática. Emerge, assim, de sua fala o valor formativo, quando pensa no desenvolvimento do raciocínio dedutivo e o valor estético, quando fala da atração que os problemas de Teoria dos Números podem exercer sobre os alunos, despertando o gosto pela matemática. No entanto, enfatiza uma única abordagem, que é a que oportuniza a lógica da demonstração, o que nos leva a concluir que seja a dedutiva que vem sendo bastante discutida no ensino.

Sobre os conteúdos de Teoria dos Números a serem desenvolvidos na licenciatura de matemática, considera:

> (...) ele vai ter que aprender um pouquinho de congruências, de divisibilidade, alguns conceitos dos inteiros, a partir deles você entra em equações diofantinas, que são equações de coeficientes inteiros, para as quais se buscam soluções inteiras.
>
> Dentro do conjunto dos inteiros, têm algumas coisas que seriam bastante interessantes, por exemplo, o Princípio da Indução Finita, porque você é capaz de demonstrar várias propriedades dos próprios inteiros, algoritmo da divisão, relação de congruência, (...)
>
> (...) acho que o foco deveria ser estudar bem o conjunto dos inteiros e equações diofantinas.

Assim, Cunha destaca a divisibilidade, o algoritmo da divisão, congruências e equações diofantinas como temas básicos de Teoria dos Números na formação do professor, o que poderia se constituir em um núcleo de conteúdos para a constituição do saber a ensinar na licenciatura, sugerindo, ainda, o Princípio da Indução Finita no estudo dos inteiros, pois permite demonstrar várias propriedades. Novamente, a ênfase é centrada na demonstração. E acrescenta:

> Certamente, ele não vai passar tudo isso para os alunos dele, eu não sei se é pensamento meu, o professor deve saber bem mais do que ele vai transmitir, eu concordo com você inicialmente que não é só você ter um mundo de conhecimentos para ser um bom professor, claro que não. Mas o outro extremo, se você não tiver conhecimento nenhum, você não vai cumprir com a tarefa, não adianta você ter tudo quanto é técnica.
>
> (...) certamente quando ele for falar, no ensino médio, em P.A e P.G, Princípio da Contagem, ele vai ter exemplos muito mais ricos, por exemplo, quando ele falar em Binômio de Newton, se ele quiser, ele poderá saber como se demonstra isso, (...) Se ele esquecer alguma coisinha lá

[46] Último Teorema de Fermat: *Se n é um numero inteiro, n>2, então a equação* $x^n + y^n = z^n$ não tem solução no conjunto dos inteiros positivos.

> da fórmula ou coisa parecida, ele não precisa ficar em dúvida, ele pode verificar e deduzir. Então eu acho que dá um nível de segurança muito maior.

O entrevistado acredita que o conhecimento do conteúdo poderá dar ao futuro professor maior segurança para transmiti-los, permitindo não só maior riqueza de exemplos, como também a desenvoltura para a realização de uma demonstração. Está subjacente a essas considerações uma visão de ensino-aprendizagem que enfatiza o domínio e a transmissão de conteúdos. Ao citar os temas, P.A, P.G, Binômio de Newton, ele está indicando, embora não com esta intenção, assuntos tratados no Ensino Médio que poderão servir de ancoragem para novas aprendizagens e permitindo que o futuro professor amplie o conhecimento sobre eles, possibilitando estabelecer um elo entre formação e prática docente, desde que exista essa intencionalidade.

Respondendo à segunda questão, a respeito da relação Teoria dos Números, Álgebra e Aritmética, diz:

> Na Álgebra Abstrata, você quer exatamente, dada uma situação, buscar qual é o esqueleto daquela situação, quer dizer, você quer retirar tudo aquilo que não é indispensável para entender aquela situação. E aí várias situações têm um núcleo comum que é o que você quer detectar. Então, por exemplo, inteiros, matrizes, polinômios, tudo isso tem uma base comum, tem operações entre esses objetos. Cada conjunto desses munido das operações corretas forma, por exemplo, um anel. Isso é o que você faz em estruturas algébricas. Então, em Álgebra, sem dúvida, estudar os inteiros em Álgebra é uma coisa interessante, mesmo porque é o exemplo padrão, (...)
>
> (...) e Álgebra essa coisa mais abstrata que estuda outras estruturas algébricas que não têm nada a ver com números (...)

Desse modo, Cunha caracteriza a Álgebra como busca do que é essencial, isto é, daquilo que é comum a diferentes situações, independentemente dos objetos de que tratam. É a visão de Álgebra como estudo das estruturas algébricas, construídas sobre operações e propriedades entre os elementos sobre os quais se trabalha. Nesse contexto, o estudo dos inteiros é tido como interessante, pois é o exemplo padrão. Não se percebem em seu discurso outras dimensões da Álgebra, importantes para o ensino, como a de aritmética generalizada, funcional, e a das equações, previstas nos PCN de 5ª a 8ª séries (1998, p.116). Trata-se de uma concepção de um saber científico.

Sobre a relação Aritmética e Teoria dos Números, afirma:

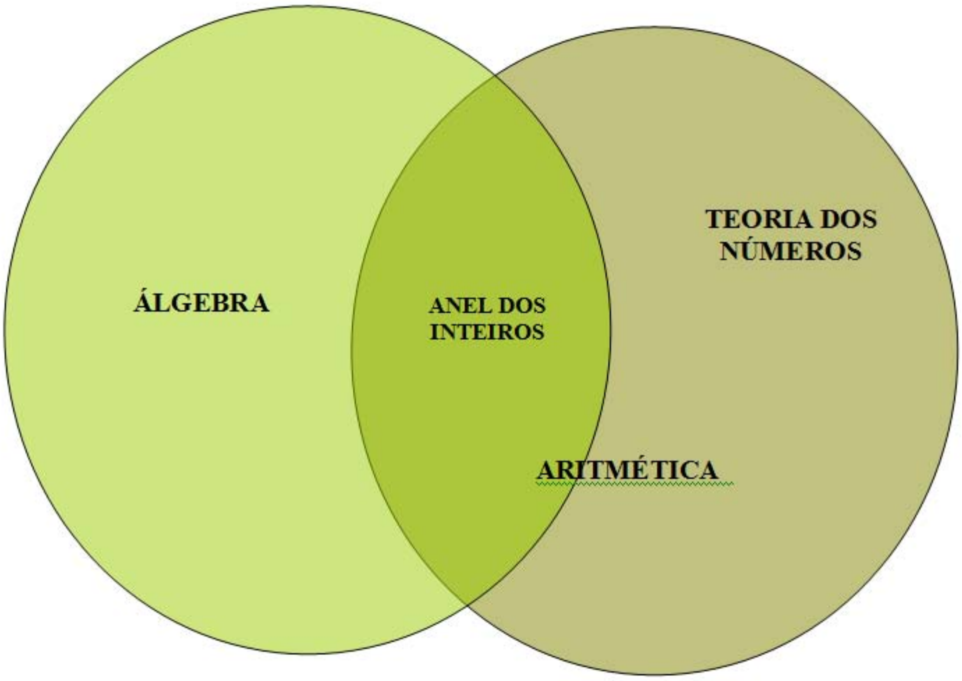
> Aritmética e Teoria dos Números, eu diria que estão mais próximos. Eu vejo assim, eu não sei se é pessoal, mas eu vejo que a aritmética é mais uma Teoria dos Números, mais voltada para números, fazer contas.
>
> Eu tenho uma tendência a pensar em Aritmética mais como, equações diofantinas, problemas de contagem, coisas que envolvam mais diretamente números.

Compreende a Aritmética como uma parte da Teoria dos Números, voltada para o “fazer contas”, para problemas de contagem, incluindo também as equações diofantinas.

Quanto à Teoria dos Números, assim se expressa:

> (...) e Teoria dos Números, ela mais ou menos nasce de problemas aritméticos, mas avança muito mais e envolve outras teorias que já não usam mais necessariamente a aritmética dos inteiros, nem mesmo de corpos finitos.
>
> Na verdade, Teoria dos Números é extremamente abrangente, pode envolver conhecimentos de Análise Complexa. Por exemplo, eu fiz doutorado em Teoria dos Números e digo, que durante meu doutorado, eu não vi um número. Então têm muitos outros assuntos que você estuda sob a chancela de Teoria dos Números, que não lida mais com aritmética. Por exemplo, formas automórficas (...)

O entrevistado compreende que a Teoria dos Números tem elementos comuns com a Álgebra, mas avança, estudando questões que necessitam de ferramentas de outras áreas, por exemplo, da Análise Complexa. Destaca que há assuntos em Teoria dos Números nos quais não se lida mais com Aritmética, pois entende a Aritmética como "fazer contas", ou como estudo da contagem, ou ainda como estudo das equações diofantinas. A partir das considerações feitas por Cunha, a relação entre esses campos poderia ser assim esquematizada:



Ao se referir ao ensino da Álgebra, diz:

> A Álgebra, a Álgebra é até certo ponto difícil de ser ensinada, porque, em certo sentido ela é, mais ou menos, assim o oposto da contextualização, pelo menos ela caminha na direção inversa da contextualização.

Ao analisar a afirmação acima, pode-se perceber que o entrevistado está pensando a Álgebra como saber escolar e nos conduz a refletir sobre o significado de contextualização. Parece emergir dessa colocação o sentido apontado por Pais (2001) ao se referir ao trabalho do matemático e do professor de matemática. Enquanto o primeiro, envolvido com o saber científico, busca níveis cada vez maiores de generalidade, tentando eliminar condições contextuais, o segundo faz justamente o caminho inverso - busca formas de re-contextualizar o conteúdo, tentando torná-lo mais compreensível para o aluno. Como a Álgebra abre caminho para o geral, corre-se o risco de um ensino sem significados para o aluno, se não houver um trabalho adequado de transposição didática.

Em relação aos conteúdos apresentados como Teoria Elementar dos Números, na terceira questão, sugere:

> Dar um pouquinho de Ideais, que não é muita coisa, acho que é a maneira mais rápida de você mostrar a existência de m.d.c. e m.m.c. em Z.
>
> (...) eu incluiria, aqui, sistemas de equações diofantinas lineares e o teorema chinês do resto, porque, também, só envolve equações diofantinas lineares, não é difícil de entender e poderia ser acrescentado aqui.

Ao fazer as sugestões acima, não acrescenta muito ao proposto anteriormente, pois equações diofantinas lineares já haviam sido citadas, e Ideais é uma noção simples que pode ser trabalhada, aproveitando a sua proposta de que é um caminho mais rápido para a demonstração de algumas proposições, opção de alguns autores dos livros didáticos analisados.

Pensando num currículo "ideal", propõe ainda:

> E, mais, aqui não foi colocado equações diofantinas de grau maior que um. Tudo bem isso poderia até ficar de fora, tudo bem é outro assunto, mas tem hora que você tem que fazer escolhas. Eu acrescentaria aqui equações de grau maior que um e reciprocidade quadrática de Gauss e analisaria essa questão: você deve pensar num conteúdo para as licenciaturas como uma coisa ideal.
>
> Se a intenção é coisa assim que seja mais próxima do conteúdo do ensino médio, o capitulo (referindo-se ao estudo de reciprocidade de Gauss) já não está tão próximo, então seria dispensável (...)

Os temas apresentados, ao se formular a terceira questão, e os acrescentados por Cunha: - reciprocidade quadrática de Gauss; equações diofantinas de grau maior que um; o teorema chinês do resto -, constituem o conteúdo programático de disciplinas tradicionais de introdução à Teoria dos Números, em cursos de licenciatura e de bacharelado. O entrevistado apresenta o que considera básico em Teoria dos Números, logo no início da entrevista, quando citou números inteiros, divisibilidade, congruências e equações diofantinas, mas amplia, agora, essa relação de conteúdos, pensando em um currículo "ideal". Não esclarece, contudo, os pressupostos e as razões para ser considerado ideal, ficando no ar a questão: currículo ideal para que e para quem?

Sobre o trabalho com a demonstração e a prova com os alunos, Cunha observa:

> Eu acho que eles têm duas dificuldades principais. Uma é lógica, é você saber definir claramente o que você tem como hipótese e o que você tem como tese. (...) A outra dificuldade é de redação, de maneira geral. Às vezes a pessoa até tem o raciocínio correto, mas é incapaz de traduzir aquilo em palavras ou na simbologia matemática, de forma que seja inteligível. Ele começa escrever e se embaralha todo e não sabe dizer exatamente o significado de cada sentença.

Assim, Cunha aponta duas dificuldades no ensino-aprendizagem da demonstração: a dificuldade de compreensão do texto, para identificar o que se sabe e o que se quer demonstrar, e a dificuldade de expressão na linguagem corrente ou na linguagem matemática. O entrevistado parece tratar pensamento e linguagem como elementos distintos e não considerar outros aspectos que interferem no trabalho com a demonstração no ensino, como os significados que são atribuídos a esta atividade, dificuldades ligadas às estratégias necessárias para realizar determinadas demonstrações. Cunha sugere que o aluno, no ensino médio, inicie o exercício da escrita, buscando justificar o que faz, quando afirma:

> O que você poderia atacar realmente é isso: uma é as pessoas escrevam mais. Talvez já desde o ensino médio, não pedir que a pessoa dê apenas a resposta de um problema. Não precisa ser uma demonstração, um sistema linear, um problema de contagem, você mostrar um pouco do desenvolvimento, até chegar na solução.

Sintetizando, Cunha

- concorda que a Teoria dos Números deveria ter uma presença mais destacada na licenciatura em matemática e até na escola básica;
- enfatiza a abordagem axiomática-dedutiva;
- destaca os valores formativo (possibilita o desenvolvimento do raciocínio dedutivo) e estético (ligado ao despertar o gosto pela matemática) no ensino da Teoria dos Números;
- afirma que estudar os inteiros é interessante, porque é o exemplo padrão para o estudo das estruturas algébricas;
- apresenta uma visão de Álgebra como estudo das estruturas algébricas;
- percebe a Aritmética como estudo de números, que inclui o "fazer contas", e também os problemas de contagem;
- considera que a Teoria dos Números nasce de problemas aritméticos, mas caminha para estudos mais avançados que têm outros objetos e outras ferramentas;
- considera o anel dos inteiros como a intersecção entre Álgebra e Teoria dos Números;

- considera, inicialmente, como básico em Teoria dos Números o estudo de divisibilidade, congruências e equações diofantinas. Para um curso de licenciatura em matemática, sugere, ainda, equações de grau maior que um, o teorema chinês do resto e reciprocidade quadrática de Gauss;
- pensa na seleção de conteúdos tendo como critério o próprio conteúdo e o fato de ser ele “difícil” ou “não”;
- aponta, no ensino-aprendizagem da demonstração, para a dificuldade de compreensão de texto, no sentido de entender o que se sabe e o que se quer demonstrar, posicionando-se de uma forma que separa pensamento e linguagem.

Assim, o entrevistado concebe a Teoria dos Números como um saber científico amplo que tem interseção com a Álgebra e que vai muito além da Aritmética. Como saber a ensinar na licenciatura, explicita uma concepção de uma disciplina acadêmica que enfatiza os conteúdos e a abordagem dedutiva, embora aponte a existência de problemas interessantes e destaque algumas idéias e temas que podem ser considerados básicos e relevantes para ampliar a concepção dos inteiros, como a divisibilidade e a indução matemática.

6.5 Análise da entrevista de Dias

O entrevistado é estrangeiro, radicado no Brasil há mais de 10 anos. É doutor, pesquisador na área de Teoria dos Números, com vários livros publicados que tratam de temas ligados ao campo, professor na graduação e na pós-graduação em uma instituição pública federal.

Dias, ao ser esclarecido do objetivo da entrevista, inicia sua fala, mostrando a importância de situar a Teoria dos Números dentro da matemática, para discutir o seu papel nos currículos.

> Então dentro de toda a matemática, qual a posição da Teoria dos Números? A Teoria dos Números é muito importante em relação a outros ramos da Matemática. Geometria e Teoria dos Números têm uma coisa bastante peculiar, a base muito antiga. (...) Então o nosso primeiro contato com a civilização foi através de números.
>
> Então você começa com uma coisa que não tem uma definição imediata. Números não têm definição, números inteiros você aceita. Todos os outros sistemas de números, você pode construir da maneira dedutiva, da maneira construtiva exata da matemática através de números inteiros. Uma vez que você sabe o que é um inteiro, pode definir um racional, se você sabe o que é racional, pode definir números reais, através dos reais pode definir números complexos, através dos inteiros podemos definir números p-ádicos. Então este é um lado intelectual forte que a Teoria dos Números tem.

Desse modo, Dias atribui à Teoria dos Números um papel forte dentro da História da Matemática, pois os números inteiros, certamente se referindo aos números naturais, estão também na base da civilização. Nesse sentido, corrobora a idéia de que, à medida que a intensidade da vida social foi se ampliando, a contagem se impôs como uma necessidade cada vez mais importante. (Caraça, 1984) Além disso, o entrevistado destaca que os inteiros têm um papel fundamental na criação dos demais conjuntos numéricos. Para reforçar essa afirmação, Dias se refere à forma dedutiva de construção dos diversos conjuntos numéricos a partir dos inteiros positivos, chamada por ele de "intelectual".

E acrescenta:

> Então, no passado, até a época de Fermat, Teoria dos Números não existia como teoria. Existiam conceitos, problemas, quebra-cabeças ligados com números. (...) Basicamente até os anos de 1650, época de Fermat, eles se comunicavam entre si, mais a título de se desafiarem um ao outro. Não existiam objetivos claros: para que?"
>
> Teoria dos Números é uma coisa nova. Números é antigo, mas Teoria dos Números ainda é novo. (...) Tem muitos teoremas em aberto.

Desse modo, assinala que, embora os números estejam na base da civilização e que muitas questões tenham sido discutidas ao longo da história, como forma de lazer, de desafios, a Teoria dos Números passou a existir, como teoria, a partir de Fermat, tendo, ainda, muitas questões em aberto, conjecturas não provadas.

Para o entrevistado, a Teoria dos Números é

> (...) um campo da Matemática sem fronteiras, em outras palavras, usa o que você sabe para resolver um problema de matemática, de Teoria dos Números. Por exemplo, na área de Geometria, basicamente usa Geometria para resolver um problema da área geométrica, mas em Teoria dos Números, os resultados te mostram que foram usadas diversas partes da matemática para resolver um problema da Teoria dos Números, porque ela está conectada como base, porque outras partes da matemática estão construídas em cima dela. Então de cima se você olha para baixo, para questões muito práticas, talvez você possa usar toda essa máquina para resolver um problema clássico de Teoria dos Números.
>
> Então eu acredito que em comparação com outras áreas, em Teoria dos Números, em um tempo muito curto, você pode explicar para alguém um problema, talvez um problema nem resolvido, porque ele não tem tantos dados. Não é como, por exemplo, no estudo de Cálculo, no estudo de Física, no estudo de Química, onde é preciso muita informação, até que você consiga alcançar aquele nível em que você tem condições de entender um problema aberto. Por isso que é rápido".

Dias caracteriza a Teoria dos Números como um campo sem fronteiras, cujos problemas são simples, têm poucos dados, são fáceis de serem compreendidos, mas cuja resolução pode não ser elementar, o que justifica a existência de muitos problemas ainda em aberto. A resolução de problemas de Teoria dos Números pode exigir ferramentas de outras áreas da matemática. Assim, apresenta a Teoria dos Números como base do conhecimento matemático, trazendo-nos a imagem de um edifício, em que ela se constitui no alicerce, onde a resolução de problemas próprios dessa base poderá utilizar os elementos das diferentes partes dessa construção às quais ela está subjacente. Trata-se de uma imagem que nos remete à concepção de Gauss a respeito da Teoria dos Números, a "rainha da matemática".

Quanto ao papel mais central da Teoria dos Números no currículo, reivindicado por Campbell e Zazkis, analisa:

> Essa questão é muito interessante. Está ligada aos países em que vivem. Isso também tem que ser levado em consideração. Eu não sei se um investigador, por exemplo, da França poderia dizer isso. Talvez, lá, a Teoria dos Números esteja mais no ensino básico do que talvez nos EEUU. (...) em geral, como uma pergunta global, como uma pergunta universal, essa pergunta tem muito sentido.

Ao fazer essa observação, Dias levanta uma questão importante, que é a consideração do contexto de onde se fala. As generalizações de resultados de pesquisa nunca passam de tentativas, sujeitas a confirmações e revisões, e a validade só pode ter sentido dentro de um determinado contexto, conforme diz Lüdke (2000, p. 26). A afirmação de Campbell e Zazkis, que serviu de suporte para a questão, está inserida no contexto do *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Curriculum and Avaluation Standards,* e o objetivo da questão é justamente confrontar a posição dos dois pesquisadores com a de pesquisadores brasileiros na área, para validá-la ou revê-la, em nível de ensino brasileiro.

> Eu acho, por exemplo, que uma das razões que a Teoria dos Números não entrou no currículo do ensino básico, no segundo grau, é o próprio tipo de problemas de Teoria dos Números. Eles não são tão fáceis".
>
> Em outras palavras, quando você discute Geometria na sala de aula com os alunos, os alunos têm duas maneiras de fazer entender. Uma é através de figuras, você desenha um triângulo, se ela não entende a definição que triângulo é uma figura formada pela intersecção de três retas não paralelas, ele, pelo menos, vê isso.
>
> Outra dificuldade é que, em muitos casos de problemas em Teoria dos Números cada um tem uma solução diferente, cada um tem um caminho diferente. Isso atrapalha.
>
> Então o problema que Teoria dos Números não entra é que as pessoas, os próprios pesquisadores na área de Teoria dos Números não conseguiram determinar um modelo para que esses conceitos sejam mais entendíveis para os alunos,... Ele (o aluno) encontra um problema que ele não sabe começar, então tudo isso volta para um fato que muitos materiais, livros, que são escritos em Teoria dos Números, praticamente no mundo inteiro, eles não tentam achar um modelo mais visível para Teoria dos Números, dentro da própria formulação matemática.
>
> Eu acredito que, eu concordo plenamente que é muito pouco a Teoria dos Números dentro da área do segundo grau, por duas razões básicas, a forma que eles estão ensinando é muito inacessível à maioria. Segundo não mostram as aplicações, não mostram para que deveriam estudar, muita coisa você estuda sem ter a idéia para que serve. Se você fala para que serve, às vezes você atrai a atenção da maioria para estudar.

No trecho acima, o entrevistado apresenta razões para a pouca presença da Teoria dos Números no ensino, como: a existência de problemas que não são fáceis; a dificuldade de haver diferentes formas de representação para as situações envolvidas nos problemas; o fato de não existirem modelos: cada problema tem um caminho de resolução diferente; a falta de uma preocupação pedagógica, que busque torná-la mais acessível e mais atraente. Nesse sentido podemos perceber que Dias tem uma preocupação com a transposição didática dos saberes científicos referentes à Teoria dos Números, a fim de torná-los ensináveis, mas acredita que esse trabalho ainda está por ser realizado, inclusive pelos autores de livros didáticos que têm reproduzido o saber sábio, dificultando a apreensão dos significados e tornando-os, inclusive, inacessíveis à maioria.

Continuando a pensar sobre o ensino de Teoria dos Números, considera que

> Agora o que deve ser ainda mais interessante para ensinar no segundo grau (entenda-se ensino médio) é a aplicação dessas matérias que estão ficando cada vez mais claras. Então hoje em dia, por exemplo, nós temos problemas relacionados com o uso de cartão de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador. Todo esse sistema é digital, em outras palavras, está baseado na qualidade de números, números inteiros, inteiros binários ou inteiros ..... .Então toda questão está baseada na qualidade dos números inteiros, inteiros são formados por produto de primos. Então se você quer entender bem inteiros tem que entender bem o que é um número primo, como se reconhece que é um numero é primo, como se constrói um número primo, como se divide um dado número em primos. Então hoje em dia esses fenômenos estão entrando em nossa vida prática, por exemplo, assuntos como criptografia são bastante importantes por serem utilizados em segurança de comunicação. (...) Então eu acredito que deste ponto de vista, temos um apelo forte para dizer que esses assuntos sejam dados o mais rápido possível nas escolas, porque não tem uma base cara, é barato, porque você em pouco tempo pode ensinar para o aluno o que é um número primo, como se representa (...)
>
> Este é um trabalho altamente intelectual, porque os alunos interessados vão investigando, ele não precisa de muita coisa para fazer este programa. (...) ele (o professor) vai contribuir para criar uma mentalidade forte, intelectual, entre os alunos.

Nesses trechos, Dias aponta valores no ensino de Teoria dos Números, referindo-se ao Ensino Médio. No primeiro, indica o valor utilitário, as aplicações que hoje ela tem nos sistemas digitais e, principalmente, nos sistemas de segurança das informações, citando, por exemplo, o campo da criptografia, em que os números primos são utilizados, valorizando, assim, as aplicações como forma de motivação para o ensino. Por outro lado, aponta também um valor cultural, pois essas aplicações são marcas dos nossos tempos.

Na segunda citação, está subjacente o valor formativo, isto é, a possibilidade de desenvolvimento de uma “mentalidade intelectual forte”, apontando, inclusive, a investigação, usando os recursos computacionais, pois fala em “programas”. Destaca, ainda, conteúdos que considera fundamentais, as propriedades dos números inteiros e o conceito de número primo.

Ao ser argüido sobre as relações entre Aritmética, Álgebra e Teoria dos Números, o entrevistado comenta:

> Dá para separar Teoria dos Números e Álgebra. (...) Álgebra, como nós temos no Brasil, envolve o estudo de três áreas: grupos, anéis e corpos. Isso forma a Álgebra. Você pode estudar mais, mas essas as coisas básicas.

> Eu preferiria realmente entender o que é Aritmética. Aritmética são operações simples, operações básicas com números? É isso quer dizer Aritmética? Teoria dos Números, talvez, foi mal interpretada. Teoria dos Números não é "operações com números". Teoria dos Números é diferente de quatro operações com números. Teoria dos Números é uma questão muito ampla, sem fronteiras. Problemas de Teoria dos Números chegam de onde? Chegam de propriedades dos números, de relações entre eles. Esta é uma definição mais clássica para Teoria dos Números: propriedades dos números e relações entre eles. Inteiros e, mais tarde, consideramos racionais também. Essa é uma definição dada classicamente.

O entrevistado, ao abordar a questão, parece inicialmente considerar os três campos como disciplinas do Ensino Superior, o que o levou a separá-los. Parece hesitar ao caracterizar Aritmética, mas, em outro momento da entrevista, diz que a aritmética trata de problemas específicos, enquanto a Teoria dos Números trata do que é geral. Assim, ao olhar para o objeto de cada uma delas, considera a Álgebra como o estudo das estruturas algébricas, a Aritmética como estudo das quatro operações e Teoria dos Números como o estudo das propriedades e relações entre os inteiros, incluindo também os racionais. No entanto, ao pensar nas ferramentas para tratar questões mais gerais em Teoria dos Números, estabelece conexões não só entre esses campos, como também entre outros:

> Então aí, quando você vai levantar um estudo para ser uma coisa geral, você precisa de elementos fora de Álgebra, Aritmética e da própria Teoria dos Números para responder as perguntas de Teoria dos Números. Por exemplo, o famoso Teorema dos Números Primos[47], ... uma questão de saber a quantidade de números primos antes de um certo valor... De maneira geral até um número x, quantos primos você tem? Essa pergunta está relacionada com uma função contínua x/ logx. .... Você precisa de aparelhos, você precisa de ferramentas de qualquer área que ajude você a resolver esse problema. ... Isso não é aritmética simples. Então, talvez, a Teoria dos Números ajude para que você domine diversas partes da matemática. Você domina muita coisa.

Desse seu modo de pensar - que para resolver um problema de Teoria dos Números buscam-se ferramentas em diferentes campos da Matemática -, podemos inferir que a sua percepção da relação entre esses campos é ampla e articulada, pois a Teoria dos Números precisa dos métodos utilizados em outros campos, assim como ela está na base dos mesmos, conforme referido por ele anteriormente. Pensando no ensino, afirma que Teoria dos Números e Álgebra são duas coisas que andam em paralelo, pois nasceram dos mesmos problemas.

Nesse sentido, acrescenta, em seguida:

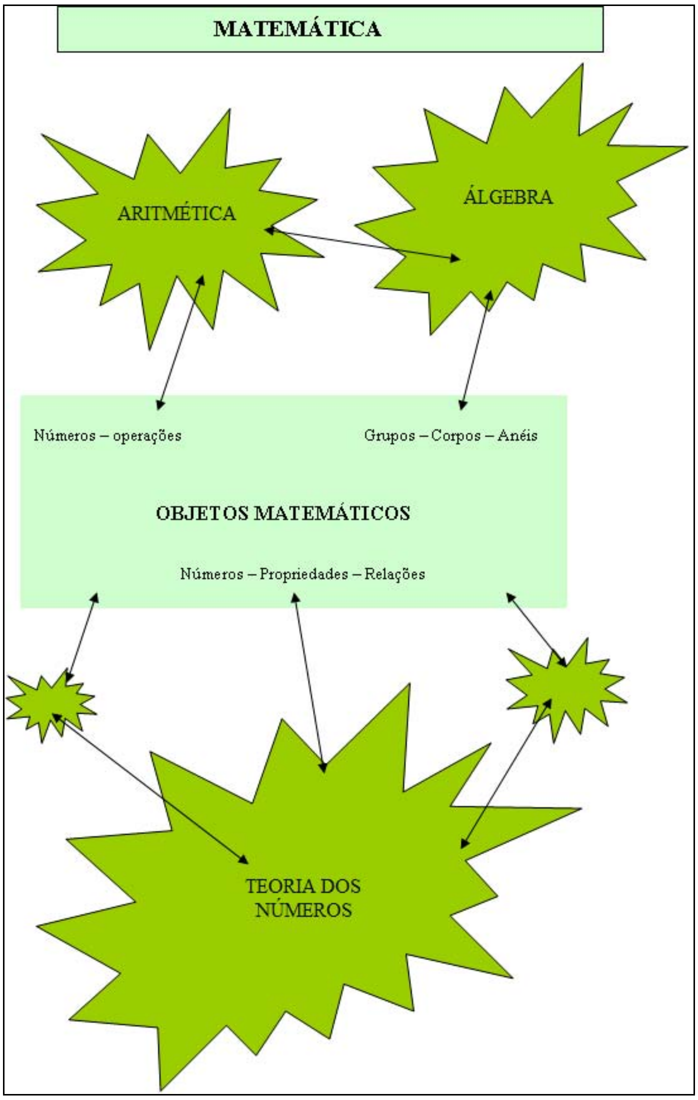
---

[47] Trata-se do chamado *Teorema dos Números Primos,* relacionado à 'densidade' dos números primos ou à 'velocidade de crescimento' dos primos (MILIES et COELHO, 2003 p. 92). Seja a função $\pi(x)$, uma função que dá o número de primos positivos menores que um dado real x, essa função cresce 'com a mesma velocidade' que $\frac{x}{\log x}$. O *Teorema dos Números Primos* afirma que:

$\lim \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ Esse resultado foi originalmente conjecturado por Gauss e demonstrado, independentemente, por Hadamard e de La Vallée Poussin. (COUTINHO, 2000 p. 61)

> (...) eu, particularmente, estou a favor de uma filosofia. Não temos matemáticas, no plural, temos matemática, como singular. Em outras palavras, todos esses campos separados: Álgebra, Análise, Geometria, etc, são mesma coisa, mas de ponto de vistas diferentes, entendeu? É bom que uma pessoa, hoje em dia, isso está ficando cada vez mais importante – que você consiga misturar áreas, porque uma pessoa que não consiga misturar áreas, não vai conseguir resolver muitos problemas matemáticos. Por exemplo, este caso do Teorema de Fermat é um dos resultados mais bonitos dessa filosofia de matemática. Por que? Porque resolveu um problema de equação diofantina simples, mas emprestou da geometria, da variável complexa, tudo, tudo que precisaria para resolver uma coisa simples, conseguir relacionar essas coisas.

Ao explicitar essa visão de Matemática, reconhece que existem particularidades, quando se consideram os objetos de estudo de cada área, mas esclarece que esses conhecimentos se imbricam, constituindo **a matemática** e não **as matemáticas.** Assim, pode-se pensar no esquema inserido abaixo para representar as idéias de Dias, em que os diferentes campos não podem ser pensados como fechados, mas como que trazendo modos próprios de olhar os objetos matemáticos, com aberturas para aproveitar as contribuições que vêm dos outros campos. Embora cada um deles possa ter objetos específicos de estudo, as ferramentas para a resolução de problemas vêm de diversos lugares. A flexibilidade para transitar entre as diversas áreas é condição para haver maior número de ferramentas para a resolução de problemas.



Sobre o que apresentamos como Teoria Elementar dos Números na terceira questão, avalia:

> Não consigo acrescentar mais a isso para um estudo básico, acho que para um estudo básico todo mundo precisa saber isso. Mas, algumas vezes, acontece que, na própria demonstração destes teoremas, existem coisinhas de outras áreas que você consegue dar uma demonstração mais imediata. Assim de vez em quando pode ser estudado ...., por exemplo, se eu fosse alguém que queria (sic) organizar um programa de licenciatura, eu, por exemplo, talvez eu ia (sic) mandar, primeiro, o aluno estudar Cálculo, depois estudar Teoria dos Números e depois estudar Álgebra, ou Teoria dos Números e Álgebra simultaneamente, no mesmo semestre, porque nós tivemos todos esses resultados, alguns desses resultados de Teoria dos Números que estão escritos aqui, ele tem uma vertente para vê-la mas dentro de Álgebra, entendeu? Por exemplo, esse Teorema de Wilson (...)

Dias não acrescenta mais tópicos aos que foram apresentados. De sua fala podemos inferir que ele os considerou necessários, ao afirmar "para um estudo básico todo mundo precisa saber isso", e também suficientes, ao dizer que "não consigo acrescentar mais a isso para um estudo básico". Pensando nas demonstrações e nas ferramentas necessárias para isso, sugere o curso de Teoria dos Números após o de Cálculo e o de Álgebra ou paralelamente a esse último.

Sobre o ensino-aprendizagem da demonstração, faz as seguintes observações:

> Muito treinamento e experiência. Por exemplo, num curso de Cálculo, a demonstração é mais direta. Você sabe o cálculo está baseado no conceito de limite, se você entender bem limite, vai entender bem derivada e integral. Então a prática da demonstração é mais direta. Tem o Teorema de Rolle, o Teorema Fundamental do Cálculo, e se você sabe resolve muita coisa. Mas no caso de Álgebra, de Teoria dos Números não existe isso.
>
> Hoje em dia muitas pessoas têm computador. Você pode ilustrar essas coisas com cálculo na máquina.
>
> Você deve deixar claro na sala de aula quais os teoremas você acredita sejam centrais. Você tem que determinar. Os teoremas centrais são importantes, porque eles são utilizados na demonstração de outros teoremas. E, agora, como o aluno vai conseguir, eu não sei. É muito complicado.
>
> Há sempre espaço para você criar novidades na sala.

O entrevistado reforça o que já havia colocado anteriormente com relação ao ensino da Teoria dos Números: não há um modelo, um padrão, é preciso criatividade. Como o aluno vai aprender, diz não saber. A aprendizagem da demonstração, segundo ele, exige treinamento e experiência, sugere uma atenção especial aos teoremas centrais, a partir dos quais outros serão demonstrados. Sugere, ainda, a utilização do computador, como recurso que pode ajudar nessa tarefa. Deste modo, podemos perceber que o entrevistado tem uma preocupação com o conhecimento pedagógico do conteúdo, pela insistência em inserir o ensino na contemporaneidade, pelo desejo de tornar os conteúdos ensináveis, atrativos para os alunos. Além de destacar um aspecto importante, o de que o professor também aprende com o aluno, com as suas questões, ao afirmar:

> Também gosto de dar aulas. Eu gosto de dar aulas mais na graduação do que na pós-graduação. Eu tenho uma razão para isso. Eu acho que um professor na sala de aula também ganha. Se você para a sala de aula, os alunos de pós-graduação, a maioria está com sono, que não tem interesse. O que você vai aprender lá? Nada. Então dar aulas para os alunos de Engenharia Elétrica, eles são dinâmicos. São bastante diferentes, eles querem aprender.

Em síntese, o entrevistado:

- atribui um papel de destaque à Teoria dos Números na Matemática e na História da Matemática, pois os números inteiros estão na base da civilização e na base do conhecimento matemático;
- preocupa-se, ao analisar a afirmação de Campbell e Zazkis sobre a ausência da Teoria dos Números nos currículos, com o lugar de onde falam aqueles pesquisadores;
- destaca, no ensino da Teoria dos Números, os valores: formativo (possibilidade de desenvolvimento de uma mentalidade intelectual forte)**,** utilitário (aplicações nos

sistemas digitais e de segurança de informações) e cultural (pela presença do número na história da civilização humana, inclusive nos dias atuais).

- apresenta como justificativas para a pouca presença da Teoria dos Números nos currículos: a existência de problemas que não são fáceis; a dificuldade de haver diferentes formas de representação para as situações envolvidas nos problemas; o fato de não existirem modelos, cada problema tem um caminho de resolução diferente; a falta de uma preocupação pedagógica, que busque torná-la mais acessível e mais atraente;
- pensa os problemas de Teoria dos Números como simples, pois têm poucos dados e são fáceis de serem compreendidos;
- apresenta a definição clássica de Teoria dos Números: estudo das propriedades e relações entre os números inteiros, podendo se estender ao estudo dos números racionais;
- considera a Teoria dos Números um campo sem fronteiras, pois, ao mesmo tempo em que é base para o conhecimento matemático, serve-se de todo esse conhecimento ao qual está subjacente para resolver questões que lhe são próprias;
- considera a disciplina Álgebra como sendo o estudo das estruturas algébricas: grupos, anéis e corpos, e afirma que Teoria dos Números não é "operações com números", portanto não se confunde com a Aritmética, se esta for assim entendida;
- avalia os conteúdos apresentados sob a rubrica de Teoria Elementar dos Números como necessários e suficientes;
- reforça que o ensino-aprendizagem de Teoria dos Números exige criatividade, pois não há um modelo, um padrão que se possa seguir;
- percebe a Matemática como única, onde os diferentes campos constituem diferentes "pontos de vistas" acerca dos objetos matemáticos;

Assim, Dias concebe a Teoria dos Números como um campo científico "novo" que trata dos inteiros e das relações entre eles. Como um saber a ensinar, a concebe como um campo que ainda carece de uma transposição didática que a torne ensinável, mais atraente e mais acessível aos alunos. Não dá ênfase à abordagem dedutiva, apresentando outras possibilidades, como a investigação matemática, usando os recursos computacionais e "velhos" teoremas como se fossem "brincadeiras", e as aplicações como forma de atrair o aluno.

6.6 Análise da entrevista de Elias

O entrevistado é educador matemático, com mestrado em Teoria dos Números e doutorado em Educação Matemática. Atua como professor da graduação e da pós-graduação em uma instituição privada de ensino.

Sobre o papel da Teoria dos Números na História da Matemática e nos currículos, considera:

> (...) eu concordo com esses pesquisadores (Zazkis e Campbell) que ela deveria ter um papel próprio dentro do currículo do curso de licenciatura em matemática, por conta da gente trabalhar o conceito de número e o papel de número é central no currículo de matemática (...) enquanto área de pesquisa dentro da matemática pura, eu percebi o quanto central ela é mesmo."
>
> Sem dúvida ela tem uma grande importância num curso de licenciatura, porque ela é considerada a 'rainha da matemática' pelos fundamentos que ela traz e que são fundamentos que aparecem na álgebra, na análise, no cálculo. Enfim eu acredito ser uma disciplina bastante central.

O entrevistado percebe a Teoria dos Números como importante na licenciatura em matemática, porque trata o estudo de número, e este é central nos currículos de matemática, embora não especifique em quais níveis. Destaca, assim, o papel de "fundamentos" que a Teoria dos Números tem dentro da Matemática, isto é, de "rainha da matemática", conforme apontado por Gauss. No entanto, Elias não apresenta, inicialmente, elementos que possam esclarecer e justificar esta afirmação. Indagado novamente sobre a importância da Teoria na formação do professor, continua:

> Trazendo a Teoria dos Números, acho que você pode despertar a descoberta e a explicação de muitos fundamentos da Matemática que se deram na Teoria dos Números. Aliás, é uma das subáreas da Matemática onde se tem uma quantidade maior de problemas abertos. Então é uma área da Matemática Pura de muita exploração, de muito movimento em nível de pesquisa, como outras são. Mas ela tem problemas aparentemente muito simples, como o (último) Teorema de Fermat, que ficou anos aí para ser de fato demonstrado (...)
>
> A Teoria dos Números traz problemas, teoremas, indagações simples, aparentemente, porque trata de fundamentação. São coisas que não são complicadas num primeiro momento, mas que podem vir a ser bastante, porque é difícil você explicar o que aparentemente parece que é 'dado', nasceu assim, óbvio. A Teoria dos Números tem muito disto de olhar para uma coisa muito pequena, para uma operação ali, para uma afirmação, onde é tão óbvio, que parece que você não tem nem o que discutir ali ou provar.
>
> Então acho que pode despertar o interesse pela descoberta, estimular a se colocar a pensar.

Ao considerar a possibilidade do "despertar a descoberta e a explicação", Elias faz emergir o caráter instigador que as questões de Teoria dos Números podem ter - questões simples, fáceis de serem entendidas e intrigantes, mas sendo muitas delas difíceis de serem provadas, indicando assim a possibilidade de uma abordagem que valoriza a investigação matemática. Nesse sentido, podemos invocar o *principio da necessidade* de que nos fala Harel (2000) - ser instigado por questões desafiadoras, ou conflitos cognitivos, impulsiona o indivíduo, o aluno ou o pesquisador, a se envolver intelectualmente na busca da solução ou da explicação, atingindo, assim, níveis cognitivos mais avançados.

> Então eu vejo que a importância dela dentro de um curso de licenciatura, é que numa formação inicial de professores, estaria dando oportunidade para que ele se colocasse a pensar nessas afirmações óbvias que a gente toma como 'dado' e o quanto ele poderia estar explorando isso, explorando com os alunos das séries iniciais do ensino básico, do ensino fundamental.

Levanta, assim, um aspecto interessante, que é o de questionar aquilo que parece dado, o não se contentar com o que é aparentemente óbvio, estimulando a descoberta, a capacidade de argumentar, de dar explicações. Muitos dos conteúdos tratados em Teoria dos Números já foram estudados pelos licenciandos, quando alunos da escola básica, e lá são geralmente apresentados como dados ou como óbvios, como é o caso dos algoritmos ou da própria representação dos números. Retomá-los na licenciatura seria oportunidade de questionar a aparente obviedade e de associar o conhecimento "antigo" ao "novo", como também oportunidade de elo entre a formação e a prática docente na escola básica.

Sobre o que é Teoria dos Números, diz:

> (...)Teoria dos Números seria essa coisa do comportamento dos números, como se comportam, os padrões, os números primos. E o que acontece com quem faz pesquisa em Teoria dos Números é ficar olhando para esse comportamento, para o padrão, para o que acontece, para ver até onde vai (...)

Embora não exponha de forma explícita, Elias considera a Teoria dos Números como estudo do comportamento dos números inteiros, salientando a busca de "padrões", ou seja, de relações entre eles. E continua, abordando a relação Teoria dos Números e Álgebra:

> (...) Teoria dos Números, ela informa, enquanto campo, ela informa muito ao campo da Álgebra, não só da Álgebra, quanto da Análise, da Análise Matemática. Ela chega, por ter essa natureza, por isso ela é chamada 'rainha da matemática', ela tem uma natureza de fundamentação mesma, então nem sempre de imediato um resultado na Teoria dos Números tem um impacto na Análise ou na Álgebra, mas a Álgebra e a Análise sempre precisam ter a Teoria dos Números sendo requisitada para alguns problemas em nível de pesquisa. (...) A Teoria de Números se torna uma ferramenta para a Análise e para Álgebra em nível de pesquisa.

Elias insiste no caráter de "fundamentos" que a Teoria dos Números tem, não só para a Álgebra, como em outras áreas da Matemática, considerando-a como uma ferramenta para esses campos. E acrescenta:

> É a Teoria dos Números informando a outros campos. Inclusive um dos problemas que eu desenvolvi no mestrado, vem de um algebrista, desenvolvendo um modelo tal, que não

> envolvia Teoria dos Números, mas ele se deparou com um problema ali que só a Teoria dos Números pode ajudá-lo para encaminhar na pesquisa que ele estava desenvolvendo na Álgebra.

O entrevistado mostra como a Teoria dos Números estaria auxiliando na resolução de um problema de pesquisa atual em Álgebra.

Abordando a relação entre Aritmética e Álgebra, diz:

> Aritmética tem a ver com o comportamento dos números. Eu tenho um problema que eu não gosto muito de fazer essa distinção entre Aritmética e Álgebra, colocar Aritmética como pensamento concreto e Álgebra como pensamento abstrato. Eu acho que as coisas deveriam funcionar quase que ao contrário. A Álgebra, já de início, e a Aritmética como caso específico da Álgebra, o que acaba conflitando com o currículo que a gente tem. Da maneira como é colocado, discute-se até a passagem ao pensamento abstrato da Matemática, por conta dessa separação entre Aritmética e Álgebra. E, deixando que tivesse, segundo Piaget, uma certa maturidade, uma certa idade para você ter esse pensamento abstrato. Acho que as coisas poderiam estar, muito bem, juntas, acontecendo ao mesmo tempo.

O entrevistado marca, de modo claro, a sua posição em relação à separação entre Aritmética e Álgebra nos currículos escolares, questionando a concepção da primeira como pensamento concreto e a segunda como abstrato. Para Elias, uma não deve suceder a outra, mas caminharem juntas, estando a Álgebra presente desde o início. Nesse sentido, concorda com Fiorentini et al. (1993), quando afirmam que o pensamento algébrico está na base conceitual de todos os campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, e que, portanto, esse tipo de pensamento se deve fazer presente, desde as séries iniciais na formação do estudante.

Ao avaliar o que estamos denominando Teoria Elementar dos Números, considera:

> Num primeiro momento eu acho que o nomear a disciplina como Teoria Elementar dos Números é interessante, por estar dentro de um curso de Licenciatura em Matemática, porque já dá uma conotação diferente da Teoria dos Números em um curso de bacharelado e já direciona mais para o ensino-aprendizagem. Quanto ao conteúdo, me parece num primeiro momento, bastante razoável e pertinente a um título como esse da disciplina. Acho que a proposta está ótima, eu não eliminaria nada, com certeza. Agora, acrescentar é que, no momento, eu não estaria sugerindo, não".

Desse modo, o entrevistado avalia que a proposta é adequada e coerente para um curso de Teoria Elementar dos Números, e também suficiente, pois não tem nada a acrescentar ou a eliminar. Percebe a denominação como interessante, pois pode já direcionar para os objetivos da formação de professores, em que a preocupação com o ensino e a aprendizagem deve estar presente.

Sobre a inclusão do tema Reciprocidade Quadrática, sugerida por outros pesquisadores, como oportunidade para mostrar a importância de Gauss no campo da Teoria dos Números, assim se expressa:

> Gauss foi um outro matemático bastante influente e importante dentro da Teoria dos Números, enquanto campo. Eu não sei, eu não me posicionaria, acho que você estaria muito mais pronta,

> para estar avaliando se valeria a pena ou não, por estar engajada e a sua cabeça estar voltada para pensar sobre isso. E é o que você pontuou, depende da carga horária, precisaria ver o quanto vindo Gauss, entra Gauss, tira Euler ou não. Que papel mais importante teria Gauss, Fermat, em nível de ensino-aprendizagem da Matemática, pensando na formação do professor que vai estar trabalhando com o ensino básico. Precisaria olhar nesse nível.

Assim, Elias manifesta não ter uma posição definida a respeito da inclusão do tema Reciprocidade Quadrática e levanta um aspecto importante na seleção de conteúdos nos cursos de formação de professores – a necessidade de se considerar o trabalho docente desse futuro professor na escola básica.

Em síntese, o entrevistado:

- destaca o papel de "fundamentos" que a Teoria dos Números possui dentro da Matemática, nas diferentes áreas, evocando Gauss, quando afirma que ela é "a rainha da matemática";
- afirma que a Teoria dos Números trata de problemas aparentemente simples, mas que são, muitas vezes, difíceis de serem abordados, pois explicar o que parece óbvio, não é fácil;
- reconhece que a Teoria dos Números traz questões instigadoras que podem estimular a descoberta e a explicação, o que aponta para o *princípio da necessidade,* apresentado por Harel, e para o valor formativo da Teoria dos Números;
- entende a Teoria dos Números como o estudo do comportamento dos números inteiros;
- questiona a separação entre Aritmética e Álgebra na escola básica, isto é, a colocação da Aritmética como pensamento concreto e a Álgebra como pensamento abstrato. Indica a possibilidade de que elas coexistam nesse nível de ensino;
- considera a denominação Teoria Elementar dos Números para a proposta apresentada para a licenciatura em matemática como interessante, pois direciona para o objetivo de formação do professor para a escola básica, não apresentando qualquer sugestão de alterações ao que foi proposto.

Deste modo, Elias concebe a Teoria dos Números, enquanto saber científico, como uma área que estuda o comportamento dos inteiros e que se constitui em fundamentos para outras áreas da matemática. Como saber a ensinar, concebe-a como um espaço propício para se questionar o aparentemente óbvio e aquilo que aparece como dado, como também se constitui em um espaço para a investigação, devendo ser definida em função da formação do professor da escola básica.

6.7 Análise da entrevista de Gomes

O entrevistado é doutor em Educação e mestre em Matemática Aplicada, docente e pesquisador na área de Educação Matemática, em uma instituição pública estadual, interessado em educação algébrica. Neste trabalho, será denominado Gomes.

Sobre a afirmação de Campbell e Zazkis de que a Teoria dos Números não tem um papel central nos currículos de matemática, Gomes concorda que também no Brasil essa temática é pouco valorizada. Acrescenta que esses conteúdos são tratados em disciplinas como Fundamentos de Matemática, mas com uma abordagem muito axiomática, não tratando os números numa perspectiva multidimensional que inclui a abordagem histórica e epistemológica dos conceitos.

> Os vários campos numéricos são de uma riqueza muito grande para a formação do professor, mas essa é uma visão mais histórica que pode ser associada a uma dimensão que é epistemológica, que diz respeito à natureza dos processos de como estes conhecimentos foram se constituindo historicamente e como hoje podemos ter acesso a estes conceitos, seja no contexto escolar, nas práticas de sala de aula de matemática, seja fora da sala de aula, em contextos sócio-culturais, nas diferentes práticas sociais.

Considera que é de fundamental importância haver uma disciplina que trate especificamente a questão dos inteiros, pois números têm uma presença forte no Ensino Fundamental. Por este motivo, o professor deve ter um conhecimento profundo desse tema que vá além do que é tratado na matemática escolar. No entanto, esse aprofundamento diz respeito não só aos aspectos matemáticos, mas também aos históricos, epistemológicos, culturais e sociais.

Com relação à abordagem axiomática, tradicional no tratamento da disciplina Teoria dos Números, Gomes a considera “engessante”. Propõe e enfatiza a investigação matemática, que, na sua opinião, também deve ser introduzida nas disciplinas acadêmicas, pela oportunidade que ela oferece de o aluno problematizar, conjecturar e depois provar localmente as suas descobertas.

> Eu acho que a teoria mais geral, mais axiomática, é engessante, pois esta geralmente não permite que o aluno problematize tanto as idéias, limitando-se a uma abordagem mais procedimental da própria matemática, preocupada mais em estabelecer demonstrações do que produzir significados. Entretanto, o processo de levantar/formular conjecturas, que é parte da investigação matemática, é algo interessante e formativo e que poderia ser introduzido também no ensino superior. Para criar esse ambiente de investigação matemática em sala de aula, o

> professor precisa elaborar algumas tarefas ou atividades mediante as quais os alunos são instigados a levantar conjecturas, a aprender a conjecturar e, a partir destas conjecturas, tentar encontrar uma demonstração, uma prova, que eu chamo de prova local que é diferente de uma prova inserida em um corpo teórico axiomático que é muito mais difícil...

Gomes argumenta que é importante que o licenciando vivencie, durante o processo de formação inicial, a abordagem investigativa, incluindo a observação de regularidades e padrões ligados aos números e o desenvolvimento de provas locais, pois esta pode ser trabalhada, também, no ensino básico. Relata, inclusive, duas pesquisas em que estudantes do Ensino Fundamental são submetidos a atividades de investigação matemática, envolvendo situações relacionadas a números. (Anexo 2, xxxiii)

Esclarece o que entende por prova local e os processos envolvidos nesta atividade, dizendo que

> Ela não é uma prova construída a partir de uma teoria, uma teoria dos números, por exemplo, ou de uma teoria algébrica ou axiomática como é o modelo teórico de Euclides. Modelo esse que é difícil de ser desenvolvido e compreendido pelos alunos de ensino fundamental. (...) para você ter uma prova mais convincente matematicamente, entram em cena processos de negociação, de argumentação, de aceitação, de validação; a álgebra pode dar mais garantia de convencimento de que aquilo vale para qualquer número.

Com relação à segunda questão sobre as inter-relações e especificidades entre os campos denominados Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números, o entrevistado faz uma análise que considera o tipo de pensamento ligado a estes campos, tendo em vista o ensino, não se preocupando em discutir os temas, os problemas e métodos próprios destes campos dentro da matemática. Considera, inicialmente, que a teoria dos números ou aritmética, álgebra e geometria são os campos fundamentais da matemática elementar. Ele não nega que haja especificidades entre o pensamento aritmético, algébrico e geométrico, mas afirma que, dependendo da forma como o professor trabalha, um tipo de pensamento pode se desenvolver imbricado no outro.

> Realmente você pode desenvolver o pensamento algébrico, no ensino fundamental, a partir do aritmético, dependendo da forma como você trabalha. Por exemplo, o conceito de igualdade, um conceito fundamental da álgebra, é construído desde as séries iniciais... e o sentido de igualdade que se imprime na aritmética vai ter implicações, mais tarde, no conceito algébrico de igualdade. Por ex., quando você trabalha $5 + 3 = 8$ e dá o sentido do “igual” como sendo “o resultado é”, o aluno está internalizando um sentido não algébrico de igualdade, um sentido operatório de igualdade e não o de equivalência, no sentido de “vale tanto quanto”, ou “tem o mesmo valor que”, que é o conceito algébrico de igualdade. O professor ciente disso, poderia trabalhar desde as séries iniciais, na aritmética, esse sentido de igual. Por ex., poderia explorar que $5 + 3$ é o mesmo que $4 + 4$, é o mesmo que $7 + 1$, quer dizer trabalhar o sentido de igualdade de maneira diferente daquilo que muitas vezes é ensinado pelos professores das séries iniciais. Isto contribui para desenvolver o sentido de igualdade da álgebra, trabalhar e entender melhor as passagens das equações algébricas e também o conceito de função.

Gomes adverte que o futuro professor que não tem esse conhecimento epistemológico não é capaz de desenvolver a aritmética, pensando em desenvolver o pensamento e a linguagem algébrica. Afirma que há uma inter-relação entre aritmética, álgebra e geometria no ensino, mas que ainda é pouco trabalhada na licenciatura, justificando:

> Há uma inter-relação entre estes campos que ainda precisamos aprender a trabalhar na formação de professores de forma mais sistemática. Pela tradição por ter que constituir um campo mais teórico axiomático, não se viabiliza esta inter-relação entre campos, por constituir campos independentes, isolados, cristalizados, portanto pouco significativos para a formação daquele conhecimento fundamental para o professor que é trabalhar de maneira diversificada, problematizadora e versátil dentro destes campos. Um bom aluno de matemática é aquele que transita facilmente de um campo a outro, da álgebra para a aritmética, para a geometria e usa elementos destes campos para poder expressar as idéias e relações matemáticas.

Questionado se a denominação da disciplina pode definir ênfases que obscurecem aspectos específicos de uma área (por exemplo, incluir a Teoria dos Números em uma disciplina denominada Álgebra), afirma que mais problemático que a denominação e a ementa, é o professor que vai ministrar a disciplina e a relação que ele estabelece com ela, citando exemplos de disciplinas que desapareceram do currículo pelo fato de terem uma abordagem que não as tornou significativas no processo de formação. Deste modo, o entrevistado concebe que uma disciplina acadêmica é mais que um nome e uma ementa, pois não está constituída apenas por estes elementos, incluindo, também finalidades e abordagens. Destaca, ainda, o papel do formador e a importância da abordagem, pois o professor pode dar vida à disciplina ou decretar a sua morte no currículo, dando um exemplo de uma disciplina incluída, por ser considerada importante na formação, no currículo do curso de licenciatura em matemática da universidade onde trabalha, mas que, pela abordagem dada, acabou sendo excluída. Afirma ele

> (...) que as pessoas que trabalham na licenciatura têm uma história de formação que muitas vezes passa por uma formação bastante axiomática, algébrica ou formalista e o professor aprende a valorizar isto. Acha que isto é que é mais importante. Isto é que é aprender com profundidade... (...) Para romper com essa tradição formalista, o professor teria que estudar, pesquisar outras formas de abordagem do tema, o que implica disponibilidade de tempo e vontade política de mudar. (...) porque você não vai encontrar nos livros, nos manuais usuais essa outra abordagem. Você tem que estudar, tem que quebrar muito a cabeça pessoalmente, para poder olhar aquelas idéias de outra forma e de preferência sob múltiplas formas. Buscar elementos na história ou em outros textos.

Desse modo, o entrevistado aponta para a falta de material que inclua outras abordagens, como já registramos quando tratamos do livro didático. E continua falando das abordagens*:*

> A abordagem formal pode impedir que o professor ou aluno tenha acesso à essência das idéias e conceitos, pois essas demandam uma abordagem mais multidimensional, envolvendo aspectos culturais, lógicos, históricos, didático-pedagógicos, além dos conceituais. (...) uma abordagem significativa de formação do pensamento, do conhecimento didático-pedagógico do

> conteúdo, como nos aponta Shulman, é olhar para o conteúdo não apenas como um conhecimento em si, mas um conhecimento de relação que pode contribuir para a formação do pensamento do aluno, do desenvolvimento lógico matemático do aluno. E é por essa razão que o formador não pode abordar as idéias matemáticas como prontas e acabadas.

Assim, Gomes volta a argumentar que a abordagem estritamente axiomática pouco contribui para a formação do conhecimento profissional do professor, pois o licenciado, quando inicia sua prática, não consegue mobilizar quase nada daquilo que estudou na licenciatura, não apresentando versatilidade de pensamento. Daí a necessidade da abordagem de outros aspectos, como culturais, lógicos, históricos, didático-pedagógicos, que contribuem para a constituição do conhecimento pedagógico do conteúdo de que nos fala Shulman.

Segundo Gomes, a construção de um conhecimento mais sólido e profundo poderia ser efetivada através da investigação matemática, incluindo a fase exploratória, o levantamento de conjecturas, a tentativa da prova, ainda que local, e depois a sistematização. Deste modo, percebemos que Gomes vê a metodologia como algo imbricado na disciplina, como um componente interno da disciplina, e não como um "lubrificante", conforme fala Chevel (1990). É uma possibilidade para que prática e teoria aconteçam simultaneamente, permitindo que o futuro professor possa se constituir em sujeito do conhecimento matemático e possa usufruir o prazer da descoberta. Para o entrevistado, a investigação matemática é como uma viagem que tem ponto de partida, mas não se sabe bem aonde vai chegar. Assim

> Tanto o futuro professor, como depois o aluno deste professor, pode se constituir em sujeito de conhecimento, sujeito que constrói, produz conhecimento matemático. Quando você aprende matemática, construindo idéias, produzindo conhecimento a satisfação é outra. É muito mais interessante

Volta a destacar que a vivência desta experiência como aluno da licenciatura é importante porque

> ele tende a levar e a produzir este mesmo contexto, de exploração das idéias matemáticas nas salas de aula da escola fundamental e média. Aí, ele derruba uma das crenças mais tradicionais do professor que, para tornar o ensino da matemática mais significativo, ele tem que trabalhar com aplicações. Não, não necessariamente, quando o aluno tem a oportunidade de construir as idéias, as relações, de estabelecer as suas conjecturas, ele vibra, ele tem o prazer da criação. Porque ele sabe o que está fazendo, ele está compreendendo que ele tem um certo poder de intuir coisas diferentes.

Assim, Gomes traz um sentido de prazeroso e de significativo, fruto da atividade matemática, em que o aluno pode associar o conhecimento novo ao antigo, e não da visão pragmática de que o conhecimento ganha sentido apenas através das aplicações que possa ter na vida do estudante. É preciso ponderar, contudo, que isso não é uma tarefa simples, vai depender muito do professor da disciplina, também do envolvimento dos alunos e da disponibilidade de materiais para consulta, além de outros aspectos ligados à transformação dos saberes científicos em saberes a ensinar.

Assim, o entrevistado enfatiza a importância das abordagens da disciplina, permitindo-nos inferir que, na sua concepção, elas são elementos constituintes desta, mais que o nome ou a ementa.

Sintetizando, Gomes:

- concorda que a temática dos números inteiros não é enfatizada nos currículos das licenciaturas no Brasil, e, quando o é, prepondera a abordagem axiomática;
- considera que o estudo dos conjuntos numéricos é um tema importante na formação do professor da escola básica, pois eles têm uma presença forte na matemática escolar;
- considera que a abordagem estritamente axiomática em Teoria dos Números é "engessante" e pouco contribui para a formação do professor, tendo em vista a sua prática docente;
- propõe que os números sejam tratados numa perspectiva multidimensional, incluindo a abordagem histórico-epistemológica dos conceitos e das idéias, os aspectos culturais, lógicos, históricos, didático-pedagógicos, além dos conceituais;
- concebe a abordagem como um componente importante da disciplina acadêmica, podendo dar-lhe significado ou levá-la ao desaparecimento do currículo;
- sugere a investigação matemática como alternativa de abordagem, pois permite ao aluno se sentir sujeito do conhecimento, permitindo uma aprendizagem significativa e prazerosa;
- destaca o papel do professor para dar vida aos conteúdos, afirmando que outras abordagens para a Teoria dos Números, diferente da axiomática e tradicional, exige preparo, interesse, disponibilidade e vontade política do professor-formador para mudar.

Deste modo, Gomes concebe a Teoria dos Números como um saber a ensinar, envolvendo o estudo dos números, que se constrói a partir de aspectos matemáticos, de aspectos históricos, epistemológicos, culturais e sociais, tendo a investigação matemática como forma de abordagem que propicia a aprendizagem significativa e prazerosa, em que a prova é um dos momentos.

6.8 Análise da entrevista de Félix

Félix é doutor em matemática na área de Sistemas Dinâmicos, pelo IMPA. Pesquisa atualmente em Ensino de Matemática e é professor da disciplina Introdução à Teoria dos Números na licenciatura, em uma instituição pública federal.

Sobre a presença da disciplina Teoria dos Números nos currículos, inicialmente o entrevistado reconhece que a pouca ênfase dada a esta disciplina é uma questão da história dos currículos de matemática no Brasil, em que se valoriza mais o contínuo.

> Talvez seja uma influência da Escola Francesa e da Escola Italiana. E também a época. Na nossa época, houve um desenvolvimento muito grande das equações diferenciais, então tudo isto influenciou muito. Há currículos que tem 4 disciplinas de Cálculo, só tem uma de Introdução á Teoria dos Números, assim não é dado o papel importante ao número. Será que não deveria ser o contrário? Mas esta coisa vem vindo e a gente vai tentando mudar.

Em seguida, apresenta duas justificativas para a inclusão da Teoria dos Números nos currículos das licenciaturas, uma do ponto de vista cultural e a outra ligada à presença da Aritmética nos currículos da escola básica em todos os países, afirmando:

> A inclusão do estudo da Aritmética nos cursos de licenciatura em matemática pode ser examinada sob duas vertentes: a necessidade do licenciando vivenciar os processos ali tratados, e o estudo desse assunto do ponto de vista cultural. A Aritmética faz parte da cultura dos tempos antigos, tendo sido desenvolvida, juntamente com a linguagem, para atender às necessidades de comunicação e de quantificação. Vemos, na história das civilizações, como os povos criaram e recriaram a Aritmética sob roupagens diferentes, mas utilizando essencialmente os mesmos processos matemáticos, aperfeiçoados ao longo do tempo. Em nossos dias, as experiências de quantificação de objetos e fenômenos fazem parte da vida prática das pessoas. E o estudo da Aritmética é uma necessidade para prover a organização adequada da sociedade e oferecer para o individuo processos matemáticos inerentes à sua estrutura lógica mental.
>
> O ensino da Aritmética faz parte da escolaridade básica de todas as nações. Nas propostas curriculares adotadas em nosso país, essa matéria está distribuída principalmente nas quatro séries do Ensino Fundamental.

Nessa fala do entrevistado, percebemos uma clara preocupação com a formação do professor de matemática para a escola básica. A disciplina Aritmética deve ser incluída nos currículos da licenciatura, não apenas por seus valores intrínsecos, mas porque ela está inserida histórica e socialmente na vida dos indivíduos e das sociedades, como também nas escolas do mundo todo. A necessidade de quantificar e, em especial, a necessidade de contar é algo que se impôs às sociedades, tanto antigas, como atuais. Vai mais longe ao afirmar que a aritmética oferece aos indivíduos processos matemáticos inerentes a sua estrutura lógica mental, possivelmente se embasando em estudos, como os de Piaget. Outro aspecto a destacar é a preocupação com a possibilidade de o licenciando vivenciar processos que ele deverá trabalhar posteriormente com seus alunos, indicando elementos que dizem respeito ao conhecimento do conteúdo, ao conhecimento pedagógico do conteúdo e ao conhecimento curricular, ao dizer que

> O licenciando precisa ter conhecimento conceitual, técnico e pedagógico dos assuntos da Aritmética, que deve ser apresentada a ele sob os mais variados métodos de ensino, com uso de estratégias diversificadas. Caso contrário, o licenciando conservará, como conhecimento técnico e pedagógico em Aritmética, apenas aquilo que vivenciou como estudante da Escola Fundamental. Em conseqüência, ao exercer suas atividades de ensino, tenderá a reproduzir posições cristalizadas.

O entrevistado pondera que a licenciatura forma o professor para atuar na segunda fase do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, no entanto, afirma que é importante que ele tenha conhecimento destes conteúdos, tanto do ponto de vista da matemática, como dos aspectos pedagógicos, para que possa dar prosseguimento às experiências do aluno, tomando como base sua vivência anterior. Acrescenta, ainda, que não se trata de incluir esses conteúdos na licenciatura para suprir possíveis falhas que o estudante possa trazer da escola básica, mas

> Essas matérias devem estar presentes no currículo de forma criativa, e apresentadas com uma prática pedagógica inovadora em comparação com os padrões tradicionais de ensino

Sobre as possíveis abordagens para a disciplina, Félix afirma que o professor precisa ter conhecimento de vários métodos e alternativas pedagógicas para ter opção de escolhas de acordo com as situações e, considera que

> (...) o mais importante seria o desenvolvimento do estudo, da investigação, da criatividade. Então seria o ensino da matemática através de problemas, o que eu chamo de método genético. (...) pesquisando a história do desenvolvimento de um conceito podemos acompanhar sua construção lógico-dedutiva através dos tempos, e examinar as idéias mais simples que precederam sua acepção plena. Essas idéias podem sugerir atividades que estimulem as fases iniciais e intermediárias na construção de um conceito, permitindo-nos propor seqüências de ensino-aprendizagem adequadas para estudantes dos mais variados níveis de experiência.

Deste modo, sugere alternativas, como a investigação matemática, a resolução de problemas e a abordagem epistemológica dos conceitos. Entretanto, considera que não se pode fazer panacéia de nenhuma delas e que não existe um único método que atenda a todas as necessidades e objetivos. Sobre a abordagem estritamente axiomática, que é muito comum nesta disciplina, como pudemos constatar pela análise dos livros didáticos, afirma ser ela importante do ponto de vista da construção da matemática, mas no ensino faz restrições, porque é *um ou outro aluno que faz bom proveito*, embora reconheça que a justificativa seja importante não só na matemática. Alega que essa abordagem tem origem no fato de que a licenciatura estava muito ligada ao bacharelado, ou seja, era dependente deste, assim a disciplina Teoria dos Números tinha um caráter muito teórico, mais avançado, geralmente no final dos cursos. Particularmente, procura, em seus cursos, demonstrações que não dependam de uma seqüência linear de princípios e questiona:

> (...) se nosso aluno na faculdade é formado sob este método, como ele vai fazer quando for exercer. Ele vai ficar num beco sem saída, porque ali não é aplicável este método, a não ser muito localmente. A princípio eu diria que não deve ser usado.

Contudo alerta que não é fácil fazer diferente daquilo que é feito no ensino tradicional, por vários motivos, como: o tipo de ensino vivenciado pelo aluno desde a escola básica, onde prioritariamente se utiliza a aula expositiva em que o aluno deve apenas escutar; o despreparo do professor que também vivenciou essa forma de ensinar ou que não refletiu sobre estes assuntos e não tem, muitas vezes, tempo, interesse e disponibilidade para fazer de outro modo; a falta de material adequado.

> O mais difícil para você executar isto é o costume, a forma como o estudante foi educado em todos os seus anos de escolaridade. Então veja bem, o estudante vai para a aula, qual é o estado psicológico dele ao ir para uma aula? Talvez seja o seguinte – agora é o momento em que eu vou escutar, não vou trabalhar. Se o aluno vai para a aula e não quer trabalhar, fica escutando o que você vai falar, e já viciou nisto. Aí você chega e diz: - vamos fazer um problema. Vamos estudar um tema, então daqui a pouco já tem uma dispersão, a pessoa não se dedica, não sabe o que fazer, não vai atrás, não tem iniciativa, ou seja, a falta de iniciativa entre os estudantes é muito grande. Eu acho que por um vício do sistema. É complicado. Além disto, muitas vezes a gente não tem um material adequado, a gente não está muito acostumado a fazer assim. Vem da parte dos professores também, porque estes foram formados neste esquema. Então não tem um modelo. Acho que falta um modelo adequado para o professor. Falta material. Hoje está mudando bastante, já tem muita variedade. Até um certo tempo atrás, todo o material era preparado para aula expositiva. O professor gasta muito tempo preparando material, às vezes, nem sempre o professor pode. Tem também o problema do professor que não refletiu sobre estes assuntos.

O entrevistado afirma que está aprendendo e que, quando se consegue fazer um trabalho diferente, compensa muito.

Deste modo, podemos perceber que Félix se preocupou com a Aritmética, enquanto um saber a ensinar, uma disciplina voltada para a formação do professor, concebida não apenas como um conjunto de conteúdos matemáticos, mas também constituída de finalidades e de abordagens.

Quanto às relações entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números, faz uma análise, considerando-as como disciplinas acadêmicas, e não como saberes científicos da matemática, relatando um fato ocorrido na universidade em que trabalha.

> Um fato interessante que aconteceu aqui é o seguinte, nós introduzimos esta disciplina no currículo, em 1989. Eu sugeri que o nome da disciplina fosse Aritmética, mas entre os professores parece que existia uma concepção de que a Aritmética era uma coisa muito fácil, ou seja seria fazer "continhas". Então não quiseram dar este nome e sugeriram o nome Introdução à Teoria dos Números.

O fato relatado ilustra bem que não há um consenso sobre estas denominações, principalmente entre Aritmética e Teoria Elementar dos Números. O entrevistado caracteriza a Aritmética elementar como sendo o estudo da contagem, das representações dos números naturais, os algoritmos das operações, destacando o desenvolvimento histórico e epistemológico dessas idéias.

Acredita que a inclusão de tópicos de Teoria dos Números em cursos de Álgebra se deva ao fato de que, nessa disciplina, faz-se a construção axiomática dos conjuntos numéricos e pela influência de livros didáticos, como o de Jacy Monteiro, que traz um capítulo sobre Teoria dos Números. Considera, entretanto, que a Álgebra e a Teoria dos Números têm métodos um pouco diferentes.

Sobre a proposta da disciplina Teoria Elementar dos Números, na terceira questão, avalia:

> Nestes temas aqui onde estão as representações dos números? Não só os sistemas posicionais como também outros, como o aditivo. Geralmente isto aparece como um teorema, quando se vê o algoritmo da divisão, mas como são vistos outros assuntos, se passa rapidinho por este teorema. Fica desproporcional, porque este é um assunto muito visto na escola por vários anos, então no curso é visto rapidamente, na forma de um teorema e de alguns exercícios. (...) Do ponto de vista do ensino da Matemática, é uma oportunidade de reconstrução de uma descoberta fundamental para o homem. Além disso, para que nossa mente tenha clareza da relatividade da representação decimal, é necessário o conhecimento de diferentes tipos de representação. Caso contrário, o sistema decimal pode assumir um caráter absolutista, e sua expressão confundir-se com o conceito de número. (...) O licenciando, ao estudar Aritmética, precisa ter a oportunidade de adquirir clareza sobre a dimensão prática dos algoritmos aritméticos e sobre seus processos de invenção e desenvolvimento. A apreensão dessas idéias é um objetivo pedagógico essencial para o futuro professor.

Deste modo, avalia como válidos os conteúdos propostos e faz duas sugestões: a introdução do que chama Aritmética elementar, que inclui os diferentes sistemas de representação e os algoritmos das operações fundamentais, envolvendo os aspectos da gênese e desenvolvimento destes temas, e a outra sugestão diz respeito ao estudo do conjunto dos números naturais antes dos números inteiros, seguindo uma linha histórica. Alega que os inteiros envolvem uma abstração que não surgiu logo de início. Considera, ainda, que os conteúdos sugeridos permitem relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento como a história, a antropologia, a arte, a geografia.

Sugere, numa segunda parte, o algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos. Diz que equações diofantinas é um tema que pode ser interessante, envolvendo também as ternas pitagóricas. Destaca a importância de uma aprendizagem significativa, ao afirmar que

> O desafio é trabalhar com o estudante de uma forma que ele realmente sinta o porque são estudados estes conteúdos. Às vezes, não é só uma questão de aplicação, por exemplo é útil nisso, naquilo.... . O interessante seria o aluno perceber que ali estão sendo investigados os números. Então a pessoa está fazendo uma investigação: o que são os números? Nesta investigação foi adotada uma idéia que, basicamente, é a idéia da divisibilidade, da divisão. Isto é que é importante – o estudante perceber porque ele está estudando aquilo, como chegou, o que levou àquilo. Os livros não trazem estas idéias. Que tal a gente resgatar a idéia dos

> gregos: eles basearam toda a investigação no algoritmo da divisão, deve ter tido um motivo. Isto eu não sei se o professor percebeu, se ele não percebeu, não sei se ele vai passar isto.

Ainda avaliando a proposta, considera que o estudo da congruência e dos teoremas de Fermat, Euler e Wilson devam ser feitos de uma maneira mais intuitiva e investigativa, através de problemas. Segundo ele, a congruência foi uma criação de Gauss que veio simplificar muito o tratamento dos problemas da Teoria dos Números, mas tratar esses assuntos de forma axiomática num primeiro curso é fazer o contrário, isto é, complicar, ao invés de simplificar. Quanto à aritmética módulo *m,* considera dispensável nesse curso.

Nessas sugestões, Félix reafirma a sua preocupação com a formação do professor, sugerindo e enfatizando assuntos presentes na escola básica, mas que na licenciatura não são abordados e, quando o são, a abordagem é axiomática, rápida, como se fosse óbvio, sem ter em conta o que os licenciandos aprenderam e o que irão ensinar.

Volta a destacar a importância do papel do professor no desenvolvimento de uma disciplina e a necessidade de que ele vivencie experiências que o capacitem a dar vida aos conteúdos.

> (...) mas a gente há de reconhecer o seguinte - tudo que está no livro já está morto. É claro que o livro é importante, sem ele a gente não consegue desenvolver, mas eu acho que tudo isto depende muito do professor, porque ele é quem vai avivar isto. E aí é que mora o problema. Se a pessoa não fez aquilo, como é que ela vai fazer com os outros?

Em resumo, o entrevistado:

- concebe a Teoria dos Números como fundamental na formação do professor, tendo em vista os valores cultural e social da aritmética na história das civilizações, e considerando, principalmente, a necessidade de que o professor vivencie processos e experiências que lhe permitam ampliar a compreensão dos temas e o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo;
- sugere métodos que valorizem a investigação e a criatividade e a abordagem epistemológica dos conceitos, citando o método genético, dando, assim, menos ênfase às abordagens estritamente axiomáticas e formais;
- não se detém na discussão das relações entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números, tratando-as como disciplinas acadêmicas e não como campos de estudo da matemática;
- em alguns momentos, parece compreender Aritmética e Introdução à Teoria dos Números como as mesmas disciplinas e, em outros, parece considerar que a Aritmética elementar diz respeito às representações dos números, às operações

fundamentais e aos algoritmos, e a Teoria dos Números se iniciaria com o estudo da divisibilidade e números primos;

- aponta dificuldades para a adoção de metodologias inovadoras, citando o despreparo do formador, a falta de material adequado e as atitudes dos alunos decorrentes da utilização predominante da aula expositiva na escola básica;
- sugere a introdução do que chama Aritmética elementar na disciplina Teoria Elementar dos Números, enfatizando a importância desses temas para a formação do professor;
- não atribui significados aos conteúdos pelos seus valores intrínsecos e pelo que representam para desenvolver mais matemática, mas pelo peso que eles têm na formação.

Assim, Félix concebe a Teoria dos Números como um saber a ser ensinado na licenciatura, envolvendo o estudo dos números inteiros, constituído de finalidades e de abordagens ligadas à formação do professor da escola básica. Numa visão prospectiva, podemos perceber que o entrevistado tem uma preocupação com uma transposição didática que ainda está a exigir investimentos dos envolvidos com a área e maior atenção ao conhecimento pedagógico do conteúdo, para que haja maior proximidade com a prática docente na escola básica.

6.9 Buscando significados para a Teoria dos Números na licenciatura – uma síntese da análise de conteúdo das entrevistas

Na análise feita anteriormente, procuramos perscrutar o discurso de cada entrevistado com relação: ao papel da Teoria dos Números na matemática e nos currículos de matemática nos diferentes níveis de escolaridade; às interfaces da Teoria dos Números com outros campos da Matemática, particularmente, a Álgebra e a Aritmética; e, finalmente, com relação ao que estamos denominando Teoria Elementar dos Números, procurando revelar os seus modos de ver os temas tratados. Buscaremos, agora, apresentar algumas categorias que sintetizem a análise de conteúdo feita anteriormente, mostrando o que representa convergências e o que representa modos diferentes de olhar as questões em estudo, associando o discurso dos entrevistados às contribuições de outros pesquisadores envolvidas com a área.

Uma primeira categoria diz respeito ao por que ensinar Teoria dos Números, a segunda trata das relações entre Teoria dos Números, Álgebra e Aritmética e a terceira reúne os elementos que são ou que poderiam ser considerados na constituição de uma disciplina acadêmica que trata da Teoria dos Números na licenciatura.

6.9.1 Razões para a Teoria dos Números nos currículos

Todos os entrevistados concordam com Campbell e Zazkis, quando afirmam que a Teoria dos Números tem um papel central na matemática e na história da matemática, e que é pouco enfatizada nos currículos, especialmente no da licenciatura em matemática. As razões apresentadas são de naturezas diversas e revelam concepções da matemática e de seu ensino, crenças e valores, resultantes da formação de cada um e das atividades nas quais estão engajados como pesquisadores ou docentes.

Assim, na visão de cinco deles, a Teoria dos Números deve estar nos currículos, porque trata de assuntos que são considerados fundamentos em matemática e, portanto, são necessários para se construir e para se aprender mais matemática. Esse pensar está presente na fala de Elias ao destacar o papel de "fundamentos" que ela tem dentro da matemática, nas diferentes áreas, evocando Gauss, que a considerou a "rainha das matemáticas". Esse ponto de vista foi reforçado por Dias que a considera um campo sem fronteiras, pois, ao mesmo tempo em que ela está na base da construção do conhecimento matemático, ela se vale de todo esse conhecimento para resolver as questões que lhe são próprias. Além disso, esse entrevistado destaca que os números naturais têm um papel fundamental na criação dos demais conjuntos numéricos. Esses números não têm uma definição imediata, mas, a partir deles, os demais conjuntos numéricos poderão ser construídos de uma forma dedutiva. Sabendo o que é um número inteiro, pode-se definir um número racional; a partir dos racionais, podem ser definidos os reais; a partir dos reais, os complexos. Avelar, Borges e Cunha consideram os inteiros como o exemplo natural e concreto para a compreensão das estruturas algébricas.

Essas idéias corroboram e são ampliadas pelo que LeVeque, autor do livro *Teoria Elemental de los Números,* aponta no capítulo de introdução. Afirma ele que a Teoria dos Números teve um alto grau de influência no desenvolvimento das matemáticas superiores puras, estimulando a criação de métodos gerais, obtidos, ao se buscar solução para problemas especiais, como foi o caso do *Ùltimo Teorema de Fermat*. Deste modo, a Teoria dos Números se tornou valiosa, como fonte de idéias, de inspiração para o desenvolvimento da matemática.

Sobre essa justificativa, é importante, contudo, ponderar que duas visões podem estar subjacentes a ela. Uma que deve ser vista com cuidado, que é a de que se ensina matemática apenas com o objetivo de se ensinar mais matemática. Essa é uma visão reducionista que coloca a matemática como fim e não como meio do processo educativo. Por outro lado, pode estar subjacente às justificativas apresentadas o *princípio da concretização* no ensino-aprendizagem da matemática, apontado por Harel (1997), segundo o qual o estudante para abstrair um conceito matemático deve ter em sua estrutura cognitiva elementos conceituais que possam ser tomados como referências para a nova aprendizagem, isto é, algo que os torne concreto. O concreto toma, assim, a conotação de familiar ao estudante. Neste sentido, o estudo do conjunto dos números inteiros permite desenvolver elementos conceituais que servirão de base para outras aprendizagens.

Outra justificativa, quase consensual, diz respeito ao fato de que a Teoria dos Números, tendo como objeto o estudo dos números inteiros, tem uma importância histórica, pois oportuniza colocar a matemática no contexto da civilização humana, conforme afirma Borges. Embora a Teoria dos Números, como saber científico, seja nova, como fala Dias, os números estão na base da civilização humana. Segundo os historiadores, na Idade da Pedra, a idéia de contar, considerada prelúdio do pensamento científico, já estava presente. Essa justificativa também é apresentada por Gomes, que percebe o estudo dos conjuntos numéricos como de grande riqueza para a formação do professor, tanto do ponto de vista histórico, como epistemológico, e por Félix, que considera que a Aritmética faz parte da cultura dos povos, podendo se constituir numa oportunidade para que o conhecimento matemático possa ser associado ao de outras áreas, como a história, a geografia, a antropologia, dentre outras.

Neste sentido, é importante lembrar, também, que o conhecimento matemático é, para muitos alunos e até mesmo para professores, a-histórico, pronto e acabado. Esse ponto de vista dos entrevistados apresenta o estudo da Teoria dos Números como uma oportunidade para que a Matemática seja percebida como uma produção humana, como uma das humanidades, cuja significação é encontrada na compreensão partilhada pelos seres humanos, conforme considera Davis e Hersh (1986 p.454), estando, assim, contextualizada na história da humanidade e possuindo, um valor cultural.

Essa justificativa pode ser estendida aos dias de hoje, pois os números inteiros estão presentes em diferentes práticas sociais e, em especial, a matemática do discreto. Esse modo de ver é destacado por Borges ao considerar que nós pensamos com números, no sentido de que os números estão presentes nas argumentações que fazemos no dia-a-dia. Também por

Dias, ao considerar que hoje, por exemplo, nós temos problemas relacionados com o uso de cartão de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador, e que todo esse sistema é digital, está baseado na qualidade dos números inteiros.

Essa valorização da Aritmética, pela utilização do discreto, corrobora o que afirma Gimenez (em Lins e Gimenes, 1997), ao considerar que há hoje um interesse pela matemática discreta no âmbito curricular, pois, para a resolução de certos tipos de problemas aplicáveis à vida cotidiana, são necessárias estratégias que não se resumem a simples cálculos. São necessários métodos importantes da matemática, como a indução e o tratamento recursivo, presentes na Teoria dos Números. O discreto é importante tecnologicamente, pois os aparelhos digitais trabalham neste domínio. Aparece em estruturas combinatórias, no uso de padrões iterativos ou recursivos, na análise de redes, em códigos, em elementos probabilísticos.

O uso de senhas, de códigos, levou à necessidade de desenvolvimento de sistemas de segurança de comunicação, assim Borges e Dias se referem à aplicação da Teoria dos Números na criptografia, ao considerar que o sistema mais famoso de criptografia, hoje, é chamado RSA e está baseado na fatoração em primos, e que qualquer pessoa pode entender, se tiver um conhecimento básico de Teoria dos Números. Isto dá significado ao estudo dos números primos no ensino, já que esse conceito é também central na Teoria dos Números enquanto saber científico, conforme indicou Avelar e Dias. Nesse sentido, os entrevistados confirmam o que apontam outros pesquisadores, como Campbell e Zazkis (2002), que consideram ser hoje indefensável o argumento de que a Teoria dos Números, devido a sua natureza teórica, tem pouco ou nenhum valor prático, pois, na era da informação, ela tem múltiplas aplicações, como nos métodos de criptografia.

Cinco dos entrevistados apontam a Teoria dos Números como uma área da Matemática que lida com problemas que são aparentemente simples. São acessíveis, isto é, têm poucos dados, conforme pontuou Dias, como também envolvem elementos que são familiares aos alunos, segundo Borges, o que os torna fáceis de serem compreendidos. No entanto, as soluções nem sempre são simples, exigem engenhosidade. Dias afirmou que não há modelos ou padrões de resolução, assim, existem conjeturas até hoje não demonstradas. Elias afirmou que a Teoria dos Números traz problemas e indagações simples, aparentemente óbvias num primeiro momento, mas que se tornam difíceis, porque não é fácil explicar o que parece óbvio. Por esses motivos, a Teoria dos Números é considerada um ramo desafiador e instigante.

Nesse sentido, LeVeque (1968) atribui o interesse pela área à insaciável curiosidade do homem, que o impulsiona a buscar explicações e a conhecer. No caso da Teoria dos Números, segundo ele, a curiosidade de grandes matemáticos, como Fermat, Euler e Gauss, foi aguçada pelo fascínio que a área exerce, ao aliar resultados simples com demonstrações de enorme engenhosidade, conduzindo a resultados inesperados e a tratamentos elegantes. A simplicidade na forma de apresentação de muitos de seus problemas sempre atraiu não só matemáticos, mas também leigos.

A Teoria dos Números inclui, desde tempos remotos, alguns tipos de problemas ligados ao divertimento e ao misticismo. Ore (1988) nos lembra que, para o homem moderno acostumado a outros tipos de diversão, é difícil compreender esse valor de entretenimento que os problemas matemáticos, em especial os ligados a números, tiveram para gerações passadas, inclusive nos momentos de guerras. Afirma, ainda: *a correspondência simbólica entre números e objetos ou conceitos filosóficos e idéias foi um traço comum a muitas culturas antigas. (*ORE, 1988, p.26*)*

Traços desse simbolismo relacionado a números são encontrados em muitas mitologias e ainda são preservados em nossas superstições. A numerologia, estudo da significação oculta dos números e da influência deles no caráter e no destino das pessoas, está ainda presente no nosso cotidiano. Por exemplo, a numerologia da casa, disponível nas páginas da I*nternet*, visando descobrir se o número da casa é favorável, somando-se os seus algarismos e fazendo os "noves fora" (ou seja, aplicando a congruência módulo *m*). De acordo com o número resultante, descrevem-se as *energias que pairam no lugar onde se vive.* Uma variação desses estudos consiste em associar números às letras do alfabeto, assim cada nome ou objeto recebe um valor numérico que é utilizado para predizer relações entre pessoas ou futuros eventos. Essas situações mostram como os números exercem fascínio sobre as pessoas, o que poderia ser explorado em situações de ensino.

Outra justificativa presente explicitamente no discurso de cinco dos entrevistados é a possibilidade de que o ensino de Teoria dos Números promova o desenvolvimento de um modo de pensar mais científico e de habilidades cognitivas, como a de argumentar e de provar. No entanto, as concepções com relação a este ponto não são convergentes, pois alguns deles colocam o foco no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, ao enfatizar a abordagem axiomática e a demonstração formal, que, partindo de uma hipótese, permite chegar a uma tese, como concebido por Borges e Cunha, de maneira clara, e também por Dias, em algumas considerações. Já Avelar diz que existem problemas que podem ser formulados de uma maneira muito clara, porque são conceitos que, facilmente, as crianças podem dominar, podendo ser uma coisa do dia-a-dia, que são interessantes e que exigem, às vezes, que a criança trabalhe com argumento, sendo então a forma de se propiciar o exercício da argumentação desde cedo. Elias considera que a Teoria dos Números traz problemas, indagações sobre o que, às vezes, parece óbvio, estimulando a descoberta e a explicação.

No entanto, Gomes e Félix, ao discutir as abordagens para estes conteúdos na licenciatura em matemática, rejeitam a ênfase na abordagem axiomática, por considerá-la "engessante", conduzindo à valorização de procedimentos na visão de Gomes, e como algo pouco proveitoso para a maioria dos alunos, na visão de Félix. Deste modo, um valor formativo que poderia emergir fica condicionado a uma série de fatores que não são intrínsecos ao conhecimento matemático, incluindo concepções, crenças, formação e experiências de quem ensina. Voltaremos a tratar esta questão posteriormente.

Alguns entrevistados apontam para o que poderia ser considerado como valor estético, segundo D'Ambrósio (1990). Borges refere-se à beleza em três momentos: ao declarar que a Teoria dos Números traz a beleza escondida nos números, ao afirmar que primeiro devemos despertar o interesse e a beleza, ao invés de fragmentar o conhecimento matemático e também ao se referir ao teorema da reciprocidade quadrática de Gauss, como um teorema tão bonito que Gauss o demonstrou de cinco maneiras diferentes. Também Cunha aponta para esse valor ao afirmar que tem outros problemas de Teoria dos Números que são interessantes, atraentes e, com isso, acha que se pode desenvolver o gosto pela matemática.

No entanto, a questão do apreciar "o belo" e do "gostar" de matemática, apresentada pelos entrevistados, merece uma reflexão mais aprofundada. Num primeiro momento, parece ser a beleza algo intrínseco à Matemática, mas o apreciar, o desejar alguma coisa tem uma carga de subjetividade que tem significações mais profundas e que não atinge a todos os sujeitos do mesmo modo. A demonstração de um teorema de cinco modos diferentes para um matemático é algo que faz emergir esse valor estético. No entanto, para muitos alunos, mesmo os da licenciatura em matemática, pode ser alguma coisa sem significado ou até mesmo desnecessária, podendo, inclusive, impedi-los de ver essa beleza. Para alguns, o belo se manifesta na sensibilidade às qualidades estéticas, tais como a simetria, a analogia, a simplicidade e a ordem, como compreende Sinclair (2002, p.219). De acordo com essa autora, a dimensão estética da atividade matemática não é meramente um julgamento fantástico e romantizado da beleza matemática, mas algo que permite o conhecimento matemático, impelindo à atividade, gerando processos matemáticos e permitindo a avaliação do produto.

Uma justificativa que não pode ser considerada convergente, pois foi apresentada apenas por Gomes e Félix, toma como referência o principal objetivo da licenciatura, que é o de formar professores de matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Afirmam eles que o estudo dos números (da Aritmética) tem uma presença forte na escola básica de todas as nações, o que exige que o professor tenha um conhecimento aprofundado destes temas, indo além do que irão ensinar. Félix aponta a necessidade de que o licenciando vivencie processos e experiências que ele deverá desenvolver com seus alunos na escola básica, não no sentido de apenas suprir falhas de sua aprendizagem desses temas, mas aponta para o conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo, descritos por Shulman.

Neste sentido, esses entrevistados trazem a preocupação com a coerência entre a formação e a prática esperada do professor, indicando o que pode ser identificado com o conceito de *simetria invertida*, apresentado nas Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior (2001). Segundo esse princípio, *a experiência como aluno, não apenas nos cursos de formação docente, mas ao longo de toda a sua trajetória escolar, é constitutiva do papel que exercerá futuramente como docente.* (D.C.N.F.P.E.B, 2001, p.26) Assim, é necessário que o licenciando vivencie, durante o processo de formação, modelos didáticos, atitudes, modos de organização que possam ser concretizados em sua prática docente.

Sobre a presença da Teoria dos Números nos currículos, quatro dos entrevistados apresentam explicações para a pouca ênfase que vem sendo dada no ensino a tema ligados a este campo. No currículo das licenciaturas, Avelar aponta para resquícios do Movimento da Matemática Moderna, em que a ênfase foi dada ao estudo das estruturas algébricas. Gomes percebe que esses conteúdos são tratados em disciplinas de Fundamentos de Matemática, muitas vezes com uma abordagem única, e geralmente axiomática. Félix aponta para uma questão histórica nos currículos dos cursos de matemática, no Brasil, que dão ênfase ao estudo do contínuo, ficando o discreto restrito, muitas vezes, a uma disciplina.

Na escola básica, Avelar conjetura que questões envolvendo os inteiros não têm uma presença mais forte nos currículos da Educação Básica, pela falta de familiaridade dos professores com esses temas, no sentido de saber explorá-los, visando à argumentação, que foi o aspecto defendido por ele. Dias se refere: à existência de problemas em Teoria dos Números que não são fáceis de serem resolvidos; à falta de representação figurativa como a existente em Geometria; à inexistência de modelos, cada problema se resolve de um modo; à forma inadequada da apresentação da Teoria dos Números nos livros didáticos no mundo inteiro. As dificuldades apresentadas são elementos para a reflexão e para a pesquisa dentro da Educação Matemática, em especial, por aqueles que estão envolvidos com o ensino de Teoria dos Números.

Concluindo, podemos dizer que os entrevistados apresentaram elementos que podem justificar uma maior presença da Teoria dos Números no ensino de Matemática nos diferentes níveis da escolaridade, em especial no curso de licenciatura em matemática, embora o modo de ver alguns aspectos não seja consensual. Além disso, apontaram aspectos que abrem caminho para a pesquisa, no sentido de avaliar as possibilidades indicadas, assim como as dificuldades.

6.9.2 Teoria dos Números, Aritmética e Álgebra e as suas relações

Para os entrevistados, a Teoria dos Números, enquanto uma área científica, é, classicamente, definida como o estudo dos inteiros, das propriedades e das relações entre eles. Embora considerem que o objeto da Teoria dos Números sejam os números inteiros, a maioria deles destaca que, para resolver problemas de Teoria dos Números, são necessárias ferramentas de outros campos, como, por exemplo, da análise e da geometria. Cunha e Dias chegam a afirmar que é um campo sem fronteiras e Borges coloca que a Teoria dos Números tem como foco resolver os mistérios dos números, e, para isso, são utilizados métodos algébricos, métodos analíticos, ou também métodos geométricos. Cunha considera que a Teoria dos Números nasce de problemas aritméticos, mas avança muito mais e envolve outras teorias que já não usam mais necessariamente a aritmética dos inteiros, nem mesmo de corpos finitos. Além disso, afirma que ela é extremamente abrangente, podendo envolver também conhecimentos de Análise Complexa. Elias ressalta que a Teoria dos Números se torna uma ferramenta para a análise e para álgebra em nível de pesquisa. Desse modo, podemos observar que a Teoria dos Números é ferramenta para outros campos da matemática, assim como utiliza os conhecimentos e ferramentas desses campos na resolução de seus problemas.

Quatro dos entrevistados manifestaram que a Teoria dos Números é uma parte da Álgebra Moderna, ficando claro que não se trata de inclusão, pois a álgebra avança para outras questões que não envolvem apenas o estudo do anel dos inteiros. E a Teoria dos Números, por sua vez, também tem problemas que não são resolvidos com ferramentas da álgebra, mas da análise, da geometria. No entanto, Borges lembra que, no Brasil, a Teoria dos Números é tradicionalmente colocada dentro da Álgebra, inclusive pelas agências de fomento, como CNPq. Para dois deles, conforme retratamos, o anel dos inteiros, ou a Teoria Elementar dos Números pode ser vista como a intersecção entre Álgebra e Teoria dos Números.

A álgebra é vista pelos entrevistados como Álgebra Moderna, cujo objeto de estudos são as estruturas algébricas: grupos, anéis e corpos. Cunha, inclusive, descreve como se dá o processo de busca da estrutura, ao afirmar que, na álgebra abstrata, o que se quer é exatamente, dada uma situação, buscar qual é o esqueleto daquela situação, quer dizer, retirar tudo aquilo que é dispensável e manter o que é indispensável para entendê-la, desvelando, assim, um núcleo que pode ser comum a várias situações.

No entanto, quando se considera a álgebra escolar, essa visão é restrita, pois outras concepções têm fundamentado as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse campo em nível mundial, como indicam Berdnaz, Lee e Kieran (1996). No artigo intitulado *Approaches to Álgebra: Perspectives for Research and Teaching,* elas apresentam as seguintes concepções: *o estudo de uma linguagem e sua sintaxe; o estudo de procedimentos de resolução de certas classes de problemas; o estudo das regularidades que governam as relações numéricas; e o estudo de relações entre quantidades que variam.* (BERDNAZ; KIERAN; LEE, 1996, p. 4).

Pensamos que esse modo de conceber a álgebra, unicamente como estudo das estruturas algébricas, pode ter implicações na formação do professor, pois, hoje, as estruturas algébricas não são tratadas como tais na escola básica. Outras questões são propostas para o professor no ensino-aprendizagem da álgebra nesse nível. Isso nos leva a questionar: há, na licenciatura em matemática, outros momentos em que a concepção da álgebra poderá ser ampliada? Considerando que, em muitas universidades brasileiras, a Teoria dos Números é apresentada como unidade ou disciplina, dentro da matéria Álgebra, a situação do ensino dos inteiros, abordados como um exemplo de estrutura algébrica, pode também caminhar no sentido do distanciamento da formação em relação à prática docente no ensino básico, conforme mostrou Moreira (2004).

Com relação à aritmética, a visão manifestada pelos entrevistados não parece muito clara, e o discurso deles, no que se refere a essa questão, é reticente, entremeado de perguntas, de frases incompletas. Entretanto, parecem convergir para o “fazer contas”, operações com números que não se restringem aos inteiros, aparecendo também a questão da representação dos números e os problemas de contagem, como assuntos abordados pela aritmética. Borges foi o único que diz ter dificuldades de separar Aritmética e Teoria dos Números, lembrando que um livro famoso, chamado Aritmética Superior, é só Teoria dos Números.

Com base em Davis e Hersh (1986, p.31), podemos dizer que essa visão parece ser histórica e estar ligada a uma concepção simplista de matemática como *ciência da quantidade e do espaço*. Assim, a aritmética foi sempre associada à parte da matemática que trata da quantidade, enquanto a geometria é a parte que trata do espaço. Conseqüentemente, a aritmética, ensinada na escola elementar, diz respeito aos números de vários tipos, às regras das operações fundamentais, tratando, ainda, de situações da vida diária em que estas operações são usadas. Em duas classificações das áreas da matemática apresentada por Davis e Hersh, uma de 1868 e a outra de 1979, a denominação Aritmética não aparece, e Teoria dos Números aparece em ambas, o que nos leva a pensar que a Aritmética não é tratada como um campo científico ou está incluída em Teoria dos Números.

Ainda sobre a aritmética, Gimenes (1997) questiona o binômio histórico, cálculo-número, ligado historicamente ao seu ensino, a sua redução às regras escolares e ao estudo dos inteiros, que é a visão que parece estar subjacente ao discurso dos entrevistados e à matemática escolar. Gimenes (1997) considera que ela inclui também a análise dos porquês dos algoritmos e da divisibilidade; o uso adequado e racional das regras; a elaboração de conjecturas e processos de raciocínio. Propõe uma nova aritmética que se aproxime da matemática discreta; que considere o valor inter-cultural do fato aritmético e a sua relação com o meio; que inclua práticas indutivas e não apenas os métodos dedutivos; que aborde o sentido funcional do numérico, a aproximação com outras áreas da matemática. (Gimenes, 1997, 33-34) Assim, esse autor amplia as concepções da aritmética escolar e traz elementos que podem direcionar o ensino de Teoria dos Números na licenciatura.

Buscando ler o que está implícito ao discurso e o não dito, pareceu-nos que a denominação Teoria dos Números tem o peso de uma concepção marcada pelo que é formal, sistemático, não permitindo, inclusive, que uma disciplina que leve esse nome seja tratada de outra forma que não esta. Percebe-se uma identificação estreita do saber sábio com a disciplina acadêmica, que parece desconsiderar a possibilidade do trabalho de transposição didática que possa ocorrer. Félix, inclusive, ao propor o estudo das diferentes representações para os números naturais e o estudo dos algoritmos em seus múltiplos aspectos em uma disciplina da licenciatura, sentiu-se mais confortável com a denominação Aritmética do que com Introdução à Teoria dos Números.

Quanto à relação entre aritmética e álgebra, Avelar, Elias e Gomes voltam-se para a questão do ensino dessas áreas na escola básica, considerando que a educação algébrica e a aritmética não estão dissociadas, mas podem coexistir, estando uma imbricada no desenvolvimento da outra. Avelar considera que a introdução da álgebra no ensino não ocorre no momento em que se introduzem letras para representar incógnitas, variáveis, mas lembra que, quando se trabalha com a idéia de invariante, ou a idéia de seqüência em problemas, com a idéia de igualdade, já estamos entrando no domínio do pensamento algébrico. Elias questiona a associação da aritmética ao concreto e a associação da álgebra ao abstrato, pois isso conduz, segundo ela, à discussão da "passagem" da aritmética à álgebra, inclusive à discussão de se postergar o ensino da álgebra, por considerar que o aluno não tem um pensamento abstrato formal, e diz que as *coisas* poderiam estar, muito bem, juntas, acontecendo ao mesmo tempo.

Esse modo de ver é também compartilhado por Lins e Gimenes (1997), que sugerem que uma não só se beneficia da outra como também depende da outra. Consideram que a educação aritmética realizada hoje precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades tendo em vista o desenvolvimento do *sentido numérico,* e a educação algébrica deve promover a produção de significados não apenas dentro da matemática e conduzir o aluno a *pensar o mundo em números.* Essa visão também é partilhada pelo Grupo de Educação Algébrica da PUC-SP que entende que não há passagem da aritmética para a álgebra, pois o pensamento algébrico está imbricado no aritmético, o que os torna inseparáveis.

Gomes afirma que precisamos aprender a trabalhar de forma mais sistemática na licenciatura em matemática essa inter-relação entre estes campos. A questão da fragmentação da Matemática no ensino é questionada também por Borges, ao afirmar que é mais importante ver a beleza da Matemática do que se preocupar em colocar "divisórias", ou ainda, como observou Dias de modo enfático, que não existem matemáticas, mas matemática, no sentido de que esses campos são diferentes formas de olhar para os objetos matemáticos. Alguns entrevistados, como Dias e Gomes, acrescentam que a pessoa consegue transitar facilmente de um campo a outro, terá mais condições de resolver problemas em matemática.

Embora esses entrevistados expressem concepções atuais da Educação Matemática, como o da não-fragmentação do conhecimento, observamos, ainda, em muitos currículos da escola básica, que o conhecimento matemático é esfacelado em aulas de números, de álgebra, de geometria, de funções, de trigonometria, o que leva o estudante a perder a visão do todo, impossibilitando a utilização dos conceitos e métodos de um campo em outro. É importante que o professor compreenda as especificidades de cada um dos campos, para selecionar conteúdos, objetivos e metodologias, mas ter clareza das inter-relações é igualmente fundamental. Esse é, inclusive, o objetivo da segunda questão colocada aos entrevistados.

A partir das contribuições dos entrevistados e das leituras realizadas, neste trabalho, consideraremos que Teoria dos Números é o estudo dos números inteiros, de suas propriedades e das relações entre eles. Consideraremos também que a Teoria dos Números tem intersecção com a álgebra, não só com a Álgebra Moderna, cujo objeto é o estudo das estruturas algébricas, mas também com a Álgebra Clássica, cujos objetos são as equações, segundo Fiorentini *et al.*. A essa intersecção denominaremos Teoria Elementar dos Números. Consideramos importantes as observações de Avelar e de Elias de que a educação algébrica e a aritmética devem coexistir, e acrescentamos: não, apenas, nas séries iniciais da escolaridade, mas durante toda a escola básica, devendo influenciar a formação de professores.

6.9.3 A Teoria Elementar dos Números como disciplina acadêmica – o que e o como ensinar

Conforme exposto no Capítulo 2, não pensamos a disciplina acadêmica apenas como um recorte de um campo cientifico para fins educacionais. Consideramos que é um construto social, fruto de uma negociação entre os pares no âmbito das instituições de ensino superior, considerando o perfil de profissional que se quer formar para um determinado tipo de sociedade. Assim, vamos conceber a disciplina acadêmica como constituída por um conjunto de conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática; de finalidades; de elementos pedagógicos, além de outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizada de modo a manter uma unidade científica e didática.

A tarefa de definição da disciplina acadêmica é complexa, pois, como instituição social, deve passar por um processo de negociação que é influenciado por um conjunto de concepções, de crenças e de valores, e por condicionantes como carga horária, nível e disponibilidade dos alunos, organização curricular, dentre outros.

Nos depoimentos dos entrevistados, buscamos inferir justificativas para a presença da Teoria dos Números nos currículos, em especial no de licenciatura em matemática, o que responde às questões: por que e para que, analisadas anteriormente. Entretanto, há ainda duas questões que também são cruciais para pensar uma disciplina acadêmica: o que ensinar e o como?

Com relação aos conteúdos apresentados para uma apreciação, na terceira questão da entrevista (indicados no quadro abaixo), houve uma convergência inicial no sentido de considerar necessário e suficiente o que foi proposto. No entanto, três dos entrevistados passaram a discutir os tópicos indicados, sugerindo o que poderia ser retirado ou acrescentado sem tomar como referência a formação do professor e as demandas que lhe são colocadas na escola básica, mas o conteúdo matemático, considerado como fim em si mesmo ou meio para "saber mais matemática".

Teoria Elementar dos Números

Números Inteiros*: operações e propriedades, princípio da indução finita;* ***Divisibilidade****: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; C***ongruência módulo m:*** *Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler e Teorema de Wilson;* ***Equações diofantinas lineares.***

Quanto aos tópicos referentes aos números inteiros, à divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos e Teorema Fundamental da Aritmética, parece haver um consenso de que devam ser abordados numa disciplina de Teoria Elementar dos Números, mesmo porque são conteúdos presentes nos PCN. Contudo, Avelar não considera como essencial o estudo da Aritmética modulo *m*, pois alega se tratar de uma notação que pode ser trabalhada de uma outra forma, opinião também compartilhada por Félix. Quanto aos teoremas de Euler, Wilson e o pequeno teorema de Fermat, esses dois entrevistados acham que envolvem questões interessantes sobre os números primos e poderiam ser tratados de uma forma intuitiva e investigativa.

Quanto ao que poderia ser acrescentado, Félix, preocupado com a formação do professor para a escola básica e olhando para a matemática escolar, sugere incluir o que chama de Aritmética elementar, os diferentes sistemas de representação dos números naturais e o algoritmo das operações, enfatizando a abordagem histórica e epistemológica destes temas. Borges e Cunha, numa visão mais conteudista, sugerem acrescentar o teorema da reciprocidade quadrática de Gauss, por ser um teorema muito bonito, com várias demonstrações, e, segundo Borges, é uma oportunidade de trazer para o ensino a figura de

Gauss, que é importante na Teoria dos Números. Cunha, pensando em um currículo "ideal", sugere, ainda, o teorema chinês do resto e equações diofantinas de grau maior do que um.

Quanto à denominação Teoria Elementar dos Números, Elias avalia como interessante, pois pode direcionar para os objetivos da formação do professor para a escola básica. Isso nos permite inferir que se possa dar à disciplina um tratamento que considere as demandas que se colocam ao professor naquele nível.

Diante da apreciação e das sugestões feitas pelos entrevistados, percebemos que o que foi apresentado são conteúdos que poderão ser tomados como ponto de partida para a definição da ementa de uma disciplina acadêmica de introdução à Teoria dos Números, que pode contribuir de forma significativa na formação do professor. Desses tópicos, dependendo do currículo do curso, da abordagem que se pretenda dar, podem-se eliminar alguns, como o estudo de congruência módulo *m,* que poderá ser feito em disciplinas de Álgebra, ou acrescentado outros. A inclusão ou não dependerá de outros fatores que influenciam a seleção de conteúdos, como a carga horária, as condições reais dos alunos, a metodologia a ser adotada e, principalmente, os objetivos de um curso de licenciatura em matemática.

Pensar a seleção de conteúdos tendo como critério o grau de dificuldade ou de facilidade do conteúdo, conforme sugerido por alguns dos entrevistados, é limitador e poderá trazer conseqüências sérias no processo ensino-aprendizagem, pois poderá conflitar com fatores de outra natureza. Nesse sentido, cabe perguntar: tem sido a disciplina Teoria dos Números adequada e suficiente para responder às demandas do ensino desses temas na escola básica? Essa é uma questão fundamental que deverá direcionar o nosso pensar, pois concordamos com Gomes que mais importante que o nome e a ementa é a abordagem que será dada e o professor que irá ministrá-la

No caso específico deste trabalho, não se pode perder de vista que estamos preocupados com a formação do professor de matemática para a escola básica, considerando as questões que lhe são colocadas na prática docente, conforme analisou Moreira (2004). Selecionar conteúdos é uma tarefa que exige estabelecer prioridades e critérios. Assim, pensar um currículo como "ideal" inclui outros condicionantes que não apenas a inclusão de mais tópicos, porque são importantes e belos do ponto de vista da matemática científica. Ter em vista os objetivos, os pressupostos, as diretrizes da licenciatura em matemática é fundamental.

Considerando as avaliações realizadas e as sugestões apresentadas, podemos eleger alguns tópicos como essenciais, que constituiriam o núcleo dos conteúdos a serem abordados na disciplina.

Tópicos essenciais de Teoria Elementar dos Números

Números Inteiros*: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências em N, seqüências, progressões aritméticas e geométricas) e princípio da indução finita;* ***Divisibilidade****: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos,critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética;* ***Introdução à congruência módulo m:*** *definições, propriedades e algumas aplicações****; Equações diofantinas lineares****.*

Tópicos sugeridos por alguns dos entrevistados como o *teorema da reciprocidade quadrática de Gauss, o teorema chinês do resto e equações diofantinas de grau maior que um* poderiam ser incluídos dependendo de outros fatores, como tempo e clientela, ou deixados para outra disciplina de Teoria dos Números, podendo, inclusive, ser desenvolvidos em atividades complementares, em trabalhos de iniciação científica ou em trabalhos de conclusão de curso.

Além dos conteúdos, emergiu do discurso dos entrevistados, de forma implícita ou explícita, a questão da abordagem desses conteúdos, aspecto que também é constituinte de uma disciplina, na concepção que adotamos. Entretanto, não há convergência a esse respeito, duas vertentes podem ser percebidas de modo claro e uma terceira pode ser identificada em duas das entrevistas.

Uma delas é a abordagem dedutiva axiomática, identificada de modo explícito no discurso de Borges e de Cunha, que a defendem como forma de fazer matemática e de pensar matematicamente. De modo menos enfático, aparece também em Dias, embora este aponte outros caminhos como o das aplicações, o uso da criatividade, o uso do computador. São propostas que se embasam numa visão formalista de matemática, cuja conseqüência no ensino é uma organização axiomática com o fim de atender a requisitos lógicos e não aos objetivos do curso e às necessidades de quem aprende, conforme classificação de Fiorentini (1995).

Por outro lado, Gomes e Félix questionam esta forma de abordagem na licenciatura, por considerá-la "engessante", alegando que ela pode conduzir à valorização do procedimento; pode atrair apenas alguns alunos; pode impedir de ver a essência das idéias; pode levar o aluno a ver a matemática como algo pronto e acabado, pois não valoriza o processo de construção; além disso, alegam que o professor da educação básica não vai desenvolver a matemática escolar desta forma. Assim, contrapõem a esta proposta a investigação matemática, que é, segundo eles, uma abordagem que valoriza o conjecturar, o testar a veracidade das afirmações, o argumentar. Defendem a prova local em contraposição à prova dedutiva, o que, segundo eles, supõe um processo seqüencial e linear de afirmações e demonstrações. Emerge, assim, das posições desses entrevistados, o dilema e a tensão entre o dedutivo formal e outras formas de provas, como as provas locais ou mais informais.

Uma terceira forma de abordagem é indicada por Gomes e também por Félix, que é a abordagem histórica e epistemológica dos conceitos. Discutiremos no próximo capítulo possibilidades para re-significar esta disciplina na licenciatura em matemática, assim como dilemas e tensões.

CAPÍTULO 7

POTENCIALIDADES, DILEMAS E TENSÕES RELACIONADOS À TEORIA DOS NÚMEROS COMO SABER A ENSINAR

7.1 Introdução

Ao analisarmos a literatura disponível, as entrevistas realizadas, os livros didáticos e as propostas curriculares dos cursos de licenciatura em matemática, tendo como foco a Teoria dos Números, pudemos vislumbrar potencialidades para o trabalho com esta área na formação do professor da escola básica. Entretanto, percebemos também aspectos que podem se constituir em dilemas e tensões, alguns de natureza histórica e epistemológica ligados à própria matemática, outros de caráter cognitivo e outros de ordem didática. Assim, podemos perceber potencialidades, dilemas, desafios e tensões que se manifestam, se entrelaçam e se escondem nos discursos e nas práticas, sendo difícil evitá-los e esgotar as compreensões que se possam ter destes elementos.

Num trabalho como este, em que se buscam concepções, vimos emergir muitas questões ligadas à própria natureza da matemática, como as apresentadas por Hersh e Davis, na obra *A experiência matemática.* São problemas externos, ligados ao por que a matemática funciona e à sua utilidade. São problemas internos, ligados ao simbolismo, à abstração, à generalização, à formalização, às demonstrações, à questão estética, aos enigmas da matemática, à questão da certeza e da dubitalidade. Conseqüentemente, todas estas questões têm implicações no ensino da matemática em qualquer nível de escolaridade, trazendo potencialidades, mas também dilemas e tensões. A compreensão que se tem destes problemas define prioridades, ênfases, objetivos de ensino, seleção de conteúdos e opções metodológicas, além de embasar os discursos que se travam na noosfera.

Neste capítulo, vamos tratar algumas destas questões tomando como referência a Teoria dos Números, como um saber a ensinar na formação do professor da escola básica, considerando aspectos que emergiram das análises feitas anteriormente, buscando na literatura em educação matemática elementos que possam contribuir para re-pensar e re-significar o seu ensino.

7.2 A Teoria dos Números e a questão da demonstração e da prova na formação do professor – potencialidades

A partir da análise dos livros didáticos, em que pudemos constatar que os conteúdos são abordados de forma axiomático-dedutiva e as tarefas são predominantemente demonstrações, e considerando a análise dos discursos dos entrevistados, em que diferentes concepções de prova emergiram, necessário se faz discutir esta questão na perspectiva da formação do professor na licenciatura. O trabalho com a prova em Teoria Elementar dos Números pode se constituir numa possibilidade significativa para a formação, como pode também transformar o ensino da Teoria dos Números num componente do currículo que contribui para distanciar a formação da prática docente, conforme mostrou Moreira (2004). Como anunciado anteriormente recorremos à literatura em educação matemática que trata desta temática, buscando elementos para fundamentar esta discussão e para re-significar o ensino da Teoria dos Números na licenciatura.

7.2.1 Sobre a temática da prova na Educação Matemática e nos currículos

A temática da demonstração tem sido amplamente discutida nas últimas décadas, no campo da Educação Matemática. Embora as concepções, as perspectivas e as abordagens sejam diversas, parece haver um consenso de que provar é uma parte importante da atividade matemática e não poderia ser ignorada no ensino, nos diferentes níveis, conforme afirmam Hanna (2001), Mariotti (2005) e Pietropaolo (2005).

Esta preocupação com a prova no ensino pode ser constatada pela quantidade de pesquisas e artigos sobre o tema, inclusive com a criação, em 1997, do *Web site, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof,* onde se podem encontrar informações sobre trabalhos e eventos realizados e livros publicados. Projetos abrangentes têm sido desenvolvidos como o PUPA (*Proof Understanding, Production, and Appreciation*), subvencionado pelo *National Science Foundation*, conduzido por Sowder e Harel, nos EEUU, e o projeto conduzido por Healy e Hoyles, *Justifying and Proving in School Mathematics*, no Reino Unido. No Brasil, as pesquisas sobre o tema não são abundantes e só agora parece estar havendo um maior interesse pela temática. Na PUC-SP, há um projeto PROVE em andamento, sob a coordenação de Lulu Healy. Destacam-se, neste campo, os trabalhos de Garnica (1995) e de Pietropaolo (2005), que tratam a questão da prova na formação do professor.

Por outro lado, segundo os pesquisadores, tem havido também uma maior ênfase nos currículos prescritos de países como França, Itália, Portugal, Japão, Estados Unidos, Inglaterra, no trabalho com a prova desde a escola básica, incluindo atividades envolvendo raciocínio dedutivo e indutivo, o fazer conjecturas, o formular contra-exemplos, o julgar a validade de argumentos, o selecionar e usar diferentes tipos de provas. Segundo Hanna (2000), o *Standards (1989,)* publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics*, nos Estados Unidos, recomendou que menos ênfase fosse dada às provas como um sistema axiomático, porém sugeriu que prioridade fosse dada a argumentos heurísticos, o que, segundo ela, enfraqueceu o potencial da prova como ferramenta de ensino. A versão de 2000 dos *Principles and Standards*, no entanto, recomendou que raciocínio e prova façam parte do currículo desde os níveis elementares da escolaridade.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental de 1998 sugerem que a argumentação deva ser estimulada no terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), avançando para a prova no quarto ciclo (7ª e 8ª séries):

> Assim é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas e afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN – Matemática 5ª a 8ª séries, p. 71)
> Predisposição para encontrar exemplos e contra-exemplos, formular hipóteses e comprová-las. (Ibid, p. 91)

No Ensino Médio, os PCN + sugerem o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo, para que o estudante possa compreender como a matemática valida seus conhecimentos.

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. (PCN + - Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002, p. 124).

Se por um lado há indicações nos currículos de que o estudante deva ter experiência com a prova na educação básica, por outro lado, pesquisadores como Boero (1992), Mariotti (2005), Barallobres (2004) apontam que a álgebra e a aritmética não têm sido indicadas como um contexto usual e possível para esse fim, ficando o ensino da álgebra restrito a seus aspectos operacionais, muitas vezes vazios de sentido. Segundo Mariotti, as razões para este fato são históricas, porque a geometria foi sempre considerada o protótipo da sistematização do conhecimento matemático, já que a álgebra foi sistematizada mais tarde. No entanto, no caso da Aritmética, conforme abordamos, na obra *Os Elementos,* nos livros VII, VIII e IX, Euclides trata tópicos de teoria elementar dos números, apresentando teoremas sobre os números naturais cujas provas são ensinadas ainda hoje, como o teorema da divisão euclidiana, o teorema da infinitude dos primos.

Boero (1992), ao tratar esta questão sob o ponto de vista histórico e epistemológico, considera que o campo da Aritmética permite formular significativas afirmações sobre os naturais com diferentes graus de generalidade. Algumas afirmações são de caráter procedimental que iluminam o modo como a prova pode ser obtida, como é o caso do algoritmo da divisão euclidiana, outras são de caráter relacional. Hoje, para o tratamento dessas afirmações, podemos contar com o recurso do formalismo algébrico para a generalização, como também para a realização da prova, através de transformações algébricas, o que não existia na época de Euclides. Portanto a ênfase dada à geometria, quando se trata da prova no ensino, deve ser repensada, uma vez que afirmações sobre os números naturais podem ser formuladas e validadas com diferentes graus de generalidade.

7.2.2 Sobre as concepções de provas e argumentação no ensino

Embora não seja objetivo deste trabalho levantar e discutir os modos de conceituar prova e demonstração na matemática e na educação matemática, é importante clarear o sentido com que estamos usando estes termos e pontuar alguns aspectos que permitem discutir este assunto como possibilidade e como dilema no ensino da Teoria dos Números, na licenciatura.

Em matemática, os termos *prova* e *demonstração* parecem ser tomados como palavras sinônimas, como modo de validar o conhecimento matemático, de modo a torná-lo aceito dentro de uma comunidade. Segundo Silva, a demonstração é vista geralmente como *cadeias finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado* (SILVA, 2002, p. 76) No entanto, o autor afirma que este modo de ver está ligado a um dos aspectos da demonstração, o lógico-epistemológico, ocultando outros aspectos como o retórico (ligado à demonstração como força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas) e o heurístico (demonstração como indutora de descobertas matemáticas).

Na educação matemática, entretanto, estes termos têm significações diferentes e variadas, que trazem uma ampliação das concepções aceitas pelos matemáticos. Funções e papéis, níveis e tipos de prova no ensino são discutidos, considerando outras abordagens, como a epistemológica, a cognitiva e a didática.

Para Balacheff (1982), um dos pesquisadores que tem trabalhado sobre esta temática, a prova está ligada à necessidade de dar explicações que visam explicitar o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado adquirido por um locutor, isto é, provar significa apresentar razões que possam ser aceitas dentro de um sistema de validação comum aos interlocutores. A demonstração é um tipo particular de prova, constituindo-se de uma seqüência de enunciados conforme regras determinadas, isto é, uma prova em que a veracidade de uma proposição é obtida a partir das que a antecedem por um processo dedutivo, usando um conjunto de regras bem definidas. Desse modo, a prova tem um sentido mais amplo, o que permite falar em diferentes tipos e níveis de provas, enquanto a demonstração tem uma significação mais fechada e mais próxima da prova em matemática, em que ela é uma ferramenta privilegiada.

Mariotti (2005) lembra que, embora o termo prova seja comumente usado no campo da educação matemática, ele descreve apenas parcialmente o complexo sistema de elementos envolvidos no processo de provar. Para ela, a prova é um dos componentes deste sistema que inclui ainda uma afirmação a ser provada e um sistema teórico, ou seja, uma teoria dentro da qual a prova faz sentido. O provar em álgebra, por exemplo, envolve uma cadeia de transformações, cada uma delas baseada nos axiomas considerados ou em afirmações já provadas. Assim, a concepção de prova apresentada por essa pesquisadora tem o sentido de demonstração apresentado por Balacheff, o que corresponde também ao de prova matemática de Douek (1998), ou prova formal.

Para Harel e Sowder (1998), provar significa o processo empregado pelo individuo para remover ou criar dúvidas sobre a verdade de uma observação. Inclui dois subprocessos, que são o de verificação, empregado pelo individuo, para remover suas dúvidas, e o de persuasão, empregado pelo sujeito para remover dúvidas dos outros sobre a verdade de uma conjectura. Neste trabalho, adotaremos a distinção feita por Balacheff, pois abre perspectivas para discutir a prova na licenciatura, visando à prática docente na escola básica.

Quanto ao papel da prova, há uma convergência no sentido de considerar que a sua principal função não é a de validar e convencer, mas é a de explicar, conduzindo à compreensão da matemática. (Hanna , 2001; Thurston, 1995; Barbin, 1996). Outras funções são consideradas, como a de comunicação, a de sistematização, a de descoberta de novos resultados, a de construção de uma teoria e a de exploração de definições. (Hanna, 2001).

Diferentes classificações de provas são feitas pelos pesquisadores do campo, considerando ora os aspectos epistemológicos, ora didáticos, ora cognitivos. Harel e Sowder (1998) estabeleceram uma classificação dos esquemas de prova, tomando como referência o estudante. Para eles, um *esquema de prova da pessoa consiste daquilo que constitui verificação e persuasão para aquela pessoa*, portanto cada um dos esquemas apresentados constitui um estágio cognitivo do estudante que retrata as suas habilidades intelectuais e o seu desenvolvimento matemático. Assim, estabelecem três categorias que, por sua vez, dividem-se em subcategorias: a) *esquema de prova por convicção externa*, baseado no ritual da argumentação, na palavra de uma autoridade ou na forma simbólica; b) *esquema de prova empírica,* em que os estudantes avaliam suas conjecturas indutivamente, utilizando um ou mais casos específicos ou usando imagens mentais, mas sem fazer transformações; c) *esquema de prova analítico*, aquele em que o estudante valida conjecturas por meio de deduções lógicas, podendo ser transformacional (caracterizado por considerações dos aspectos de generalidade da conjectura, aplicação de operações mentais) ou axiomático. (Harel e Sowder, 1998, p. 244-245)

Balacheff (1987), com base na relação entre sujeito e processo de validação classifica inicialmente as provas em *pragmáticas* e *intelectuais* e depois estabelece tipos, segundo o nível de dificuldade intelectual. As provas pragmáticas se baseiam em fatos e na ação, sendo que a linguagem, neste caso, não está ausente, mas não é ferramenta fundamental para transmissão do conhecimento, constituindo-se numa constatação pela ação e não pelo discurso. As provas intelectuais repousam sobre formulações de propriedades e num jogo das relações entre elas, exigindo uma linguagem funcional. Balacheff caracteriza os seguintes tipos de provas: a) *empirismo ingênuo* ou *singelo* - consiste em validar uma afirmação, verificando um pequeno número de casos, não se discute realmente a validade da conjectura; b) *experiência crucial* - consiste em verificar sobre um caso que é particular, mas que não está presente; c) *exemplo genérico* – consiste em fazer explicações das razões para as transformações sobre um objeto presente, mas percebido como representante característico de uma classe; d) *experiência mental* – supõe um processo de interiorização da ação, afastado de sua realização sobre um caso particular, como ocorre no exemplo genérico.

A classificação de Harel e Sowder e a de Balacheff têm elementos comuns, havendo quase que uma equivalência entre provas empíricas e esquema de provas empírico, e entre provas intelectuais e esquema de prova analítico. O modelo de Harel e Sowder é mais detalhado contendo mais subcategorias que o de Balacheff. Ambos ampliam a concepção de prova e estabelecem níveis que poderão se constituir em referência para o trabalho com a prova na escola básica e conseqüentemente na licenciatura, pois a prova no ensino não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática. No ensino, devem ser consideradas não apenas as funções que lhe são próprias, principalmente a de explicar, mas também o aluno, como ser que conhece.

Um outro ponto que precisa ser mais bem esclarecido é o que se refere à argumentação. Nos PCN e mesmo na fala dos entrevistados, há uma preocupação com que o ensino de matemática promova o desenvolvimento da capacidade de argumentar, inclusive alguns apontam a Teoria dos Números como campo propício para tal. No entanto, não há, segundo Boavida (2005), um quadro de referência que permita estabelecer um conceito da argumentação, sendo as discussões a respeito de seu significado menos freqüentes que a de prova e demonstração.

A argumentação, na educação matemática, pode ser compreendida como uma ou mais razões (argumentos) para uma proposição matemática, assumindo a forma de raciocínios de caráter explicativo ou justificativo utilizados para reduzir os riscos de erro ou de incerteza e para convencer um auditório a aceitá-la ou recusá-la. A argumentação supõe a utilização da linguagem natural, não excluindo outros elementos, como exemplos, figuras, dados numéricos ou algébricos. Tem uma natureza dialética, porque não conduz a uma verdade aceita universalmente, parte de princípios verdadeiros para quem argumenta. A argumentação pode ser vista como mais ampla que a prova, pois envolve não apenas dedução, mas também analogia e metáforas. (Douek, 1998, p.2; Boavida, 2005, p. 6 -7)

As posições dos educadores matemáticos a respeito das relações entre provas e argumentação têm sido em alguns aspectos até mesmo opostas. Segundo Douek (1998), apesar da inegável distância epistemológica e cognitiva entre argumentação e prova matemática formal[48], há muitos aspectos comuns entre argumentação e prova matemática ordinária. Afirma ela que alguns educadores matemáticos defendem que o pensamento dedutivo não trabalha do mesmo modo que a argumentação. Esta é a posição de Duval, que considera que esta é uma das causas de dificuldades dos estudantes para compreender as exigências de uma prova matemática. Para Duval (1999), se olharmos do ponto de vista matemático, pode-se postular uma continuidade entre argumentar, explicar e demonstrar, mas do ponto de vista cognitivo, a resposta é diferente. Segundo ele, a demonstração supõe uma organização dedutiva de enunciados, de passos encadeados, articulados em função de seu *status* (axioma, teorema, hipótese, tese) e não em função de seu sentido, e supõe ainda uma substituição de enunciados, enquanto na argumentação, há passos de inferência, o conteúdo semântico é crucial e há um ajustamento (por reforço ou oposição) de enunciados.

[48] Prova reduzida ao cálculo lógico.

Douek (1998, p.8) considera o modelo de Duval mais adaptado à prova como produto e não como processo. Para ela, o processo de prova envolve estabelecer um *link* com a atividade argumentativa, necessária para compreender e, até mesmo, para produzir a afirmação e reconhecer a sua plausibilidade, envolvendo raciocínio transformacional.

Douek aborda um aspecto importante na argumentação, que é o *corpus de referência* que inclui afirmações, mas também referências visuais, evidências experimentais. Para ela, nenhuma argumentação prescinde de um *corpus de referência* e este é social e historicamente determinado. O *corpus de referência* utilizado na matemática escolar não é o mesmo do utilizado pelos matemáticos, e dentro daquela pode diferir de nível para nível.

Podemos perceber que a argumentação matemática, apesar das divergências entre os pesquisadores sobre a relação de continuidade e/ou ruptura com a demonstração, tem um papel importante no ensino e está ligada aos processos heurísticos, ao levantamento de conjecturas e à discussão da validade delas.

A argumentação está presente nos textos legais, colocada como objetivo do ensino de matemática da escola básica, e a sua relação com a prova, como processo ou como produto, tem implicações pedagógicas que vêm sendo apontadas pelas pesquisas. Merece, portanto, ser tratada no processo de formação. Não seria a discussão dessas concepções de prova, de argumentação, de demonstração, uma questão relacionada ao conhecimento pedagógico do conteúdo apontado por Shulman? Pensamos que, ao se realizarem atividades que envolvam argumentar, ou provar ou demonstrar nas disciplinas específicas, discussões sobre os seus significados possam estar presentes, tratando-as assim não só como técnicas, mas como tecnologias dotadas de significações.

7.2.3 Teoria Elementar dos Números um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova

O trabalho sobre a demonstração na educação básica e na formação de professores de matemática, realizado por Pietropaolo (2005), indica que:

> - há consenso sobre a importância das provas nas aulas de matemática na educação básica;
> - há necessidade de ampliar o significado de prova, para trabalhar com ela nas aulas de matemática da educação básica;
> - o ensino da prova deve ser desenvolvido como processo de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação;
> - as concepções e crenças que os professores têm sobre o trabalho com provas na educação básica funcionam como obstáculo à implementação de propostas inovadoras;
> - na formação dos professores a inserção de provas deve se dar tanto no rol de conhecimentos substantivos e sintáticos como no rol dos conhecimentos pedagógicos e curriculares.

Essas conclusões nos conduzem a pensar que o trabalho com a prova nas disciplinas específicas da formação deve considerar as funções que lhe são próprias na construção e compreensão do conhecimento matemático, conforme mostramos anteriormente, mas deve ter também uma componente pedagógica, no sentido de proporcionar experiências que incluam diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando vivenciar situações análogas às que ele vivenciará na educação básica. O trabalho nesta perspectiva pode ser mais significativo para ele, pois, como egresso do ensino médio, suas experiências com a prova e a demonstração têm sido raras, o que poderá lhe trazer dificuldades em abordagens axiomáticas tradicionais.

Boero (1992) nos lembra que, ao tratar com a questão da prova, o professor encontra um *gap* entre o seu conhecimento e o do aluno, porque o professor possui experiências desconhecidas pelo estudante: na formulação lingüística das afirmações e de suas característica de generalidade e condicionalidade; na cultura matemática mais ampla; na compreensão do significado da prova em matemática e das modalidades e técnicas para realizá-la; no formalismo algébrico. Essas considerações de Boero são importantes, considerando não só o professor da escola básica e os seus alunos, como também o professor da licenciatura e os licenciandos. Este fato irá exigir do professor o conhecimento pedagógico do conteúdo, para que possa fazer uma mediação que torne possível uma aprendizagem significativa. Assim, o trabalho com a prova na licenciatura extrapola o seu emprego como ferramenta de validação e de justificação.

Ao lado disso, a Teoria Elementar dos Números tem sido apresentada por pesquisadores na área de Educação Matemática como campo propício para a demonstração e a prova na escola básica e na formação de professores. Segundo Zazkis e Campbell,

> Tópicos de teoria dos números, como fatores e múltiplos, fornecem avenidas naturais para o desenvolvimento do pensamento matemático, por desenvolver apreciação enriquecida e compreensão da estrutura numérica, especialmente com relação a identificar e formular conjecturas, e estabelecer sua verdade. (CAMPBELL e ZAZKIS, PME26, 2002, I - 207)

Embora a geometria seja o *locus* que mais tem sido citado para a prova nos currículos da educação básica, conforme abordamos anteriormente, a teoria elementar dos números oferece ricas oportunidades para a generalização, a abstração e a prova, porque trata dos números naturais e estes são familiares aos estudantes, o que lhes poderá trazer um certo conforto. Na universidade, também, a teoria elementar dos números pode ser um lugar adequado para as provas, pois há situações que podem ser tratadas mais localmente, o que pode ser uma vantagem para os estudantes que têm uma fraca concepção de prova. (Selden e

Selden, 2002). Esses autores assim resumem o por que é a teoria dos números um campo propício para raciocínio e prova:

> 1) os estudantes trabalham com objetos familiares, deste modo reduzindo o nível da nova abstração e a desequilibração concomitante; 2) quando apropriadamente selecionadas, tais provas são acessíveis, isto é, os estudantes precisam apenas raciocinar a partir dos princípios iniciais junto com uma certa quantidade de engenhosidade; 3) geralmente provas em teoria dos números têm versões genéricas, conduzindo o estudante a ver, ou mesmo provar, um caso geral depois de ter considerado um caso particular desejável*. (SELDEN e SELDEN, 2002, p. 216)

O exemplo genérico, um dos tipos de provas apresentado por Balacheff, pode ser incluído no que chamamos de visão mais ampla de prova, e, como afirmam Selden e Selden, a teoria elementar dos números é um campo propício para esta atividade. Rowland (2002, p. 157) apresenta alguns exemplos de prova genérica e assim percebe o que tem ocorrido em relação a ela:

> (...) o potencial do exemplo genérico, como uma ferramenta didática, é realmente não reconhecido e não explorado no ensino da teoria dos números, e eu estou argumentando por uma mudança neste estado de coisa.

Rowland argumenta que, embora a comunidade dos matemáticos considere que este tipo de prova é inadequado, chegando a considerá-las uma heresia, o objetivo da prova na escola é principalmente explicar, desse modo, exemplos genéricos adequados podem conduzir os alunos, inclusive os universitários, a perceber o que é genérico num caso particular e iluminar *insights*, explicações e argumentos, inclusive para uma prova mais formal. Acredita que há momentos no ensino de teoria dos números em que o exemplo genérico bem construído cumpre a função de explicar.

A escolha do exemplo deve ser feita cuidadosamente, pois ele deve se constituir num caso típico, não pode ser nem trivial, nem complicado, deve permitir perceber os invariantes na situação, permitindo a generalização, e sugerir caminho para uma prova formal, quando este for o objetivo. No artigo *Generic Proofs in Number Theory* (2002), Rowland apresenta vários exemplos, alguns retirados da literatura (em que outros nomes são usados, como *prova-ação* e *exemplo iluminador)* e outros são frutos de sua experiência com alunos universitários. Assim, apresenta o exemplo genérico para a soma de n números consecutivos ímpares; para a divisibilidade por 9; para a soma de Gauss de n números naturais; para a função ϕ de Euler; para o teorema de Wilson; para o Lema de Gauss; para raiz primitiva de um número primo.

A título de ilustração, tomemos o caso da divisibilidade por 9, que é tratada no Ensino Fundamental, sendo que a abordagem pode ser utilizada para outros critérios de divisibilidade.

Seja o número 87 642, que pode ser escrito como 87 642 = $8x10^4 + 7x10^3 + 6x10^2 + 4x10 + 2$ = 8x(9999 +1) + 7x(999 + 1) + 6x(99 + 1) + 4x(9+1) + 2 = 8x9999 + 8 + 7x999 +7 + 6x99 + 6 + 4x9 + 4 + 2 = 9x(8x1111 + 7x111 + 6x11 + 4) + (8 + 7 + 6 + 4 + 2). Como a primeira parcela é sempre divisível por 9, se a segunda parcela que é justamente a soma dos algarismos do número for divisível por 9, o número dado que é a soma das duas também o será.

Se o aluno perceber o que nesta situação é invariante para um caso qualquer e tiver um pouco de domínio da linguagem algébrica, poderá generalizar e apresentar uma demonstração mais formal:

Seja o número natural *N*, que poderá ser representado como:
$N = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_210^2 + a_110 + a_0$ onde $0 \leq a_i < 10$, $i = 0,1,.....,n$.
Substituiindo as potências de 10 por um número do tipo 9 . q + 1:
$N = a_n(9 .q_n +1) + a_{n-1}(9 .q_{n-1} +1) + ... + a_2(9 .q_2 +1) + a_1(9 .q_1 +1) + a_0$. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:
$N = 9a_n.q_n + a_n + 9a_{n-1} .q_{n-1} + a_{n-1} .... + 9 a_2 .q_2 + a_2 + 9a_1 . q_1 + a_1 + a_0$. Usando as propriedades, comutativa e associativa da adição, podemos escrever:
$n = (9a_n.q_n + 9a_{n-1} .q_{n-1} .... + 9 a_2 .q_2 + 9a_1 . q) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$. Colocando 9 em evidência:
$N = 9(a_n.q_n + a_{n-1} .q_{n-1} .... + a_2 .q_2 + a_1 . q) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$. Assim *N* pode ser escrito como:
$N = 9 .q + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$, onde q é o resultado das operações contidas nos primeiros parênteses. Como 9 | 9 .q, 9 será divisor de *N* se 9 | $(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)$, ou seja se a soma dos algarismos do número dado resultar num número divisível por 9. (Esta atividade foi realizada por esta pesquisadora com alunos do 1^0 ano do curso de licenciatura em matemática da UNIUBE)

Outros exemplos de provas num sentido mais amplo podem ser encontrados na literatura em educação matemática, considerando a teoria elementar dos números e a formação do professor. Barkai, Dreyfus e outros (2002), relatando os resultados de um experimento de ensino com futuros professores, cujo objetivo era examinar as justificativas dos estudantes para afirmativas do tipo "para todo" e "existe", ilustram com alguns exemplos as justificativas dadas que, num sentido mais amplo, poderiam ser considerados como provas. O exemplo abaixo ilustra uma prova não algébrica.

A tarefa consistia em verificar se as afirmações eram verdadeiras ou falsas e, em seguida, dizer se os leitores considerariam a sua justificativa como prova matemática.
Afirmações do tipo "para todo": 1) A soma de cinco números inteiros consecutivos quaisquer é divisível por 5. 2) A soma de quatro números inteiros consecutivos quaisquer é divisível por 4. 3) A soma de três números inteiros consecutivos quaisquer é divisível por 6.
Afirmações do tipo "existe": 1) Existem cinco números inteiros consecutivos cuja soma é divisível por 5. 2) Existem quatro números inteiros consecutivos cuja soma é divisível por 4. 3) Existem três números inteiros consecutivos cuja soma é divisível por 6.
Para a primeira proposição, uma aluna apresentou a seguinte resolução: inicialmente somou todas as quinas possíveis de números consecutivos dos números, iniciando com os números de 1 a 10 e verificou a soma; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20; 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25; 4 +5 + 6 + 7 + 8 = 30; 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35; 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40; 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45; 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50; 9+ 10 + 11 + 12 + 13 = 55; 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150. Em seguida argumentou que qualquer soma de cinco números consecutivos podem ser criadas a partir destas seqüências, acrescentando aos números um múltiplo de 10 (por exemplo, a soma 44 + 45 + 46 + 47 + 48 pode obtida a partir de 4 +5 + 6 + 7 + 8 = 30, somando-se 40. O número 40 é composto de dez vezes um número e desde que 10 seja divisível por 5, 40 também

> é divisível por 5). O mesmo pode ser pensado para números de três, quatro, cinco dígitos, etc. Então cada soma é divisível por 5. (Barkai et al., PME, 2002, p. 2-59)

Embora a argumentação matemática da aluna estivesse correta, ela não considerou a sua produção uma prova matemática, o que nos leva a inferir que provar para o estudante envolve utilizar uma linguagem formal. Os pesquisadores apresentam outros exemplos em que os estudantes usaram argumentos originais, inclusive o exemplo genérico de que tratamos anteriormente. Em suas conclusões, consideram que o trabalho com a argumentação e a prova na formação de professores é importante, porque a eles cabe decidir se as conjecturas e os argumentos apresentados pelos alunos em sala são válidos. Para isso devem conhecer diferentes tipos de proposições e de provas, inclusive as não-formais, como a do exemplo apresentado, além do consenso na área de educação matemática de que o professor deve incentivar a investigação de conjecturas e a sua verificação.

Com esta discussão, não estamos postulando que o trabalho com as provas formais seja relegado no ensino de matemática, principalmente na licenciatura, mas estamos propondo que não seja o único tipo de prova aceitável na matemática escolar. Além disso, defendemos que as demonstrações não sejam procedimentos sem significados para os alunos, mas sejam atividades que favoreçam a compreensão matemática.

7.3 A Teoria elementar dos números: campo propício para a investigação matemática e para a generalização

As propostas curriculares para a educação básica do Brasil e também de outros países, como Estados Unidos, Inglaterra, Portugal, França, têm feito referências às atividades exploratórias ou investigativas no ensino da matemática, de forma explícita ou implícita[49]. Essas referências aparecem nos objetivos, na forma de "desenvolver competências para" ou nas sugestões metodológicas, geralmente ligadas à resolução de problemas, ao formular conjecturas, ao experimentar, ao argumentar e ao provar.

Nos PCN de 5ª a 8ª séries (1998, p. 48, 75 e 91), podemos encontrar as seguintes referências à atividade investigativa:

> Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa....
> Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
> Predisposição para encontrar exemplos e contra-exemplos, formular hipóteses e comprová-

[49] Ver PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA. *Investigações matemáticas na sala de aula.* Capítulo VII.

las.

Nos PCN + para o Ensino Médio (2002, p. 115), uma das competências a ser desenvolvida é a investigação e compreensão:

> Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades ....
> Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema ....

A preocupação com esta temática também está presente na área de educação matemática, considerando que a atividade investigativa é característica do fazer matemática, devendo, portanto, estar presente no ensino desta disciplina na escola. Pesquisadores, como Ponte, Abrantes, Fiorentini, têm investido nesta temática, com diversos trabalhos e publicações.

Embora existam diferentes modos de caracterizar a investigação matemática no ensino, associando-a, muitas vezes, à resolução de problemas, segundo Ponte *et al.* (2005), uma das características principais desta atividade é trabalhar com situações abertas e divergentes, em que o aluno é chamado a explorar e formular questões, fazer conjecturas, testá-las e reformulá-las, justificar, provar e demonstrá-las, incluindo também comunicar os resultados. O foco deste tipo de atividade é colocado no processo e não no produto.

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2005, p. 10)

Epistemologicamente, a investigação matemática tem origens na heurística de Lakatos, cujo foco é o processo de criação matemática e não os produtos obtidos, que poderão ser refutados ou questionados em outro contexto. O seu modelo da heurística da descoberta matemática[50] não é linear e hierarquizado. É construído dialeticamente na busca de provas e refutações.

Os defensores desta perspectiva metodológica argumentam que essas atividades podem se constituir num contexto desafiador para o aluno, permitindo-lhe desenvolver uma concepção de matemática como algo que é construído pelo ser humano, onde há espaço para o refutar, o argumentar, o provar e demonstrar podem se tornar significativos, como meio para explicar e convencer. Desenvolver a capacidade de argumentar e de comunicar parece ser

[50] Ver Hersh e Reuben (1986, p. 329)

consenso entre os investigadores matemáticos ao avaliar a relevância educativa das atividades de investigação.

Assim, a Teoria Elementar dos Números, ao ter como foco o estudo dos números inteiros, é um campo propício para o desenvolvimento de atividades investigativas, pois a exploração de padrões e de relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, envolvendo os inteiros, a divisibilidade e números primos estiveram e estão presentes na matemática e podem ser exploradas nas atividades escolares, em qualquer nível. A Teoria Elementar dos Números parece ser um campo natural para essas atividades, pois, na literatura e na pesquisa, atividades envolvendo aspectos desta área estão quase sempre presentes, quer como exemplos ou como situações de ensino em experimentos.

Hersh e Reuben, ao abordar a aplicação da heurística de Lakatos, usam questões ligadas à divisibilidade para ilustrar o método[51], mostrando a dialética do formular/ reformular conjecturas, da demonstração/ contra-exemplo ou objeção. Ponte *et al.,* na obra *Investigação Matemáticas na sala de aula*, dedicam um capítulo às investigações numéricas, usando, como exemplos, situações envolvendo teoria elementar dos números. Segundo esses autores, a investigação neste campo pode contribuir de modo decisivo para desenvolver o sentido numérico defendido por pesquisadores como Lins e Gimenes (1997), permitindo uma continuidade entre pensamento aritmético e pensamento algébrico.

Dentre as várias situações propostas, todas envolvendo números inteiros, apresentaremos uma que pode ser explorada em diferentes níveis de escolaridade, o que certamente conduzirá a processos diversificados de investigação, mas não necessariamente a conjecturas diferentes.

Explore relações entre os números:

0	1	2	3	
4	5	6	7	
8	9	10	11	
12	13	14	15	
...	....	....	....	(PONTE et al., 2005, p. 27)

Esta situação dá margem a múltiplas relações entre os números, dependendo do grupo de alunos e do seu nível de escolaridade. Ponte relata a experiência com alunos de 7ª série, de 12-13 anos, em que foram levantadas conjecturas tais como: 1) *o resultado da soma das filas está sempre na terceira coluna; 2) somando-se as colunas impares dá número par e somando* *uma par com um ímpar dá par; 3)os quadrados dos números estão na primeira ou na segunda coluna*. (pp. 30-46).

Esta mesma atividade aplicada por esta pesquisadora a uma turma de licenciandos, após o estudo de congruências módulo *m*, gerou várias conjeturas, envolvendo progressões aritméticas; a obtenção de um elemento qualquer em função da posição como se fosse um elemento de uma matriz; conjeturas envolvendo somas dos elementos, como a segunda que foi levantada pelos alunos da experiência descrita por Ponte. Apenas um grupo levantou conjecturas relacionadas à congruência, embora todos percebessem que as colunas representavam números do tipo 4k, 4k + 1, 4k + 2 e 4k + 3 e usassem esta notação para provar suas conjecturas. Essa mesma constatação foi feita por Zazkis (2002) ao realizar um experimento de ensino com os seus alunos em um curso de formação de professores, ou seja, embora a situação-problema envolvesse implicitamente os conteúdos abordados em sala proximamente, na atividade investigativa a maioria dos estudantes não dá atenção somente a este fato.

No desenvolvimento da atividade referida anteriormente, emergiram algumas questões que poderão ser mais bem estudadas, por exemplo, a compreensão do licenciando do que constitui uma conjectura, do que constitui uma generalização e uma prova, pois muitas dúvidas surgiram com relação a esses aspectos. Assim, os objetivos dessas atividades não se restringem ao aprendizado de um conteúdo matemático, mas também à compreensão de noções paramatemáticas, como a de prova e de demonstração, como também à constituição do conhecimento pedagógico do conteúdo por parte dos futuros professores.

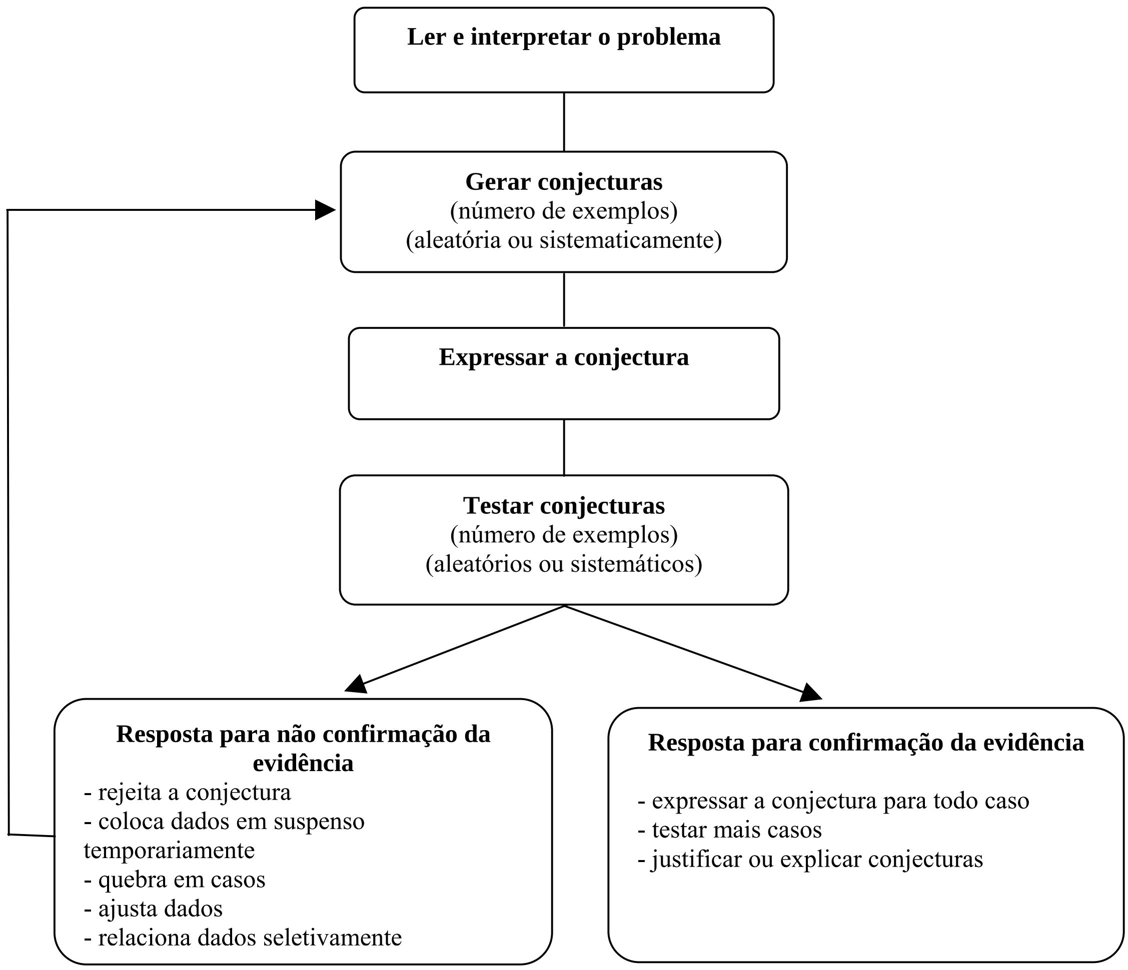
A investigação matemática traz, ainda, em seu bojo outras questões como a da generalização, considerada como uma prática central na matemática por vários pesquisadores em educação matemática (Zazkis, 2002; Mason, 1996; Lee, 1996; Radford, 1996). Para conduzir as aprendizagens deste processo, segundo Zazkis (2002), os professores devem ter uma compreensão do que seja a generalização matemática. Por este motivo, na formação, inicial e continuada, deverão ter oportunidades de realizar atividades em que eles tenham que generalizar.

Para o trabalho com a generalização, a Teoria Elementar dos Números é também um campo propício, mesmo porque essa atividade pode ser compreendida como uma etapa da investigação matemática. Como exemplo, apresentamos a tarefa proposta por Zazkis e Edwards (2002) a professores em formação:

[51] Ver Hersh e Reuben (1986, pp. 330-335)

> Em um papel quadriculado, desenhe retângulos e trace uma das diagonais. Quantos quadrados da grelha serão cortados pela diagonal? No caso de um retângulo 3x5 ou 2x2, nós podemos contar. Entretanto, como nós podemos tomar uma decisão para um retângulo 100x 167 ou 3600x 288? Em geral, dado um retângulo N x K, quantos quadrados podem ser cortados por esta diagonal? (ZAZKIS e EDWARDS, 2002, p. 144)

O objetivo das pesquisadoras era estudar o desenvolvimento do pensamento matemático e da generalização e registrar o progresso e os obstáculos encontrados pelos alunos para pensar uma solução geral para um problema envolvendo teoria elementar dos números. Zazkis e Edwards estabeleceram o modelo abaixo para análise do processo de generalização, considerado como referência para a análise da produção dos alunos. Nesse modelo pode-se observar, pelas etapas apresentadas, que as atividades de generalização podem ser compreendidas como atividades de investigação.



(Zazkis e Edwards, 2002, p.145)

Segundo as pesquisadoras, como os estudantes envolvidos tinham pouca experiência em trabalhar com teoria elementar dos números e com o conjecturar e provar, eles tendiam a um empirismo ingênuo, buscando uma fórmula que pudesse ligar os exemplos específicos que geravam, ao invés de analisar a estrutura do problema e aprofundar sobre os seus aspectos, identificando os que são relevantes ou não. Ao analisar os dados, Zazkis e Edwards tinham o objetivo de também verificar como aspectos da teoria elementar dos números apareciam e eram compreendidos pelos estudantes. A esse respeito, é interessante registrar alguns resultados: um terço dos estudantes chegaram a uma fórmula completa e correta[52], envolvendo o máximo divisor comum entre o número de linhas e de colunas do retângulo; mesmo escrevendo a fórmula correta, achavam que deveriam obter outra que usasse apenas n e k, entendendo que o mdc (n, k) era mais uma instrução para calcular alguma coisa do que um elemento válido de uma expressão algébrica; além disso, as pesquisadoras observaram que poucos alunos notaram fatores e múltiplos como elementos importantes em suas soluções, ficando presos ao fato de os números serem pares ou ímpares.

Esse trabalho de Zazkis ilustra como se podem utilizar conhecimentos de teoria dos números, no caso, o máximo divisor comum, em atividades de investigação matemática em que a generalização não envolve recursão, geralmente mais comuns, principalmente na escola básica. Assim, a percepção da generalidade pode ter origem na observação de casos particulares, como no experimento de Zazkis, ou pode ser percebida a partir de um exemplo genérico, como abordamos anteriormente.

A perspectiva metodológica da investigação matemática na licenciatura e mesmo no ensino médio e o tratamento de tópicos de Teoria Elementar dos Números podem abrir a possibilidade de exploração da indução matemática e a discussão da diferença entre esta e a indução empírica que é realizada pelo estudante ao observar dados e padrões existentes entre eles. É no tratamento de questões envolvendo os números naturais que a indução matemática pode ser explorada. Este é um dos motivos que leva os pesquisadores em educação matemática a reivindicar um espaço próprio para este campo na licenciatura.

Harel (2002), abordando a questão da indução matemática, faz uma crítica à sua abordagem tradicional, especialmente aos livros didáticos. Faz uma classificação dos problemas neles propostos em problemas de recursão explícita[53] ou implícita e problemas não-recursivos. Afirma que, no ensino, os problemas são apresentados numa ordem que envolve, primeiramente, os problemas que apresentam igualdades, depois as desigualdades e, por último, problemas envolvendo divisibilidade. Deste modo, observa-se que os autores buscam estabelecer seqüências de exercícios de acordo com a dificuldade e não de acordo

[52] A fórmula correta e completa era: $d = n + k - \text{mdc}(n, k)$, onde d representa o número de retângulos cortados pela diagonal, n indica o número de linhas e k, o número de colunas.

[53] Por exemplo, $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$ é um problema de recursão explícita, pois o 1º membro da igualdade é a representação recursiva de uma função. O problema da Torre de Hanói é um exemplo de problema de recursão implícita. O problema $3 \mid n^3 - n$ é exemplo de um problema de indução não-recursivo. (Harel, 2002, p. 190)

com o desenvolvimento conceitual dos alunos. Na análise dos livros didáticos que realizamos no capítulo 5, pudemos constatar o que Harel afirma.

Segundo ele, a abordagem que se faz da indução matemática conduz o aluno a pensar que se trata de prova por passos ou que é uma equação envolvendo a incógnita *n* em que se acrescenta "alguma coisa" dos dois lados. Desta forma, o aluno executa um procedimento, muitas vezes de forma correta, mas sem compreender o seu significado. Aceita a prova por força da autoridade do livro ou do professor, constituindo-se, portanto, num esquema de prova externo. Harel apresenta duas possíveis causas para esses problemas. A primeira está ligada à forma abruta como o princípio da indução matemática é introduzido, sem que o aluno perceba a necessidade da prova. Eles são solicitados a executar um procedimento que assume um papel ritual, validado pela autoridade do professor. O segundo problema diz respeito à seqüência dos problemas propostos, em que não são incluídos problemas de recursão implícita que poderiam conduzir os alunos a uma generalização de processo e não apenas de resultados. Dubinsky (1991) também trata da prova por indução matemática e aponta sérias dificuldades cognitivas, considerando que numa prova por indução não se prova a tese diretamente, mas a implicação entre duas proposições dela derivada. Afirma ele:

> Seja P a proposição a ser provada e seja $Q = \{ P(n) \Rightarrow P(n+1)\}$. Então, de um ponto de vista matemático não há nada de novo em Q, isto é, uma vez que se entende P, então, como um caso especial, entende-se Q. Entretanto, como já observamos, com os estudantes as coisas não se passam desta maneira, isto é, este não é o caso, do ponto de vista cognitivo. Em primeiro lugar, proposições do tipo Q são as mais difíceis para os alunos e são, geralmente, as últimas a serem encapsuladas. Além disso, há uma diferença entre construir P(n) a partir de uma dada proposição e construir Q a partir de P. Essa é que é a etapa a ser ultrapassada. Se alguma sutileza há aqui, então se explica a dificuldade que os estudantes têm precisamente neste ponto. (DUBINSKY, apud MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 10)

Buscando contornar estas dificuldades, Harel propõe uma abordagem de ensino em três momentos: quase-indução como um modelo de generalização de processo internalizado; quase-indução como um modelo de generalização de processo interiorizado; e indução matemática como uma abstração da quase-indução. Nos dois primeiros momentos, o estudante assume uma atitude investigativa, até chegar a perceber a necessidade e a essencialidade do princípio da indução matemática como uma prova formal de uma afirmação no conjunto dos inteiros positivos.

Harel toma como base teórica para seu experimento de ensino em Teoria dos Números os princípios do processo de ensino-aprendizagem: da dualidade, da necessidade intelectual e da repetição.[54]

Deste modo, podemos considerar que a indução matemática e, conseqüentemente, o Princípio de Indução Matemática devam ser tratados na licenciatura em matemática, não só como ferramenta importante, mas também como objeto cujo significado precisa ser discutido, sem o qual fica reduzido a um procedimento ritual, algorítmico, conforme constata Harel.

A essencialidade da indução matemática como uma importante técnica de prova em matemática será percebida pelo aluno se ele compreender a necessidade de seu uso e se desenvolver esquemas de provas que não sejam apenas externas e empíricas. Como mostram esses pesquisadores, tarefas envolvendo o princípio da indução matemática não são simples do ponto de vista cognitivo, para serem abordadas de forma tão natural, como o fazem tanto os livros de ensino superior como os de ensino médio.

7.4 Teoria elementar dos números: espaço próprio para o tratamento de idéias matemáticas relevantes presentes na matemática escolar

A Teoria Elementar dos Números, compreendida como estudo dos números inteiros e de relações entre eles, permite tratar idéias próprias deste campo numérico (às vezes próprias apenas do conjunto dos números naturais), as quais não fazem sentido nos demais conjuntos numéricos (apenas nestes subconjuntos deles). Estas idéias são relevantes em matemática e estão presentes na matemática escolar de forma implícita ou explícita, desde o Ensino Fundamental. Por exemplo, a idéia de sucessor que é fundamental na construção dos números naturais, com a qual se trabalha na escola básica, desde as séries iniciais, de modo intuitivo. O fato de ter um sucessor caracteriza os números inteiros, tanto é que, na Axiomática de Peano, este fato é fundamental.

[54] Princípio da dualidade: Os modos de pensar dos estudantes impactam seus modos de compreender os conceitos matemáticos. Ao contrário, o como os estudantes compreendem o conteúdo matemático influencia seus modos de pensar.
Princípio da necessidade: Os estudantes estão prontos para aprender se eles vêem necessidade para o que nós pretendemos ensiná-los, onde por “necessidade” se entende necessidade intelectual como oposta a necessidade social ou econômica.
Princípio do raciocínio repetido: Estudantes devem praticar raciocinar a fim de internalizar e interiorizar modos específicos de pensamento e de compreensão. (Harel, 2002, pp. 208-210)

Outra idéia própria do conjunto dos números naturais é a de definição por recorrência,[55] que traz consigo a idéia de indução matemática de que já falamos anteriormente. O lugar próprio para o trabalho com o princípio da indução matemática é o conjunto dos números naturais (N), pois está baseado no fato de que qualquer subconjunto de N tem um elemento mínimo. Por esse motivo, a indução matemática deve ser usada exclusivamente para demonstrar as proposições dadas por números naturais. (SHOKRANIAN, 2002, p. 17).

Muitos conceitos trabalhados com os alunos na escola básica são definidos por recorrência, de modo intuitivo. Por exemplo, a definição de potenciação em N, a noção de fatorial, a noção de somatório, a definição de progressão aritmética e de progressão geométrica. São também definidas por recorrência seqüências interessantes como a resultante do problema da Torre de Hanói e a Seqüência de Fibonacci, que aparecem em alguns livros da escola básica.

Outro elemento caracterizador do conjunto dos inteiros é a divisibilidade, pois, nos demais conjuntos numéricos, a divisão por um número diferente de zero é sempre possível. Mesmo quando não existir a relação de divisibilidade entre dois números inteiros, ainda assim a divisão poderá ser calculada, usando o teorema da divisão euclidiana, que é um resultado central na teoria dos números. A partir dele pode-se discutir a representação dos números inteiros numa base qualquer b, sendo $b > 1$; o máximo divisor comum; os critérios de divisibilidade; as equações diofantinas, todos esses assuntos presentes na matemática escolar.

No conjunto dos números naturais, há ainda um outro conceito que é fundamental na Teoria dos Números, que é o de número primo. Segundo Shokranian (2002), a maior parte da Teoria dos Números está baseada no estudo dos números primos e de suas propriedades. Esse conceito, assim como o teorema fundamental da aritmética, o reconhecimento de um número primo, a determinação do número de divisores de um número dado são também assuntos que compõem a matemática escolar no ensino básico.

Assim, a Teoria Elementar dos Números é o espaço próprio para explorar essas idéias, pois abordá-las em outro contexto, como em disciplinas cujo foco são as estruturas algébricas, pode conduzir a um tratamento que não as enfatiza. Garantir um espaço próprio para o estudo da Teoria dos Números é garantir que as idéias referidas anteriormente possam ser devidamente exploradas na formação do professor e na escola básica.

---

[55] Para definir uma expressão *E(n)* por recorrência, para todo $n \in a + N$, basta definir E_a e mostrar como obter E_{n+1} a partir de E_n, $n \in a + N$. (Hefez, 2005, p. 14)

7.5 Dilemas e tensões

As potencialidades discutidas anteriormente abordam aspectos que não são consensuais, nem na matemática e nem na educação matemática. Ao contrário, levantam dilemas e tensões de natureza epistemológica, de natureza cognitiva e de natureza didática, que se manifestam não de forma explicita e independente, mas de forma articulada, muitas vezes velada, com implicações no ensino da matemática em todos os níveis, conforme pudemos constatar nas análises feitas anteriormente.

Do ponto de vista epistemológico, emerge do discurso dos entrevistados e das pesquisas a tensão entre a visão formalista da matemática e a visão de Lakatos com base na teoria falibilista da ciência de Popper. Segundo Davis e Hersh (1986), na visão formalista, a matemática aparece como a ciência das demonstrações rigorosas, enquanto na teoria de Lakatos, a matemática não é indubitável, cresce por um processo de provas e refutações. Neste contexto, a demonstração não é uma cadeia de verdades, indo das hipóteses às conclusões, mas um conjunto de explicações, justificativas, passíveis de críticas e sujeitas a reformulações, que tornam a conjectura mais plausível. Davis e Hersh consideram que a teoria de Lakatos está mais próxima do processo de construção da matemática pelos matemáticos e pelos estudantes, e, referindo-se ao fundacionismo que dominou a filosofia da matemática no século XX, afirmam que *A matemática formalizada, à qual foi devotada a maior parte das especulações filosóficas dos últimos anos, em verdade dificilmente se encontra em qualquer lugar imaginável, fora dos textos e periódicos de lógica simbólica.* (DAVIS e HERSH, 1986, p.389)

Essa tensão entre o rigor, a concepção absolutista de verdade e uma concepção de matemática que cresce a partir dos problemas e das conjecturas está subjacente aos discursos e às práticas e está na raiz de alguns dilemas educacionais no ensino da matemática.

Um desses dilemas está relacionado à abordagem heurística dos conhecimentos matemáticos e à abordagem axiomática formal. Enquanto na educação matemática há uma valorização dos métodos heurísticos, incluindo a investigação matemática, na licenciatura, no ensino de conteúdos específicos há uma predominância da abordagem formal, conforme pudemos constatar nos livros didáticos de Teoria dos Números analisados, nos programas e no discurso de alguns dos entrevistados. Como esses livros são resultados de notas de aulas, podemos inferir que também está presente nas aulas, cuja tendência é a aula expositiva, em que se apresentam os conteúdos, começando pelas definições, propriedades e, em seguida os exercícios, com ênfase na demonstração.

Na escola básica, este dilema também aparece, mas dentro de uma perspectiva diferente, inclusive apontada por Hanna (2001), com base em resultados de pesquisas na área. Como a investigação matemática e a resolução de problemas foram enfatizadas nas propostas curriculares nas ultimas décadas[56], a prova tem sido deixada em segundo plano. Há uma crença de que as técnicas heurísticas são mais úteis, mais prazerosas, e que as provas não têm valor educacional, porque se transformam numa técnica sem significado para o aluno. O professor vê a prova mais como um impedimento para a compreensão do que como meio para tal. No entanto, como vimos anteriormente, estas abordagens não são incompatíveis, pois a prova, num sentido mais amplo, pode se constituir numa etapa da investigação matemática. Além do mais, como apontaram alguns entrevistados, outras abordagens são possíveis e desejáveis na formação do professor, como a abordagem histórica e epistemológica, a da etnomatemática, dentre outras.

Uma outra tensão, não completamente distinta e separada da anterior, é a questão da prova formal e da prova menos formal ou informal, conforme tratado por Pietropaolo (2005). Os professores pesquisados por ele demonstraram estar numa situação embaraçosa, ao serem solicitados a avaliar provas produzidas por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo em que avaliavam uma prova como correta e criativa, tinham dificuldade em aceitá-la pelo fato de não se enquadrar no modelo e nas concepções que eles tinham de prova. Geralmente essas concepções estão ligadas ao modelo formal, vivenciado por eles na licenciatura. Resistem a considerá-las como prova matemática, mesmo em se tratando da prova num contexto escolar, embora as valorizem, o que, segundo Pietropaolo, indica uma leitura critica da prova[57]. Nos experimentos realizados com os números inteiros em várias pesquisas, esses tipos de provas aparecem naturalmente. Nelas se utilizam, inclusive, outras formas de representação, que não somente a algébrica, embora esta seja também a forma mais valorizada pelos alunos, o que demonstra a valorização da forma e dos aspectos sintáticos

[56] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) e o British National Curriculum (1984) enfatizaram os métodos heurísticos, em detrimento do uso da prova. O NCTM (2000) procurou amenizar esta situação, incluindo uma seção intitulada *Reasoning and Proof* , cujos objetivos são: reconhecer raciocínio e prova como aspectos fundamentais da matemática, fazer e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e a avaliar argumentos matemáticos e provas; selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova. (HANNA, 2000, pp. 10-11)

[57] Garnica (1996), ao tratar a prova rigorosa na formação de professores, aponta a existência de duas formas de leitura. Uma "leitura técnica" que reproduz o modelo formal utilizado na matemática acadêmica e a "leitura crítica" que está ligada ao campo da educação matemática onde o discurso matemático se insere num contexto mais amplo, incluindo os aspectos cognitivos e sociais do ensino da matemática.

mais do que aspectos semânticos. Essa constatação foi feita por Martin e Harel (1989), ao trabalhar com professores em formação.

Um outro ponto de tensão se refere à questão da valorização do processo e não apenas do produto. No ensino tradicional, como pudemos observar nos livros didáticos, as tarefas propostas para os alunos envolvem proposições, que já se sabe, são verdadeiras: trata-se de produtos. As demonstrações devem seguir um caminho que vai das hipóteses às conclusões, enunciando corretamente os teoremas utilizados, usando corretamente as regras gramaticais da lógica. Seguindo o caminho dedutivo, fica escondido o processo de construção em que há espaço para o questionar, para o rasurar, o apagar. A demonstração aparece para o aluno como um texto formalizado, muitas vezes desnecessário, pois ele não percebe a necessidade da prova. (Barbin, 1996; Harel, 2002; Boavida, 2005).

Um outro ponto de tensão pode ser percebido, quando, por um lado, se reconhece que a prova rigorosa é condição *sine qua non* para a validação do conhecimento da matemática, portanto um elemento fundamental na sua construção, mas, por outro lado, constatam-se sérias dificuldades para o seu ensino em todos os níveis de escolaridade. Vários pesquisadores, como alguns de nossos entrevistados, apontam que os alunos têm dificuldades em realizar provas, principalmente quando vistas do ponto de vista dos matemáticos, afirmando que os alunos tiram pouco proveito deste ensino. (Nasser e Tinoco, 2001; Wheeler, 1990).

Segundo Healy e Hoyles (2000), o processo de provar é complexo, envolvendo uma série de competências, como identificar afirmações, isolar propriedades e estruturas, organizar argumentos lógicos. Além disso, conjecturamos que as dificuldades envolvam também estratégias de provas, os alunos não sabem como atacar a questão e dizem: “não sei como começar”. Atitudes desse tipo envolvem diversos aspectos como: conhecimentos matemáticos envolvidos na situação; aspectos ligados à formulação e a tipos de raciocínios exigidos; percepção da necessidade de provar; aspectos didáticos; aspectos cognitivos dentre outros. Neste sentido, a pesquisa em Educação Matemática tem avançado, principalmente em alguns países. Se há um consenso de que a prova é importante no ensino, é necessário compreender como os obstáculos relacionados a seu ensino podem ser trabalhados.

Um outro ponto de tensão está relacionado ao papel das chamadas disciplinas específicas na formação do professor de matemática, e neste contexto surgem os dilemas relacionados ao por que ensinar, ao que ensinar e ao como ensinar. Há um objetivo claro, expresso na maioria dos currículos das licenciaturas, como pudemos constatar, de que é a formação do professor para a escola básica, a finalidade principal destes cursos. No entanto, as disciplinas específicas ainda estão marcadas pelas crenças de que “aquele que sabe o mais, sabe o menos”, de que a formação sólida do professor passa pelo estudo da matemática pela matemática, com ênfase nos conteúdos e na abordagem axiomática formal. Ao realizar este trabalho, pudemos perceber que a Teoria Elementar dos Números é um campo propício para trabalhar o conjunto dos números inteiros, envolvendo aspectos históricos, epistemológicos e didáticos, dentre outros, oportunizando não só o trabalho com as noções matemáticas, mas também com as paramatemáticas, como a argumentação, a prova e a demonstração. No entanto, ainda, o foco é o conteúdo, tratado de modo tradicional, o que certamente os distancia do objetivo principal da licenciatura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

1. Introdução

Neste trabalho, tomamos como objeto de estudo um saber matemático, a Teoria dos Números, e procuramos desvelar, a partir de algumas fontes, como esse saber que tem raízes históricas e que se constitui num campo efervescente na matemática ainda hoje, é ou poderia ser concebido como um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando à formação do professor que irá atuar no Ensino Fundamental e Médio.

A partir da nossa experiência como professora da escola básica e da licenciatura, pudemos constatar, ao longo de nossa trajetória, que, embora o estudo dos números, principalmente o dos inteiros ocupe grande parte do currículo de matemática da escola básica, parece não merecer na licenciatura um tratamento que corresponda às demandas que o ensino desse tema apresenta ao professor na docência, nesses níveis. O domínio do discreto sempre esteve presente na vida do homem, assim como o domínio do contínuo. No entanto este último sempre teve um lugar de destaque nos currículos da licenciatura, enquanto campos como a Teoria dos Números, a Matemática Discreta nem sempre aparecem explicitamente como conteúdos a ensinar durante o processo inicial de formação de professores.

Por outro lado, os PCN, ao estabeleceram diretrizes para o ensino de matemática na escola básica, têm destacado o estudo dos números, inclusive como um bloco de conteúdos, mas a análise do documento permite perceber que há questões subjacentes às idéias ali apresentadas que estão a demandar mais pesquisas, como é o caso das visões de álgebra presentes nos documentos e na prática; discussão dos aspectos caracterizadores do conjunto dos inteiros e o seu ensino e aprendizagem; as relações álgebra e aritmética, pensamento algébrico e pensamento aritmético; enfim, qual a álgebra a ser ensinada.

Deste modo, a nossa preocupação neste trabalho se situa no campo da educação algébrica, em que se questiona qual a álgebra a ser ensinada nos diferentes níveis da escolaridade. Como também se insere no campo da formação de professores no que diz respeito aos saberes específicos que devem fazer parte do currículo da licenciatura, tema de estudo ainda pouco explorado na Educação Matemática.

Assim, após delimitações que se fizeram necessárias, definimos a questão geradora desta pesquisa: *Qual Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a* *ensinar na licenciatura em matemática, visando a prática docente na escola básica?* Outras questões foram levantadas para nortear o estudo:

- *Qual Teoria dos Números tem sido ensinada na licenciatura em matemática, no Brasil, atualmente?*
- *Como professores e pesquisadores em Teoria dos Números e em Educação Matemática concebem a Teoria dos Números e o seu ensino?*
- *Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a formação do professor na escola básica?*

Buscamos referenciais teóricos que pudessem clarear a relação entre saber científico, saber a ensinar e saber ensinado, e, conseqüentemente, as relações entre as disciplinas científicas, as acadêmicas e as escolares, pois a nossa preocupação é com a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, reconhecendo que esta guarda relações com o saber científico referente ao campo. Assim, fundamentamo-nos na teoria da transposição didática de Chevallard para considerar que os saberes a ensinar não se confundem com os saberes científicos nem são meras adaptações didáticas destes. São, sim, criações didáticas que têm objetivos próprios e espaços de significações diferentes, frutos de processos de descontextualizaçao, de despersonalização e de desincretização, o que lhes garante um estatuto epistemológico próprio.

Ainda com base em Perrenoud (2000) e Lopes e Macedo (2002), concebemos, neste estudo, as disciplinas acadêmicas universitárias, como instituições sociais, frutos de uma negociação, e não, apenas, recortes de um campo científico transposto para o ensino, referindo-se, assim, a um campo complexo de saberes e de práticas e com uma legitimidade própria. Assim, são consideradas como um conjunto de: conteúdos, frutos de uma transposição didática; práticas, finalidades, elementos pedagógicos e de outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizados de modo a manter uma unidade científica e didática.

Como a disciplina que estamos tomando como objeto de estudo insere-se num currículo de formação de professores, adotamos o modelo de Shulman para tratar os saberes dos professores: *saber do conteúdo específico, saber pedagógico do conteúdo* e *saber curricular.* Preocupamo-nos em observar, particularmente, a segunda categoria, pois entendemos que no processo de formação de professores o pedagógico não pode se separar do conteúdo, assim como teoria não deve se dissociar da prática, em especial da prática docente na escola básica.

Para buscar responder as questões levantadas, numa abordagem qualitativa, utilizamos, como estratégias metodológicas, a pesquisa documental às propostas curriculares dos cursos de licenciatura de matemática de doze universidades brasileiras, tendo como foco os conteúdos de Teoria dos Números; a pesquisa a dez livros didáticos indicados nas propostas curriculares, divididos em dois grupos para a análise; e, ainda, a entrevista semi-estruturada com sete professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática. Para a análise dos dados, utilizamos a *análise de conteúdo,* conforme caracterizada por Lüdke & André (1986), Laville & Dionne (1999) e Bardin (1977).

Apresentaremos, em seguida, de forma concisa, os resultados, em função das questões levantadas, uma vez que, ao final dos capítulos 4, 5, 6 e 7, fomos expondo as conclusões que a análise dos dados nos permitia formular, apresentando-as de um modo mais minucioso. Como já abordamos anteriormente, a busca de compreensão não é neutra, traz marcas do subjetivo, daí a necessidade da relação dialógica entre o compreender e a busca da explicação que buscamos nos dados e nos referenciais teóricos, procurando olhar o objeto de estudo em suas múltiplas relações e significados.

2. Sintetizando as respostas às questões

Qual Teoria dos Números tem sido ensinada, no Brasil, atualmente?

A análise das propostas curriculares de disciplinas que contêm tópicos de Teoria dos Números, a análise dos livros didáticos e algumas falas dos entrevistados nos permitem concluir que a concepção de Teoria dos Números, subjacente, é, com algumas exceções, *formalista,* isto é, os conhecimentos matemáticos são construídos de forma lógica dedutiva, a partir de alguns conceitos primitivos e de algumas proposições consideradas verdadeiras (axiomas). Conseqüentemente a abordagem dos conteúdos é também axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, o que nos permite inferir, com base nos objetivos e nos conteúdos propostos e nos livros didáticos, que são notas de aulas, que o ensino desta disciplina pode ser enquadrado, de acordo com Fiorentini (1995), na *tendência formalista clássica,* em que a ênfase é colocada na forma e não no significado dos conteúdos tratados. Deste modo, o ensino tende a ser expositivo, livresco, centrado no professor, sendo a aprendizagem resultante da repetição de inúmeros exercícios, no caso demonstrações de proposições que, já se sabe, são verdadeiras. A significação histórico-cultural, a investigação matemática, o conjecturar ficam relegados a segundo plano ou não aparecem.

Assim, podemos concluir que a Teoria dos Números tratada na maioria das universidades pesquisadas não tem a preocupação com a formação do professor da escola básica, apesar de os projetos pedagógicos dos cursos apresentarem claramente que o objetivo da licenciatura é a formação do professor para esse nível, apresentando, inclusive, listas de competências a serem atingidas. Os conteúdos de Teoria dos Números são tratados em disciplinas com denominações diversificadas, o que, no nosso modo de ver, revela concepções de matemática e de ensino e uma falta de clareza do papel desta área na formação do professor, além de definir ênfases que serão dadas no tratamento dos conteúdos. Revela, ainda, que os aspectos próprios dos números inteiros que interessariam ao futuro professor, pois estão presentes na escola básica, não são enfatizados ou não são tratados com a finalidade de preparar alguém para ensiná-los. Deste modo, percebe-se que não há uma ponte entre o conhecimento "novo" trabalhado na disciplina acadêmica e o conhecimento "antigo", trabalhado na escola básica, e, como conseqüência, o distanciamento entre a formação e a prática docente.

Os objetivos para as disciplinas que contêm elementos de Teoria dos Números nem sempre são apresentados e, quando o são, visam ao ensino da matemática pela matemática, enfatizando a familiaridade com o método axiomático. Em apenas três instituições, os objetivos são mais amplos, incluindo comportamentos, valores, competências e habilidades a serem desenvolvidas, visando à formação do professor.

Quanto aos conteúdos, há um núcleo que é comum aos currículos pesquisados, embora haja uma diversidade de tópicos, com programas geralmente extensos, o que pode dificultar atividades que exijam uma participação maior do aluno, como protagonista do processo de ensino, o que, certamente, demanda um tempo maior. Em todos os programas e livros didáticos estão presentes o estudo da divisibilidade, o algoritmo da divisão euclidiana, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, os números primos, o teorema fundamental da aritmética, congruências e equações diofantinas lineares. Pelo que foi apresentado, podemos inferir que os números inteiros são considerados "dados", sendo as operações e propriedades tomadas como axiomas, o que distancia esse estudo das demandas colocadas por este tema na escola básica, conforme apontado por Moreira (2004).

A bibliografia indicada inclui obras que não estão sendo mais publicadas ou que têm edições esgotadas, além de muitos livros em língua estrangeira, principalmente em inglês. Podemos afirmar que não temos obras cuja abordagem tenha como objetivo a formação de professores, exceto uma das analisadas, o que confirma o apontado por um dos entrevistados, ao afirmar que, em nível mundial, não há uma preocupação em tornar a Teoria dos Números ensinável, isto é, falta um processo de transposição didática adequado e a incorporação de elementos pedagógicos do conteúdo, conforme proposto por Shulman.

Com relação, ainda, aos livros didáticos que são em sua maioria resultados de notas de aulas, há nesses uma forte predominância de tarefas do tipo demonstrar. Embora reconheçamos que a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, é *locus* propício para a demonstração e também para a prova, entendemos que esses constituem um momento do fazer matemático. Assim, outros tipos de atividades poderiam estar presentes, como a investigação matemática, o conjecturar, o generalizar, o testar a veracidade de uma proposição. Além disso, há que se considerar toda a discussão em torno da prova que vem sendo travada no âmbito da Educação Matemática, da qual já tratamos anteriormente.

Concluindo, podemos afirmar que as disciplinas que tratam de Teoria dos Números ensinadas na licenciatura em matemática no Brasil, atualmente, abordam os conteúdos e práticas na perspectiva da matemática acadêmica, carecendo de um trabalho de transposição didática que vise à formação do professor de matemática da escola básica e de um tratamento pedagógico do conteúdo que permita que o seu potencial na formação do professor possa ser explorado.

Como professores e pesquisadores em Teoria dos Números e em Educação Matemática concebem a Teoria dos Números e o seu ensino?

Todos os pesquisadores entrevistados concebem a Teoria dos Números como uma área que tem um papel central na matemática e que deveria ter um papel de maior destaque no ensino, pois tem um caráter de fundamentos, considerando que os números naturais, inicialmente, e depois os inteiros estão na base da construção do conhecimento matemático. Destacam que questões relacionadas aos números, resultantes da curiosidade humana e de necessidades de diferentes ordens (econômicas, sociais, culturais, de lazer, de explicação do mundo) foram e continuam sendo fonte de inspiração para o desenvolvimento da matemática.

Além disso, no ensino, a idéia de fundamentos remete, de um ponto de vista cognitivo, à concepção de que a construção de novas aprendizagens se faz ancorada em aprendizagens anteriores. Assim, o estudo dos números naturais nas séries iniciais e depois o dos inteiros permitem desenvolver elementos conceituais que servirão de base para outras aprendizagens.

Os pesquisadores entrevistados destacam, ainda, os aspectos históricos, culturais e estéticos da Teoria dos Números, os quais permitem colocar a matemática no contexto da civilização humana, pois a aritmética esteve sempre presente na história de cada povo, inserida nos seus modos de produção e de pensar. Ainda hoje, as experiências de quantificação de objetos e fenômenos continuam a fazer parte da vida prática das pessoas.

Outro aspecto enfatizado pelos pesquisadores é a possibilidade de que o estudo de temas ligados à Teoria dos Números promova o desenvolvimento de competências e habilidades, como a capacidade de demonstrar, de argumentar, de conjecturar, de generalizar, de investigar. Com relação às demonstrações formais, contudo, não há consenso, pois alguns dos entrevistados consideram a abordagem axiomática "engessante", enquanto outros a concebem como "o modo" de fazer matemática.

Alguns dos entrevistados lembram que o estudo dos números inteiros tem uma forte presença na educação básica de todas as nações, o que justifica a sua presença nos cursos de licenciatura, não como revisão ou forma de suprir possíveis falhas da escolaridade anterior, mas como oportunidade para aprofundar e ampliar os conceitos, como também de construir o conhecimento pedagógico do conteúdo. Essas considerações permitem inferir potencialidades para o estudo de assuntos ligados à Teoria dos Números na escola básica, como também justificar e estabelecer objetivos para a Teoria dos Números enquanto disciplina acadêmica, inserida no conjunto das disciplinas específicas de formação do professor de matemática da escola básica.

Com relação à Teoria dos Números, enquanto saber científico, os pesquisadores a concebem como o estudo dos números inteiros[58] e de suas propriedades, utilizando ferramentas de outros campos da matemática para resolver os seus problemas, como da Álgebra, da Análise e da Geometria.

Concordam que a Teoria dos Números tem intersecção com a álgebra, mas não se trata de inclusão, pois cada um destes campos tem problemas próprios. Alguns chegam a compreender a Teoria Elementar dos Números ou o anel dos inteiros como a intersecção entre eles. A álgebra é vista como Álgebra Moderna, ou seja, o estudo das estruturas algébricas, sendo o conjunto dos inteiros o exemplo natural de algumas dessas estruturas. Essa concepção explica o porquê de muitos currículos incluírem o estudo dos inteiros em disciplinas que têm o nome álgebra.

[58] É importante lembrar que estão incluídos não apenas os inteiros relativos, mas também as generalizações destes, como os inteiros gaussianos (definidos como números complexos da forma $a + bi$ em que a e b são números inteiros e $i^2 = -1$) e os números p-ádicos.. Sobre os números p-ádicos, ver SHOKRANIAN; SOARES; GODINHO, 1999, capítulo 5.

Com relação à aritmética e Teoria dos Números, as concepções não são muito claras. Para alguns, a aritmética parece estar ligada ao que é elementar, como o "fazer contas", ao operar com números, às suas representações e aos problemas de contagem, enquanto para outros a Teoria dos Números é Aritmética Superior.

No que diz respeito ao ensino da aritmética e da álgebra na escola básica, alguns pesquisadores destacam a importância de não separar a educação aritmética da educação algébrica, compreendendo-as como imbricadas, de um modo mais amplo, que não se reduz à linguagem, mas apontando para o que poderíamos considerar uma relação dialética entre pensamento e linguagem.

Podem ser considerados como temas centrais em Teoria dos Números, na visão dos entrevistados, a questão da divisibilidade e os problemas relacionados aos números primos. Quanto ao seu ensino, três tipos de abordagens emergem dos discursos dos entrevistados: a abordagem axiomática, defendida como forma de fazer matemática, principalmente pelos pesquisadores em matemática ; a abordagem investigativa, apresentada como mais próxima do fazer matemático visto como processo; e as abordagens histórica e epistemológica, consideradas importantes na formação do professor, defendidas pelos educadores matemáticos.

Concluindo, podemos identificar, no discurso dos entrevistados, concepções diferentes de Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, resultantes de concepções diversas da matemática e de seu ensino. Para alguns, a definição da disciplina acadêmica se dá em função de valores que as pessoas envolvidas com matemática são capazes de enxergar, independentes dos objetivos do curso em que a disciplina está inserida e da consideração de que no sistema didático há um elemento importante, que é o aprendiz. Outros foram enfáticos em defender abordagens diversas, como a investigativa, a histórica e a epistemológica, certamente pensando no conhecimento pedagógico do conteúdo. São diferentes olhares que indicam que as disciplinas devam ser fruto da negociação na noosfera e nos sistemas de ensino, para que essas visões possam se complementar, estabelecendo um diálogo de modo a aproximar a formação da prática docente.

Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a formação do professor na escola básica?

Sem a pretensão de prescrição do que deve ser ou do que é necessário, destacamos alguns aspectos que podem contribuir para a concepção de uma disciplina que trate de Teoria dos Números, visando à formação do professor da escola básica, sendo que, no capítulo 7, exploramos de modo mais minucioso potencialidades, dilemas e tensões relacionadas a esta questão.

Inicialmente, é importante considerar que uma disciplina da licenciatura não deve ser pensada, olhando-se apenas para o saber sábio que lhe dá origem, mas também para as demandas que são apresentadas para o professor na escola básica para ensinar os temas ligados ao campo. A área da Educação Matemática já possui uma produção considerável, abordando diferentes aspectos da construção dos conhecimentos matemáticos pelos alunos, que devem ser incorporados tanto nas discussões do saber a ensinar, no campo da noosfera, quanto nos sistemas de ensino e no espaço do sistema didático que envolve as relações entre aluno-professor-saber.

Outro aspecto importante apontado por Campbell e Zazkis, também revelado pelos dados coletados e pela análise feita, é que a Teoria dos Números deva ter um espaço próprio nos currículos da licenciatura, para que os aspectos caracterizadores dos números inteiros, presentes nos currículos da escola básica, possam ser devidamente tratados tanto como conhecimento do conteúdo, como conhecimento pedagógico do conteúdo e como conhecimento curricular.

A definição desta disciplina deve considerar, tanto na definição de seus objetivos, como na seleção de conteúdos, como nas abordagens a serem feitas, que:

1) **tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica:** os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de matemática da escola básica, e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor;

2) **a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar,** tais como: a idéia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros;

3) **a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova:** porque, ao tratar dos inteiros, permite que os estudantes trabalhem com algo que lhes é familiar; porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova no ensino não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática, perceber também que a prova tem diferentes funções não só de validar e convencer, mas principalmente de explicar;

4) **a Teoria dos Números é um campo propício para a investigação matemática:** porque a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, envolvendo os inteiros, as questões envolvendo a divisibilidade e os números primos sempre estiveram presentes na investigação matemática e podem ser explorados no ensino, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, de generalizar, testar e validar as conjecturas.

Sobre os conteúdos a serem abordados numa disciplina que estamos denominando Teoria Elementar dos Números, olhando para os PCN da escola básica, considerando a análise dos dados e em especial a avaliação dos entrevistados do que lhes foi apresentado na terceira questão da entrevista, podemos sugerir um núcleo, constituído dos seguintes temas:

Tópicos essenciais de Teoria Elementar dos Números

Números Inteiros*: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais; operações, algoritmos e propriedades; definição por recorrência (potências em N, seqüências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita.* ***Divisibilidade****: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética.* ***Introdução à congruência módulo m:*** *definição, propriedades, algumas aplicações.* ***Equações diofantinas lineares****.*

Retomando a questão geradora, podemos afirmar, dentro dos limites deste trabalho, que a Teoria dos Números não tem um papel de destaque na formação, e os saberes que compõem as disciplinas em que assuntos de Teoria dos Números são tratados, são orientadas pelos valores e práticas da matemática científica (linguagem formal, rigor, ênfase no produto, etc), com o objetivo de ensinar matemática pela matemática. Levantamos possibilidades que podem re-significar esses saberes, tendo como fonte o saber científico, mas também os saberes escolares e as demandas que o seu ensino apresenta ao professor. Essas possibilidades passam pela concepção de que o conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, a teoria e a prática, devam estar presentes na constituição das disciplinas específicas da licenciatura em matemática.

Sabemos que essa proposta esbarra em dificuldades e tensões, algumas já apontadas anteriormente. Não nos referimos, ainda, a uma que talvez seja uma das mais sérias, que é a formação do formador. O formador não pode ignorar, ao trabalhar no curso de licenciatura, o conhecimento pedagógico do conteúdo, as questões históricas e epistemológicas ligadas aos conceitos com os quais trabalha. Pensamos que esse é um dos maiores desafios que se colocam para a condução dos cursos de licenciatura em matemática, hoje.

Avançamos no que diz respeito à identidade dos cursos, enquanto projetos. Entretanto, precisamos continuar a discutir como essas propostas podem chegar à sala de aula, principalmente nas disciplinas específicas de matemática. Acreditamos que o diálogo científico, entre os diversos atores envolvidos no processo de formação, com base na literatura existente e nas pesquisas realizadas, no âmbito de cada Instituição e no âmbito da noosfera, é o caminho para que possamos ter uma formação inicial ou continuada mais próxima da prática docente na escola básica. Para isso, é importante que as partes estejam disponíveis para ouvir e falar.

Nesse sentido é que esperamos que nosso trabalho possa contribuir, como fonte de novas discussões e de novas pesquisas, sugerindo, inclusive, que outras disciplinas matemáticas que compõem os currículos da licenciatura sejam também pesquisadas, para que o papel desse conjunto de disciplinas seja mais bem compreendido. Pensamos que as conclusões deste trabalho possam ser enriquecidas com pesquisas, que acompanhem o trabalho desenvolvido em cursos de Teoria dos Números, e com os professores da escola básica que vivenciaram esses cursos, buscando detectar como eles vêem sua formação com relação ao estudo dos números inteiros, dificuldades encontradas com as abordagens, principalmente no que se refere à abordagem axiomática, relações com a prática docente, etc.

Conforme indicado, é importante destacar que faltam produções, materiais didáticos para abordagens diversificadas, principalmente livros, para que a transposição didática dos conteúdos permita que eles se tornem ensináveis de forma significativa para a formação do professor.

3. Reflexões finais

Neste trabalho, procuramos compreender a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, voltado para a formação inicial do professor da escola básica, procurando levantar possibilidades para re-significar essa área nos currículos da licenciatura em matemática. Acreditamos que conseguimos atingir esses objetivos, lembrando, mais uma vez, que a compreensão é um modo fundamental de conhecimento que busca captar os significados de uma situação ou fenômeno, movendo-se na esfera do concreto, da intuição global, do subjetivo, enquanto a explicação move-se na esfera do lógico, do analítico, do objetivo. A compreensão inclui, portanto, subjetividade, sentimentos, pensamentos, finalidades e relação com os valores, por isso *comporta limites e riscos de erro, inclusive o risco da incompreensão, pois uma compreensão só pode compreender o que compreende...* (MORIN, 1999, p.158). Assim, procuramos, conforme proposto por Morin, associar o nosso compreender com explicações, advindas dos referenciais e teóricos e dos dados.

Para nós, este trabalho representa um marco importante em nosso desenvolvimento profissional, sempre inconcluso, por isso somos impelidos a continuar buscando, quer como pesquisadora quer como docente. Pudemos vislumbrar que o estudo dos inteiros tem um papel relevante na formação do professor, percebendo aspectos sobre os quais não havíamos pensado ainda. Gostaríamos de terminar, citando Shulman: *Aquele que pode, faz. Aquele que compreende, ensina.* (SHULMAN, 1986, p. 14)

BIBLIOGRAFIA

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia.** Tradução de A. Bosi. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

ADAMS, W.W. & GOLDSTEIN, L.. Introdução: O que é Teoria dos Números. In: **Introduction to Number Theory** Trad.: Sílvia Machado. New Jersey, Ed. Prentice- Hall, 1976.

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique. In: **Recherches en didactique des mathématiques.** v.8, n.3, p. 267-312.

ASTOLFI, J.P.; DEVELAY, M.; **A didática das ciências.** 2ed. Tradução de Magda S. S. Fonseca. Campinas, SP: Papirus, 1991.

BALACHEFF, N. Preuve et demonstration en mathematicques au college. In: **Recherches en didatique des mathématiques.** Grenoble, La Pensée Sauvage, 1982.

______________. Processus de preuves et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics.** 18(2) 147-176; 1987.

BARALLOBRES, G. La validation intellectualle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. In: **Recherches en didactique des mathématiques.** v.24, Grenoble: La Pensée Sauvage, 2004, p.285-349.

BARBIN, E. Quelles conceptions epistemologiques de la demonstration pour quels apprentissages? In: BARBIN, E.; DOUADY, R. **Enseignement des mathématiques: des repères entre savoirs, programmes et pratiques.** Topiques, Pont-A-Mousson, 1996.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa/Portugal: Edições 70 LDA, 1977.

BARKAI, R.; TSAMIR, P.; TIROSH, D.; DREYFUS, T. Proving or refuting arithmetic claims: the case of elementary school teachers. **PME26,** 2002, p. 2-57. http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/02Automne/02Automne.html. Acesso em 16/09/2006.

BEDNARZ, N.; JANVIER, B. Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 115-136.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BELFORT, E. Formação de professores de matemática: a aritmética como ferramenta para a construção do saber pedagógico disciplinar. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos, SP. Anais. CD-ROM.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L.C. Em busca de um saber pedagógico-disciplinar para professores: uma experiência em álgebra e números. In: XI CIEM, Blumenau, SC, 2003. Anais. CD-ROM.

BOAVIDA, A. M. R. A argumentação na aula de matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In: AMRB: XVI- SIEM, Évora, 2005. http://fordis.ese.jps.pt/docs/siem/texto57.doc. Acesso em 15/09/2006.

BOERO, P.; CHIAPINI, G; GARUTTI R.; SIBILLA. A. Towards statements and proofs in elementary arithmetic: an exploratory study about the role of teachers and the behaviour of students. **PME XIX.** Recife, PE, 1992. http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Boero/Boero95.html. Acesso em 06/08/2006

BOUVIA, A. et al**. Dictionnaire des mathèmatiques**. Universitaires de France. Paris, 1979

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.** Brasília: MEC, 2001.

____________________________. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Brasília: MEC, 2003.

___________________________ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: (**5ª a 8ª séries). Brasília: MEC, 1998.

___________________________ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

___________________________ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BROWN, A.; KAREN, T.; TOLIAS, G. Conceptions of divisibility: success and understanding. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

CAMPBELL, S. R., What is number theory? In: PROCEEDINGS OF THE 26TH ANNUAL CONFERENCE. PME 26. Cockburn, A.D. e Nardi, E., 2002 p.208-212.

CAMPBELL, S.R. Number Theory and Transition from Arithmetic to Álgebra: connecting history and psychology. In: PROCEEDINGS OF THE 12th ICMI STUDY CONFERENCE _ The future of the teaching and learning of algebra. Australia, 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CASTELA, C. A. **Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série.** São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação,** 2, 1990.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 19, n.2, p.p 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHRONAKI, A. – Des façons de voir les programmes d'études de mathématiques e t les programmes de formation des maîtres de mathématiques: À la recherche d'un discours? **Education et francophonie –** Revue Scientifique Virtuelle – vol. XXVIII, n.2, automne-hiver, 2000. Disponível em: http://www.acef.ca/c/revue/revuehtml/28-2/07-Chronaki.html. Acesso em 27/02/2006

COELHO, S. P.; MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M.C. S. A. Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos, SP. Anais. CD-ROM.

COUTINHO, S. C. **Números Inteiros e Criptografia RSA.** 2.ed., Rio de Janeiro, IMPA-SBM, 2000.

CURY, H. N. As idéias de Lakatos e Vygotsky em uma proposta de mudança para as licenciaturas em matemática. In: **Educação Brasileira,** Brasília, v.19, n.38, p.121-137, jan./jul. 1997.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática.** São Paulo: Ática, 1990.

DAHAN-DALMEDICO A.; PEIFFER, J., **Une histoire des mathématiques: routes et dédales.** Éditions du Seuil, 1987.

DAVIS, J. P.; HERSH, R. **Matemática e realidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1986.

DICKSON, L.E., **Introduction to the Theory of Numbers**. 6 ed. London: Cambridge University Press, 1946.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Bolema – Boletim de Educação Matemática.** n.18, 2002, p. 55-67.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

DOUEK, N. Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In: First CERME international conference, 1998. http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Douek/Douek98.html. Acesso em 16/09/2006.

DRUCK, S. O drama do ensino da matemática. **Folha de São Paulo.** Caderno Sinapse. 25/03/2003, p. 32.

DUVAL, R. Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration em mathématiques. In: **Recherches en didactique des mathématiques.** v.20, n.2, p. 135-170; 1999.

EDWARDS, L. D.; ZAZKIS, R. What do students do with conjectures? Preservice teachers' generalizations on a number theory task. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.**). Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

FERRARI, P. L. Understanding elementary number theory at the undergraduate level: a semiotic approach. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores)

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké.** n.1, mar (1995). Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. In: **Educação em Revista – Dossiê: Educação Matemática.** Belo Horizonte, UFMG, n.36, p. 137-160, 2002.

FIORENTINI, D.; PEREIRA, E.M.A. (orgs.) **Cartografias do trabalho docente.** Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar...a Educação Algébrica Elementar. **Pró-Posições**, v.4, n.1[10], p.78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; SOUZA Jr, A. J.; MELO, G.F.A. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: **Cartografias do trabalho docente.** Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998.

FREITAS, J. L. M. **L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des eleves de collége et lycée.** Thèse. Université Montpellier II, France, 1993.

GARNICA, A.V.M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. **Bolema.** Rio Claro, S.P, UNESP – IGCE -Departamento de matemática, n.18, p. 91-99, 2002.

_______________ **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Rio Claro: IGCE-UNESP.

GÉRARD, F-M; ROGIERS, X,; **Conceber e avaliar manuais escolares.** Porto Editora.

GONÇALVES, A.; **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. In: **Educational studies in mathematics.** v. 44. Kluwer Academic Publisher, 2001, p.5-23.

HARDY, G. H. e WRIGHT, E. M. **An Introduction to the Theory of Numbers**. 3rd ed., Oxford University Press, London, 1954.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, J.L. (ed.). **On the teaching of linear algebra.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

HAREL, G; SOWDER, L. Students' proof schemes: results from exploratory studies. In: **CBMS Issues in Mathematics Education.** v. 7, 1998. http://math.ucsd.edu/~harel. Acesso em 5/06/2006.

HAREL, G. PUPA'S two complementary products: taxonomy of students' existing proof schemes and *DNR* – based instruction. **La letter de la Preuve,** automne 2001. http:// www.lettredelapreuve.it/Resumes/Harel/Harel. Acesso em 5/06/06.

HAREL, G. The development of mathematical induction as a proof. scheme: a model for DNR- based instruction. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

HASNI, A. Penser les disciplines de formation à l'enseignement primaire c'est d'abord penser les disciplines scolaires. In: **Reforme curriculaire et statut des disciplines: quels impacts sur la formation professionnelle l'enseignement?** Volume XXVIII, n.2, automne-hiver 2000. *http://72.14.207.104/search?q=cache:8_gjUNiOsC4J: acelf.ca/c/revue/XXVIII-2articles/…Acesso em 7/2/2006.*

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proofs conceptions in algebra. In: **Journal for research in mathematics education.** v.31, n.4, 2000, p. 396-428.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. v.1. Rio de Janeiro, IMPA, 1993

__________. Elementos de aritmética. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

HORGAN, J. La muerte de la demonstracion. In: **Investigación y ciencia.** n.207, 1993, p.70-77.

HOUDEBINE, J. Demontrer ou ne pas demontrer, voila la question. In: **Règere – IREM,** n.1. octobre, 1990, p.5-27.

HOWARD, E. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 3.ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.
In: **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada.** Porto Alegre, 2001, p.49-87.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A Construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas.** Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artes Médicas; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LEE, L. An initiation into algebric culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra:** perspectives for research and teaching. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

LEVEQUE, W.J., **Teoria elemental de los Números**. Tradução de Carlos Enrique Cervantes de Gortari. México, 1968.

________________. Elementary Theory of Numbers. Canada: General Publishing Company, Ltd., 30, 1990.

LINS, R. Os problemas da educação matemática. **Folha de São Paulo.** Caderno Sinapse. 29/04/2003, p.32.

LINS, R.C.; GIMENES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 4.ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOPES, A.R.C. Conhecimento escolar em química – processo de mediação didática. In: **Química Nova.** 20(5), 1997.

___________. Organização do conhecimento escolar: analisando a disciplinaridade e a integração. In: **Linguagens, espaços e tempos no ensinar e aprender. Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (ENDIPE);** Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

LOPES, A.R.C.; MACEDO, E. A estabilidade do currículo disciplinar: o caso das ciências. In: **Disciplinas e integração curricular: histórias e políticas.** Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

LÜDKE, M. Pesquisa: conceitos, políticas e práticas. In: GERALDI, C.M.G.; FIORENTINI, D; PEREIRA, E. M. (Orgs.) **Cartografias do trabalho docente.** Campinas, SP: Mercado de Letras, ALB, 1988.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, J. N. **Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemátic***a*. São Paulo: Cortez Autores Associados, 1987.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M.C.; COELHO, S. P. Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental. In: Actas do V CIBEM. Porto, julho de 2005, v.1, p. 1-12.

MALO, A. Savoirs de formation et savoir d'expérience: um processus de transforamtion. **Education et francophonie –** Revue Scientifique Virtuelle – vol. XXVIII, n.2, automne-hiver, 2000. Disponível em: http://www.acef.ca/c/revue/revuehtml/28-2/11-Malo.html. Acesso em 27/02/2006.

MARANDINO, M. Transposição ou recontextualização? Sobre a produção de saberes na educação em museus de ciência – In: **Revista Brasileira de Educação.** n.26, mai/jun/jul/ago 2004, p. 95-108.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. Projeto: o que se entende por álgebra? In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife- PE. Anais. CD-ROM.

MARIOTTI, M. A. Proof and proving in algebra. In: PROCEEDINGS OF THE GREEK ASS. FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (GARME). Athens, dec. 2005, p. 9-11. http://lettredelapreuve.it/Newsletter/06Hiver/Mariotti-Garme.pdf. Acesso em 12/09/2006.

MARJANOVIC, M. M. e KADJEVICH, D. M. Linking arithmetic to álgebra. In: PROCEEDINGS OF THE 12th ICMI STUDY CONFERENCE – The future of the teaching and learning of algebra. Austrália, 2001, p. 425-437.

MARTIN, W. G.; HAREL, G. Proof frames of preservice elementary teachers. In: **Journal for Research In Mathematics Education,** 1989, v.20, n. 1, p. 41-51. http://math.ucsd.edu/~harel. Acesso em 5/06/2006.

MASON, J. What makes an example exemplary? Pedagogical & research issues in transition from numbers to number theory. **PME26,** 2002, p. I- 224-229.

__________Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra:** perspectives for research and teaching. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

MENOCHI, G. Aritmética nos inteiros de Gauss. **Coluna Matemática,** publicada em 27/10/2006. http://www.somatematica.com.br / coluna/gisele.php/. Acesso em 29/10/2006.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática.** 3.ed., São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

MIYAZAKI, M. Levels of proof in lower secondary school mathematics: as steps from an inductive proof to an algebraic demonstration. In: **Educational studies in mathematics.** v.41, n.1, January, 2000, p. 47-68.

MIZUKAMI, M.G.N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L.S. Shulman. **Revista Educação.** Edição: 2004. vol.29 – nº2.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica.** Tese (Doutorado em Educação). UFMG, Faculdade de Educação. Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? In: **Zetetiké,** v.13, n.23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

MORIN, E. **A cabeça bem feita: repensar a reforma, reformar o pensamento**. Tradução de Eloá Jacobina. 3 ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2001.

_________ . **O método 3: a consciência da consciência.** Tradução de Juremir Machado da Silva. 2.ed. Porto Alegre: Sulina, 1999.

_________. **Os sete saberes necessários à educação do futuro.** Tradução de Catarina Eleonora F. da Silva e Jeanne Sawaya. 2 ed. UNESCO, Ed.Cortez, 2000.

MUNAKATA, K.; **Investigações acerca dos livros escolares no Brasil: das ideias à materialidade.** VI CONGRESSO IBEROAMERICANO DE HISTORIA DE LA EDUCACIÓN LATINOAMERICANO. San Luis Potosi. CD-ROM

NASSER, L.; TINOCO, L. **A argumentação e provas no ensino de matemática**. Instituto de Matemática – Projeto Fundão, 2001

NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTGOMERY, H. L. *An introduction to the Theory of Numbers.* 5th ed. New York: John Wiley, 1991.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio.** São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

ORE, O. **Number theory and its history.** New York: Dover Publications, 1988.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIS, L. C.; FREITAS, L. M. Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental. **Bolema**, n.13, 1999.

PATERLINI, R. R. **O Ensino da Aritmética em cursos de licenciatura em matemática.** Disponível em: *http://www2.dm.ufscar.br/hp/h591/hp591001/hp591001.html* . Acesso em 27/03/2004.

PERRENOUD, P. Le role de la formation à l'enseignement dans la construction des disciplines scolaires. **Education et francophonie – Revue scientifique virtuelle.** Association

Canadiense d'éducation de langue française. vol. XXVIII, n. 2, automne-hiver 2000. Disponível em: http//www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/28-2/05-Perrenoud.html. Acesso em 27/02/2006.

PIETROPAOLO, R.C.; **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005.

PIRES, C. C., Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referências as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. In: **Educação Matemática em Revista**, v.11A, ano 9, edição especial, p.44 – 56, 2002.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat** (CD-ROM, p. 25-39). Lisboa: APM, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RADFORD, L. Some reflections on teaching álgebra through generalization. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to algebra:** perspectives for research and teaching. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

RAMA, A.J. **Números inteiros nos ensinos fundamental e médio.** São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

ROWLAND, T. Generic proofs in number theory. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

ROWLAND, T. Proofs in number theory: history and heresy. In: PROCEEDINGS OF PME 26, 2002, p. 230-235.

SELDEN, J.; SELDEN, A. Reflections on mathematics education research questions in elementary number theory. In: CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. **Teoria dos Números.** 2.ed., Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

SHOKRANIAN, S. **Números Notáveis.** Brasília, Editora Universidade de Brasília, 2002.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowlege growth in teaching. In: **Educational Research.** Frebruary 1986.

SIDKI, S. Introdução à teoria dos números. 10º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA. Poços de Caldas, jul. de 1975. IMPA.

SILVA, J. S. Demonstração matemática da perspective da lógica matemática. **Bolema.** Rio Claro, UNESP-IGCE- Departamento de matemática, n.18, p. 68-78, 2002.

SINCLAIR, N. For beauty of Number Theory. In: PROCEEDINGS OF PME 26, 2002, p. 218-223.

SINCLAIR, N.; ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Number worlds: visual and experimental acess to elementary number theory concepts. *http//www.math.msu.edu/~nathsinc/papers/SZL_ numberworlds_ IJCML.pdf* Acesso em: 26 de junho de 2005.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat: a história que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos.** Tradução de Jorge Luiz Calife. 11. ed. Rio de Janeiro: Record, 2005.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em revista.** n.11ª, p.17-28, 2002.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 4 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

THURSTON, W. P. On Prof. and progress in mathematics. In: **For the learning of mathematics.** n.15. Vancouver, Canada, FLM Publishing Association, 1995, p.29-37.

VALENTE, W. R. (Org.) **O nascimento da matemática do ginásio.** São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

VALENTE, W. R. Livros didáticos como fontes para escrita da história da matemática escolar no Brasil. V CONGRESSO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES. Ouro Preto, 2001. (material impresso)

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. R. Making a case for number theory. In: **PME26,** 2002, I-p.206-207.

WARUSFEL, A., **Dictionnaire raisonné de mathèmatiques**. Paris: Editions du Seuil, 1966.

WEBER, K. Students' difficulties with proof. In: **MAA Online – The Mathematical Association of America,** june 23, 2003. http://www.maa.org/t_and_1/sampler/rs_8.html. Acesso em 12/09/2006.

WHEELER, D. Aspects of mathematical proof. **Interchange,** Toronto: OISE, Press, n. 21, p. 1-5, 1990.

ANEXO

ANEXO 1
ANÁLISE A PRIORI

A análise *a priori* leva em conta três aspectos que estamos buscando investigar, a partir dessas entrevistas com especialistas da área: o papel da Teoria dos Números na História da Matemática e nos currículos; a relação Teoria dos Números – Álgebra – Aritmética; a definição de um *saber escolar*, nos cursos de licenciatura em matemática, que será denominado Teoria Elementar dos Números.

O papel da Teoria dos Números na História da Matemática e nos currículos

Esperamos que o entrevistado, na primeira questão, situe a Teoria dos Números dentro da Matemática e de sua História, apresentando elementos que justifiquem a sua presença no ensino, citando, inclusive, conteúdos que possam ser tratados, quer na escola básica, quer nas licenciaturas. Caso não faça referência aos conteúdos, poderá ser acrescentado: **O que você considera elementar em Teoria dos Números, ou melhor, quais conteúdos de Teoria dos Números poderiam ser tratados nos currículos da escola básica? Esses conteúdos deveriam integrar o curso de licenciatura em matemática?**

Se o entrevistado interpretar a Teoria dos Números como um estudo avançado, e que, realmente, não deva constar dos currículos de matemática da escola básica, poderá ser acrescentado: **Os mesmos pesquisadores, Campbell e Zazkis, afirmam que a teoria dos números promove habilidades de raciocínio matemático nos graus secundários[59], particularmente com relação à prova matemática. Como você avalia essa possibilidade?**

O entrevistado pode concordar que a Teoria dos Números teve importância no desenvolvimento da matemática, mas que hoje tem aplicações em áreas mais específicas, como a criptografia, e que não a julga assunto importante para o ensino na escola básica. Nesse caso, poderá ser acrescentado: **Quais são os conceitos básicos (pré-requisitos) e habilidades necessárias, para que tópicos relacionados a esses conteúdos sejam desenvolvidos?**

[59] Correspondente ao final do ensino fundamental e ao ensino médio

Há a possibilidade de o entrevistado dizer que os conteúdos elementares, envolvendo números, fazem parte da aritmética. Insistiremos, questionando se estes não devem fazer parte da formação do professor.

Teoria dos Números, Álgebra e Aritmética

Considerando que não há consenso na literatura sobre as inter-relações entre esses campos, mesmo porque existem diferentes visões e leituras a respeito deles, no ensino, nos diferentes níveis, essa situação não é diferente. Há os que vêem esses campos de forma fragmentada, como blocos estanques nos currículos, e outros, pesquisando formas de melhor compreender, inclusive, a "passagem" entre Aritmética e Álgebra.

Como os entrevistados são ligados à área da Teoria dos Números ou da Educação Matemática, ligados de alguma forma ao ensino da álgebra, a segunda questão deverá instigá-los a pensar sobre o que é próprio do campo. Espero, ainda, que façam interligações entre as três áreas - Aritmética, Álgebra e Teoria dos Números -, para que tenhamos subsídios para situar melhor a Teoria dos Números no currículo da licenciatura.

Caso não abordem a questão das interfaces e particularidades entre esses campos, insistiremos com as questões: **Teoria dos Números é Álgebra? Aritmética é Teoria dos Números? Ou ainda: Por que os conteúdos de Teoria dos Números estão sob a rubrica de Álgebra?**

Caso respondam, sem considerar que o foco é a Teoria dos Números na formação de professores, acrescentaremos que há, hoje, uma preocupação, na área de pesquisa educacional, com o saber do professor. Pesquisas apontam que um conhecimento sólido e bem fundamentado dos conteúdos que o professor deve ensinar é primordial para a sua pratica didática. **Com esse pressuposto, como os campos citados devem se relacionar num curso de licenciatura?**

Pensando a disciplina Teoria Elementar dos Números

Na terceira questão, apresentamos uma relação de conteúdos de um componente curricular que estamos denominando *Teoria Elementar dos Números*, a fim de instigar os pesquisadores a pensar sobre essa disciplina na licenciatura.

Buscamos ouvir uma parte da *noosfera,* os especialistas da área, educadores matemáticos ou não, para avaliar o que estou chamando de Teoria Elementar dos Números, definida a partir dos currículos da licenciatura em matemática pesquisados, dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e do que apontam pesquisadores em educação matemática, como Campbell e Zazkis.

Pensamos que o foco do trabalho com esses conteúdos deva ser colocado na divisibilidade, pois é o que caracteriza o estudo do conjunto dos números inteiros, distinguindo-o do estudo dos demais conjuntos numéricos. Este tema é aquele que o professor deverá tratar no ensino básico, conforme previsto nos PCN e abordado nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Apesar disso, esse assunto é desenvolvido apenas como introdutório em vários currículos da Licenciatura em Matemática e livros-texto adotados, conforme pesquisa anterior.

Estão sendo apresentados elementos para desencadear a reflexão do entrevistado para pensar um *saber escolar* que deverá constar dos currículos da licenciatura em matemática, tendo presente a preocupação de minimizar os hiatos entre a formação e a prática profissional. Insistiremos em que o entrevistado pense sobre o apresentado, acrescentando ou retirando tópicos aos conteúdos, procurando justificar as suas sugestões. Esperamos que sugiram inclusive elementos que possam indicar objetivos e abordagens para a disciplina. Assim, acrescentaremos questões, tais como: **Você acha que, com esses temas, podem-se reduzir as lacunas que existem entre a formação e a prática?** Ou, ainda: **Você acha que a Teoria dos Números poderia contribuir na formação do professor, desenvolvendo a habilidade de pensar matematicamente?**

ANEXO 2

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS

PROF. AVELAR -

Primeira questão:
P - Campbell e Zazkis, pesquisadores em educação matemática, afirmaram *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*
Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.

No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina. **Como você vê esta questão? Concorda com os pesquisadores?**

E - Bem, eu concordo com eles a TN tem papel central na história da matemática e de alguma maneira é surpreendente que ela não ocupe lugar mais destacado nos currículos, em particular os de licenciatura. Eu já me perguntei varias vezes qual seria a razão disso. Eu não sei se isso é devido a uma certa prioridade que as pessoas responsáveis pelos currículos dão às estruturas algébricas ou se, é ainda, um efeito retardado da matemática moderna que se reverteu sobre o currículo universitário também. O que eu sei é que as pessoas defendem em geral, com tranqüilidade, mais fora da comunidade de algebristas do que dentro, que não é possível que a gente não veja: grupos, anéis e corpos. No entanto, eu sempre vi de uma outra perspectiva. Eu acredito que dar as estruturas algébricas, sem que os alunos tenham uma experiência rica sobre alguns exemplos concretos de estrutura, em particular sobre os números inteiros, com uma grande familiaridade, não vale a pena a gente estar explorando estruturas algébricas.
P – O que você considera elementar em Teoria dos Números?
E – É isso mesmo que você quer perguntar? Ou que eu acho que é Teoria Elementar dos Números?
P – É. O que você considera Teoria Elementar dos Números.
E – Eu considero que Teoria Elementar dos Números é a parte da Teoria dos Números que trata dos resultados básicos sobre números inteiros. Então seriam todas as questões elementares e depois as axiomáticas de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, teorema fundamental da aritmética, essencialmente isso que eu considero como elementar e essencial em Teoria dos Números.
P – E nos currículos da escola básica, você acha que a TN deveria ter mais destaque?
E – Sim. Eu acho que eles deveriam ter mais destaque, talvez não como conteúdos específicos, porque fica um pouco difícil você abordar estes conteúdos específicos, fora daqueles modos tradicionais, de máximo divisor comum, de mínimo múltiplo comum, números primos, etc. Se a isso estiver sendo dado um destaque razoável, eu acho que já vai estar sendo melhor do que está. Mas além disto, eu acho difícil existir ..... do ponto de vista pedagógico na Teoria Elementar dos Números que pode ser refletido para a educação básica justamente é o fato de existirem problemas que podem ser formulados de uma maneira muito

clara, porque são conceitos que, facilmente, as crianças podem dominar, sendo uma coisa que pode ser do dia-a-dia, são interessantes e que exigem, às vezes que a criança trabalhe com argumentos. Então a forma de você propiciar o exercício da argumentação já em faixas etária bem baixas. Então eu vejo que isso não é feito e na realidade as questões sobre números inteiros que podem ser resolvidas, com os conhecimentos que os alunos têm, acabam sendo marginalizadas e aparecem nas olimpíadas e em livros sobre problemas não convencionais, quando elas poderiam ser propagadas para todos.

Segunda questão
P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**.** **Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**
E – Eu vou começar respondendo pelos dois últimos elementos do trio aí, porque eu acho mais fácil. Eu vejo a Teoria dos Números como uma parte da Álgebra Moderna. Então ela simplesmente......... e eu não vejo essa relação como muito problemática, talvez eu possa explicar porque. Já entre aritmética e álgebra aí sim, eu acho que a relação já é mais problemática. Do meu ponto de vista, quando você..., a gente pode trabalhar isso .... de modo mais superficial, pensar quando se introduz variáveis, letras, etc, a gente está no campo da álgebra, mas eu vejo, quando a gente trata de questões de aritmética que a gente encontra um certo... como é que a gente poderia chamar isso....poderia chamar de uma certa visão que trabalha ou uma idéia de invariante, ou uma idéia de seqüência, problemas, então aí a gente está mais entrando no domínio da álgebra, que da aritmética propriamente dita. Então um pouquinho é essa a minha idéia.
P – E o fato de a Teoria dos Números não ter um lugar .... porque ela tem algumas especificidades, porque entre Teoria dos Números e Álgebra, você vê uma relação mais tranqüila ....
E – Sim, em termos de grandes temas da matemática. É isso.
P – O que você acha específico da Teoria dos Números? Porque muitas vezes os conteúdos de Teoria dos Números ficam diluídos nessas disciplinas denominadas Álgebra e acabam não tendo aquele destaque que o próprio campo tem . Então, o que seria específico de Teoria dos Números que caracterizasse esse campo? Como você já disse, ela tem intersecção com a álgebra.
E – Bom, eu vou tentar responder, me fixando no fato de que eu estou entendendo sobre o rótulo de teoria dos números, os números inteiros, porque se a gente for sair deste domínio, as coisas vão se complicando muito. Mas o que eu acho que é específico de Teoria dos Números é esse tipo de tratamento que é dado aos números inteiros, que aborda os inteiros como um conjunto, as operações, a noção de números primos, é uma coisa central e aqueles conceitos que eu já falei: máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, o teorema fundamental da aritmética e todas as idéias ligadas á teoria dos números inteiros. E quanto a outra maneira que você introduziu a pergunta, o que eu penso é assim o que aconteceu foi que a partir de um certo ponto as pessoas quiseram não ver essa idéia de que aqueles números poderiam ser uma forma para a álgebra superior, mas foram diminuindo o papel dela aí em nome de dar o destaque adequado às estruturas algébricas. Então acho que isso que você retrata, na realidade é o fim, é o pedaço de um percurso histórico que chegou nesse momento. Por exemplo, você vai ter universidade em que a Teoria dos Números está nos currículos de licenciatura, com destaque, como uma disciplina. Por exemplo, na USP, ela não é uma disciplina, mas ela é o conteúdo da disciplina na licenciatura.

Terceira questão

P - Nós estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a uma disciplina constituída dos seguintes conteúdos:

Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, maior divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.

Pensamos que o foco deva ser colocado no estudo da divisibilidade, pois esse é o tema central do que deve ser ensinado de Teoria dos Números na educação básica.

Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?

E – Essa proposta é a que deve ser colocada?

P – Estes temas. Na verdade a gente quer definir o que nós vamos chamar Teoria Elementar dos Números. Então pelo que eu percebi nos currículos e mesmo nos livros textos e olhando também para o que o professor vai trabalhar na escola básica, a gente elegeu esses temas. Então eu gostaria da sua avaliação desta proposta.

E – Então, eu não tenho esta vivência como você na análise desses elementos, mas eu concordo plenamente com você. Eu acho exatamente isso aí é que está sob o rótulo de Teoria Elementar dos Números. Quanto à proposta que possa ser colocada aos estudantes de licenciatura, estou plenamente de acordo. Aliás é o que eu faço no curso de mestrado profissional. Esses tópicos eu dou, eu considero essenciais, até o teorema fundamental da aritmética. O papel da Aritmética módulo *m,* congruência modulo *m*,..... tem um papel que está na notação dela e que eu acredito, pode ser tratado independentemente dessa notação, isto eu estou de acordo. O interesse da Aritmética módulo *m* é introduzir um tipo de .. um sistema, um conjunto em que você tem uma aritmética um pouco diferente da aritmética dos números inteiros, justamente para criar experiências dos alunos para depois introduzir a idéia de anel, de uma maneira mais geral. Então eu vejo que esse tema não é essencial. Teoremas de Fermat, Euler e Wilson, eu acho que tem um valor histórico importante. Mostram como a Teoria Elementar dos Números pode apresentar questões interessantes, envolvendo números primos, mas eu não consideraria essencial. Entre a aritmética módulo *m* e os teoremas de Euler, Fermat e Wilson, eu ficaria com os últimos, se eu tivesse tempo de acrescentar no meu curso e também equações diofantinas lineares. Estou totalmente de acordo com você.

P – Você acha que com estes temas, a gente poderia reduzir essas lacunas que existem entre a formação e aquilo que o professor vai trabalhar na escola básica?

E – Ah, eu acho que sim. Desta forma se poderia reduzir essas lacunas, pois uma das minhas conjecturas sobre o fato de que a Teoria dos Números, não a Teoria dos Números, mas questões envolvendo números inteiros, não tenham uma presença mais forte nos currículos da educação básica, ou seja, trabalhados na prática efetivamente, é que os professores não têm familiaridade para mexer com esse tipo de questão e eles..... de tal forma que se sintam seguros para trabalhar esses assuntos. E essas questões aparecem nas olimpíadas por alguma razão. Elas não são assim tão difíceis. Ás vezes, os alunos por não terem na cabeça estes temas de uma maneira preconcebida, eles são capazes de resolver os problemas e os professores ficam surpreendidos. São problemas que eles poderiam ter trabalhado com eles lá.

P – Os livros didáticos tratam de uma maneira muito superficial mesmo, sem explorar os aspectos de que você falou, as habilidades que poderiam ser desenvolvidas a partir destes temas: o argumentar, o conjeturar, isto realmente você não vê nos livros didáticos. E no ensino médio é uma ausência quase total.

E – Total.

P - Você não retoma esses temas para ampliar. Trabalha-se com esses temas na quinta série e não se retoma mais estes assuntos. Talvez se estivessem presentes, também no ensino médio, poder-se-ia aproveitar mais o potencial que eles tem.
E – Estou totalmente de acordo e acho que se a gente se preocupa com as condições objetivas de implementar isso, as coisas se darão.

PROF. BORGES

Primeira questão:
P - Campbell e Zazkis, pesquisadores em educação matemática, afirmaram *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*
Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.
No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina. **Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos curriculos**?
E - Claro que eu concordo que a TN tem um papel central na historia da matemática. Eu acho que a TN poderia ter um papel mais importante nos currículos da licenciatura, por tudo que ela pode oferecer. A TN, como a gente conhece, de uma maneira mais simplista, é o estudo dos números inteiros, das propriedades, a tentativa de se entender os mistérios que envolvem a TN . Até existe uma disputa interessante que é a seguinte: os números naturais: eles existem ou não? Há várias correntes filosóficas que dizem: os números naturais existem. Outras dizem é uma invenção da mente humana. Então, quando você olha a sua volta, você vê uma árvore, duas árvores, 40 estrelas, um sol. Então essa enumeração é uma invenção da mente humana? Se aparecessem extraterrestres, será que eles não contariam? Será que esse contar, essa associação, não é algo que já está aí? Muita gente diz isto é tão lógico. Então vamos pensar de uma outra maneira. Mas sem contar, sem associar, é possível fazer alguma coisa? Para nós, pensar e os números estão relacionados intrinsicamente. A gente pensa com números. Hoje em dia se alguém quer te convencer de alguma coisa, a primeira que ele faz é te apresentar o gráfico, as estatísticas. Essa é a maneira de tentar te convencer. Números, realmente para nós, são estatísticas. A Teoria dos Números pode colaborar muito no ensino, porque ela não só traz a beleza que está escondida nos números, mas também uma maneira de pensar mais científica, que é valorizar a questão das hipóteses, e como a partir das hipóteses, se chegar numa tese. Então, quando alguém fala assim: Vou defender uma tese. Todo mundo vai entender isso. Tem-se algumas hipóteses com as quais ele está trabalhando e a partir dali, ele vai inferir alguma coisa. Isso é a tese que ele vai defender. Se ele conseguir defender essa tese, ele está demonstrando um teorema. A partir das hipóteses, essa tese foi bem defendida, isto é o teorema foi provado. A TN pode colaborar com isso, porque naturalmente, aparecem as perguntas que precisam ser demonstradas. Quando no segundo grau, você ensina uma criança a calcular o m.d.c , no ensino fundamental a coisa é difícil, mas no ensino médio, tem muita coisa que pode ser feita, né. Quando você ensina os cálculos do m.d.c, do m.m.c, ensina que um número pode ser dividido pelo outro... uma pergunta que é natural, ao invés de partir imediatamente para o algoritmo, de como fazer isso, uma pergunta mais natural seria: Todo par de números tem m.d.c? Por que existe o m.d.c ? E como o aluno já está tão familiarizado com os números, com o algoritmo que ele aprendeu na 5^a ou na 6^a série, uma pergunta que se deveria fazer é: Por que esse algoritmo funciona? Por que se eu pegar dois números quaisquer, eu sempre consigo calcular o m.d.c? Tem uma maneira de me convencer e de convencer a todo mundo de que realmente dois números têm sempre o m.d.c? Ou, na verdade, qualquer conjunto finito de números eu consigo calcular o m.d.c e o m.m.c. (??) A partir daí vem todo um crescimento, até chegar ao Teorema Fundamental da Aritmética que

diz que todo número inteiro é um produto de primos. Mas por que isso é chamado Teorema Fundamental da Aritmética? Por que o adjetivo fundamental foi acrescido a esse teorema? Por que ele é tão fundamental assim? Por que todo número é produto de primos de uma maneira única, por que isso abre portas para mim, para entender todas essas coisas que estão escondidas nos números? Por que existem infinitos números primos? Se você fizer uma lista de números primos, é difícil que alguém que passe do número 100. Por que existem infinitos números? E aproveitando este elo que existe hoje entre a informática, através da criptografia, da teoria dos códigos, a TN pode ser tornada prática e motivada na sala de aula, porque todo mundo hoje é interessado em computação. Todo mundo gosta de senha, tudo tem senha, cartão de credito tem senha, tem números. E por que o sistema de senhas funciona? O sistema mais famoso de criptografia hoje é chamado RSA e é baseado na fatoração em primos. Qualquer pessoa pode entender, se tiver um conhecimento básico de TN. É claro precisa de um conhecimento um pouco mais profundo, mas com o conhecimento de números primos, da fatoração, você já consegue descrever bastante esse algoritmo. Além disso, a TN, eu acredito, pode fazer um elo da matemática, com a história da matemática, colocar a matemática no contexto da civilização humana. A matemática se desenvolveu ao longo dessa civilização. Por que todo mundo se preocupa com os números? Por que isso é tão importante para nós? E por que isso vem sendo estudado há milhares e milhares de anos? A TN pode fazer esse elo de maneira bastante natural. O que eu mencionei aqui: m.d.c., m.m.c, Teorema Fundamental da Aritmética, tudo isso tem mais de 2000 anos. Você pode trazer Euclides para a sala de aula fácil, fácil. E a demonstração de Euclides de que existem infinitos números primos, existem outras, várias demonstrações de que existem infinitos números primos, mas a de Euclides, a mais velha de todas, a "vovó" de todas é a mais bonita de todas. Por que o que ele viu é tão simples, tão obvio, tão bonito. Então eu acho que a TN tem muito a oferecer aos alunos do ensino médio.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**. Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

E – A álgebra, no Brasil, a TN é tradicionalmente colocada dentro da álgebra, basicamente no Brasil é colocado assim, pelas agências de fomento, como CNPq, classificam assim. Mas a TN pouca que tem aqui praticamente adere, você tem, por ex., o teorema de Fermat, mas tem colegas, que são especialistas em TN, e só fazem análise. As técnicas que eles usam são todas da análise. Tem colegas da TN que usam técnicas da geometria. Então a TN tem os mistérios dos números que você quer resolver e para isso você resolve do jeito que você conseguir resolver. Se você conseguir com métodos algébricos, tudo bem, com métodos analíticos, excelente, com métodos geométricos. Existem problemas de combinatória, que envolvem a teoria combinatória dos números, que envolvem questões analíticas profundas, análise profunda, muita soma infinita, integrais, avaliações daquelas integrais. Então no Brasil, aqui, no ensino médio, se você coloca álgebra, aritmética, teoria dos números juntos, porque no começo todas elas de maneira comum, a raiz comum disso é a teoria dos números. Então, quando você estuda m.d.c., m.m.c., Teorema Fundamental da Aritmética e depois sobe para congruências e coisas assim, os conceitos de álgebra começam a aparecer, quando você tomando números inteiros consegue somar, subtrair, dividir e, quando você olha do ponto de vista algébrico, então você vai falar isso é um anel. Então o anel dos inteiros, enquanto outros conjuntos, como o das matrizes, não formam um anel, então tem várias outras coisas que você agrupa nessa grande área, chamada álgebra. Então se você focaliza no anel dos inteiros, você vai estudar TN, a teoria elementar dos números. Então, quando se fala em álgebra, você entende que essa mistura não é algo assim danoso, ou alguma coisa... é natural essa mistura na fase inicial, depende do ponto de vista que você está assumindo. Então eu não vejo como problema essa mistura da álgebra, da aritmética, da TN. Elas vão evoluindo naturalmente, à medida em que você vai aprofundando esse curso. Se você se interessa pela TN, especifico, números inteiros, se você vai estudar e se aprofundar nisso, se você quer saber quantos números primos existem entre 1 e um determinado x qualquer, então a álgebra não vai te ajudar, você vai precisar da análise, para resolver esta questão. Aí começa a haver separação, a álgebra começa a estudar o anel dos inteiros, mas será que essas propriedades bonitas dos inteiros, eu não consigo levar para outros conjuntos? Então as perguntas vão mudando, mas a gênese é comum. Você vê que a álgebra moderna começa com a Teoria de Galois, estudava o que? Como resolver, encontrar soluções para um polinômio. É uma coisa tanto da TN, mas ao mesmo tempo essas soluções nem sempre são inteiras, então você começa a crescer conjuntos. Você pega uma equação de 2^{o} grau, calcula o delta, deu negativo, então diz não tem solução. Tem solução, não tem soluções no conjunto que você está procurando, certamente no conjunto dos números complexos vai ter solução sempre. Então à medida que você vai avançando em alguma direção, o conhecimento vai avançando também. Então vai avançando na área da álgebra, da análise, das variáveis complexas, mas a gênese é: como é que eu resolvo um polinômio, como é que eu encontro raízes de um polinômio. Então eu vejo que é natural essa relação. Eu não acho problemática, para o professor. Para que ele vai especializar, vai ser um algebrista, um especialista em TN, para que isso? Deixa ele desfrutar das belezas de cada área, depois deixa essa classificação aparecer mais tarde.

P – E TN e Aritmética?
E – TN e Aritmética, eu nem sei como separar os dois. Você tem um livro famoso da TN, chamado Aritmética Superior e é só TN . Minha dúvida é: eu devo me preocupar com isso? Eu devo me preocupar com tantas separações? Desde o 2^{o} grau começar a colocar caixas: agora eu vou estudar isso, agora isso. Vamos estudar, depois a gente vê se é necessária ou não a classificação. Vamos primeiro despertar o interesse, ver as belezas ali, depois a gente vê se é necessária ou não toda essa classificação. Álgebra, em essência, é abstrata. Então no meu ponto de vista, quando você começa estudando estruturas algébricas no 2^{o} grau , você começou de cabeça pra baixo. Para que estruturas? Estudar coisas abstratas e deixar os alunos completamente confusos, perguntando: Para que? Então não é melhor evoluir naturalmente as coisas. Então se você começa a estudar números inteiros, a partir daí você pergunta: tem outros conjuntos que têm essas propriedades? É natural. Aí você começa a entrar mais na esfera da álgebra. então eu preciso ver: quais são as propriedades que os números inteiros têm ? E como eu abstraio essas propriedades dos números inteiros? Se eu consigo isso, eu consigo transportar para outros conjuntos. Se eu não tenho antes uma intuição a partir de uma coisa concreta que são os números, vai ser difícil fazer essa transição.

Terceira questão

Nós estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a uma disciplina constituída dos seguintes conteúdos
Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, maior divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.

Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?
E – Isso seria um curso de TN para professores? Eu estou formando essa pessoa, depois ele vai aprender TN, depois tem uma segunda parte que é metodologia de ensino, tal, tal. Agora eu quero saber o seguinte, eu pego a pessoa, a Marilene que está na minha frente e quer aprender TN, então eu não estou preocupado se ela vai passar. O inicio disto aqui é o trabalho no 2º grau, mas eu quero impressionar a Marilene com a TN, então eu iria até mais além disso, eu tentaria chegar num teorema muito bonito que é o Teorema da Reciprocidade Quadrática de Gauss. Porque Gauss tem que aparecer num curso de TN, o nome de Gauss tem que aparecer de alguma maneira, porque Gauss é uma pessoa que muitos consideram a pessoa mais inteligente. E este Teorema da Reciprocidade Quadrática é um teorema muito bonito, quando você esta congruência toda, na verdade essa linguagem de congruência, se não me engano Gauss foi quem produziu, visando esse teorema. É um teorema tão bonito que o próprio Gauss demonstrou de cinco maneiras diferentes. Hoje, se você entrar na Internet e escrever Teorema da Reciprocidade Quadrática, vão aparecer listas e listas de demonstrações. Por que? Porque apesar de ter uns 200 anos, a sua beleza todo mundo procura maneiras diferentes de interpretar esse resultado, de aprofundar esse resultado. Então é o conteúdo que vai aqui no Departamento de Matemática. Você estuda todas essas coisas, visando chegar no Teorema Fundamental da Aritmética e se tem tempo, o curso aqui são de 90 horas, vai para assuntos um pouco mais aprofundados.
P – Em instituições em que a relação candidato-vaga é pequena, os alunos não apresentam domínio desses conteúdos, por isso a falta de tempo é um complicador para se avançar.
E – Aqui, geralmente um curso de TN, por exigir um pouco mais de maturidade do professor acontece quando ele está no terceiro semestre, quarto semestre, meio do curso, que coincide, mais ou menos, com a introdução do raciocínio matemático. É a primeira fez que o professor, futuro colega, tem entendimento do que é matemática, porque ele está fazendo cálculo, fazendo vários teoremas, mas está aplicando, aplicando, aplicando. E aí numa prova de TN, ele vai pegar a prova e vai estar escrito lá: prove que os números primos são infinitos. E aí vai falar: prove. Mas o que é provar? Ele vai escrever, um, dois, três, cinco, sete, onze.... provar exige algo a mais. E aí é que é interessante, impressionar nesses colegas o que é a metodologia cientifica. O que é o pensamento cientifico? Então esse conteúdo aqui vai ajudar nisso. Aqui na parte de congruências já é um pouco mais interessante. Eu caminharia como na Unb, os nossos alunos têm aprendido. È preciso aprender, porque o que se precisa é pouco. Você, quando entra no Cálculo III, se você não sabe derivação, integração, séries de uma variável, vai ser muito difícil entender de várias variáveis. Em TN, não, você começa tão elementar, começa com coisas tão familiares a eles, que é possível avançar. É claro, como você apontou depende muito da clientela, mas se você não coloca um alvo alto, você só chega aonde é possível. Se você entra na competição, pensando: ah! Eu vou chegar em 10 primeiros. O que vai acontecer? Você vai chegar entre os dez primeiros. Se você pensar que quer ser o primeiro, então você vai correr, vai colocar energia para tentar ser o primeiro. Então quando você coloca objetivos não tanto teóricos, mas práticos, tem que ser feito isto, tanto no noturno, quanto no diurno. No noturno, são alunos que trabalham durante o dia, e tem conseguido aprender o conteúdo. Claro que são três vezes por semana que nos encontramos, mas têm conseguido aprender. O teorema de Gauss, vale a pena o esforço pra chegar lá.

PROF. CUNHA

Primeira questão:
P - Campbell e Zazkis, pesquisadores em educação matemática, afirmaram *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*
Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.
No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina. **Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos curriculos**?
E – Eu concordo. Aqui na...(universidade onde trabalha), os alunos estudam Teoria dos Números, e eu acredito que ela é obrigatória para a licenciatura também. É preciso checar isso. De qualquer maneira, os alunos fazem Álgebra I, tem intersecção com a TN. Outra coisa, que tem muito em TN e que ajuda de uma maneira geral, é lógica, lógica de demonstração. Não se espera que um professor de ensino fundamental e médio, cabe demonstrar, claro que não. Mas você tem que ter, pelo menos, uma noção clara, dado um problema quem são amigos, quem são seus inimigos, o que você tem como hipótese e o que você tem que demonstrar, você tem que verificar, você tem que obter. Esse tipo de lógica você aprende muito em TN. Ligado ao conceito de números, você aprende bastante isso. Outra coisa interessante que eu vejo em TN que poderia ajudar na formação é o seguinte: tem muitos problemas em TN em que a formulação é extremamente elementar, quer dizer, por ex., tem problemas de equações diofantinas que você enuncia de maneira muito simples, que nem o próprio Último Teorema de Fermat, que é uma equação diofantina. O enunciado é inteligível para qualquer aluno do ensino médio, até no final do ensino fundamental, ele já tem condição de saber qual seria aquele problema e, como ele tem outros problemas de TN que são interessantes, atraentes e, com isto acho que pode desenvolver o gosto pela matemática e você consegue expor esses problemas, exigindo um conhecimento muito pequeno de sua platéia. Às vezes a coisa é muito interessante, mas a platéia precisa ser muito especializada para ser capaz de pelo menos apreciar. Concordo, acho que a TN poderia exercer um papel mais fundamental na licenciatura e isto poderia ser passado para o ensino médio e até para o ensino fundamental.
P – Quais conteúdos de TN deveriam ser trabalhados com o professor em formação?
E – Ele deveria aprender alguns conceitos algébricos que seriam necessários, porque ele vai ter que aprender um pouquinho de congruências, de divisibilidade, alguns conceitos dos inteiros, a partir deles você entra em equações diofantinas, que são equações de coeficientes inteiros, para as quais se buscam soluções inteiras. Só dentro destes tópicos aí, você já tem um estudo muito grande, então para o professor, talvez, pudesse concentrar nisso: inteiros e um pouquinho de equações diofantinas, que, na verdade, são equações resolvidas nos inteiros. Dentro do conjunto dos inteiros, têm algumas coisas que seriam bastante interessantes, por exemplo, o Princípio da Indução Finita, porque você é capaz de demonstrar várias propriedades dos próprios inteiros, algoritmo da divisão, relação de congruência, então se você tocar nos inteiros e equações diofantinas, na licenciatura, você já passa esses conteúdos para os professores. Certamente, ele não vai passar tudo isso para os alunos dele, eu não se é pensamento meu, o professor deve saber bem mais do que ele vai transmitir, eu concordo com

você inicialmente que não é só você ter um mundo de conhecimentos para ser um bom professor, claro que não. Mas o outro extremo, se você não tiver conhecimento nenhum, você não vai cumprir com a tarefa, não adianta você ter tudo quanto é técnica. Então tem que ter meio termo, para o professor, o licenciando ele aprendendo isso, certamente quando ele for falar no ensino médio em P.A e P.G, Princípio da Contagem, ele vai ter exemplos muito mais ricos, por exemplo, quando ele falar em Binômio de Newton, se ele quiser, ele poderá saber como se demonstra isso, ele não precisa necessariamente reproduzir a demonstração para os alunos dele, porque isso exige mais conhecimento que eles não tem. Ele vai ter uma base muito mais sólida para transmitir. Se ele esquecer alguma coisinha lá da fórmula ou coisa parecida, ele não precisa ficar em dúvida, ele pode verificar e deduzir. Então eu acho que dá um nível de segurança muito maior. Voltando um pouquinho, acho que o foco deveria ser estudar bem o conjunto dos inteiros e equações diofantinas. Ao estudar os inteiros, eu não se vai demandar alguma coisa, eu não sei se seria essencial, mas se poderia estudar a construção dos naturais, estudar Peano, mas isso envolve muitos conceitos de lógica, tanto vai demandar coisas como vai ter conseqüências. Ele pode aprofundar o estudo dele, pode estudar equações diofantinas, só lineares, ou pode estudar em nível superior, pode enveredar para estudar números p-ádicos. Ele pode se aprofundar bastante se quiser, mas ter um conhecimento básico que seria útil para ele ensinar, seria inteiros mais equações diofantinas.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**. Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

E – Sem dúvida, as três coisas são bastante inter-relacionadas. A álgebra, a álgebra é até certo ponto difícil de ser ensinada, porque, em certo sentido ela é..... , mais ou menos, assim o oposto da contextualização, pelo menos ela caminha na direção inversa da contextualização. Na álgebra abstrata, você quer exatamente, dada uma situação, você buscar qual é o esqueleto daquela situação, quer dizer, você quer retirar tudo aquilo que não é indispensável para entender aquela situação. E aí várias situações tem um núcleo comum que é o que você quer detectar. Então, por exemplo, inteiros, matrizes, polinômios, tudo isso tem uma base comum, tem operações entre esses objetos. Cada conjunto desses munidos das operações corretas forma, por ex., um anel. Isso é o que você faz em estruturas algébricas. Então, em álgebra, sem dúvida, estudar os inteiros em álgebra é uma coisa interessante, mesmo porque é o exemplo padrão, mas em álgebra você estuda várias outras coisas, você estuda diferentes anéis, estuda grupos, geralmente você estuda muita coisa de grupos, você pode estudar corpos, domínios de integridade, anéis de polinômios são muito estudados em álgebra. Aritmética e TN, eu diria que estão mais próximos. Eu vejo assim, eu não sei se é pessoal, mas eu vejo que a aritmética é mais uma TN mais voltada para números, fazer contas. Na verdade, TN é extremamente abrangente, pode envolver conhecimentos de análise complexa, por exemplo, eu fiz doutorado em TN e digo, que durante meu doutorado eu não vi um número. Então têm muitos outros assuntos que você estuda sob a chancela de TN, que não lida mais com aritmética. Por exemplo, formas automórficas que o Salahoddin é especialista. No meu doutorado eu estudei um assunto, chamado representações de grupos, já tem relação com grupos, mas está ligado com formas automórficas. Então dentro da rubrica TN tem muitos outros assuntos que não são, necessariamente, aritmética, que seriam mais problemas envolvendo realmente números. Eu tenho uma tendência a pensar em aritmética mais como, equações diofantinas, problemas de contagem, coisas que envolvam mais diretamente números e álgebra essa coisa mais abstrata que estuda outras estruturas algébricas que não têm nada a ver com números e TN, ela mais ou menos nasce de problemas aritméticos, mas avança muito mais e envolve outras teorias que já não usam mais necessariamente a aritmética dos inteiros, nem mesmo de corpos finitos.

Terceira questão

Nós estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a uma disciplina constituída dos seguintes conteúdos
Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.
Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?
E – Por exemplo, aqui você não colocou, quando você fala do algoritmo da divisão, m.d.c., m.m.c., algoritmo de Euclides, eu acho que deveria colocar, por ex., ideais, quer dizer.... . Dar um pouquinho de ideais, que não é muita coisa, acho que é a maneira mais rápida de você mostrar a existência de m.d.c. e m.m.c. em Z. O Teorema Fundamental da Aritmética diz que os inteiros são um domínio de fatoração única, mas eles são também um domínio de ideais principais, então essa é uma informação interessante que ele pode ter aqui. Qual a avaliação que eu faria desta proposta? Teorema de Fermat, eu estou entendendo que é o pequeno Teorema de Fermat, poderia ser mencionado *en passant,* o Último Teorema de Fermat, seria só uma ilustração, nada relativo à demonstração disto, porque qualquer etapa da demonstração foge do escopo. Equações diofantinas lineares, eu incluiria, aqui, sistemas de equações diofantinas lineares e o Teorema Chinês do Resto, porque, também, só envolve equações diofantinas lineares, não é difícil de entender e poderia ser acrescentado aqui. Eu acho que isso aqui para Teoria Elementar dos Números ficaria interessante. Eu sinto falta aqui de uma outra linha de assuntos, que eu não sei se ficaria bem nessa teoria elementar, que seria, aqui na UnB, nosso curso de teoria dos números tem uma outra parte, que seria o estudo dos símbolo de Legendre, de resíduos quadráticos e a reciprocidade quadrática de Gauss. Nosso curso da UnB vai até reciprocidade quadrática de Gauss. Eu penso que é um tema bastante interessante, que poderia ser incluído, o que corresponderia ao Capítulo 4 (aqui referindo-se ao livro Teoria dos Números, do qual é autor). Quando dei o curso aqui, eu vim por aqui, até Equações de Grau Maior que Um, o Teorema de Chevalley eu não dei e vim para a Reciprocidade Quadrática que culmina com a Reciprocidade Quadrática de Gauss. Se a intenção aqui, digamos, é um curso de um semestre, para a licenciatura eu incluiria este tópico 4, está entendendo? Se a intenção é coisa assim que seja mais próxima do conteúdo do ensino médio, o capitulo já não está tão próximo, então seria dispensável, mas de qualquer maneira eu acho que no fundo está lidando com equações lineares de grau maior que um, e aqui, quando você está procurando resíduos quadráticos, no fundo você está meio que a raiz quadrada no campo finito. É interessante ver como esse conceito passa para o campo finito. (ou co-finito). Se fosse para um curso de licenciatura, eu incluiria esse capítulo 4, aqui.

P - Porque o que nós estamos tentando é definir o que nós vamos chamar Teoria Elementar dos Números.
E – Mas o que eu digo é: com que finalidade?

P – Para um curso de licenciatura, visando a formação do professor.

E – Então eu incluiria o capítulo 4, porque se eu digo o que é Teoria Elementar dos Números, aí fica difícil de dizer, porque para os alunos de ensino médio tem um significado, para uma pessoa que tem doutorado não tem outro. Mas enfim, o que seria um básico para um curso de licenciatura: eu acho que isso aqui é uma parte muito interessante, Reciprocidade Quadrática, também não é difícil para o aluno, é extremamente acessível para o aluno e enriquece bastante o conhecimento. Vai numa linha um pouco diferente das equações diofantinas que ele viu ali encima. E, mais, aqui não foi colocado Equações Diofantinas de Grau Maior que Um, tudo bem isso poderia até ficar de fora, tudo bem é outro assunto, mas tem hora que você tem que fazer escolhas. Eu acrescentaria aqui Equações de Grau Maior que Um e Reciprocidade Quadrática de Gauss e analisaria essa questão: você deve pensar num conteúdo para as licenciaturas como uma coisa ideal. Se você não conseguiu num dado semestre, que foi peculiar, houve uma greve, sei lá o que, você não conseguiu varrer o conteúdo inteiro, paciência. Mas o que não deve é colocar um conteúdo tão restrito que vai deixar a pessoa o semestre inteiro dando exercícios, porque na metade do semestre, já acabou o conteúdo que tinha que dar e agora tem que ficar inventando, não. Tem que colocar um conteúdo um pouco mais ambicioso, e dependendo da situação você sacrifica uma parte. Então eu acrescentaria esses dois tópicos: Equações de Grau Maior que Um e Reciprocidade Quadrática de Gauss.

P – Quais as dificuldades que você vê que o aluno tem nessa coisa da demonstração, da prova?
E – Eu acho que eles têm duas dificuldades principais. Uma é lógica, é você saber definir claramente o que você tem como hipótese e o que você tem como tese. Quando você ensina o Principio da Indução, isso fica muito claro: o que é hipótese, o que é tese. A outra dificuldade é de redação, de maneira geral. Às vezes a pessoa até tem o raciocínio correto, mas é incapaz de traduzir aquilo em palavras ou na simbologia matemática, de forma que seja inteligível. Ele começa escrever e se embaralha todo e não sabe dizer exatamente o significado de cada sentença. Para mim são duas coisas centrais: uma é a lógica da coisa e a outra é a capacidade de escrever de forma inteligível. Às vezes a gente pega algumas provas de gente próximo de acabar o curso e são terríveis. Tem aluno que pega uma demonstração e submete a você um mapa do inferno com a conclusão final e não tem nada. É claro que você tem alunos são organizados. O que você poderia atacar realmente é isso: uma é as pessoas escrevam mais. Talvez já desde o ensino médio, não pedir que a pessoa dê apenas a resposta de um problema. Não precisa ser uma demonstração, um sistema linear, um problema de contagem, você mostrar um pouco do desenvolvimento, até chegar na solução. Assim você estaria exigindo um pouco de redação e também que ele vá encaminhando o raciocínio dele de maneira lógica. Então eu atacaria esses dois pontos.

P – Você acredita que ele aprende a fazer, vendo fazer, por imitação?
E – Ele aprende vendo fazer? Eu digo que não, mas é um componente. Eu acho que ele vai ter que ver algumas vezes, vai ter que praticar muitas vezes e aí até desenvolver a habilidade de ele mesmo. Eu acho que a aula expositiva tem o seu valor, você não pode achar que tem que ser tudo natural, porque não é. Muitos conhecimentos que a gente lida com eles hoje, eram conhecimentos de pesquisa há pouco tempo. Quer dizer o cálculo inteiro que a gente usa na engenharia hoje, há cem anos atrás era área de pesquisa. Então, não pode achar que todo mundo tenha que começar do zero e ir desenvolvendo, essa teoria aí, não tem porquê, é um esforço todo para reinventar a roda. A aula expositiva tem o seu valor, tem que ter uma parte de exercícios, de motivação.

PROF. DIAS

P – Apresenta o objetivo da entrevista
E- Essa pergunta está relacionada ao como a matemática pode ajudar, por exemplo, na formação de um professor para lecionar no segundo grau ou até na universidade. A questão é então situar um pouquinho a Teoria dos Números dentro de toda a matemática. Aí então nós poderíamos dar uma resposta mais clara. Então dentro de toda a matemática, qual a posição da Teoria dos Números? A Teoria dos Números é muito importante em relação a outros ramos da matemática. Geometria e Teoria dos Números têm uma coisa bastante peculiar, a base muito antiga. Começou com números e geometria, divisão de primos, contagem, até chegar ao conceito de incógnita, ao conceito de zero, de número negativo. Tudo isso criou uma base para que a matemática se desenvolvesse ao longo dos séculos. Então o nosso primeiro contato com a civilização foi através de números. Então no passado até a época de Fermat, Teoria dos Números não existia como teoria. Existiam conceitos, problemas, quebra-cabeças ligados com números. Por exemplo, determinar dois números cuja soma dos quadrados seja igual a 20, problemas tipo quebra-cabeça. Basicamente até os anos de 1650, época de Fermat, eles se comunicavam entre si, mais a título de se desafiar um ao outro, não existiam objetivos claros: para que, por exemplo, estudar que um número primo pode ser escrito como soma de dois quadrados? Ao longo do tempo esta coisa mudou porque também outras áreas da matemática começaram a avançar e as perguntas passaram a ter importância, como elemento de pesquisa. Um grande avanço da Teoria dos Números ocorreu no século XIX, com o aparecimento de muitos resultados importantes, publicações, formação de uma comunidade. Mas Teoria dos Números é diferente de outras áreas, porque, em pouco tempo você pode explicar um problema para uma pessoa. Então eu acredito que em comparação com outras áreas, em Teoria dos Números, em um tempo muito curto, você pode explicar para alguém um problema, talvez um problema nem resolvido, porque ele não tem tantos dados. Não é como, por exemplo, no estudo de cálculo, no estudo de física, no estudo de química, onde é preciso muita informação, até que você consiga alcançar aquele nível em que você tem condições de entender um problema aberto. Por isso que é rápido. Então é um trabalho intelectual. É bastante, bastante intelectual, porque com poucos dados você gostaria de chegar a algum resultado. Então dentro da educação, nós estudamos geometria na escola, estudamos que a soma dos ângulos internos do triangulo é 180^o, demonstramos esse resultado, aprendemos o Teorema de Pitágoras, tudo isso nós aprendemos até muitos que nem use na vida prática. Teoria dos Números pode ser vista como isso, com uma velocidade diferente para ser aprendida, para ser entendida. Você pode entender Teoria dos Números exatamente de uma maneira bastante sistemática e rápida, porque você sabe o que é número, você pode definir toda coisa, por exemplo, nesse próprio livro, a idéia era dar uma base clara para Teoria dos Números, por que divisão? Então você começa com uma coisa que não tem uma definição imediata. Números não têm definição, números inteiros você aceita. Todos os outros sistemas de números, você pode construir da maneira dedutiva, da maneira construtiva exata da matemática através de números inteiros. Uma vez que você sabe o que é um inteiro, pode definir um racional, se você sabe o que é racional, pode definir números reais, através dos reais pode definir números complexos, através dos inteiros podemos definir números p-ádicos. Então este é um lado intelectual forte que a Teoria dos Números tem. Agora o que deve ser ainda mais interessante para ensinar no segundo grau é a aplicação dessas matérias que estão ficando cada vez mais claras. Então hoje em dia, por exemplo, nós temos problemas relacionados com o uso de cartão de crédito, uso de senhas para abrir o computador, armazenamento de dados dentro do computador. Todo esse sistema é digital, em outras palavras, está baseado na qualidade de números, números inteiros, inteiros binários ou inteiros ..... .então toda questão está baseada na qualidade dos números inteiros, inteiros são formados

por produto de primos. Então se você quer entender bem inteiros tem que entender bem o que é um número primo, como se reconhece que é um numero é primo , como se constrói um número primo, como se divide um dado número em primos. Então hoje em dia esses fenômenos estão entrando em nossa vida prática, por exemplo, assuntos como criptografia são bastante importantes por serem utilizados em segurança de comunicação. Por ex. , você vai a um caixa do banco eletrônico. Tudo é feito para codificar os números, os seus dados, então a máquina decodifica (??/) Então eu acredito que deste ponto de vista, temos um apelo forte para dizer que esses assuntos sejam dados o mais rápido possível nas escolas, porque não tem uma base cara, é barato, porque você em pouco tempo pode ensinar para o aluno o que é um número primo, como se representa.......................... . Este é um trabalho altamente intelectual, porque os alunos interessados vão investigando, ele não precisa de muita coisa para fazer este programa. Então esse é um lado importante, agora como, por ex., ajuda um profissional, ou seja, um professor no ensino desse é simplesmente que ele vai contribuir para criar uma mentalidade forte, intelectual, entre os alunos. Agora a maneira de ensinar isso é outra coisa, mas basicamente .... além disso é alguma coisa que está ficando mais aplicável na nossa vida. Outra coisa que é importante é que a Teoria dos Números é um campo da matemática sem fronteiras, em outras palavras, usa o que você sabe para resolver um problema de matemática, de Teoria dos Números. Por exemplo, na área de geometria, basicamente usa geometria para resolver um problema da área geométrica, mas em Teoria dos Números, os resultados te mostram que foram usadas diversas partes da matemática para resolver um problema da Teoria dos Números, porque ela está conectada como base, porque outras partes da matemática estão construídas em cima dela. Então de cima se você olha para baixo, para questões muito práticas, talvez você possa usar toda essa máquina para resolver um problema clássico de Teoria dos Números.

P – Professor, o senhor praticamente respondeu a primeira questão que eu tinha, mas eu vou colocá-la, para que possa acrescentar alguma coisa que julgar importante.

Primeira questão:

P - Campbell e Zazkis, pesquisadores em educação matemática, afirmaram *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*

Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.

No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina. **Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos currículos**?

E – Essa questão é muito interessante. Está ligada aos países em que vivem. Isso também que ser levado em consideração. Eu não sei se um investigador, por exemplo, da França poderia dizer isso. Talvez, lá, a Teoria dos Números esteja mais no ensino básico do que talvez nos EEUU. A questão dos EEUU nós temos que separar, mas, em geral, como uma pergunta global, como uma pergunta universal, essa pergunta tem muito sentido. Eu acho, por exemplo, que uma das razões que a Teoria dos Números não entrou no currículo do ensino básico, no segundo grau, é o próprio tipo de problemas de Teoria dos Números. Eles não são tão fáceis. Em outras palavras, quando você discute geometria na sala de aula com os alunos, os alunos têm duas maneiras de fazer entender. Uma é através de figuras, você desenha um triângulo, se ela não entende a definição que triângulo é uma figura formada pela intersecção de três retas não paralelas, ele, pelo menos, vê isso. Ou, por exemplo, num curso de cálculo, tudo se desenvolve com figuras de uma certa forma. Então o problema que Teoria dos Números não entra é que as pessoas, os próprios pesquisadores na área de Teoria dos Números que não conseguiram determinar um modelo para que esses conceitos sejam mais entendíveis para os alunos, os alunos próprios conseguirem entender. Então, por exemplo, você joga um problema na frente dos alunos: ache todos os números inteiros x e y tal que 2x + 3y = 4. Como ele vai fazer isso? Então, talvez ele tem que ser inteligente para fazer ou então ele vai largar, porque não tem nenhum caminho para ele começar. Por outro lado existem caminhos, em que você pode levantar etapa por etapa e chegar a algum lugar. Ele encontra um problema que ele não sabe começar, então tudo isso volta para um fato que muitos materiais, livros, que são escritos em Teoria dos Números, praticamente no mundo inteiro, eles não tentam achar um modelo mais visível para Teoria dos Números, dentro da própria formulação matemática. Aqui fica difícil, muito difícil. Outra dificuldade é que, em muitos casos de problemas em Teoria dos Números cada um tem uma solução diferente, cada um tem um caminho diferente. Isso atrapalha. Uma pessoa nova na escola fica muito atrapalhada com isso, não ia gostar. Eu acredito que, eu concordo plenamente que é muito pouco a Teoria dos Números dentro da área do segundo grau e na universidade, por duas razões básicas, a forma que eles estão ensinando é muito inacessível à maioria. Segundo não mostram as aplicações, não mostram para que deveriam estudar, muita coisa você estuda sem ter a idéia para que serve. Se você fala para que serve, às vezes você atrai a atenção da maioria para estudar. Teoria dos Números e Álgebra são duas coisas que andam em paralelo. Se você quer ensinar muito bem Álgebra para alguém, Teoria dos Números deve estar lá, nasceram dos mesmos problemas, andam lado a lado. No meu caso particular, eu tentei superar um pouco dessa dificuldade, eu publiquei 5 ou 6 livros em português, todos são relacionados com Teoria dos Números. Eu terminei um na semana passada, ... para explicar um pouquinho o Teorema de Fermat. Um outro livro que vai sair no ano que vem, sobre criptografia. O objetivo é usar Teoria dos Números em criptografia. Em outras palavras, você quer colocar na frente do leitor que Teoria dos Números vale alguma coisa, tem aplicações.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética. **Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

E – Dá para separar Teoria dos Números e Álgebra. Eu preferiria realmente entender o que é Aritmética. Aritmética são operações simples, operações básicas com números? É isso quer dizer Aritmética? Álgebra, como nós temos no Brasil, envolve o estudo de três áreas: grupos, anéis e corpos. Isso forma a Álgebra. Você pode estudar mais, mas essas as coisas básicas. Teoria dos Números, talvez, foi mal interpretada. Teoria dos Números não é "operações com números". Teoria dos Números é diferente de quatro operações com números. Teoria dos Números é uma questão muito ampla, sem fronteiras. Problemas de Teoria dos Números chegam de onde? Chegam de propriedades dos números, de relações entre eles. Esta é uma definição mais clássica para Teoria dos Números: propriedades dos números e relações entre eles. Inteiros e, mais tarde, consideramos racionais também. Essa é uma definição dada classicamente. Então, por exemplo, a pergunta seguinte: todos os números primos da forma 4k + 1 podem ser escritos como soma de dois quadrados. Essa não é uma questão aritmética, porque na aritmética se trata mais com números específicos. Essa questão pode ser de aritmética: tem um número 23.124, será que ele é primo? Isso pode ser considerado, mas dentro da Teoria dos Números você trabalha com números específicos, você trabalha com números naturais. Então aí, quando você vai levantar um estudo para ser uma coisa geral, você precisa de elementos fora de Álgebra, Aritmética e da própria Teoria dos Números para responder as perguntas de Teoria dos Números. Por exemplo, o famoso Teorema dos Números Primos, de 1.896 (ano? ?), é uma questão de saber a quantidade de números primos antes de um certo valor, por exemplo até 23.124. De maneira geral até um número x, quantos primos você tem? Essa pergunta está relacionada com uma função contínua x/ logx. Então essa pergunta completamente agora você vai discutir em geral. Você precisa de aparelhos, você precisa de ferramentas de qualquer área que ajude você a resolver esse problema. Será esta função de contar números primos, menores ou iguais a x, x/logx. Isso não é aritmética simples. Então, talvez, a Teoria dos Números ajude para que você domine diversas partes da matemática. Você domina muita coisa. Por exemplo, esse problema de........ há muita variável complexa dentro dele. E você vai dominando cada vez mais. Mas a pergunta é interessante e pode ser vista para alunos de função. O que faz a diferença entre Teoria dos Números, você não pode falar de uma pergunta muito bonita, um teorema muito bonito, vamos supor cálculo de várias variáveis, não sabem o que é função contínua, não sabem o que é derivada, o que é integral, não sabem de nada. Para mim o que faz a diferença, por exemplo, muitas pessoas que eu conheço começam com problemas básicos de Teoria dos Números e tentam desenvolver matemática. Então muita coisa .....

Terceira questão

Nós estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a uma disciplina constituída dos seguintes conteúdos

Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.

E – Não consigo acrescentar mais a isso para um estudo básico, acho que para um estudo básico todo mundo precisa saber isso. Mas, algumas vezes, acontece que, na própria demonstração destes teoremas, existem coisinhas de outras áreas que você consegue dar uma demonstração mais imediata. Assim de vez em quando pode ser estudado ...., por exemplo, se eu fosse alguém que queria (sic) organizar um programa de licenciatura, eu, por exemplo, talvez eu ia (sic) mandar, primeiro, o aluno estudar cálculo, depois estudar Teoria dos Números e depois estudar Álgebra, ou Teoria dos Números e Álgebra simultaneamente, no mesmo semestre, porque nós tivemos todos esses resultados, alguns desses resultados de Teoria dos Números que estão escritos aqui, ele tem uma vertente para vê-la mas dentro de Álgebra, entendeu? Por exemplo, esse Teorema de Wilson você pode ver como um resultado algébrico para certos tipos de grupos, entendeu? Aí que ele fica muito bonito, eu, particularmente, estou a favor de uma filosofia. Não temos matemáticas , no plural, temos matemática, como singular. Em outras palavras, todos esses campos separados: álgebra, análise, geometria, etc, são mesma coisa, mas de ponto de vistas diferentes, entendeu? É bom que uma pessoa, hoje em dia, isso está ficando cada vez mais importante – que você consiga misturar áreas, porque uma pessoa que não consiga misturar áreas, não vai conseguir resolver muitos problemas matemáticos. Por exemplo, este caso do Teorema de Fermat é um dos resultados mais bonitos dessa filosofia de matemática. Por que? Porque resolveu um problema de equação diofantina simples, mas emprestou da geometria euclidiana, da variável complexa, tudo, tudo que precisaria para resolver uma coisa simples, conseguir relacionar essas coisas. Aí matemática vai diminuir, claro. Cada um manda do seu lado, criando coisas, sem que o outro saiba. Mas é preciso saber, às vezes estão falando uma mesma coisa, mas com uma linguagem diferente, então é preciso saber. Falando de uma coisa básica, na universidade, com o tempo, pode-se analisar de acordo. Os temas do currículo, as matérias, as disciplinas, acho que devem ser avaliadas depois de um certo tempo, três anos, quatro anos, para ficarem atualizadas, porque cada vez estão sendo escritos mais livros, aparecendo mais resultados, isso é importante. Por que não integrar nos seminários?

P – O senhor trabalha como professor na graduação? Ou só na pós-graduação?
E – Eu não trabalho em nada. Eu faço a minha coisa. Eu crio jogos, eu faço alguns jogos. Quem quer participar, vem participar. Eu, por exemplo, nessa universidade eu cheguei do exterior para cá. Eu tinha um objetivo. Eu dei disciplinas em todos os níveis, menos Cálculo 1, no Departamento. Criei cursos mais avançados possíveis. Criei alunos, formei alunos, tão bons matemáticos. Também gosto de dar aulas. Eu gosto de dar aulas mais na graduação do que na pós-graduação. Eu tenho uma razão para isso. Eu acho que um professor na sala de aula também ganha. Se você para a sala de aula, os alunos de pós-graduação, a maioria está com sono, que não tem interesse. O que você vai aprender lá? Nada. Então dar aulas para os alunos de Engenharia Elétrica, eles são dinâmicos. São bastante diferentes, eles querem aprender. Essa foi a primeira vez na minha vida, nesse semestre, que estou dando Cálculo Numérico. Eu sei o quero fazer. Eu tenho um objetivo. Eu sei o quero fazer com Cálculo Numérico daqui três anos. Eles aqui são muito bonzinhos. Deixam eu fazer o que quero.

P – Professor, talvez eu vá me aprofundar um pouco na questão da prova e da demonstração. Como um aluno chega a aprender a fazer uma demonstração matemática?
E – Muito treinamento e experiência. Por exemplo, num curso de Cálculo, a demonstração é mais direta. Você sabe o cálculo está baseado no conceito de limite, se você entender bem limite, vai entender bem derivada e integral. Então a prática da demonstração é mais direta. Tem o Teorema de Rolle, o Teorema Fundamental do Cálculo, e se você sabe resolve muita coisa. Mas no caso de Álgebra de Teoria dos Números não existe isso. O próprio Teorema de Wilson, que você mencionou, com ele você pode fazer poucos teoremas. Aqui no meu próprio livro, acho que são dois ou três exercícios que vão ser demonstrados através do Teorema de Wilson. Mas, por exemplo, hoje é muito diferente de 30 anos atrás. Hoje em dia muitas pessoas têm computador. Você pode ilustrar essas coisas com cálculo na máquina. Por exemplo, o Teorema de Wilson você pode pedir a um aluno tentar verificar um número de 20 algarismos, quanto tempo o Teorema de Wilson leva para ser aplicado para decidir se o número é primo. Você deve deixar claro na sala de aula quais os teoremas você acredita sejam centrais. Você tem que determinar. Os teoremas centrais são importantes, porque eles são utilizados na demonstração de outros teoremas. E, agora, como o aluno vai conseguir, eu não sei. É muito complicado. Talvez seja isso uma razão para não colocar Teoria dos Números. É complicado. Teoria dos Números é complicado. Ou você não vai aprender coisas, ou vai aprender muito, não há intermediário. É uma coisa radical. É por isso que Teoria dos Números é uma coisa nova. Números é antigo, mas Teoria dos Números ainda é novo. Por que? Tem muitos teoremas em aberto. Mas tem que motivar os alunos para aprender alguma coisa, mostrando as aplicações. Eu tenho um livro chamado Números Notáveis, eu escrevi com o objetivo de alunos de segundo grau. Mas o que ele tem? Por exemplo, o aluno senta na frente de um computador e vai verificar se eu escrevo um número 11111..1111 , um atrás de um, que tipo de número eu vou encontrar? 1 é primo, 11é primo, escrevi mais 1 e não é primo. Escrevi um número com 19 uns, e é primo. Qual é o próximo? Com 23 uns, ficou primo. O próximo tem 317 vezes um. Não consegui achar o próximo, entendeu? São coisas como brincadeiras. Há um outro capitulo que fala de números geométricos: números triangulares, números quadrados, números pentagonais, tudo com figuras. Quando é primo, quando não é primo? A intenção é atrair, usando os velhos teoremas. Nas ultimas vezes, eu coloquei

criptografia, como uma parte para aproveitar as propriedades de congruência. Na geometria, o aluno vê figuras, se não entende função, vê figuras. Há sempre espaço para você criar novidades na sala.

PROF. ELIAS

Primeira questão:

P - Campbell e Zazkis, pesquisadores em educação matemática, afirmaram *"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.*

Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.

No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina. **Como você vê esta questão? Concorda com os pesquisadores?**

E- Do meu ponto de vista, por eu ter feito mestrado voltado à pesquisa em Teoria dos Números, na Universidade de Northigam, na Inglaterra, eu tive contato com *professeur* na área de Teoria dos Números, que trabalhava já, na época, há 25 anos a nível de pesquisa com Teoria dos Números e pude perceber o valor que tem essa disciplina dentro da Matemática, a importância. E na História da Matemática, não é a toa que é considerada a "rainha da matemática", ela é chamada como tal. Eu acredito que sim, eu concordo com esses pesquisadores que ela deveria ter um papel próprio dentro do currículo do curso de licenciatura em matemática, por conta da gente trabalhar o conceito de número e o papel de número é central no currículo de matemática e por conta de eu ter tido essa experiência a nível pesquisa, dentro deste campo de Teoria dos Números, enquanto área de pesquisa dentro da matemática pura, eu percebi o quanto central ela é mesmo. É uma teoria que se divide em algébrica e analítica. Eu trabalhei na parte analítica, onde você pode aprofundar muito em Teoria dos Números, mas essa noção de Teoria dos Números que possa aparecer como disciplina num curso de Licenciatura em Matemática é extremamente válida. Eu tive oportunidade, na época da minha graduação, que fiz na PUC-SP, nem sei se era a única graduação talvez em São Paulo, talvez até no Brasil, que tinha Teoria dos Números, na verdade, ela era até uma disciplina optativa, na época em que eu entrei. Mas tradicionalmente era aplicada como uma disciplina obrigatória pela influência do professor Furquim que fez parte da PUC por muitos anos, e era um especialista em Teoria dos Números. Eu me lembro o quanto importante foi eu ter tido ela como disciplina única, em decorrência o que me ajudou a prosseguir a minha pesquisa em Teoria dos Números mais tarde. Isso era no curso de bacharelado. Sem dúvida ela tem uma grande importância num curso de licenciatura, porque ela é considerada a "rainha da matemática" pelos fundamentos que ela traz e que são fundamentos que aparecem na álgebra, na análise, no cálculo. Enfim eu acredito ser uma disciplina bastante central. Então eu concordo com os pesquisadores.

P- Quais valores você acha que essa disciplina teria no currículo? Além da questão dos fundamentos de que você falou. Você percebe algum outro valor que ela possa ter na formação do professor ou mesmo na escola básica?

E- Acho que vai nesse sentido de fundamentação, de origem. Trazendo a Teoria dos Números, acho que você pode despertar a descoberta e a explicação de muitos fundamentos da Matemática que se deram na Teoria dos Números. Aliás é uma das subáreas da Matemática onde se tem uma quantidade maior de problemas abertos. Então é uma área da Matemática Pura de muita exploração, de muito movimento em nível de pesquisa, como outras são. Mas ela tem problemas aparentemente muito simples, como o Teorema de Fermat, que ficou anos aí para ser de fato demonstrado e que cai dentro dessa categoria de Teoria dos Números. Então acho que pode despertar o interesse pela descoberta, estimular a se colocar a pensar. A

Teoria dos Números traz problemas, teoremas, indagações simples, aparentemente, porque trata de fundamentação. São coisas que não são complicadas num primeiro momento, mas que podem vir a ser bastante, porque é difícil você explicar o que aparentemente parece que é “dado”, nasceu assim, óbvio. A Teoria dos Números tem muito disto de olhar para uma coisa muito pequena, para uma operação ali, para uma afirmação, onde é tão óbvio, que parece que você não tem nem o que discutir ali ou provar. Então eu vejo que a importância dela dentro de um curso de licenciatura, é que numa formação inicial de professores, estaria dando oportunidade para que ele se colocasse a pensar nessas afirmações óbvias que a gente toma como “dado” e o quanto ele poderia estar explorando isso, explorando com os alunos das séries iniciais ensino básico, do ensino fundamental.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**. Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

E – Dentro da experiência em que eu tive a oportunidade de fazer uma pesquisa de fato no campo da Teoria dos Números, eu pude entender bem o quanto se pode explorar o comportamento dos números. Então o que eu vejo na relação entre Aritmética, Álgebra e Teoria dos Números seria essa coisa do comportamento dos números, como se comportam, os padrões, os números primos. E o que acontece com quem faz pesquisa em Teoria dos Números é ficar olhando para esse comportamento, para o padrão, para o que acontece, para ver até onde vai e daí trabalhar com números de ordem de grandeza superior e perceber o comportamento. E até onde eu entendi na comunidade a que eu pertenci em Teoria dos Números, de pesquisa, é que Teoria dos Números, ela informa, enquanto campo, ela informa muito ao campo da Álgebra, não só da Álgebra, quanto da Análise, da Análise Matemática. Ela chega, por ter essa natureza, por isso ela é chamada “rainha da matemática”, ela tem uma natureza de fundamentação mesma, então nem sempre de imediato um resultado na Teoria dos Números tem um impacto na Análise ou na Álgebra, mas a Álgebra e a Análise sempre precisam ter a Teoria dos Números sendo requisitada para alguns problemas em nível de pesquisa. Quando eu trabalhei no mestrado, era um problema aberto, que foi um algebrista que se debateu com esse problema, que parou a pesquisa dele em Álgebra por conta de um problema que ele tinha, que vinha da Teoria dos Números, que precisava de uma estimativa melhor. A Teoria de Números se torna uma ferramenta para a Análise e para Álgebra a nível de pesquisa. Eu acredito que a importância dessa relação é porque ela informa mesmo.

P- Você acha que Teoria dos Números é Álgebra?

E – Não, não, é uma coisa diferente. Mas a Teoria dos Números informa a Álgebra, também a Aritmética, que é a coisa do comportamento dos números.

P – Você vê que elas têm relação enquanto objeto de trabalho ou enquanto ferramenta?

E – A nível pesquisa eu sempre vi a Teoria dos Números enquanto ferramenta para a Álgebra e para a Análise.

P – E o contrário?

E – Na minha experiência eu não tive isso. Eu tive a outra mão só. Mas se conversam o tempo todo, um campo ajudando o outro na evolução da Matemática.

E – A Teoria dos Números estaria contida na Álgebra?
P – Eu não colocaria como subconjunto, mas existem as intersecções aí. É a Teoria dos Números informando a outros campos. Inclusive um dos problemas que eu desenvolvi no mestrado, vem de um algebrista, desenvolvendo um modelo tal, que não envolvia Teoria dos Números, mas ele se deparou com um problema ali que só a Teoria dos Números pode ajudá-lo para encaminhar na pesquisa que ele estava desenvolvendo na Álgebra.

P – E quanto à Aritmética?
E – Aritmética tem a ver com o comportamento dos números. Eu tenho um problema que eu não gosto muito de fazer essa distinção entre Aritmética e Álgebra, colocar Aritmética como pensamento concreto e Álgebra como pensamento abstrato. Eu acho que as coisas deveriam funcionar quase que ao contrário. A Álgebra, já de início, e a Aritmética como caso específico da Álgebra, que acaba conflitando com o currículo que a gente tem. Da maneira como é colocado, discute-se até a passagem ao pensamento abstrato da Matemática, por conta dessa separação entre Aritmética e Álgebra. E, deixando que tivesse, segundo Piaget, uma certa maturidade, uma certa idade para você ter esse pensamento abstrato. Acho que as coisas poderiam estar muito bem juntas, acontecendo ao mesmo tempo.

Terceira questão
P - Nós estamos denominando **Teoria Elementar dos Números** a um componente curricular para os cursos de licenciatura em matemática, constituído dos seguintes conteúdos:
Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, maior divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.
Pensamos que o foco deva ser colocado no estudo da divisibilidade, pois esse é o tema central do que deve ser ensinado de Teoria dos Números na educação básica.
Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?
E – Num primeiro momento eu acho que tanto o nomear a disciplina como Teoria Elementar dos Números é interessante, por estar dentro de um curso de Licenciatura de Matemática, porque já dá uma conotação diferente da Teoria dos Números em um curso de bacharelado e já direciona mais para o ensino-aprendizagem. Quanto ao conteúdo, me parece num primeiro momento, bastante razoável e pertinente a um título como esse da disciplina. Acho que a proposta está ótima, eu não eliminaria nada, com certeza. Agora, acrescentar é que, no momento, eu não estaria sugerindo, não.

P – Outros entrevistados me sugeriram incluir Reciprocidade Quadrática, até para falar de Gauss, qual a sua opinião a respeito disto, considerando outros fatores, como carga horária da disciplina, o tipo de aluno que a gente tem?
E – Gauss foi um outro matemático bastante influente e importante dentro da Teoria dos Números, enquanto campo. Eu não sei, eu não me posicionaria, acho que você estaria muito mais pronta, para estar avaliando se valeria a pena ou não, por estar engajada e a sua cabeça estar voltada para pensar sobre isso. E é o que você pontuou, depende da carga horária, precisaria ver o quanto vindo Gauss, entra Gauss, tira Euler ou não. Que papel mais importante teria Gauss, Fermat, a nível de ensino-aprendizagem da Matemática, pensando na formação do professor que vai estar trabalhando com o ensino básico. Precisaria olhar nesse nível.

P - Você acha que a Teoria dos Números poderia contribuir na formação do professor, desenvolvendo a habilidade de pensar matematicamente, a habilidade de validar?
E – Não tenho a menor dúvida, eu vejo a Teoria dos Números como uma coisa filosófica, ela trabalha tanto com os fundamentos, tão com a questão do óbvio que a gente estava comentando, a dificuldade de mostrar o óbvio, então eu acho que esse exercício de tentar mostrar, descobrir, demonstrar coisas que aparentemente são óbvias ou são óbvias aos olhos de hoje, que na época não eram. Eu acho um exercício fundamental, bastante filosófico, ideológico. Eu acho que traz essa coisa importante na formação do professor. Então eu acho que é uma disciplina em que você estaria desafiando, o que outras disciplinas não estariam fazendo, pela natureza da Teoria dos Números.

PROF. GOMES

Primeira questão

Campbell e Zazkis, pesquisadores em Educação Matemática, afirmaram:
"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.
Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.
No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina e quando aparece a ênfase é colocada no conteúdo e na familiarização do aluno com o método axiomático.
Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos currículos? Como ela poderia contribuir na formação do professor de matemática da Escola Básica?
E - Em primeiro lugar, concordo com eles. O que eles dizem a respeito do 1º mundo acontece no Brasil, porque é pouco valorizada nos currículos de licenciatura esta temática. Existe uma disciplina chamada Fundamentos de Matemática que trata questões desta natureza, mas geralmente sob uma abordagem muito axiomática e não trabalham um aspecto que eu acho muito mais importante que é abordar os números sob uma perspectiva multidimensional. Isto é, analisar como os números surgiram historicamente e como esta evolução dos números ao longo da história foi mudando qualitativamente e como os diferentes conjuntos numéricos surgem e como eles participam dos debates dos próprios matemáticos que foram constituindo e construindo os vários sistemas de numeração e campos numéricos. Os vários campos numéricos são de uma riqueza muito grande para a formação do professor, mas essa é uma visão mais histórica que pode ser associada a uma dimensão que é epistemológica, que diz respeito à natureza dos processos de como estes conhecimentos foram se constituindo historicamente e como hoje podemos ter acesso a estes conceitos, seja no contexto escolar, nas práticas de sala de aula de matemática, seja fora da sala de aula, em contextos sócio-culturais, nas diferentes práticas sociais.
Mas eu acho de fundamental importância ter uma disciplina que enfoque especificamente esta questão, já que números têm uma presença muito forte na escola fundamental, então o professor tem que conhecer não com a superficialidade que é vista no ensino fundamental, mas com uma profundidade muito maior, do ponto de vista histórico, epistemológico, cultural e também social, porque muitas destas idéias surgem no contexto histórico e social, tendo em vista os desafios que a humanidade enfrentou e vem enfrentando na resolução de seus problemas. Para o conhecimento matemático do professor, esse conhecimento dos números é fundamental, não só a teoria dos números que muitas vezes é enfocada com uma abordagem mais axiomática, mas a epistemologia e a evolução histórica destes conceitos.

P – E a questão da abordagem axiomática, essa questão da demonstração e da prova, como é que você vê isto na formação do professor?
E – Eu acho importante, mas privilegiaria a prova local. Eu acho que a teoria mais geral, mais axiomática, é engessante, pois esta geralmente não permite que o aluno problematize tanto as idéias, limitando-se a uma abordagem mais procedimental da própria matemática, preocupada mais em estabelecer demonstrações do que produzir significados. Entretanto, o

processo de levantar/formular conjecturas, que é parte da investigação matemática, é algo interessante e formativo e que poderia ser introduzido também no ensino superior. Para criar esse ambiente de investigação matemática em sala de aula, o professor precisa elaborar algumas tarefas ou atividades mediante as quais os alunos são instigados a levantar conjecturas, a aprender a conjecturar e, a partir destas conjecturas, tentar encontrar uma demonstração, uma prova, que eu chamo de prova local que é diferente de uma prova inserida em um corpo teórico axiomático que é muito mais difícil que diz respeito mais ao campo da análise. Mas essa prova local é importante para que os próprios licenciandos vivenciem essa experiência e depois, quando forem professores, a coloquem em prática – não de modo formal - na escola fundamental e média. Eu tenho participado da formação de professores, sobretudo continuada, em que eles têm desenvolvido experiências neste sentido, mesmo com números, observando regularidades e padrões. Por ex, em relação aos números irracionais. Eu orientei agora uma iniciação cientifica em que a minha orientanda que tinha a seguinte pergunta de pesquisa: que significados os alunos de 7ª e 8ª série podem atribuir aos números irracionais? Para a pesquisa de campo foram elaboradas perguntas, por ex, quantos números existem entre 0 e 1? Que tipo de número são estes? Outra pergunta: qual o menor número positivo que você consegue encontrar? Existe esse número positivo? Foi impressionante como os alunos de 7ª e 8ª séries conseguiram produzir significados sobre isto e chegaram à idéia da existência de um número que não era racional, mas um número que não podia ser determinado exatamente na sua completude. Puderam, assim, produzir um pouco mais de significado sobre o que é um número irracional, isto é, um número decimal com infinitas casas decimais, mas não periódicas. Este é um exemplo de como os alunos podem produzir sentidos ou significados para os números irracionais, algo que é considerado muito complicado. O próprio Plínio Moreira (da UFMG) tem levantado e questionado se é possível mesmo trabalhar o conceito ou a idéia de número irracional na 7ª ou 8ª séries. É claro, não na concepção de cortes de Dedekind, mas numa concepção um pouco mais intuitiva da existência de um determinado número, o qual, para ser representado, necessita uma outra forma diferente da razão entre dois inteiros, justificando, assim, o uso de letras gregas – tais como π ou e - ou de radicais como $\sqrt{5}$. Uma outra questão a ser explorada também é a localização destes números na reta numérica, percebendo que ela não é apenas constituída de números racionais, mas também de números irracionais.

P – Gostaria que você voltasse à questão da prova local e a caracterizasse.
E - Você conhece aquele livro de João Pedro da Ponte, publicada pela Autêntica, Investigações Matemáticas na sala de aula? Ele organiza os números inteiros positivos, os naturais, como uma seqüência numérica em quatro colunas (primeira linha: 0, 1, 2, 3; segunda linha: 4, 5, 6, 7...) e pede para que os alunos encontrem regularidades, observando estes números dispostos em linhas e colunas. Então eu vou citar uma experiência desenvolvida por um orientando meu com alunos de 8ª série. Eles perceberem que qualquer número desta lista, elevado ao quadrado, caía sempre, nesta disposição matricial, na primeira ou na segunda coluna. Ou seja, nenhum destes quadrados caía na terceira ou na quarta colunas. Esta já é uma conjectura. Mas ela pode ser ainda melhorada: os quadrados dos números sempre vão aparecer, alternadamente, na primeira e na segunda coluna. Cabia a eles agora encontrar uma justificativa de que isto é uma verdade, ou seja, que isso sempre irá acontecer para todos os números. Eles então expandiram a lista no Excel para até os mil primeiros números inteiros positivos e verificaram que a regularidade se mantinha. O que isto significa, em termos de prova? Que eles verificaram, empiricamente, que a conjectura se mantinha: todos os resultados caíam, alternadamente, na primeira ou na segunda coluna. Mas eles tinham que achar jeito de provar que isso aconteceria para todos os números... Precisavam construir uma demonstração, uma prova que fosse analítica ou algébrica para aquilo. Ao analisarem os

números perceberam que os números da primeira coluna eram múltiplos de 4; os da segunda, múltiplos de 4 mais 1; os da terceira, múltiplos de 4 mais 2, portanto número par, e os da quarta, múltiplos de 4 mais 3 (um número ímpar). Ao elevar ao quadrado qualquer um destes números genéricos, eles perceberam que o quadrado ou era um múltiplo de 4, portanto um número da primeira coluna ou um múltiplo de 4 mais 1, portanto na segunda coluna. Ou seja, esta é uma prova que podemos chamar de *prova local*, uma pequena demonstração de uma conjectura que os alunos desenvolveram. No livro do João Pedro da Ponte esta hipótese dos alunos de meu orientando foi levantada por um dos grupos, mas não continuaram o processo e nem chegaram a tentar prová-la. Ou seja, os alunos de Campinas não apenas foram mais além; chegaram, inclusive, ir a demonstrar esta conjectura.

P – Parece que a álgebra oferece mais oportunidades do que a geometria para este tipo de prova, não?
E – A geometria dá alguns elementos ou evidências, mas, efetivamente, para você ter uma prova mais convincente matematicamente, entra em cena processos de negociação, de argumentação, de aceitação, de validação; a álgebra pode dar mais garantia de convencimento de que aquilo vale para qualquer número.

P – Dispensa às vezes um corpo teórico de axiomas, de muitas propriedades.
E – Exatamente, por isso ela é local. Ela não é uma prova construída a partir de uma teoria, uma teoria dos números, por exemplo, ou de uma teoria algébrica ou axiomática como é o modelo teórico de Euclides. Modelo esse que é difícil de ser desenvolvido e compreendido pelos alunos de ensino fundamental.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**. Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**
E – Bem, eu acho que são os campos fundamentais da matemática elementar, a teoria dos números ou aritmética, álgebra e a geometria. As poucas vezes que eu trabalhei esses campos eu priorizei seus fundamentos epistemológicos de maneira inter-relacionada, mas é importante que o futuro professor perceba a diferença do que é cada um destes campos, o que eles têm de específico, por exemplo, o que é o pensamento algébrico; em que aspectos ele se diferencia do aritmético? Em que o pensamento geométrico se diferencia do algébrico? Isto é importante e, ao perceber estas diferenças, a construção do pensamento e de uma linguagem, que é própria da álgebra e da aritmética ou da geometria, ela se constitui na inter-relação destes campos.
Realmente você pode desenvolver o pensamento algébrico, no ensino fundamental, a partir do aritmético, dependendo da forma como você trabalha. Por exemplo, o conceito de igualdade, um conceito fundamental da álgebra, é construído desde as séries iniciais... e o sentido de igualdade que se imprime na aritmética vai ter implicações, mais tarde, no conceito algébrico de igualdade. Por ex., quando você trabalha 5 + 3 = 8 e dá o sentido do "igual" como sendo "o resultado é", o aluno está internalizando um sentido não algébrico de igualdade, um sentido operatório de igualdade e não o de equivalência, no sentido de "vale tanto quanto", ou "tem o mesmo valor que", que é o conceito algébrico de igualdade. O professor ciente disso, poderia trabalhar desde as séries iniciais, na aritmética, esse sentido de igual. Por ex., poderia explorar que 5 + 3 é o mesmo que 4 + 4, é o mesmo que 7 + 1, quer dizer trabalhar o sentido de

igualdade de maneira diferente daquilo que muitas vezes é ensinado pelos professores das séries iniciais. Isto contribui para desenvolver o sentido de igualdade da álgebra, trabalhar e entender melhor as passagens das equações algébricas e também o conceito de função.
Mas o futuro professor que não percebe, que não tem este conhecimento epistemológico do campo, ele acaba não desenvolvendo a aritmética ou uma exploração dos números já pensando também em desenvolver o próprio pensamento e a linguagem da álgebra. E, a geometria facilita muitas visualizações e levantamento de conjeturas e podem ser tratadas depois de forma muito mais significativa com o auxilio da álgebra. Além disso, a geometria pode ser um apoio mais concreto para o aluno construir algumas relações que são de natureza algébrica, assim como também a própria aritmética, quando você organiza os números, tentando estabelecer relações que são de natureza mais algébrica. Há uma inter-relação entre estes campos que ainda precisamos aprender a trabalhar na formação de professores de forma mais sistemática. Pela tradição por ter que constituir um campo mais teórico axiomático, não se viabiliza esta inter-relação entre campos, por constituir campos independentes, isolados, cristalizados, portanto pouco significativos para a formação daquele conhecimento fundamental para o professor que é trabalhar de maneira diversificada, problematizadora e versátil dentro destes campos. Um bom aluno de matemática é aquele que transita facilmente de um campo a outro, da álgebra para a aritmética, para a geometria e usa elementos destes campos para poder expressar as idéias e relações matemáticas.

P – Você vê, por exemplo, a disciplina chama álgebra e ali estão contidos os conhecimentos básicos de aritmética, mas, às vezes, com uma abordagem, por ex., das estruturas algébricas. Você acha que esta questão da denominação pode obscurecer aspectos próprios do estudo dos números?
E - Mais problemático que a denominação ou uma ementa para uma disciplina é o professor que vai dar esta disciplina. Eu tenho participado, desde o Rio Grande do Sul, de reformulações do currículo de licenciaturas... E preocupados com a formação de professores, temos sugerido e proposto um caráter mais problematizador e exploratório dos conceitos matemáticos, apontando para uma abordagem multi-dimensional das idéias matemáticas. Entretanto, dependendo do professor que assume tais disciplinas, ele acaba tratando de maneira axiomática ou algébrica a disciplina.
Eu lembro, por ex., de uma disciplina da UNICAMP que nós achávamos importante que era “geometrias não-euclidianas” e foi acrescenta no currículo da Licenciatura. As primeiras versões dessa disciplina foram dadas por um professor que optou por uma abordagem problematizadora e significativa, não priorizando uma abordagem axiomática ou algébrica deste campo. E todos os licenciandos reconheciam a importância dessa disciplina para sua formação matemática. Mas esse professor acabou se aposentando ou sendo afastado dessa disciplina e o outro professor que a assumiu, acabou adotando uma abordagem totalmente axiomática, algébrica e o curso não durou mais que dois anos e foi eliminado da Licenciatura, porque os alunos e o professor não viam mais significado para a formação do professor de matemática. Não sei se podemos culpar o professor que passou a assumir a disciplina, pois certamente este professor conhecia apenas a maneira axiomática. Foi assim que ele aprendeu, sendo esta a maneira mais fácil para ele e, obviamente, mais difícil para os alunos. Para romper com essa tradição formalista, o professor teria que estudar, pesquisar outras formas de abordagem do tema, o que implica disponibilidade de tempo e vontade política de mudar.
Assim, por aí a fora, há outros tantos exemplos de cursos como este que também foram eliminados, justamente porque as pessoas que trabalham na licenciatura têm uma história de formação que muitas vezes passa por uma formação bastante axiomática, algébrica ou formalista e o professor aprende a valorizar isto. Acha que isto é que é mais importante. Isto é que é aprender com profundidade... Este tipo de ensino, sob esta abordagem, é pouco contributivo para a formação do conhecimento profissional do professor na escola. Assim, o futuro professor, quando inicia sua prática escolar, praticamente não consegue mobilizar

quase nada daquilo que estudou nos cursos de licenciatura. E eu tenho percebido isso com freqüência na Prática de Ensino. Percebo que muitos alunos nota-dez nas disciplinas de matemática não tem mobilidade de pensamento ou não apresentam versatilidade de uso e exploração dos conteúdos matemáticos. Não conseguem abordá-los de múltiplas formas e de acordo com cada classe, cada aluno, cada tipo de aluno que ele encontra pela frente. A abordagem formal pode impedir que o professor ou aluno tenha acesso à essência das idéias e conceitos, pois essas demandam uma abordagem mais multidimensional, envolvendo aspectos culturais, lógicos, históricos, didático-pedagógicos, além dos conceituais.

P – Você acha que nas disciplinas chamadas de "conteúdo matemático" são possíveis estas diferentes abordagens?
E – Eu já trabalhei com Análise, com Topologia. Isso faz mais de 15 anos que eu não trabalho, mas eu acho que eu consegui nas minhas últimas experiências no curso de Análise. Eu usava inicialmente os livros do Djairo e do Elon (pois estes eram os livros que havia estudado análise). Estes eram considerados livros básicos na época, mas eu percebi que estes livros pouco contribuíam para a formação de um pensamento matemático mais flexível, mais versátil para futuro professor de matemática. E aí eu comecei a abordar de maneira mais problematizadora a própria Análise, a própria Topologia... Cheguei, inclusive, a fazer provas orais, porque eu queria que eles entendessem o significado das coisas, tentassem visualizar mentalmente e tentassem explicar aquelas idéias com demonstrações locais, e também entendessem o princípio básico da Análise, da construção de uma teoria mais sistematizada e axiomática. Porque eu via que a contribuição maior para a formação do professor era essa capacidade de olhar para as grandezas e expressões matemáticas de forma mais analítica, mais interpretativa e exploratória que favorecia exatamente depois eles trabalharem na sala de aula, no ensino fundamental e médio; ou seja, tentei desenvolver uma abordagem menos engessada da teoria da Análise e da Topologia. E nessa mudança de abordagem o que me ajudou muito foi ter encontrado, em um sebo, em Porto Alegre, foi um livro de Bento de Jesus Caraça, *Elementos de Análise e Álgebra,* onde ele faz a abordagem das idéias da Análise, olhando a perspectiva mais cultural, mais social, e a própria epistemologia das idéias, como elas foram evoluindo historicamente; explorando e ilustrando porque determinados conceitos acabaram se consolidando mais que outros. Isto eu acho que contribuiu para formar um pouco melhor o pensamento matemático de meus futuros professores.

P- Então é possível.
E – É possível, mas é claro que exige, do professor formador, muita pesquisa, muito estudo, porque você não vai encontrar nos livros, nos manuais usuais essa outra abordagem. Você tem que estudar, tem que quebrar muito a cabeça pessoalmente, para poder olhar aquelas idéias de outra forma e de preferência sob múltiplas formas. Buscar elementos na história ou em outros textos. Isto leva anos para construir uma abordagem diferenciada. É muito mais fácil dar da maneira axiomática, como está nos livros. É muito mais fácil, pois já fomos treinados para essa abordagem única e formal.

Terceira questão

P- A partir do que eu pesquisei nos currículos, nos livros, eu estou denominando **Teoria Elementar dos Números** os seguintes conteúdos e objetivos:
Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.

Objetivos: familiarizar o aluno com a questão da prova em matemática; desenvolver a investigação matemática; discutir assuntos e questões sobre os números inteiros com as quais o professor poderá se defrontar em sua prática docente.

Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria? Como o *conhecimento pedagógico do conteúdo* de que fala Shulman poderia se concretizar nesta disciplina?

E – Faço novamente aquela colocação anterior. A ementa é significativa, mas tudo depende da forma como serão abordados. Isto porque, mais importante que a ementa de uma disciplina, é a relação que o formador estabelece com ela, com essas idéias. Se é numa perspectiva mais sistemática, axiomática em que você vai apresentando teoremas, demonstrações, incluindo treinamento exaustivo de resolução de exercícios que exigem demonstrações, esta me parece uma abordagem pouco significativa - e eu diria bastante fraca - no sentido de formação de um pensamento substancial para o conhecimento didático-pedagógico do conteúdo do professor. Então, para mim, uma abordagem significativa de formação do pensamento, do conhecimento didático-pedagógico do conteúdo, como nos aponta Shulman, é olhar para o conteúdo não apenas como um conhecimento em si, mas um conhecimento de relação que pode contribuir para a formação do pensamento do aluno, do desenvolvimento lógico matemático do aluno. E é por essa razão que o formador não pode abordar as idéias matemáticas como prontas e acabadas.

Mas se a gente quer aprofundar esta abordagem que visa à formação de um conhecimento mais sólido e mais profundo, eu partiria primeiro para uma abordagem que eu chamo de exploratória – investigativa. Exploratória, porque você pode explorar a questão da divisibilidade, a questão da regularidade dos números através de uma investigação que pode levar os alunos a levantarem conjecturas, a construírem hipóteses, relações e a partir daí tentar, eles mesmos, demonstrar, fazer pequenas demonstrações, ainda que locais. Feita esta parte exploratória-investigativa, em que os alunos questionam muito, discutem muito e pesquisam e vão buscar na literatura elementos para poder dar conta desta tarefa, parte-se para a fase da sistematização. Mas isso exige do professor planejamento de tarefas e de situações interessantes para serem levadas para a sala de aula.

Tanto o futuro professor, como depois o aluno deste professor, pode se constituir em sujeito de conhecimento, sujeito que constrói ou produz conhecimento matemático. Quando você aprende matemática, construindo idéias, produzindo conhecimento... a satisfação é outra. A própria matemática torna-se muito mais interessante. Quando a gente via os alunos da 7ª e 8ª séries descobrindo que existia um tal de número que não tinha jeito de expressar na forma de fração ou de uma dízima periódica, nem na calculadora, nem no computador e a parte decimal deste número parecia que não tinha fim. Eles se depararam com uma coisa inusitada para eles. E isso despertou neles a curiosidade epistemológica de que fala Paulo Freire. Perguntavam: Mas, como? Mas este número deve ter fim, não tem fim... Pegam, então, uma calculadora simples e parece que encontram o valor exato do lado de uma quadrado de área 5. Encontram um número que ele vezes ele dá exatamente 5. Mas quando o professor apresenta uma calculadora científica ou sugere que faça na calculadora do computador, percebem que aquele número estava errado... Se tudo isso intrigou historicamente os matemáticos, por que os alunos também não podem sentir também essa experiência ao aprender matemática? Dar oportunidade para os alunos descobrirem relações, dá bastante trabalho para o professor. É claro que é mais fácil para o professor dizer, definir as coisas, dar tudo prontinho. Mas, assim, você não dá a aluno o prazer de se constituir em sujeito de conhecimento.

O futuro professor tem que viver na licenciatura um pouco desta experiência, que é a experiência do matemático, de produzir conhecimento matemático, estabelecer relações dos números com a álgebra e com a geometria; uma relação de construção de idéias. E aí não há curso “chato”. O aluno que gosta um pouco de matemática, ele vai vibrar com esta possibilidade e liberdade de exploração de idéias. Não existe o resultado certo, é como uma viagem em que você tem o ponto de partida, mas não sabe onde vai chegar. Se é que vai chegar a algum lugar. Mas é durante a viagem que o processo de formação acontece, ele vai descobrindo o mundo maravilhoso da matemática. Mas é preciso, para não ficar só na exploração e na investigação, sistematizar depois, problematizar as idéias e conceituar, definir algumas idéias, que é chegar mais ou menos a este ponto um pouco mais formalizado. O futuro professor que tem esta experiência durante a licenciatura ele tende a levar e a produzir este mesmo contexto de exploração das idéias matemáticas nas salas de aula da escola fundamental e média. E aí ele derruba uma das crenças mais tradicionais do professor que pensa que para tornar o ensino da matemática mais significativo, ele tem de trabalhar com aplicações. Não, não necessariamente, quando o aluno tem a oportunidade de construir as idéias, as relações, de estabelecer as suas conjecturas, ele vibra, ele sente o prazer da criação. Porque ele sabe o que está fazendo, ele está compreendendo e ele detém um certo poder de intuir coisas diferentes. Você conhece este livro[60]? Traz relatos de experiências de formação continuada de professores de matemática. Veja este exemplo *Fractais e porcariazinhas. -* Professor, acaba ou não acaba, desenvolvido na 6ª série. Só vou mostrar uma passagem do diálogo dos alunos, a partir do triângulo de Sierpinska, eles estão entendendo este processo de retirada de triângulos. E vou mostrar para você um diálogo entre uma aluna (Lia), um aluno (Leandro) e um professo envolvendo a noção de infinitésimos ou de limite.

(Lia) – Professor, este triângulo acaba?

(Leandro) - Não, não acaba.

(Professor) – Lia, por que acaba? Explique.

(Lia) – Acaba, porque vai chegar uma hora em que eu não consigo mais desenhar o triângulo menor.

(Leandro) – Mas eu posso ampliar. Colocar uma lente de aumento.

(Lia) – Não dá. Vai ficar tudo furadinho.

(Leandro) – Dá, porque eu posso fazer no computador. Dá, porque se eu tiver um triângulo bem porcaria, dá para fazer mais três triângulos e tirar mais uma porcariazinha.

Dario: Olha a noção de infinitésimo de Leandro!

E aí o professor devolve para a turma.

- Turma, o triângulo acaba ou não acaba?

O professor deixa aos alunos o desafio da respostas e os alunos discutem o problema até no intervalo. Isso, inclusive, tomou conta da outra classe, onde ele tinha trabalhado isto, mas essa questão não havia surgido. Ele não havia previsto isto na sua atividade. Isso surgiu como algo não previsto ou esperado pelo professor. Podemos dizer que há duas conjecturas diferentes. Uma de natureza empírica que é a da Lia, pois ela acha que pela materialidade do triângulo, ela não consegue continuar o processo de retirar triângulos cada vez menores; e a do Leandro que tem uma concepção mais lógico-matemática, ele visualiza que este processo não tem fim. E diz que por menor que seja, você sempre encontra outro ainda menor. É algo semelhante ao que temos estudado na Análise: Dado um ε, por menor que seja, sempre é possível encontrar um δ, tal que... Veja aí os alunos estão construindo pensamento e conhecimento matemático e produzindo relações muito interessantes. E isto acontece numa abordagem mais investigativa da matemática.

P – Se a gente conseguisse trazer isto para as disciplinas de "conteúdo matemático", teríamos o trabalho com o conhecimento pedagógico dos conteúdos, mas tem a questão do formador, como você colocou.

[60] FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E.M. Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. Campinas: Alinea Editora, 2006, 248p.

E - É o problema da formação do formador. Ele não tem uma formação adequada, uma cultura matemática ampla. Mas eu conheço muitos matemáticos que têm uma cultura matemática que não é “bitolada”, restrita a um campo teórico, ele consegue transitar um pouco mais e são excelentes profissionais, mas a maioria dos formadores que atuam na formação matemática do futuro professor, eu diria que não. Os primeiros têm uma relação diferente com a matemática, quem vive esta relação tende a reproduzi-la também no contexto do ensino. Ele percebe que esta abordagem é interessante e formativa também.

Quando eu falo de uma abordagem exploratória, o ponto de partida é o sentido que o aluno tem daquilo. Por ex., o sentido dos números inteiros relativos. O professor poderia perguntar: o que significa este número com este sinal (menos) na frente? Esta exploração traz um pouco daquilo que eles já construíram culturalmente, na prática social dele, ou também na escola. E este é o ponto de partida para a construção de novas idéias e aí você não sobrepõe conhecimento novo ao antigo. Mas, aquele conhecimento novo que você está trazendo se constrói a partir do que o aluno traz. Ausubel trabalhou esta idéia de que a aprendizagem significativa é aquela que se apóia sobre o conhecimento prévio do aluno. Na verdade, qualquer conceito novo que você for trabalhar, sobre divisibilidade, por ex., ele já tem idéia de divisibilidade, ele já tem algumas relações. Aí dá para fazer muitas investigações matemáticas sobre este tema e, a partir daí a teoria fica muito mais facilmente constituída para cada aluno, porque é feito em cima daquilo que ele já sabe. A mesma coisa acontece na formação continuada, quando você diz para o professor que tem de ensinar deste modo e não daquele, o formador não problematiza a prática vigente do professor. Por exemplo, se o professor já está ensinando equações e funções há dez anos e ai você vem com o discurso de ensinar de outra forma e não problematiza e não questiona que aquela forma que ele está ensinando não está levando à construção do pensamento matemático do aluno ou a uma aprendizagem significativa. Ou seja, enquanto ele não perceber isto, não adianta. A nova proposta é sobreposta. Sobreposta é como você colocar uma pintura sobre uma outra pintura que já está velha. A nova camada é uma maquiagem que não modifica a anterior e que logo, logo vai se deteriorar e voltar à camada velha.

PROF. FÉLIX

Primeira questão

Campbell e Zazkis, pesquisadores em Educação Matemática, afirmaram:
"Given the central role of number in the mathematics curriculum and the central role of the theory of numbers in the history of mathematics, it is somewhat surprising that number theory does not play a more central role in the mathematics curriculum than it does.
Traduzindo: Dado o papel central do número no currículo de matemática e o papel central da teoria dos números na história da matemática, é surpreendente que a Teoria dos Números não desempenhe um papel mais central no currículo de matemática do que tem atualmente.
No Brasil, a situação não tem sido diferente, por exemplo, nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, em algumas universidades, a Teoria dos Números não aparece como uma disciplina e quando aparece a ênfase é colocada no conteúdo e na familiarização do aluno com o método axiomático.
Você concorda com os pesquisadores, quanto ao papel da Teoria dos Números na história da matemática, e ao papel que ela tem ou poderia ter nos currículos? Como ela poderia contribuir na formação do professor de matemática da Escola Básica?
E – Acho que a Teoria dos Números não tem um papel mais presente no currículo, por um problema histórico, ou seja, da história dos currículos no Brasil. No Brasil, realmente eu não entendo muito, mas eu vejo que é mais estudado o contínuo. Talvez seja uma influência da Escola Francesa e da Escola Italiana. E também a época. Na nossa época, houve um desenvolvimento muito grande das equações diferenciais, então tudo isto influenciou muito. Há currículos que tem 4 disciplinas de Cálculo, só tem uma de Introdução á Teoria dos Números, assim não é dado o papel importante do número. Será que não deveria ser o contrário? Mas esta coisa vem vindo e a gente vai tentando mudar.
A inclusão do estudo da Aritmética nos cursos de licenciatura em matemática pode ser examinada sob duas vertentes: a necessidade do licenciando vivenciar os processos ali tratados, e o estudo desse assunto do ponto de vista cultural. A Aritmética faz parte da cultura dos tempos antigos, tendo sido desenvolvida, juntamente com a linguagem, para atender às necessidades de comunicação e de quantificação. Vemos, na história das civilizações, como os povos criaram e recriaram a Aritmética sob roupagens diferentes, mas utilizando essencialmente os mesmos processos matemáticos, aperfeiçoados ao longo do tempo. Em nossos dias, as experiências de quantificação de objetos e fenômenos fazem parte da vida prática das pessoas. E o estudo da Aritmética é uma necessidade para prover a organização adequada da sociedade e oferecer para o individuo processos matemáticos inerentes à sua estrutura lógica mental.
O ensino da Aritmética faz parte da escolaridade básica de todas as nações . Nas propostas curriculares adotadas em nosso país, essa matéria está distribuída principalmente nas quatro séries do Ensino Fundamental. O ensino da Matemática nessas séries é exercido por professores preparado em cursos de Magistério, enquanto licenciando em Matemática é instrumentalizado para ensinar matemática nas quatro últimas séries do Ensino Fundamental e na Escola Média. Mas o professor de matemática da 5ª série recebe estudantes que vem das quatro primeiras séries, Precisa ter ele conhecimento da matéria de matemática e dos métodos pedagógicos aplicáveis a essas séries para saber fazer uma avaliação real do nível de aprendizado dos estudantes. Poderá então dar prosseguimento às experiências matemáticas dos alunos tomando como base sua vivência anterior." Por exemplo, a compreensão dos sistemas de numeração do professores de todas as séries, particularmente, os de 5ª a 8ª séries, ele realmente trabalha com estes assuntos, desde a Aritmética elementar, porque o estudante

vem da 1ª a 4ª série, às vezes, com deficiências e o professor precisa saber atuar. Mesmo um assunto que o professor não dá aulas, por exemplo, o algoritmo da divisão. Ele precisa ter um conhecimento, das técnicas pedagógicas.

Assim, o estudo da Aritmética deve fazer parte dos cursos de Licenciatura. O licenciando precisa ter conhecimento conceitual, técnico e pedagógico dos assuntos da Aritmética, que deve ser apresentada a ele sob os mais variados métodos de ensino, com uso de estratégias diversificadas. Caso contrário, o licenciando conservará, como conhecimento técnico e pedagógico em Aritmética, apenas aquilo que vivenciou como estudante da Escola Fundamental. Em conseqüência, ao exercer suas atividades de ensino, tenderá a reproduzir posições cristalizadas.

Temos encaminhado nossa tese de que o estudo da Aritmética deve ser incluído nos cursos de Licenciatura em Matemática. Entretanto, não somos favoráveis à presença no currículo de disciplinas que têm como objetivo exclusivo a reciclagem das matérias do Ensino Fundamental e Médio, a título de suprir possíveis deficiências dos estudantes no conhecimento desses conteúdos. Essas matérias devem estar presentes no currículo de forma criativa, e apresentadas com uma prática pedagógica inovadora em comparação com os padrões tradicionais de ensino

P – Professor, olhando não apenas para os conteúdos, mas para a formação do professor em todos os aspectos, como o senhor vê a contribuição da Teoria dos Números?
E – Aí depende muito também do professor que vai trabalhar esta disciplina na matemática superior, porque durante um certo tempo a licenciatura foi muito ligada ao bacharelado, ou seja, ela era dependente do bacharelado. Então esta disciplina Teoria dos Números tinha um caráter teórico, mais avançado, geralmente no final do curso. Agora nós já estamos percebendo que os currículos já estão colocando esta disciplina no início e há uma tendência mais para a Aritmética e um início da Teoria dos Números que é a divisibilidade, números primos. Agora, para que ela contribua além do conteúdo destes assuntos, vai depender de como o professor trabalha a disciplina, com problemas, com projetos, com trabalho em grupos que seria uma metodologia adequada.

P – O senhor fala em seu artigo sobre atividades computacionais, eu gostaria que o senhor falasse um pouquinho mais sobre isto.
E – Com a facilidade dos computadores, a Teoria dos Números ganhou muito. Por exemplo, para saber se um número é ou não primo, obter uma lista de primos, esta é a parte que nós trabalhamos. Há alguma coisa relacionada ao algoritmo da divisão, mas mais a parte de divisibilidade e números primos.

P – Na sua opinião, quais são as abordagens possíveis?
E – Não existe uma solução que vamos dizer é esta. Eu acho que o professor deve um conhecimento de vários métodos e tentar adaptá-los naquelas situações. Mas o mais importante seria o desenvolvimento do estudo, da investigação, da criatividade. Agora realmente é difícil. Então eu uso assim, eu tento vários métodos, vou tentando otimizar. Então seria o ensino da matemática através de problemas, o que eu chamo de método genético. (...) pesquisando a história do desenvolvimento de um conceito podemos acompanhar sua construção lógico-dedutiva através dos tempos, e examinar as idéias mais simples que precederam sua acepção plena. Essas idéias podem sugerir atividades que estimulem as fases iniciais e intermediárias na construção de um conceito, permitindo-nos propor seqüências ensino-aprendizagem adequadas para estudantes dos mais variados níveis de experiência.

E, também, nesta disciplina ainda não tentei, mas numa outra que eu faço no final do curso, eu uso a idéia da teia, pelo menos eu estou tentando aprender. Qualquer dia eu aplico neste curso também. Tomo um tema e vai abrindo com leituras, conforme os alunos vai desenvolvendo. Isto eu faço na disciplina Tópicos de Matemática Superior. Agora não é muito tranqüilo aplicar isto, mas a gente vai aprendendo.

P – O que a gente tem visto, principalmente nos livros didáticos, é uma abordagem estritamente axiomática. Como o senhor vê isto?
E – A abordagem axiomática é importante do ponto de vista da construção da matemática. Então eu acho que ela deva fazer parte do ensino também. Só que eu vejo assim, um ou outro aluno é que faz bom proveito. Então fica uma pergunta: se nosso aluno na faculdade é formado sob este método, como ele vai fazer quando for exercer. Ele vai ficar num beco sem saída, porque ali não é aplicável este método, a não ser muito localmente. A princípio eu diria que não deve ser usado. As pessoas desenvolvem a mente não é só na matemática, em todas as áreas, as pessoas procuram justificar o que estão fazendo, então o professor também, ele apresenta alguma coisa e quer justificar. Então se você levar isto às últimas conseqüências, você vai cair no sistema axiomático. Aí eu acho que é preciso haver um meio termo. Eu não tenho usado o sistema axiomático e também evito fazer aulas expositivas, mas para os alunos fica difícil. Se eu não faço aulas expositivas, eu não tenho que ficar provando nada. Na prática a gente chega num meio termo. Eu realmente não tenho usado um método expositivo, axiomático.

P – O senhor usa demonstrações?
E – Veja bem. Eu faço com demonstrações, mas não com uma preocupação de ficar sempre ligando com um princípio que esteja atrás, seguindo uma seqüência linear. Às vezes, faço uma demonstração que não nada a ver (com o que veio antes). Mesmo com relação à seqüência dos assuntos, eu não me preocupo muito em seguir uma seqüência. Agora as demonstrações são importantes. Eu acho que fazem parte.

P – Então, o senhor acha que é possível conciliar uma abordagem em que a demonstração esteja presente, mas também, outras, por exemplo, a investigação matemática?
E – Eu estou tentando aprender a fazer isto. O mais difícil para você executar isto é o costume, a forma como o estudante foi educado em todos os seus anos de escolaridade. Então veja bem, o estudante vai para a aula, qual é o estado psicológico dele ao ir para uma aula? Talvez seja o seguinte – agora é o momento em que eu vou escutar, não vou trabalhar. Se o aluno vai para a aula e não quer trabalhar, fica escutando o que você vai falar, e já viciou nisto. Aí você chega e diz: - vamos fazer um problema. Vamos estudar um tema, então daqui há pouco já tem uma dispersão, a pessoa não se dedica, não sabe o que fazer, não vai atrás, não tem iniciativa, ou seja, a falta de iniciativa entre os estudantes é muito grande. Eu acho que por um vício do sistema. É complicado. Além disto, muitas vezes a gente não tem um material adequado, a gente não está muito acostumado a fazer assim. Tem tudo isto. Eu acho possível aplicar e quando a gente consegue compensa muito.

P – As dificuldades vem só da parte do aluno, ou há também dificuldades ligadas aos professores?
E – Vem da parte dos professores também, porque estes foram formados neste esquema. Então não tem um modelo. Acho que falta um modelo adequado para o professor. Falta material. Hoje está mudando bastante, já tem muita variedade. Até um certo tempo atrás, todo o material era preparado para aula expositiva. O professor gasta muito tempo preparando

material, às vezes, nem sempre o professor pode. Tem também o problema do professor que não refletiu sobre estes assuntos, então está à idéia mais antiga. Tudo isto.

Segunda questão

P - Parece não haver um consenso quanto às inter-relações e as especificidades entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números. Por exemplo, temas de Teoria dos Números são tratados nos cursos de matemática no Brasil, em disciplinas denominadas: Álgebra, Fundamentos de Álgebra ou Aritmética**. Como você vê a relação Aritmética – Álgebra – Teoria dos Números, tomando como referência o que é comum e o que é próprio a cada um desses campos?**

E – Não sei se o nome da disciplina importa muito. Por exemplo, a nossa disciplina aqui se chama Introdução à Teoria dos Números e nós temos uma disciplina chamada Teoria dos Números que é para o bacharelandos. No caso da nossa conversa é para licenciatura, então a disciplina é Introdução à Teoria dos Números. Um fato interessante que aconteceu aqui é o seguinte, nós introduzimos esta disciplina no currículo, em 1989. Eu sugeri que o nome da disciplina fosse Aritmética, mas entre os professores parece que existia uma concepção de que a Aritmética era uma coisa muito fácil, ou seja seria fazer "continhas". Então não quiseram dar este nome e sugeriram o nome Introdução à Teoria dos Números. Mas, na verdade, a Aritmética pode ser até muito difícil, dependendo da forma como você vê este nome. Eu sei que há muitos currículos por aí em que estas matérias estão em disciplinas chamadas Álgebra, Fundamentos de Álgebra. Acho que são... Eu me lembro que tem um livro do Jacy Monteiro é chamado Elementos de Álgebra e lá dentro tinha a introdução à Teoria dos Números. Então estas coisas acabam influenciando as pessoas que acabam colocando isto dentro de Álgebra.

P – Professor, o senhor não acha que há coisas que são próprias da Álgebra ou da Teoria dos Números e, às vezes, a denominação pode direcionar o curso?

E – Ah, sei. Quer dizer, se você chamar de Álgebra,talvez a pessoa seja compelida a fazer uma abordagem axiomática, porque na Álgebra existe esta tradição de fazer a construção dos conjuntos numéricos axiomaticamente. Pode ser. Acho que de um certo ponto de vista, a Teoria dos Números e a Álgebra têm métodos um pouco diferentes. Acho que faltam livros para o professor. Tem aparecido, você tem visto, né? Tem agora o do Hefez.

P – Sim, conheço e a gente já percebe alguma mudança, embora ainda meio temerosa.

E – É a forma como ele vê. Ele é um matemático teórico. Ele tentou fazer um livro, mas que, às vezes, é pouco mais difícil do que deveria. É um livro muito bom, mas segue um método tradicional. Eu estou tentando seguir este método genético. Vamos ver se eu consigo. Se o professor não tem um material fica muito difícil.

P - A partir do que eu pesquisei nos currículos, nos livros, eu estou denominando **Teoria Elementar dos Números** uma disciplina com os seguintes conteúdos e objetivos:

Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução completa; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Aritmética modulo m: congruência módulo m, teoremas de Fermat, Euler e Wilson; Equações diofantinas lineares.

Objetivos: familiarizar o aluno com a questão da prova em matemática; desenvolver a investigação matemática; discutir assuntos e questões sobre os números inteiros com as quais o professor poderá se defrontar em sua prática docente.

Qual a sua avaliação desta proposta? O que você acrescentaria ou eliminaria?

E – Este conteúdo aqui é válido, mas para a formação do licenciado precisaria de uma matéria de Aritmética, que a gente chama de Aritmética elementar que começaria com os sistemas de representação. A minha sugestão seria começar com números naturais e não números inteiros, ou seja, seguir a história. Os números inteiros têm uma abstração que não apareceu logo no início. Então, os gregos estudavam os números naturais. Nestes temas aqui onde estão as representações dos números? Não só os sistemas posicionais como também outros, como o aditivo. Geralmente isto aparece como um teorema, quando se vê o algoritmo da divisão, mas como sendo vistos outros assuntos, se passa rapidinho por este teorema. Fica desproporcional, porque este é um assunto muito visto na escola por vários anos, então no curso é visto rapidamente, na forma de um teorema e de alguns exercícios. Esta seqüencialização nos dá o ensejo de relacionar a Matemática com outros ramos do conhecimento, como História, Antropologia, Geografia, Arte e Linguística. Do ponto de vista do ensino da Matemática, é uma oportunidade de reconstrução de uma descoberta fundamental para o homem. Além disso, para que nossa mente tenha clareza da relatividade da representação decimal, é necessário o conhecimento de diferentes tipos de representacão. Caso contrário, o sistema decimal pode assumir um caráter absolutista, e sua expressão confundir-se com o conceito de número. (...)O estudo dos sistemas de numeração do ponto de vista cultural e histórico permite a relativização do sistema usual, facilitando a observação do número como conceito abstrato. Este é um trabalho delicado, e se espera que, nesse ponto, o licenciando tenha compreensão da profundidade da idéia abstrata de número, seu uso relativo na Matemática como quantificador, e a impermanência dos sistemas de representação.
Então acaba ficando desproporcional, ou seja, para mim estão faltando aqui estes assuntos. Também falta a gênese dos algoritmos das operações. O estudante não vê isto na escola. Se ele não vê na escola superior, vai ver onde? Está faltando aqui. Os algoritmos utilizados atualmente para implementar as operações fundamentais da Aritmética constituem uma síntese de um longo processo de desenvolvimento. De modo geral, o objetivo do aperfeiçoamento de um algoritmo é levá-lo a adaptar-se com perfeição ao sistema de numeração utilizado e ao instrumento ao qual se destina (ábaco, papel e lápis, computador digital). Além disso, deve propiciar economia no tempo de execução e facilidade de uso. O licenciando, ao estudar Aritmética, precisa ter a oportunidade de adquirir clareza sobre a dimensão prática dos algoritmos aritméticos e sobre seus processos de invenção e desenvolvimento. A apreensão dessas idéias é um objetivo pedagógico essencial para o futuro professor. A consecução desses objetivos educacionais pode ser alcançada pelo licenciando com o estudo do desenvolvimento histórico dos algoritmos e com a aplicação dos algoritmos usuais aos sistemas de numeração posicionais. Ao apresentar seu desenvolvimento histórico, evitamos que os algoritmos usuais, com suas regras estritas, assumam papel dogmático. E quando o licenciando implementa um algoritmo em um sistema posicional com base diferente de dez, ele não conta mais com os dados que tem na memória desde a infância. Isto lhe dá a chance de compreender efetivamente o mecanismo do algoritmo, e as dificuldades que ele encontra são semelhantes às que tem uma criança quando aprende o algoritmo no sistema decimal.
Eu entraria com os números inteiros na segunda parte, depois vem algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos. A Aritmética módulo n, eu entendo que não é muito importante para o estudante. Eu acho que ela deve aparecer de uma forma mais elementar. Equações diofantinas pode ser interessante, como as ternas pitagóricas. O desafio é trabalhar com o estudante de uma forma que ele realmente sinta o porque são estudados estes conteúdos. Às vezes, não é só uma questão de aplicação, por exemplo é útil nisso, naquilo.... . O interessante seria o aluno perceber que ali estão sendo investigados os números. Então a pessoa está fazendo uma investigação: o que são os números? Nesta investigação foi adotada uma idéia que, basicamente, é a idéia da

divisibilidade, da divisão. Isto é que é importante – o estudante perceber porque ele está estudando aquilo, como chegou, o que levou àquilo. Os livros não trazem estas idéias. Que tal a gente resgatar a idéia dos gregos: eles basearam toda a investigação no algoritmo da divisão, deve ter tido um motivo. Isto eu não sei se o professor percebeu, se ele não percebeu, não sei se ele vai passar isto.

P – Professor, eu percebo que os livros não fazem uma ponte entre o conhecimento novo e o
E – Agora, nós estamos falando de livros, mas a gente há de reconhecer o seguinte- tudo que está no livro já está morto. É claro que o livro é importante, sem ele a gente não consegue desenvolver, mas eu acho que tudo isto depende muito do professor, porque ele é quem vai avivar isto. E aí é que mora o problema. Se a pessoa não fez aquilo, como é que ela vai fazer com os outros?

P – Professor, com relação à congruência, os teoremas de Euler, Wilson, Pequeno Teorema de Fermat?
E – Estes assuntos são o coração da Teoria dos Números, mas num primeiro curso de Teoria dos Números é muito difícil abordá-los. Eu costumo abordar estes assuntos com alguns problemas, mas geralmente eu não dou esta teoria, porque você carrega muito. O efeito é contrário ao que você tem na teoria, quer dizer, a invenção da congruência foi uma observação que Gauss fez e uma síntese e isso veio simplificar muito a Teoria dos Números. Se você vai estudar isto num primeiro curso, você vai fazer o contrário, você está complicando, ao invés de simplificar. Então eu acho que é melhor, como por exemplo, Fermat percebeu o teorema dele? Tentando algumas divisões, experimentando alguns casos, então eu prefiro fazer isto, ao invés de ficar este é o teorema tal, pois assim você carrega. Num segundo curso de Teoria dos Números, acho que este é o assunto principal. O que você pode falar de módulo n é, por exemplo, par e impar. É muito importante a divisão dos números inteiros em duas classes. Há muitos problemas sobre isto. Depois você passa para módulo 3, para módulo 4, pode até generalizar. Agora ficar construindo as congruências, todas aquelas propriedades. Há outras coisas mais importantes, por exemplo, contar em outros sistemas posicionais. Eu sempre faço isto com meus alunos. Isto é bom, porque eles vão se deter, vão refletir sobre o que é um sistema posicional. Talvez não tenham compreendido direito na escola, aquilo se incorporou e ficou na memória. Então a pessoa faz sem reparar muito sobre o que está fazendo e aí, quando você usa uma outra base, o estudante tem que pensar: - bom, por que isto aqui está funcionando? Por que é desta forma? Então isto leva à compreensão do algoritmo, do mecanismo do sistema de representação.
Outra coisa também, se você pega outro sistema de base diferente e diz para o aluno: - você só sabe contar, então agora você vai somar, subtrair, dividir e multiplicar. Então você coloca os números e pede, por exemplo, agora divida este por este, ou seja, reduzindo tudo à contagem. Aí o estudante precisa realmente entender o que é a divisão. Então é preciso refazer na cabeça o que é a divisão para conseguir dividir, para conseguir dividir só usando a numeração. São coisas simples, mas que são muito úteis para a compreensão dos conceitos, das técnicas.

P – Professor, e o estudo da recorrência e da indução matemática?
E – Faz parte trabalhar com estes assuntos. Agora, há professores que dão mais ênfase, outros menos. Eu acho importante fazer este trabalho. Ele pode ser feito de uma forma bem explicativa, sem ficar fazendo teoremas. Acho que há vários textos, na Revista do Professor de Matemática. Não me detenho muito nisto, porque, como os gregos no início não usavam a indução, você pode fazer a maior parte do estudo sem usar o principio da indução finita. Alguns livros usam, mas não é necessário. Por exemplo, para provar que um número natural maior ou igual a 2 se decompõe em números primos, você pode usar a indução finita ou não.

Para este curso, o método da indução acaba não sendo necessário, mas a gente faz, porque é importante o aluno aprender. A construção dos números naturais é recorrente. O importante é entender o que é o número e para isto é necessária uma visão mais abrangente, que vem também de outras áreas, como a história, a sociologia, a antropologia e a filosofia. O estudo dos sistemas de numeração do ponto de vista cultural e histórico permite a relativização do sistema usual, facilitando a observação do número como conceito abstrato. Este é um trabalho delicado, e se espera que, nesse ponto, o licenciando tenha compreensão da profundidade da idéia abstrata de número, seu uso relativo na Matemática como quantificador, e a impermanência dos sistemas de representação.