Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estrelas Compactas e Buracos Negros - Um Estudo Comparativo de Propriedades Físicas e de Modos Quasi-Normais

Davi Giugno

Orientador : Prof. Dr. Élcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada no
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Comissão Examinadora
Prof. Dr. Élcio Abdalla (Orientador, IFUSP)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Frank Michael Forger (IME/USP)
Prof. Dr. Antônio Lima Santos (UFScar)
Prof. Dr. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor (Unicamp)

São Paulo
2006

.

Dedico este trabalho à memória de meu pai, Erasmo Giugno.

.

Resumo

Este trabalho visa o estudo das perturbações de sistemas gravitacionais altamente compactos, como buracos negros e estrelas de nêutrons e de quarks. As perturbações em questão podem ser de diversas naturezas (escalar, eletromagnética ou gravitacional), sendo que detivemo-nos mais atentamente naquelas de natureza gravitacional, tanto axial quanto polar, pois estas têm despertado mais interesse por serem astronomicamente mais fáceis de detectar. Além de estudarmos tais perturbações nos sistemas acima mencionados, procedemos a uma comparação dos resultados para buracos negros, estrelas de nêutrons e de quarks. Tal comparação justifica-se pelo fato de que a confrontação de previsões teóricas com resultados experimentais pode ajudar-nos a identificar objetos astronômicos de interesse, distingüi-los e, no caso de estrelas, aprender algo sobre sua estrutura interna, particularmente sobre a equação de estado (EDE) do fluido estelar.

No que se segue, dividimos o trabalho em sete partes. Em primeiro lugar, damos uma introdução bastante sucinta ao mesmo (Capítulo 1). Depois, falamos sobre a física de estrelas de nêutrons e de quarks (Capítulo 2). A seguir, fazemos um estudo comparativo dos dois tipos de estrelas (Capítulo 3). Mais adiante, discutimos as perturbações de diversos tipos, além de definir os MQNs (Modos Quasi-Normais) de buracos negros de Schwarzschild (Capítulo 4). Prosseguimos a discussão com a métrica de Reissner-Nordström de Sitter (Capítulo 5) e introduzimos, na seqüência, os MQNs estelares, de forma muito breve (Capítulo 6). Por fim, apresentamos nossas conclusões (Capítulo 7). A parte inédita deste trabalho está concentrada nos capítulos 5 e 6, os quatro anteriores servindo de preparativo e de base comparativa para estes dois.

Abstract

This work aims the detailed study of the perturbations of highly compact gravitational systems, such as black holes and both neutron and quark stars. Such perturbations may have several different characters, such as scalar and electromagnetic fields as well as gravitational (either axial or polar) disturbances. We have focused more closely on the latter kind of perturbation, since they offer better possibilities of detection in the near future, in the form of gravitational waves.

Besides studying the aforementioned perturbations, we have proceeded to a comparison between black holes and neutron and quark stars, when it comes to the outcomes of the perturbations, usually called QNMs (quasi-normal modes). Such a comparison is actually in order, since a direct comparison of theoretical and observational data may help us identifying astronomical objects and, in the case of compact stars, may provide valuable insights into these stars' inner structure, particularly when it comes to their equation of state (EOS).

In what follows, we have subdivided this work in seven parts. We begin with a brief introduction (Chapter 1), then proceed to a description of the physics of both neutron and quark stars (Chapter 2) and, in the sequence, to a comparative study of both kinds of star (Chapter 3). Subsequently, we develop the perturbation theory of the Schwarzschild black hole, discussing their QNMs (Chapter 4) and doing the same, later, for a more general Reissner-Nordström-de Sitter geometry (Chapter 5). After that, we provide a very brief introduction to the stellar MQNs (Chapter 6). Finally, we present our conclusions (Chapter 7). The chapters 5 and 6 carry the inedit part of this work, and the chapters from 1 to 4 pave the way and provide a comparative basis for them.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a meu orientador, Prof. Dr. Élcio Abdalla, por toda a paciência, pelo incentivo e pelo exemplo de bom profissional que me deixou (e continua a deixar) durante nossos longos anos de convívio.

Sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Alberto Vázquez Saa, do IME/ UNICAMP, pelas conversas e dicas instrutivas, principalmente na reta final do Doutorado. Obrigado também pela ajuda com programas em FORTRAN, quando precisei.

A seguir, meus agradecimentos à CAPES, pelo apoio financeiro durante o Doutorado.

Agradecimentos a todos os amigos, colegas e ex-colegas do IFUSP, em particular àqueles de convivência mais próxima, tais como (mas não se limitando a): Marcelo Pires, Leonardo Sioufi, Carlos Molina (foi um grande prazer trabalhar contigo, aprendi bastante), Karlúcio, Roman Konoplya, Bertha, Michele, Arlene, Cecília Chirenti, Pedro Lauridsen, Alan Pavan, Rodrigo Fontana, Jéferson, Carlos Eduardo Pellicer, Flávio Henrique Vieira, Arturo Samana, Fernando Auil, Rone Peterson e tantos outros. Não poderiam faltar os agradecimentos e votos de pleno sucesso ao estimadíssimo Paulo Bergo e família, bem como ao grande amigo André Gimenez Bueno, do IME/USP. Também não me esqueço do irrepreensível Bin Wang, da Fudan University (Shanghai, China).

Agradecimentos a todos os funcionários do Departamento de Física Matemática do IFUSP.

Agradecimentos a todos os amigos externos à comunidade acadêmica, pelos inestimáveis apoio e compreensão. Amigos como (mas não se limitando a) Christian e Carolina Agabiti, Sérgio Fukuhara, Eric Schönwald, Marcelo Manjon e tantos outros.

Naturalmente, como não poderia deixar de ser, agradecimentos à toda a minha família, pelo suporte e pela força moral transmitidos não apenas nestes últimos tempos, mas durante toda a minha vida. Agradeço principalmente à minha mãe, Shirley, e à minha irmã, Cristina, pelo incentivo constante ao progresso. Obrigado também ao meu irmão Edson, por tudo. E não poderia faltar a menção honrosa às minhas três lindas sobrinhas: Is-

abela, Giulia e Bruna. Vocês são e serão sempre especiais, tornando nossas vidas mais belas.

Agradecimentos sinceros e profundos àquele que foi para mim, desde tenra idade, exemplo de conduta e referência pessoal em muitos assuntos, particularmente àqueles relacionados à vida prática: meu pai, Erasmo Giugno, que não viveu o bastante para ver este trabalho terminar, mas que decerto está muito feliz, lá na Pátria espiritual, com meu progresso.

Muito obrigado também a todos os mestres que, em todos os momentos de minha vida escolar e acadêmica, incentivaram-me a crescer pessoalmente e acreditaram em meu potencial. Em particular, agradecimentos à saudosa Dna. Juracy da Silva Trunci, dos remotos tempos do ensino fundamental, por tudo.

Não poderiam faltar os meus mais profundos agradecimentos aos amigos, padrinhos, guias e benfeitores espirituais. Estiveram (e estão) sempre ao meu lado, na dificuldade e na alegria, sempre indicando-me, pela intuição e por sinais diversos, o melhor caminho a seguir. É verdade que esta modesta figura, teimosa que só ela, nem sempre lhes dá ouvidos. O que não diminui em nada meu apreço e consideração por eles.

Aproveitando o ensejo, sou grato à Espiritualidade Maior, por terem me despertado para o lado espiritual da vida, que por longo tempo deixei de lado. Graças às lições do Alto, hoje aceito e incorporo meu lado espiritual, a ponto de já não me imaginar sem ele.

Por fim, mas não menos importante, sou grato a DEUS, simplesmente por eu existir e poder tanto auscultar quanto participar desta obra maravilhosa que é o Universo (ou Multiverso, por que não ?).

Sumário

1 Introdução **17**

2 A Estrutura de Estrelas Compactas **21**
2.1 Sobre a Origem das Estrelas de Nêutrons 21
2.2 A Métrica Estelar 24
2.3 O problema da equação de estado 25
2.4 Integração Numérica das Estrelas Compactas 28

3 Comparando Estrelas Compactas **31**
3.1 Diferenças Entre Estrelas de Nêutrons 31
3.1.1 Considerações Extras Sobre Estrelas de Nêutrons . . . 34
3.1.2 Estabilidade Estelar 38
3.1.3 Visão Atual da Estrutura Interna das Estrelas de Nêutrons 40
3.2 Alguns Dados Observacionais Recentes 42
3.3 Diferenças Entre Estrelas de Quarks 42
3.4 Diferenciando Estrelas Compactas Entre Si 50

4 Perturbando o Buraco Negro S **55**
4.1 Os Potenciais Perturbativos 56
4.2 Os MQNs do Buraco Negro de Schwarzschild 59
4.2.1 O Campo Escalar com $\ell = 0$ 65

5 Perturbando Buracos Negros RNdS **69**
5.1 Trabalhando com o Método Numérico Direto 74
5.2 Trabalhando com o Método WKB 75
5.3 O Caso Quase-Extremo 79
5.4 Região Intermediária 86
5.4.1 O Caso do Campo Escalar com $\ell = 0$. 89
5.5 Limite Assintoticamente Plano 91

6 Os MQNs de Estrelas Compactas **97**

7 Conclusões **105**

A A Equação de Oppenheimer-Volkov **109**

B EDE para Estrelas de Nêutrons **111**

C Integrando Estrelas Compactas **115**

D Método Numérico Direto em BNs **119**

E Equações de Perturbação de SGs **125**
E.1 Apresentando a Métrica 125
E.2 Perturbações Escalares 126
E.3 Perturbações Eletromagnéticas 127
E.4 Perturbações Gravitacionais 128

F O Método WKB **133**

G Programas Utilizados **137**

H O Sistema Geométrico de Unidades **177**

Lista de Figuras

3.1 Gráfico de R vs. ε_0 para estrelas de nêutrons. 33

3.2 Gráfico de M vs. ε_0 para estrelas de nêutrons. 34

3.3 Gráfico de M vs. R para estrelas de nêutrons. 35

3.4 Gráfico de $\frac{p}{p_c}$ vs. r para estrelas de nêutrons, onde p_c é a pressão central. Notar a queda muito rápida de p próximo à superfície estelar. 36

3.5 Gráfico de $w = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vs. r para estrelas de nêutrons. Notar as quedas tornam-se quase verticais quando $w \approx 10^{-3} - 10^{-4}$. Não por acaso, temos aqui $\varepsilon \approx 10^{11} g/cm^3$, que é a ordem de grandeza da densidade correspondente ao *neutron drip*. Ver texto para maiores detalhes. 37

3.6 Gráfico de $m(r)$ vs. r para estrelas de nêutrons. Reparar que temos um platô na função de massa estelar, próximo à superfície estelar. Esta característica distingue estrelas de nêutrons das estrelas de quarks. 38

3.7 Gráfico de x vs. r para 2 estrelas de nêutrons. 39

3.8 Gráfico de R vs. ε_0 para estrelas de quarks. 46

3.9 Gráfico de M vs. ε_0 para estrelas de quarks. 47

3.10 Gráfico de $\frac{p}{p_0}$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15 MeV/fm^3$. 48

3.11 Gráfico de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15 MeV/fm^3$. Notar que quando o raio estelar é atingido, ε não se anula. . . 49

3.12 Gráfico de $m(r)$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15 MeV/fm^3$. Observar a ausência de um platô na função de massa nas proximidades do raio estelar. 50

3.13 Gráfico de x vs. r para estrela de quarks com $B = 15 MeV/fm^3$ e $\varepsilon_0 = 2.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$. 51

3.14 Gráfico de M vs. ε_0 para os dois tipos de estrela. 53

3.15 Gráfico de R vs. ε_0 para os dois tipos de estrela. 54

4.1 *Potencial para diversas perturbações, para $M = 1.0m$ e $\ell = 2$, com ênfase nas caudas do tipo exponencial junto ao horizonte de eventos.* 57

4.2 *Potencial para diversas perturbações, para $M = 1.0m$ e $\ell = 2$, com ênfase nas caudas do tipo lei de potência para $r \to \infty$. Próximo a $x = 0$ os potenciais diferem visivelmente, mas à proporção que x aumenta, os potenciais convergem, por terem a mesma forma assintótica.* 58
4.3 MQNs para um buraco negro de Schwarzschild. Perturbação escalar com $M = 0.713M_s$ e $\ell = 2, 3, 4$. 62
4.4 MQNs para um buraco negro nas mesmas condições, mas com $\ell = 4$ e todos os tipos de perturbações. 63
4.5 MQNs de perturbações polares para um buraco negro com $\ell = 4$ e todos os tipos de perturbações. 64
4.6 Caudas para o campo axial, com $M = 1.0$. Para os demais campos, o resultado é semelhante. 65
4.7 Potencial escalar com $\ell = 0$. Aqui, $M = 1000m$. 66
4.8 Campo escalar com $\ell = 0$, em Schwarzschild. Aqui, $M = 1000m$. 67

5.1 *Comparando os 5 tipos distintos de potenciais para massa, carga e constante cosmológica idênticos. Neste caso, $\ell = 2$, $M = 11.76m$, $Q = 5.20m$ e $\Lambda = 2.10 \cdot 10^{-3}$.* 72
5.2 *Comparando valores distintos de ℓ para $\ell = 2$, $M = 11.76m$, $Q = 5.20m$ e $\Lambda = 2.10 \cdot 10^{-3}$, para o potencial escalar. Notar que o caso $\ell = 0$ apresenta uma região onde $V < 0$.* 73
5.3 *Potencial para a perturbação axial W_1^-, para $M = 1.0m$, $Q = 0.50m$ e $\Lambda = 1.2155 \cdot 10^{-1}$, além de $\ell = 3$. Notar a simetria em torno de $x = 0$, típica de um potencial de Pöschl-Teller.* 74
5.4 *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para o campo escalar. Os valores teóricos aparecem na forma de retas, ao passo que os valores obtidos numericamente aparecem como pontos.* 81
5.5 *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para os campos polares, $W_{1,2}^+$. À esquerda, estão os dados para W_1^+ e, à direita, para W_2^+.* 81
5.6 *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para os campos axiais, $W_{1,2}^-$. À esquerda, estão os dados para W_1^- e, à direita, para W_2^-.* 82
5.7 *MQNs do campo escalar no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q e Λ, mantendo-se $M = 1.0m$ e $\ell = 2$. Temos $\kappa_+ = 10^{-3}$ em todos os casos.* 83
5.8 *MQNs do campo axial W_1^- no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q e Λ, mantendo-se $M = 1.0m$ e $\ell = 2$. Temos $\kappa_+ = 10^{-3}$ em todos os casos.* 84

5.9 *MQNs do campo axial W_1^+ no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q e Λ, mantendo-se $M = 1.0m$ e $\ell = 2$. Temos $\kappa_+ = 10^{-3}$ em todos os casos.* 85

5.10 *MQNs para o campo axial W_2^-, mostrando a dependência destes com a carga Q. Os parâmetros fixos são $\ell = 2$, $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$.* 87

5.11 *MQNs para o campo escalar, mostrando a dependência destes com a carga Q. Os parâmetros fixos são $\ell = 2$, $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$.* 88

5.12 Potencial escalar com $\ell = 0$. Aqui, $M = 6.44$, $Q = 5.44$ e $\Lambda = 2.62 \cdot 10^{-4}$. Notar a existência de dois extremos: um máximo de V positivo seguido de um mínimo de V negativo. 89

5.13 *A evolução do campo escalar com $\ell = 0$ na geometria RNdS. Os demais parâmetros são $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$. Notamos que o campo tende a uma constante, depois de uma rápida fase oscilatória inicial.* 90

5.14 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo polar W_1^+. A parte inicial da cauda é do tipo lei de potência, transformando-se em exponencial ao final da evolução temporal, para v alto.* 91

5.15 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo polar W_2^+. A parte inicial da cauda é do tipo lei de potência, transformando-se em exponencial ao final da evolução temporal, para v alto.* 92

5.16 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo W_1^+. Aqui, a cauda lei de potência - na região intermediária entre os MQNs e a cauda exponencial - foi realçada. Obtivemos, para a potência b em v^{-b}, $b = 10.1$ se $\ell = 3$ e $b = 7.86$ se $\ell = 2$.* 92

5.17 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo W_2^+. Aqui, a cauda lei de potência - na região intermediária entre os MQNs e a cauda exponencial - foi realçada. Obtivemos, para a potência b em v^{-b}, $b = 10.2$ se $\ell = 3$ e $b = 7.88$ se $\ell = 2$.* 93

5.18 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo W_1^+. Aqui, a cauda exponencial - ao final da evolução temporal dos campos analisados - foi realçada.* 93

5.19 *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite $\Lambda \to 0$, com $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, para o campo W_2^+. Aqui, a cauda exponencial - ao final da evolução temporal dos campos analisados - foi realçada.* 94

5.20 *Campo escalar ($\ell = 1$), campos polares W_1^+ e W_2^+ ($\ell = 2$) aproximando-se do limite assintoticamente plano. Os parâmetros da geometria são $Q = 0.5$, $M = 1.0$. Atentar para a cauda puramente lei de potência no caso $\Lambda = 0$, para fins de comparação.* 94

6.1 Gráfico do potencial escalar $V(r)$ vs. r, para estrela de nêutrons e buraco negro com $M = 1048m$, comparando os dois casos. 99
6.2 Gráfico do potencial axial $V(r)$ vs. r, para estrela de nêutrons e buraco negro com $M = 1048m$, comparando os dois casos. 100
6.3 Gráfico dos MQNs dos campos escalar e axial para o caso de $M = 1048m$, $\ell = 4$. 101
6.4 Gráfico dos MQNs do campo escalar, $\ell = 4$, para $M = 1048m$ e $M = 977m$. 102
6.5 Gráfico dos MQNs do campo axial com $M = 1048m$, $\ell = 2$, para diferentes valores de r - dentro da estrela, na superfície e fora da estrela. Houve pequenas diferenças nas freqüências ω dentro e fora da estrela, embora não muito pronunciadas - ver texto. 103
6.6 Gráfico dos MQNs do campo escalar com $M = 1048m$, variando-se ℓ. Como era de se esperar, as oscilações ficam mais rápidas com ℓ mais alto. 104

D.1 O Retângulo Nulo. 120
D.2 Exemplo de Grade $u - v$ com espaçamento idêntico em u e v, origem em $(u = 0, v = 0)$ e tendo por limites $u = umax$ (aproximando o horizonte de eventos) e $v = vmax$ (aproximando o horizonte cosmológico, quando for o caso)). Notar os pontos S, E, W, N onde o campo Ψ é calculado. Com os dados de Ψ_W, Ψ_E, Ψ_S, calcula-se Ψ_N de acordo com a fórmula (D.11). 122
D.3 A Grade $x - t$. 123

Capítulo 1

Introdução

Nesta introdução, discutiremos os conceitos de buracos negros e estrelas compactas, bem como os fatos básicos acerca dos mesmos.

Buracos negros são corpos extremamente compactos, com uma gravidade tão intensa que mesmo sinais viajando à velocidade da luz não lhes escapam, uma vez estando em seu interior. Uma propriedade comum a todos é a existência de uma superfície denominada *horizonte de eventos*, que separa o espaço-tempo interno ao buraco negro do espaço-tempo externo a ele, de forma que é possível a quem se encontra fora do buraco negro adentrá-lo, mas não o contrário.

Há diversos tipos de buracos negros conhecidos, mas ater-nos-emos àqueles que apresentam simetria esférica, neste trabalho. Essa classe de buracos negros, em 4 dimensões, é descrita pela métrica abaixo:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.1}$$

onde $h(r)$ é uma função cuja forma exata dar-nos-á informações sobre a estrutura do buraco negro e, falando de modo mais geral, do espaço-tempo em que o mesmo se insere. A saber, temos as seguintes possibilidades para a métrica $h(r)$:

$$\begin{aligned} h(r) &= 1 - \frac{2M}{r} \\ h(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \\ h(r) &= 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \\ h(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Na série de equações (1.2), o único parâmetro comum a todas as métricas é M, que representa a massa do buraco negro. O parâmetro Q representa a

carga elétrica do buraco negro e Λ, a constante cosmológica do espaço-tempo onde o buraco negro se insere.

O caso mais simples, na primeira equação, é o do buraco negro de Schwarzschild, onde o único parâmetro é M. Se houver carga Q, mas com $\Lambda = 0$ (segunda equação), o buraco negro passa a ser do tipo Reissner-Nordstrom. Na ausência de Q, mas na presença de Λ (terceira equação), a classificação do buraco negro dependerá do sinal de Λ. Se $\Lambda > 0$, temos um buraco negro de Schwarzschild-de Sitter, ao passo que, para $\Lambda < 0$, temos um buraco negro de Schwarzschild-Anti-de Sitter. Por fim, se os três parâmetros estão presentes (quarta equação), temos o caso dos buracos negros de Reissner-Nordström-de Sitter ($\Lambda > 0$) e de Reissner-Nordström-Anti-de Sitter ($\Lambda < 0$). A diferença de sinal entre geometrias de Sitter (dS) e Anti-de Sitter (AdS) representa, em termos físicos, a diferença entre um Universo em expansão (dS) e em contração (AdS). Abreviemos os nomes dados aos buracos negros por S, RN, SdS, SAdS, RNdS e RNAdS, respectivamente.

É pertinente notar que a estrutura do espaço-tempo muda consideravelmente de acordo com a relação existente entre os parâmetros M, Q e Λ. Com efeito, ao resolvermos $h(r) = 0$, deparamo-nos com seis cenários diferentes, de acordo com as soluções encontradas, denominadas genericamente *horizontes*.

No primeiro caso (S), temos apenas um horizonte, $r = r_+ = 2M$, que é o horizonte de eventos característico de todo buraco negro, como já mencionamos no início desta introdução. Já no segundo caso (RN), há dois horizontes $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ e $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$, desde que se tenha $M > Q$. Este segundo horizonte, r_-, é o *horizonte interno* (ou de Cauchy). No terceiro caso (SdS), dependendo da escolha dos parâmetros M, Q, Λ, há também dois horizontes, r_c e r_+, com $r_c > r_+$, onde r_c é o horizonte cosmológico. No quarto caso (SAdS), apenas o horizonte de eventos existe. O quinto caso (RNdS) é o mais interessante, pois pode apresentar - dependendo de $M, Q.\Lambda$ - os 3 horizontes: r_-, r_+ e r_c, verificando-se, neste caso, sempre a condição $r_c > r_+ > r_-$. O espaço-tempo RNdS pode apresentar, portanto, uma estrutura mais rica do que a dos quatro casos anteriores. Por fim, temos o sexto cenário, o da geometria RNAdS, em que podemos ter apenas r_+ e r_-. Quando de nosso trabalho com as perturbações de buracos negros, trabalhamos apenas na região entre r_+ e r_c (para geometrias do tipo dS, e com escolhas de M, Q, Λ que permitiam a existência destes 3 horizontes), ou entre r_+ e $r \to \infty$ (para as demais geometrias).

Os valores de r_-, r_+ e r_c, para as geometrias do tipo dS ou AdS, são calculados numericamente, dependendo dos valores de M, Q e Λ. Um caso interessante, digno de nota, é aquele em que temos dois dos horizontes bastante próximos (por exemplo, r_+ e r_c bastante próximos, no caso de buracos SdS ou RNdS). Neste caso, o buraco negro é dito ser quase-extremo. Este caso particular será estudado mais tarde, na hora de apresentarmos a teoria

das perturbações (de qualquer tipo) de estrelas e buracos negros, e também nas seções referentes à apresentação, análise e comparação de resultados. O estudo destas perturbações tem atraído o interesse de diversos pesquisadores desde os anos 50 [1], mas foi somente a partir dos anos 70 que o avanço dos métodos e recursos computacionais permitiu os primeiros cálculos extensivos acerca dos mesmos, como em [25] e em [26], dentre outros autores. O interesse pelo assunto permaneceu vivo, com maior ou menor intensidade, durante os anos 80 e 90. Ultimamente, vários fatores têm contribuído para aumentar o interesse pelo assunto: a possibilidade de detecção de ondas gravitacionais em um futuro bastante próximo, o rápido progresso de métodos e recursos computacionais, a constatação de que o Universo atual vive uma fase de expansão acelerada (reavivando o interesse por geometrias com constante cosmológica positiva, como os espaços-tempo de de Sitter [2], [3]) e até mesmo progressos recentes na teoria de cordas - neste caso, para geometrias AdS - vide [4], [5], [6] e [7]. Modos quasi-normais em geometrias do tipo AdS foram obtidos em [7], [8]. Uma boa revisão de teoria de perturbações para buracos negros e estrelas em geral está disponível em [9].

As perturbações de buracos negros manifestam-se por meio de campos escalares (perturbações escalares) ou por meio de alterações nos termos da métrica (1.2), no caso de perturbações gravitacionais. Um ponto relevante é a inexistência de modos puramente gravitacionais ou puramente eletromagnéticos, em geometrias com o termo de carga elétrica; nestas, os modos gravitacionais e eletromagnéticos misturam-se. De qualquer forma, estas perturbações são regidas por equações de onda da forma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = VW, \tag{1.3}$$

em que W é a perturbação e V, o potencial que a rege. A teoria das perturbações de buracos negros (e de estrelas compactas) encontra-se fartamente documentada na literatura, e desenvolvemo-la no Apêndice E.

Já as estrelas de nêutrons e de quarks diferenciam-se dos buracos negros de mesma massa por não serem tão compactas quanto estes, embora sejam muito mais compactas do que estrelas como o Sol, ou corpos como a Terra. Nestes corpos, uma massa M comparável à massa solar fica confinada em um volume cujo raio é da ordem de $10km$ ou menos. Um rápido cálculo dá-nos uma idéia de quão densa é uma estrela assim. Se $R = 10km$ e $M = 10^{30}kg$, então a densidade média da estrela, ρ_{av}, é

$$\rho_{av} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 10^{18} kg/m^3, \tag{1.4}$$

valor comparável à densidade da matéria nuclear.

Como veremos em maior detalhe no próximo capítulo, a densidade não é uniforme dentro do interior estelar: o valor máximo desta densidade está no centro da estrela, e é tipicamente desta ordem de grandeza (variando em

uma ordem de grandeza para mais ou para menos), e decresce à medida que nos aproximamos da superfície da estrela. No início, como veremos mais adiante, tal queda é bastante lenta, e não chega a ser uma má aproximação afirmar que, não muito longe do centro estelar, a densidade é praticamente constante.

Além da questão da densidade, há a questão da estrutura interna da estrela, que precisa sempre ser levada em conta quando se introduzem perturbações no fluido estelar. Em geral, as estrelas, por sua grande massa, têm uma tendência mais ou menos intensa ao colapso gravitacional, o que é compensado pela pressão do fluido estelar, dirigida radialmente para fora. Desenvolveremos a teoria da estrutura estelar no próximo capítulo, mas podemos antecipar, por ora, que este equilíbrio de forças no interior é regida pela equação de Oppenheimer-Volkov, que correlaciona a pressão p do fluido estelar à massa m e densidade de energia ε da estrela,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\varepsilon)(m+4\pi r^3 p)}{r^2(1-\frac{2m}{r})}, \tag{1.5}$$

sendo que p e ε relacionam-se por meio de uma equação de estado (EDE). Dedicaremos especial atenção ao problema das EDEs de estrelas de nêutrons e de quarks neste trabalho.

Por fim, cumpre-nos introduzir a métrica estelar, que é da forma

$$ds^2 = -\exp(2\nu(r))dt^2 + \exp(2\mu(r))dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.6}$$

na qual as funções $\exp(2\nu(r))$ e $\exp(2\mu(r))$ estão sujeitas às equações de estrutura estelar, que serão detalhadas no próximo capítulo. Podemos antecipar, entretanto, que fora do raio R da estrela, a métrica acima reduz-se à do buraco negro de Schwarzschild. É útil, a esta altura, definirmos uma coordenada denominada *tartaruga*, que se relaciona com a coordenada radial r por meio de

$$\frac{dx}{dr} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt}}}, \tag{1.7}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= \frac{1}{h(r)} \\ \frac{dx}{dr} &= \exp(\mu(r)-\nu(r)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

conforme estejamos lidando com buracos negros ou estrelas, respectivamente. A coordenada tartaruga é relevante em problemas de obtenção de MQNs, como veremos mais adiante.

Por fim, convém mencionar aqui que trabalhamos com o sistema geométrico de unidades, no qual $G = c = \hbar = k_B = 1$. Para detalhes sobre como passar do sistema geométrico para os sistemas de unidades convencionais (MKS ou CGS) e vice-versa, consultar o Apêndice H.

Capítulo 2

A Estrutura de Estrelas Compactas

2.1 Sobre a Origem das Estrelas de Nêutrons

Já vimos na Introdução que toda estrela, para se manter, depende crucialmente do equilíbrio entre a tendência ao colapso gravitacional e a pressão associada ao fluido estelar (cuja origem varia de acordo com o tipo de estrela estudado). Esta tendência ao colapso gravitacional é causada pela atração das camadas mais externas da estrela pela matéria contida em camadas mais internas. Qualquer desvio em relação ao equilíbrio, por parte de qualquer uma das forças em jogo pode eventualmente resultar ou no referido colapso (por pressão interna insuficiente) ou no desmantelamento da estrela (por um excesso de pressão, que empurraria as camadas externas da estrela para cada vez mais longe), a menos que, em dado momento de tais processos de colapso ou expansão, um novo ponto de equilíbrio de forças fosse atingido, estabilizando novamente a estrela

A origem desta pressão a que aludimos logo acima pode variar de estrela para estrela. Em estrelas de seqüência principal, como o Sol, o hidrogênio é convertido em hélio por reações de fusão nuclear, nas altas temperaturas ($T \approx 10^7 K$ ou mais) e pressões do núcleo estelar. Tal processo libera muita energia na forma de radiação (fótons) e neutrinos. A pressão da radiação, sendo dirigida radialmente para fora da estrela, é responsável por impedir o colapso gravitacional estelar. Este mecanismo vigora enquanto ocorrerem as reações de fusão nuclear em causa. O quão rápido esta fase de sequência principal será, é algo que será ditado pela massa da estrela, quando de sua formação. De acordo com modernas teorias astrofísicas, este tempo é inversamente proporcional ao quadrado da massa inicial da estrela, aproximadamente. Assim, quanto mais massiva a estrela, mais rápido ela esgota o hidrogênio contido em suas regiões centrais. A título de ilustração, nosso Sol já viveu aproximadamente 4.5 bilhões de anos nesta fase, e deve viver

outro tanto nesta condição, antes de passar para o estágio seguinte.

Para estrelas como o Sol, ou com massa poucas vezes maior do que ele, quando da cessação do hidrogênio no núcleo estelar, temos uma situação na qual, momentaneamente, a pressão de radiação deixa de existir e a estrela inicia o colapso, até o ponto em que tal colapso comprime e aquece as camadas mais externas da estrela, onde o hidrogênio não convertido em hélio passa a sê-lo. Estas camadas mais externas expandir-se-ão, dando origem a uma *gigante vermelha*. Enquanto isso, o núcleo de hélio continua a se aquecer e a se contrair, até que temperaturas da ordem de $10^8 K$ permitam novas reações nucleares, que formarão elementos mais pesados (C, O, possivelmente Mg). Tais reações liberam bastante energia, por vezes de forma tão intensa que podem eventualmente desestabilizar as camadas externas. Quando isto acontece, estas são ejetadas para o espaço circundante, formando uma *nebulosa planetária*. O núcleo restante, rico em He, C, O e talvez Mg, não consegue mais manter as temperaturas necessárias para prosseguir as reações nucleares por que passava, justamente por causa da ausência da pressão causada pelas camadas externas, agora ausentes. Assim, este núcleo contrai-se até transformar-se em uma anã branca, com o tamanho aproximado da Terra e altíssimas temperaturas superficiais, que podem encostar nos $10^5 K$. O Sol apresenta $6000K$ em sua superfície, para comparação. Suas densidades são da ordem de $10^6 g/cm^3$, ante os $1.4 g/cm^3$ do Sol e os $5.5 g/cm^3$ da Terra.

Nas anãs brancas, com o esgotamento as reações nucleares, é a pressão do gás de Fermi eletrônico que faz o papel de contrabalançar a gravidade, impedindo que continue o colapso gravitacional que deu origem a este estágio da vida estelar. E é a energia térmica deste gás eletrônico que responde pela luminosidade destas estrelas, que podem viver por bilhões de anos, esfriando-se em anãs amarelas, depois laranjas, depois vermelhas e cristalizando-se em anãs pretas.

Já para estrelas ditas massivas, com massas acima de 8 massas solares, o final da seqüência principal e os estágios subseqüentes da evolução estelar diferem um pouco daqueles verificados em estrelas mais leves. Há expansões de camadas externas pela combustão de hidrogênio, como nas estrelas menores, e a queima do hélio em carbono e oxigênio no núcleo. Como a massa (e subseqüente compressão gravitacional e aquecimento) das camadas externas é maior, assim que o hélio do núcleo é consumido, as camadas externas também queimam o hélio gerado pela anterior queima de hidrogênio, e o núcleo passa a queimar oxigênio e depois silício, gerando finalmente o ferro (Fe), elemento mais estável conhecido. Camadas adjacentes ao núcleo queimam C e O, assim que as condições permitirem. Do ferro, nada mais se produz por fusão. Assim, temos um núcleo ferroso cercado por camadas sucessivas de Si, O, C, He e (nas zonas mais superficiais) H. Essas queimas secundárias em camadas externas deixam a estrela bastante agigantada, bem mais do que no caso de estrelas menos massivas. São as

supergigantes vermelhas.

E agora vem a consideração que nos interessa, por explicar a origem de boa parte das estrelas de nêutrons. Nestas estrelas muito massivas, a pressão das camadas externas sobre o núcleo de elementos pesados é muito forte, por conta da gravidade intensa. Isto deixa os elétrons relativísticos nesta parte da estrela, com energia alta o bastante para promover o decaimento beta inverso (captura de elétrons por prótons, formando nêutrons e deixando os neutrinos escaparem). Diminui assim a pressão do gás de Fermi eletrônico que sustentava o núcleo contra a força gravitacional. Até que chega um ponto em que tal pressão eletrônica não mais consegue sustentar o núcleo contra a gravidade. Isto significa que este núcleo atingiu a massa-limite, acima da qual ele seria esmagado pela atração que ele próprio exerce sobre as camadas mais externas. Tal limite é o *limite de Chandrasekhar*, por volta de 1.4-1.5 massas solares. A esta altura, o núcleo já sofreu considerável *neutronização* por conta do decaimento beta inverso, ou seja, está rico em nêutrons, mesmo comportando pequenas quantidades de elétrons. Este núcleo implode ao atingir o limite acima, por ser comprimido pela gravidade, e esquenta muito, chegando a $10^{11}K$. Só a pressão de elétrons remanescentes e neutrinos, todos ultra-relativísticos (agora muito aquecidos), impede o colapso total do mesmo.

Por uma série complexa de reações que não cabe mencionar aqui (ver [10] e referências ali contidas), a estrela chega ao ponto em que o colapso das camadas externas é seguido por uma violenta explosão que ejeta todas estas camadas para o espaço circundante, restando apenas o núcleo extremamente denso e quente, rico em nêutrons, mencionado no parágrafo anterior. Tal explosão é denominada *supernova*, e espalha elementos químicos mais pesados do que H e He pelo espaço à volta. Sem estes elementos, corpos como a Terra não se formariam, e nós não existiríamos - donde a relevância deste fenômeno. O núcleo restante é uma *protoestrela de nêutrons*. Sendo este o principal meio conhecido de formação deste tipo de estrela, ficamos assim sabendo que elas nascem extremamente quentes ($T \approx 10^{11}K$), perdendo energia depois por emissão de neutrinos e depois, de fótons. Voltaremos a este ponto ao discutirmos a equação de estado para tais estrelas.

Em estrelas de nêutrons, que são consideravelmente mais densas do que as anãs brancas, é o gás de Fermi de nêutrons que responde pela pressão que contrabalança a gravidade. Isto se não levarmos em conta as interações nucleares, repulsivas para distâncias muito curtas entre nucleons, que tendem também a contrabalançar a tendência ao colapso gravitacional. Apesar de não termos lidado com equações de estado (para a matéria estelar) envolvendo interações nucleares, dada a complexidade das mesmas, faremos alguns comentários adicionais sobre elas, na seção que discorre justamente sobre o problema da equação de estado em estrelas de nêutrons.

É perto da superfície estelar que a situação torna-se diferente para estrelas de nêutrons e de quarks, dependendo da equação de estado usada. Nas

primeiras, há uma queda abrupta de ρ nas vizinhanças da crosta (região de profundidade da ordem de centenas de metros), até que ρ se anule na superfície estelar. No caso das estrelas de quarks que estudamos aqui, ρ é de fato menor junto à superfície, mas não se anula, podendo mesmo ter a mesma ordem de grandeza da densidade central ou, no máximo, ser uma ordem de grandeza inferior a esta.

2.2 A Métrica Estelar

Assim como no caso de buracos negros, nós nos restringiremos ao caso das estrelas que apresentam simetria esférica, e que podem ser descritas por uma métrica do tipo

$$ds^2 = -\exp(2\nu)dt^2 + \exp(2\mu_2)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.1}$$

onde $\mu_2 = -\frac{1}{2}\ln(1 - \frac{2m(r)}{r})$, $m(r)$ sendo a massa da estrela até um certo raio r. Fora da estrela, a métrica assemelha-se à de Schwarzschild, o que nos leva a tomar $exp(2\nu) = 1 - \frac{2M}{R}$ quando $r = R$, isto é, quando atingimos o raio da estrela, R, bem como sua massa total, M (condição de continuidade da métrica quando atravessamos o raio estelar).

Diferentemente dos buracos negros, aqui é preciso ocupar-se da descrição da estrutura interna da estrela. Suporemos que o fluido estelar é um fluido perfeito (sem viscosidade, turbulência e outros fenômenos), apresentando uma pressão p e uma densidade de energia ε, bem como uma 4-velocidade U_μ bem definidas. Esta última é tal que, no referencial de repouso do fluido, $U_r = U_\theta = U_\phi = 0$ e somente U_t não se anula. Como $U \cdot U = -1$, temos $U_t = -\exp(\nu)$.

Estas hipóteses deixam o tensor momento-energia do fluido com a forma bastante simples abaixo,

$$T_{\alpha\beta} = (p + \varepsilon)U_\alpha U_\beta + p g_{\alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Para a massa estelar, temos

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \varepsilon(r) dr, \tag{2.3}$$

ao passo que o termo ν da métrica está sujeito a

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{1}{p + \varepsilon}\frac{dp}{dr}, \tag{2.4}$$

e $\frac{dp}{dr}$, a variação de pressão, obedece à equação de Oppenheimer-Volkov, dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p + \varepsilon)(m(r) + 4\pi r^3 p)}{r^2(1 - \frac{2m(r)}{r})}. \tag{2.5}$$

Para uma dedução sucinta das equações (2.4) e (2.5), consultar o Apêndice A.

Voltaremos a estas equações quando falarmos da integração numérica das mesmas.

2.3 O problema da equação de estado

Se há um grande responsável pelas diferenças existentes entre estrelas de nêutrons e de quarks, trata-se das equações de estado (EOS) que governam sua estrutura interna.

Na estrela de nêutrons, supomos um gás de nêutrons puro, sem contaminação por elétrons e prótons. Em verdade, temos os seguintes processos ocorrendo dentro de uma estrela de nêutrons:

$$\begin{aligned} p + e^- &\rightarrow n + \bar{\nu}_e \\ n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde o primeiro processo é a captura de elétrons por prótons, e o segundo, o decaimento β, em que nêutrons decaem em prótons e elétrons. No entanto, a estatística de Fermi-Dirac proíbe dois ou mais férmions de ocuparem o mesmo estado quântico simultaneamente. Se quisermos impedir o decaimento beta, deveremos contar sempre com um mar de elétrons que preencha todos os níveis de energia até a energia de Fermi, ε_F. De acordo com a primeira equação, isto implica a existência de um mar de prótons (neutralidade de carga).

Na prática, porém, tais contaminações eletrônicas e protônicas serão pequenas, isto é, o número de prótons (e de elétrons) será bem menor que o de nêutrons. Assim, justifica-se a idéia apresentada acima, de desconsiderar prótons e elétrons na análise de estrelas de nêutrons. Além do mais, supomos, para simplificar, que o gás de nêutrons está a temperatura nula. Tomamos o espectro de energia dos nêutrons como sendo relativístico, isto é, $\varepsilon = \sqrt{k^2 + m^2}$, com k representando o momento e m, a massa de repouso do nêutron.

Já dissemos na seção precedente que as estrelas de nêutrons nascem geralmente muito, muito quentes, como subproduto de supernovas, atingindo temperaturas da ordem de $10^{11}K$. Esta é aproximadamente a temperatura de Fermi da matéria nuclear. No entanto, as estrelas de nêutrons resfriam-se muito rápido, inicialmente por maciça emissão de neutrinos. Segundos após a própria formação, esfriam para $10^{10}K$. Por meio de novas emissões de neutrinos, bem como de fótons, a temperatura cai a 10^8K em aproximadamente um mês. Este último valor já é baixo, se comparado aos $10^{11}K$ ou mais da temperatura de Fermi nuclear. Com o passar do tempo, por meio de processos diversos (reações envolvendo híperons - bárions com quarks s em sua composição - entre outros), a temperatura das estrelas de nêutrons

diminui ainda mais, mas em um ritmo bem mais lento. Após 1 milhão de anos, temos $T \approx 10^6 K$ no interior estelar, e entre $10^5 K$ e $10^6 K$ na superfície [10], [16]. Valores que são ainda mais baixos se comparados à temperatura de Fermi nuclear, T_{FN}. Em outras palavras, $T/T_{FN} \ll 1$, e é assim que deve ser lida a aproximação $T = 0$ nos parágrafos subseqüentes.

Na estatística de Fermi-Dirac, cujos detalhes aparecem no Apêndice B, temos, para um gás de Fermi a temperatura nula, as seguintes expressões para a pressão p e a densidade de energia ε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 3\alpha \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2+m^2}\, dk = 3\chi \int_0^b u^2 \sqrt{1+u^2}\, du \\ p &= \alpha \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2+m^2}} dk = \chi \int_0^b \frac{u^4}{\sqrt{u^2+1}} du, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $u = \frac{k}{m}$, $\chi = \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3}$, $\alpha = \frac{\chi}{m}$ e $b = \frac{k_F}{m}$, m sendo a massa do nêutron. Integrando tais expressões, temos

$$\begin{aligned} p &= \frac{\chi}{8}[(2b^3 - 3b)\sqrt{1+b^2} + 3\ln(b + \sqrt{1+b^2})] \\ \varepsilon &= \frac{3\chi}{8}[(2b^3 + b)\sqrt{1+b^2} - \ln(b + \sqrt{1+b^2})]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nas duas passagens acima, temos novamente $\chi = \frac{m_n^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3}$, de sorte que $\chi/c^2 = 6.11 \cdot 10^{15} g/cm^3$. Pode-se relacionar p e ε por meio do parâmetro b. É interessante observarmos o comportamento de p e de ε nos limites $b \to 0$ e $b \to \infty$. Nestes limites, temos

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} p &= \frac{\chi b^5}{5} \\ \lim_{b\to 0} \varepsilon &= \chi b^3 \\ \lim_{b\to \infty} p &= \frac{\chi b^4}{4} \\ \lim_{b\to \infty} \varepsilon &= \frac{3\chi b^4}{4}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

de onde temos $p \propto \varepsilon^{\frac{5}{3}}$ no regime de b pequeno (baixas densidades) e $p = \frac{\varepsilon}{3}$ no regime de b alto (altas densidades). No mais das vezes, porém, encontra-se b a partir de p (ε), para então buscarmos ε (p), algo que pode ser feito numericamente. Em nosso trabalho com estrelas de nêutrons, a equação (2.8) foi a EOS utilizada. De qualquer forma, tem-se $p = 0$ quando $\varepsilon = 0$.

Já para as estrelas de quarks, tomamos o modelo mais simples conhecido, que é o modelo denominado MIT Bag Model. Este modelo surgiu como uma primeira tentativa de se explicar as massas dos hádrons em termos das massas dos quarks que os compõem. Além do mais, serviu também para

explicar o comportamento dos quarks em geral. Neste modelo, os quarks são confinados em um volume V do espaço, e para tanto o vácuo deve ser eliminado de V. Esta eliminação do vácuo custa energia. Tal energia, por unidade de volume, é denominada B (*bag constant*), e portanto BV é a energia associada à mera presença dos quarks no volume V. A energia cinética dos quarks em V soma-se a BV, de modo que a energia total dos quarks em V excede em muito qualquer energia associada à condição de superfície (segundo a qual os quarks não podem atravessar a superfície que isola o volume V do meio externo).

Dentro deste modelo, a questão que surge naturalmente é: qual o valor de B que melhor reproduz as propriedades observadas para a matéria hadrônica? A resposta a esta questão depende de algumas considerações que serão feitas logo a seguir.

Primeiro, apenas 3 sabores de quarks (os mais leves) são normalmente encontrados na matéria hadrônica no Universo atual: u (up), d (down) e s (strange). Em uma estrela de quarks, esperamos encontrar estes 3 sabores, e a energia por partícula deste conjunto de quarks deve ser comparada com aquela dos nucleons (livres ou agrupados em núcleos). Se esta última for a menor, então a matéria mais estável - do ponto de vista energético - será aquela composta de nucleons (prótons e nêutrons); do contrário, a matéria composta de quarks em *bags* será mais estável do ponto de vista energético e dominará a composição química estelar. O valor de B, assim, determinará a energia por partícula da matéria composta puramente por quarks.

Da Física Nuclear, sabemos que o núcleo de Fe_{26}^{56} é o mais estável conhecido, apresentando a menor energia por nucleon dentre todos os núcleos, de $928MeV$. O valor de B que leva a uma energia por partícula com este mesmo valor [20] é $B^{1/4} = 154.5MeV$. Passando este valor para as unidades nucleares, temos

$$B = \frac{(154.5MeV)^4}{(\hbar c)^3} = \frac{(154.5MeV)^4}{(197.3MeV \cdot fm)^3} \approx 75MeV/fm^3. \qquad (2.10)$$

Qualquer valor de B inferior a este implicará uma energia por partícula mais baixa do que a do Fe_{26}^{56}, ou seja, deixará a matéria composta puramente pelos quarks u, d e s mais estável do que a matéria nuclear e, portanto, mais apta a formar corpos celestes (estrelas) ultracompactos. Do contrário, a matéria nuclear será mais estável e estrelas de nêutrons serão o resultado natural desta situação. Este valor será importante no próximo capítulo, ao compararmos estrelas de quarks e estrelas de nêutrons.

Alguns autores, como [10], ainda mencionam a possibilidade de nos depararmos com estrelas híbridas, isto é, estrelas onde a região central apresenta matéria na forma de quarks u, d e s, mas onde as camadas exteriores apresentam um gás de nucleons e mesmo núcleos (estes, junto à superfície estelar), mas não lidaremos com esta hipótese aqui. Vamos então ao que nos importa neste modelo: a equação de estado (EDE).

Neste modelo, a EDE é simplesmente

$$p = \frac{\varepsilon - 4B}{3}, \tag{2.11}$$

onde B é uma constante que mede a intensidade do confinamento de quarks (bag constant). A primeira coisa que pode ser notada a partir da equação (2.11) é que o anulamento de p (que define o raio estelar) não implica o anulamento de ε, diferentemente do que ocorre com estrelas de nêutrons. Ainda em razão disso, a densidade central da estrela deve superar $4B$. Mais detalhes de como a estrutura estelar é afetada aparecem no capítulo seguinte, ao compararmos os dois tipos de estrela (nêutrons/quarks).

Há diversos outros modelos teóricos para as propriedades de quarks em geral, como em [55], levando a outras EDEs, mas ater-nos-emos ao modelo MIT aqui citado, por ser mais fácil de ser trabalhado.

2.4 Integração Numérica das Estrelas Compactas

Integramos numericamente as estrelas de quarks e de nêutrons por meio das equações (2.5) e (2.3), partindo das condições iniciais $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ e $m(0) = 0$. O método numérico empregado foi o método Runge-Kutta de passo variável, descrito no Apêndice C.

A integração termina quando p se anula. O valor de r para o qual isto ocorre é o raio estelar, R, sendo que a massa correspondente é a massa estelar, M. Para $r = R$, temos

$$\nu(R) = \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{2M}{R}), \tag{2.12}$$

que é decorrente da continuidade da métrica em $r = R$, já que a métrica externa a estrela é a de Schwarzschild, para a qual $\exp(2\nu) = 1 - \frac{2M}{r}$. Eis que surge o ponto: como não sabemos a priori os valores de R e de M para uma determinada densidade central ε_0, não temos como antecipar o valor de $\nu(R)$ e, consequentemente, o valor de ν em $r = 0$, $\nu(0)$. Na prática, podemos tomar $\nu(0) = 0$ ao integrarmos (2.4) e comparar $\nu_(R)$ numérico ($\nu_{num}(R)$) com o valor analítico acima, $\nu_{an}(R)$. A diferença entre eles, $\nu_{num}(R) - \nu_{an}(R)$, dar-nos-á o valor de $\nu(0)$ real.

É útil integrar também a coordenada tartaruga x dentro da estrela, já definida em (1.7) e que reproduzimos aqui:

$$\frac{dx}{dr} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt}}} = \frac{\exp[-\nu(r)]}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \tag{2.13}$$

que fora da estrela corresponde à coordenada tartaruga de Schwarzschild,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= \frac{1}{h(r)} \\ h(r) &= 1 - \frac{2M}{r}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

resultando em

$$x(r) = r + 2M \log(-1 + \frac{r}{2M}). \tag{2.15}$$

É necessário que a condição de continuidade de x através da superfície estelar se verifique. Assim, em $r = R$, $x = x_R = R + 2M \log(-1 + \frac{R}{2M})$. Esta condição ajudar-nos-á a fixar o valor de x em $r = 0$, x_0, uma vez que a estrutura da estrela tenha sido integrada (M e R conhecidos, bem como $\nu(0)$). Com isso, o valor numérico de $x(R)$ obtido pela integração de (2.13) pode ser confrontado com o valor analítico acima. Estas definições e considerações valem para os dois tipos de estrela.

Capítulo 3

Comparando Estrelas Compactas

Neste capítulo temos uma comparação razoavelmente extensa das características de estrelas de nêutrons e de quarks, e focaremos as eventuais semelhanças e diferenças entre elas. Comecemos por apresentar as diferenças entre estrelas de nêutrons que diferem entre si pela densidade central, ε_0.

3.1 Diferenças Entre Estrelas de Nêutrons

Entre as estrelas de nêutrons, constatamos variações no raio R e na massa M em função da densidade central. Uma tabela de valores de R e M para diferentes densidades centrais ε_0 se segue. Como a equação de estado para estrelas de nêutrons, definida no capítulo anterior, dependia de um parâmetro b diretamente proporcional ao momento de Fermi do gás de nêutrons, o valor de b correspondente a esta densidade central também foi tabelado junto com ε_0 e denominado b_0. Definimos também outra grandeza, denominada *compacidade* e denotada por c, que mede o grau de compactação da estrela. Definimo-la como

$$c = \frac{r_+}{R}, \tag{3.1}$$

onde r_+ é o horizonte de eventos do buraco negro que tem a mesma massa M da estrela. Naturalmente, um buraco negro de Schwarzschild tem $R = r_+ = 2M$, e portanto apresenta $c = 1$. Como estamos lidando com estrelas esfericamente simétricas e estáticas, o buraco negro de Schwarzschild é a nossa referência comparativa, de sorte que $r_+ = 2M$, neste trabalho. Como $R > r_+$ em qualquer estrela, temos $0 < c < 1$ no que se segue. Quanto mais perto c estiver de 1, tanto mais compacto é o objeto em questão e mais próximo ele está de um buraco negro.

- **Densidades Centrais, Massas e Raios para Estrelas de Nêutrons Puras**

$\varepsilon_0(g/cm^3)$	b_0	$R(m)$	$M(m)$	c
$3.0 \cdot 10^{13}$	0.169482	25809.276	262.950	0.02038
$5.0 \cdot 10^{13}$	0.200716	23557.514	330.494	0.02806
$7.0 \cdot 10^{13}$	0.224320	22156.715	382.201	0.03450
$1.0 \cdot 10^{14}$	0.252316	20736.578	443.341	0.04276
$2.0 \cdot 10^{14}$	0.316793	18148.008	578.997	0.06381
$3.0 \cdot 10^{14}$	0.361613	16728.621	665.739	0.07959
$5.0 \cdot 10^{14}$	0.426747	15032.749	776.657	0.10333
$7.0 \cdot 10^{14}$	0.475546	13971.184	846.545	0.12118
$1.0 \cdot 10^{15}$	0.532931	12895.279	913.824	0.14173
$1.2 \cdot 10^{15}$	0.564676	12365.777	944.308	0.15273
$1.5 \cdot 10^{15}$	0.605883	11737.49	977.12	0.16650
$2.0 \cdot 10^{15}$	0.663038	10961.19	1011.02	0.18447
$2.5 \cdot 10^{15}$	0.710665	10386.71	1030.08	0.19835
$3.0 \cdot 10^{15}$	0.751824	9936.11	1040.70	0.20948
$3.5 \cdot 10^{15}$	0.788259	9568.86	1046.15	0.21866
$4.0 \cdot 10^{15}$	0.821073	9261.14	1048.25	0.22638
$4.5 \cdot 10^{15}$	0.851007	8997.94	1048.12	0.23297
$5.0 \cdot 10^{15}$	0.878591	8769.13	1046.48	0.23872
$5.5 \cdot 10^{15}$	0.904213	8567.61	1043.78	0.24366
$6.0 \cdot 10^{15}$	0.928171	8388.24	1040.34	0.24805
$6.5 \cdot 10^{15}$	0.950695	8227.11	1036.38	0.25194
$7.0 \cdot 10^{15}$	0.971972	8081.30	1032.70	0.25558
$7.5 \cdot 10^{15}$	0.992150	7948.70	1026.68	0.25833
$8.0 \cdot 10^{15}$	1.011353	7826.75	1022.80	0.26136
$9.0 \cdot 10^{15}$	1.047228	7611.02	1013.12	0.26622
$1.0 \cdot 10^{16}$	1.080246	7425.06	1003.36	0.27026
$1.1 \cdot 10^{16}$	1.110884	7262.61	993.71	0.27365
$1.2 \cdot 10^{16}$	1.139505	7119.06	984.27	0.27652
$1.4 \cdot 10^{16}$	1.191773	6875.86	966.22	0.28105
$1.6 \cdot 10^{16}$	1.238706	6676.75	949.40	0.28439
$1.8 \cdot 10^{16}$	1.281415	6509.96	933.79	0.28688
$2.0 \cdot 10^{16}$	1.320689	6367.78	919.31	0.28874
$3.0 \cdot 10^{16}$	1.481678	5882.83	860.50	0.29255
$4.0 \cdot 10^{16}$	1.605953	5595.85	817.47	0.29217

As figuras ilustrando a dependência de R e de M com ε_0 são as Figs. (3.1) e (3.2). Também plotamos um gráfico de M vs. R, que aparece na Fig. (3.3).

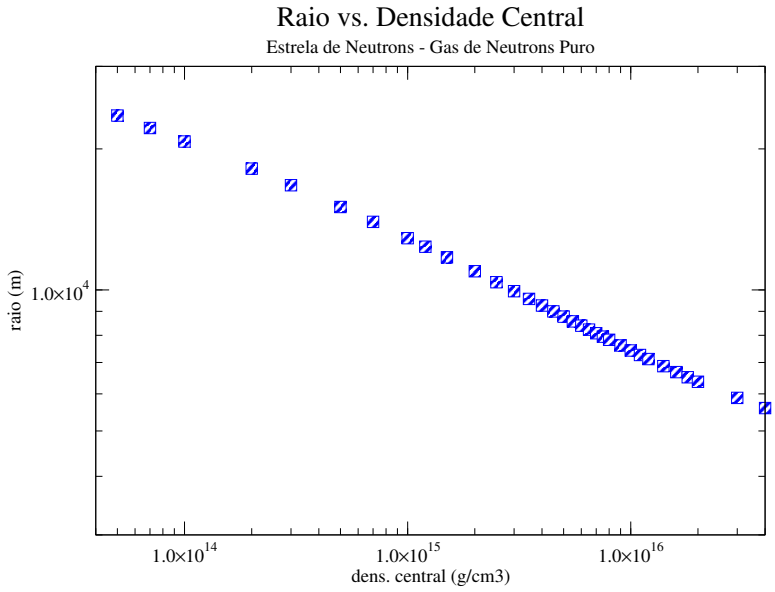

Figura 3.1: Gráfico de R vs. ε_0 para estrelas de nêutrons.

Os dados de que dispomos mostram que o raio estelar decresce monotonicamente com o aumento de ε_0, ao menos para a faixa de densidades com as quais trabalhamos. Um ajuste numérico para os dados da tabela acima forneceu-nos $b = -0.22$ na relação $R \propto \varepsilon^b$, ou seja, temos aqui $R \propto \varepsilon^{-\frac{1}{5}}$, aproximadamente. Já o mesmo não acontece com as massas estelares. Estas experimentam um crescimento moderado com ε_0 até um certo valor $\varepsilon_0 \approx 4.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$, decrescendo para densidades acima deste valor. A grandeza c cresceu monotonicamente com ε_0 - exceto talvez pelo último valor desta na tabela - significando que, neste modelo, quanto maior a densidade central, mais compacta é a estrela. De qualquer maneira, c aparentemente não supera 0.3. A maior parte das estrelas de nêutrons conhecidas tem $R \approx 10km$ e $M \approx 1.5 - 2.0km$, o que acarreta valores de c em torno de 0.3 a 0.4. Discutiremos um pouco mais esta questão das massas estelares a seguir.

Seria interessante, de qualquer modo, ilustrar as funções p, ε e m versus r, para alguns valores de massa. Fizemo-lo nas figuras (3.4), (3.5) e (3.6).

As figuras (3.4), (3.5) e (3.6) deixam bem claro o fenômeno de *neutron drip* - fenômeno marcado pela inexistência de novos estados ligados para os nêutrons no núcleo atômico, o que obriga os nêutrons a abandonarem gradualmente o núcleo, dando origem a um gás de nêutrons. Este fenômeno se denuncia pelo fato de a densidade (e a pressão) caírem abruptamente,

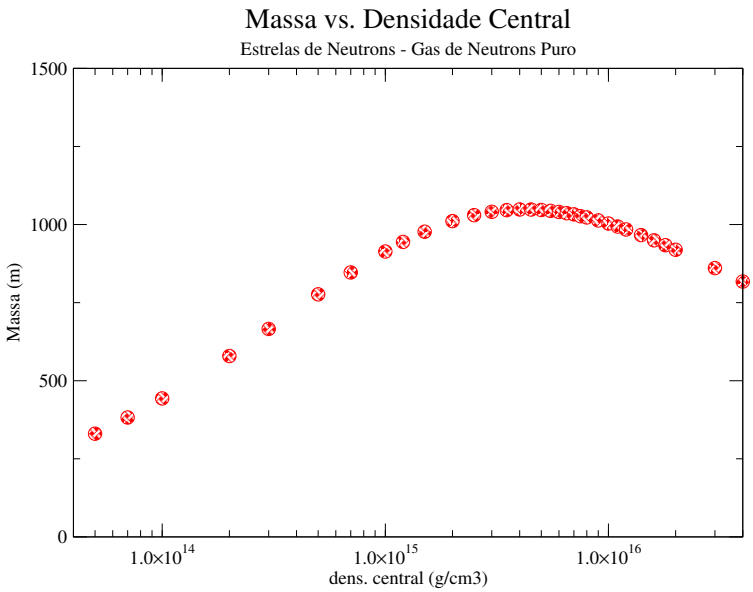

Figura 3.2: Gráfico de M vs. ε_0 para estrelas de nêutrons.

marcando, na prática, a separação entre a crosta externa da estrela e as camadas mais internas. Como temos ε_0 da ordem de $10^{15} g/cm^3$ nas estrelas ilustradas aqui, e como a densidade para a qual se tem *neutron drip* é de $\varepsilon_{drip} = 4{\cdot}10^{11} g/cm^3$, isto significa que o fenômeno deve se manifestar quando $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 10^{-4}$, o que de fato pode ser visto na Fig. (3.5). Como veremos mais adiante neste capítulo, esta é uma característica importante das estrelas de nêutrons que o modelo simplificado de Oppenheimer-Volkov consegue reproduzir. Por fim, dois exemplos de como fica a coordenada tartaruga, x, em função de r, no interior estelar, na Fig. (3.7).

Para os dois valores de massa da Fig. (3.7), temos um valor positivo para o valor de x em $r = 0$, x_0 , e outro negativo, sendo ambos finitos. Em geral, quanto mais compacta a estrela (maior valor de c), tanto menor será x_0 (mas será ainda finito). Esta finitude de x_0 será importante na discussão da dinâmica de campos em geometrias contendo estrelas compactas.

Em tempo: o programa usado para integrar estrelas de nêutrons consta do Apêndice G.

3.1.1 Considerações Extras Sobre Estrelas de Nêutrons

Os valores máximos de massa para estrelas de nêutrons que obtivemos, em nosso tratamento do modelo de gás de Fermi de nêutrons não-interagentes,

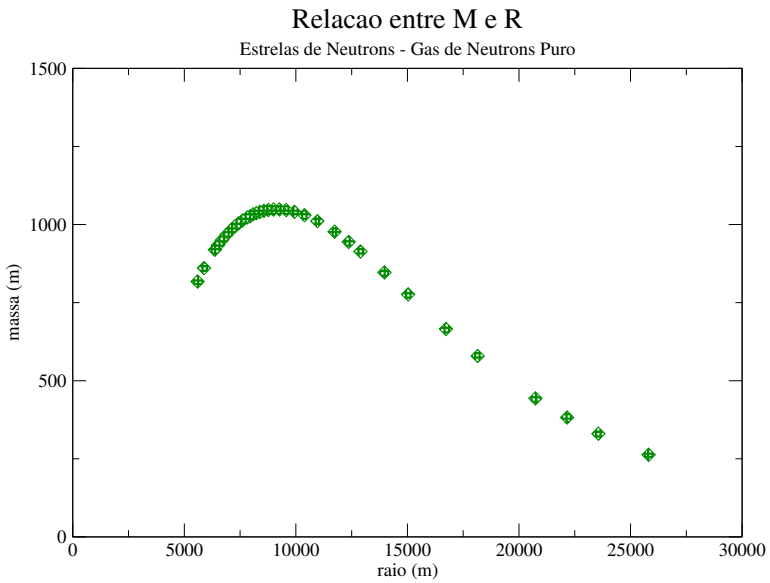

Figura 3.3: Gráfico de M vs. R para estrelas de nêutrons.

de $0.713M_s$, é perfeitamente compatível com os valores mencionados para o mesmo modelo em outros trabalhos, por exemplo $0.70M_s$ em [10] e em [31] e $0.72M_s$ em [11]. Isto indica que as massas aqui tabeladas estão dentro do esperado para este modelo. Assim sendo, cabe uma pergunta: por que as estrelas de nêutrons detectadas em observações astronômicas apresentam massas que são pelo menos o dobro - chegando, por vezes, ao triplo - das que encontramos aqui ?

A resposta está no fato de que a equação de estado que usamos, embora seja útil para reproduzir algumas características relevantes de estrelas de nêutrons, não representam estrelas de nêutrons reais. Nestas, dadas as condições de densidade e temperatura habitualmente encontradas, a composição química, embora obviamente dominada por nêutrons, não prescinde de outros hádrons (tanto bárions quanto mésons) e léptons, como elétrons (para estabilizar a estrela contra o decaimento β) e múons. Detalhar a composição química destas estrelas está fora do escopo deste trabalho, e esbarra também nas limitações atuais na compreensão das propriedades da matéria em densidades supranucleares ($\gtrsim 10^{15} g/cm^3$). Por ora, basta dizer que a presença de interações nucleares *eleva* as massas estelares, por causa do caráter repulsivo de tais forças a distâncias muito curtas, da ordem de $1fm = 10^{-15}m$ (os nucleons ficam muito próximos uns aos outros, no estado de alta compressão gravitacional em que se encontram na matéria estelar).

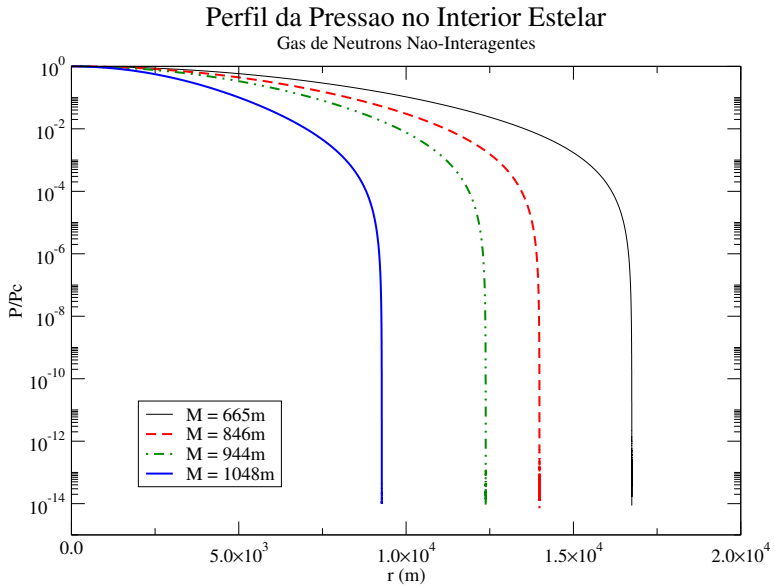

Figura 3.4: Gráfico de $\frac{p}{p_c}$ vs. r para estrelas de nêutrons, onde p_c é a pressão central. Notar a queda muito rápida de p próximo à superfície estelar.

Tal pressão soma-se à pressão do gás de Fermi de nêutrons, aumentando, *em um primeiro momento*, a resistência da estrela ao colapso gravitacional. Isto permite um aumento considerável na massa estelar, pois a estrela consegue suportar tal massa extra, justificando as massas verificadas (de $1.3M_s$ a mais de $2M_s$).

Vem daí uma questão interessante que vale a pena mencionar: pode-se aumentar livremente a massa estelar, desde que tenhamos meios de impedir o colapso gravitacional mediante um aumento de pressão do gás de nêutrons e de interações nucleares? A resposta é *não*, e basta observar a equação de Oppenheimer-Volkov (2.5) para perceber o porquê. A pressão oriunda de interações nucleares e de gases de Fermi também contribui para o campo gravitacional estelar, juntamente com a massa estelar e a densidade de energia. Se num primeiro momento a pressão em questão faz a estrela resistir ao colapso gravitacional, permitindo até um aumento significativo (mas não exagerado) da massa estelar, em dado momento a contribuição da pressão para o campo gravitacional será tal que anula qualquer efeito estabilizador contra esse mesmo colapso gravitacional. Assim, é lícito afirmar que há uma *massa limite*, M_{lim}, para estrelas de nêutrons não-girantes e que sejam estritamente bariônicas, isto é, não apresentem em seu interior matéria na forma de um fluido de quarks (por exemplo), e este limite é algo intrínseco à

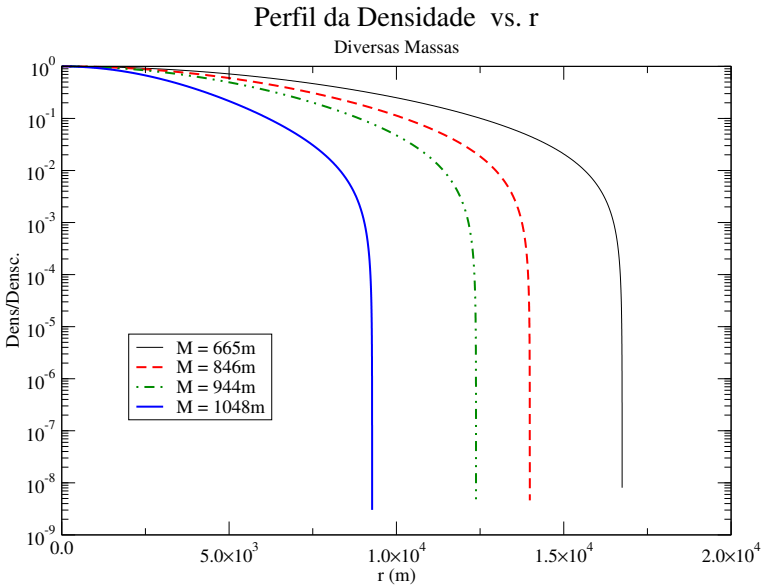

Figura 3.5: Gráfico de $w = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vs. r para estrelas de nêutrons. Notar as quedas tornam-se quase verticais quando $w \approx 10^{-3} - 10^{-4}$. Não por acaso, temos aqui $\varepsilon \approx 10^{11} g/cm^3$, que é a ordem de grandeza da densidade correspondente ao *neutron drip*. Ver texto para maiores detalhes.

natureza da Relatividade Geral. O valor de M_{lim} pode depender da equação de estado, mas a sua existência não. Estimativas diversas de um teto para M_{lim} já foram feitas em diversos trabalhos, como em [11], e revolvem em torno de $3M_s$, ou até um pouco menos.

A presença de rotação aumenta a resistência da estrela ao colapso gravitacional, pois a força centrífuga - no referencial de um observador que gira solidário à estrela - soma-se à pressão do fluido estelar, permitindo à estrela sustentar uma massa maior. Este efeito é tanto maior quanto maior for a velocidade angular Ω da estrela em torno de seu eixo, medida por um observador distante. De qualquer forma, a idéia da massa-limite persiste para este tipo de estrela. Alguns autores [35] colocam este limite em cerca de 18% acima da massa-limite para estrelas de nêutrons estáticas (levando tal limite para $3.5M_s$, caso o valor de $3M_s$ para estrelas estáticas esteja correto), se a matéria for estritamente bariônica, mas há quem estime valores de até 30% acima do limite estático (algo como $3.9M_s$) [36]. Voltaremos à questão das massas estelares ao final do capítulo. Isto posto, vem a questão da estabilidade estelar.

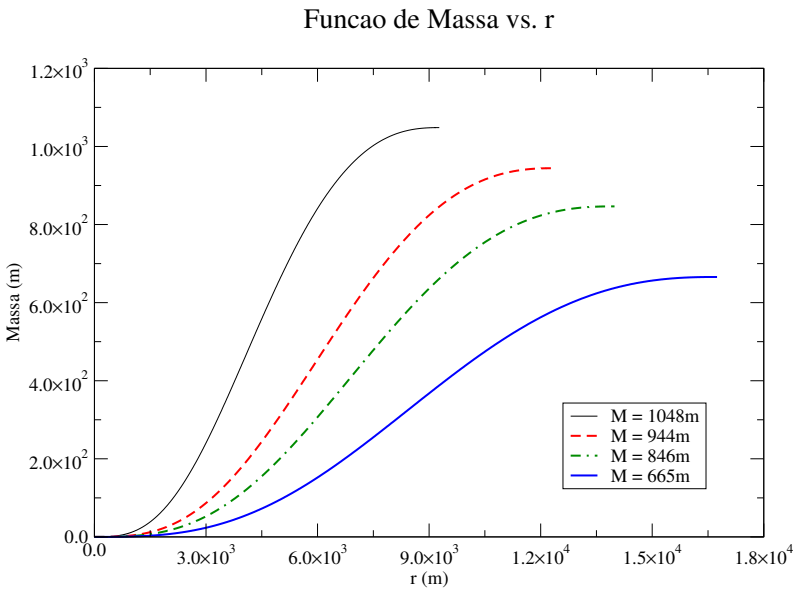

Figura 3.6: Gráfico de $m(r)$ vs. r para estrelas de nêutrons. Reparar que temos um platô na função de massa estelar, próximo à superfície estelar. Esta característica distingue estrelas de nêutrons das estrelas de quarks.

3.1.2 Estabilidade Estelar

Uma discussão interessante que cabe aqui é a da estabilidade estelar. Observemos o gráfico de M por ε_0 (Fig. 3.2), outra vez. Verificamos a existência de um pico, que corresponde à estrela de maior massa que conseguimos achar numericamente ($M_{max} = 1048.25m$), para uma densidade central de $\varepsilon_1 = 4.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$. Mais tarde, veremos que este valor de densidade central, ao menos para estrelas de nêutrons, está de acordo com modelos mais modernos e realistas de estrutura estelar. Após ε_1, temos $\frac{dM}{d\varepsilon_0} < 0$ e o contrário ocorre se $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$. Temos, assim, dois ramos da curva a partir de M_{max}: dada uma massa $M < M_{max}$, ela tanto pode corresponder a uma densidade central inferior a ε_1, quanto a um valor maior do que este último. Pode-se assim perguntar qual dos dois ramos corresponde a uma estrela estável.

O critério para decidir a estabilidade da estrela, que foi primeiramente discutido por [33] e [34], em relação a oscilações radiais, é

$$\frac{dM}{d\varepsilon_0} > 0, \tag{3.2}$$

ou seja, só o ramo com $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ representa configurações estáveis contra

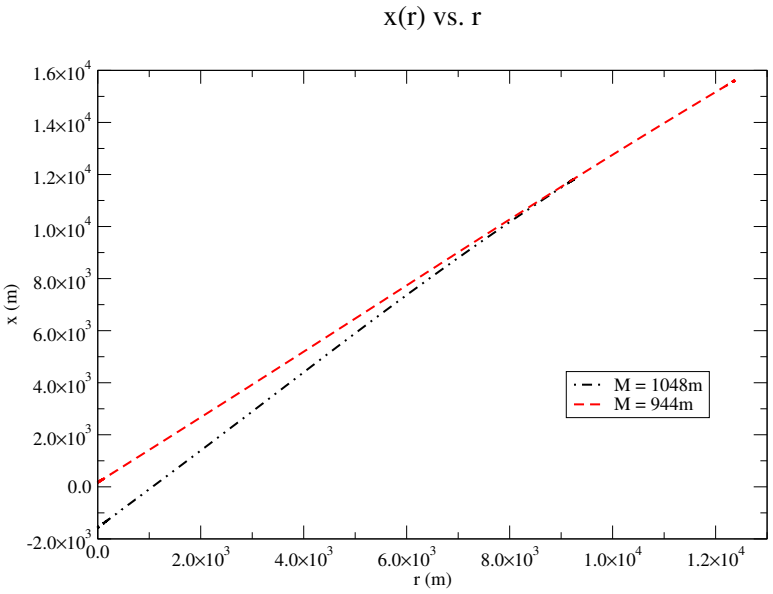

Figura 3.7: Gráfico de x vs. r para 2 estrelas de nêutrons.

perturbações radiais. A razão física para tanto é descrita nos próximos parágrafos.

Se uma estrela no ramo estável (chamemo-lo de ramo 1), com massa M e densidade ε_0, sofre uma perturbação tal que M não muda, mas ε_0 aumenta, ela sai da curva, indo parar um pouco à direita desta. A nova densidade central, ε_2, supera o valor ε_0 original, e corresponderia, para uma configuração em equilíbrio, a uma estrela com $M_2 > M$. Como M não mudou, isto implica que a pressão no interior estelar é maior do que a necessária para compensar a gravidade. A pressão excedendo a gravidade, a estrela se expande, aumentando seu volume e fazendo a densidade estelar diminuir (e, consequentemente, a pressão), até o ponto em que gravidade e pressão voltem a se compensar reciprocamente, quando a densidade central da estrela retorna a ε_0. Restabelece-se, então, o equilibrio momentaneamente perdido. Da mesma forma, uma queda em ε_0 leva a estrela para uma região à esquerda da curva. Para esta densidade central menor, a massa deveria ser também menor, para se chegar a uma configuração de equilíbrio. Como a massa se manteve, a gravidade é superior à pressão em toda a região interna à estrela. A gravidade em excesso provocará, então, uma contração do fluido estelar, aumentando a densidade e a pressão na estrela, até que o equilíbrio de forças seja restabelecido quando a densidade central volta a ε_0. Ou seja, o ramo 1 representa configurações estelares com equilíbrio estável.

O raciocínio exposto acima pode ser aplicado ao ramo instável, onde $\varepsilon_0 > \varepsilon_{max}$ (chamemo-lo de ramo 2), mas os resultados serão diferentes. Um aumento de densidade central leva a estrela a uma região onde a massa deveria ser menor do que M, para que houvesse equilíbrio estelar. Como M é superior ao valor de equilíbrio, isto significa que a gravidade é mais intensa do que a pressão intra-estelar, acarretando contração da estrela. Tal contração eleva as densidades intra-estelares, inclusive no centro. E tal processo continua, até que a estrela eventualmente colapse. Analogamente, se ε_0 diminui no ramo 2, ocorrerá o contrário: a estrela tenderá a ficar cada vez menos densa, porque a gravidade não será suficiente para compensar a pressão. Em outras palavras, o ramo 2 contém configurações de equilíbrio instável. Considerações similares valem para as estrelas de quarks, e mesmo para outros tipos de estrelas não discutidos aqui.

Uma outra característica de estrelas de nêutrons é a presença de campos magnéticos particularmente intensos. As estrelas em geral - mesmo as de seqüência principal, como o Sol - apresentam campos magnéticos mais ou menos intensos, que podem ser detectados por meio do efeito Zeeman nas linhas espectrais estelares. Para estrelas de seqüência principal, este campo tem intensidades entre 10^0 e 10^3 Gauss. A conservação do fluxo magnético durante o colapso gravitacional pode produzir campos de até $1)^8$ Gauss em estrelas anãs brancas, e até 10^{12} Gauss em estrelas de nêutrons [10]. Os valores aqui mencionados referem-se ao campo magnético medido na superfície das estrelas.

3.1.3 Visão Atual da Estrutura Interna das Estrelas de Nêutrons

Dissemos há pouco que o valor $\varepsilon_0 = 4.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$, que maximiza a massa estelar no modelo do gás de nêutrons não-interagentes, está de acordo com o que se espera das densidades centrais em modelos mais realistas de estrelas de nêutrons. De fato, teorias astrofísicas mais recentes, que levam em conta as interações nucleares, não apenas explicam massas estelares maiores (pelo menos até $2M_s$), como também nos dão uma visão mais detalhada do interior estelar, que resumiremos aqui. Maiores detalhes há em abundância na literatura, como em [10], [30] e [31].

Modernamente, sabemos que as estrelas de nêutrons têm uma crosta externa de núcleos pesados (principalmente Fe^{56}_{26}), com um gás de elétrons fazendo-lhes companhia. Tal crosta é relativamente fina, da ordem de 300 metros de espessura (um pouco mais ou ou pouco menos, dependendo da EDE), e nela as densidades variam de zero (na superfície estelar) até $\varepsilon_{drip} = 4 \cdot 10^{11} g/cm^3$ (ao final da camada), quando os nêutrons começam a escapar dos núcleos, por não haver mais estados ligados para eles no núcleo atômico (*neutron drip*). Como os nêutrons livres exercem pressão sobre os núcleos, há um aumento na pressão significativo nessa faixa de densidade (EDE fica mais dura). Este fenômeno de *neutron drip* fica visível nos perfis estelares

(p ou ε vs r), como a região na qual p (e ε) caem muito abruptamente em relação aos valores que possuíam em regiões mais internas.

Tal crosta externa é seguida por uma crosta interna, onde os núcleos misturam-se ao gás de nêutrons - com pequenas quantidades de prótons e elétrons para impedir o decaimento beta - e esses mesmos núcleos fundem-se uns aos outros, gradualmente, formando estruturas como esferas, fios e mesmo placas, à medida que ε aumenta, na direção do centro estelar. Esta camada também é relativamente pouco espessa, medindo aproximadamente meio quilômetro de espessura, em média. Ao final desta camada, tem-se $\varepsilon_{dis} \approx 2 \cdot 10^{14} g/cm^3$. Na região da crosta externa, a EDE é bem conhecida, sendo normalmente obtida por meio de tabelas de dados nucleares. Já para a crosta interna, a EDE é deduzida por extrapolações feitas a partir dessas mesmas tabelas, uma vez que núcleos extremamente ricos em nêutrons não foram (ainda) observados na Terra. De qualquer modo, quanto maior a massa estelar, maior será a atração gravitacional sobre a crosta, e tanto mais fina esta ficará, por ficar mais comprimida.

Esta densidade ε_{dis} marca o desaparecimento de estruturas nucleares, em favor de um fluido uniforme de nêutrons, prótons e léptons em equilíbrio dinâmico. A partir desta densidade, o aumento de ε rumo ao centro da estrela é bem mais lento. No centro da estrela, as densidades ficam na faixa de $(1-4) \cdot 10^{15} g/cm^3$. Não por acaso, $4 \cdot 10^{15} g/cm^3$ foi o valor de densidade central que nos deu a massa máxima possível no modelo de gás de nêutrons não-interagentes. Após este valor de densidade central, entrávamos no ramo instável das configurações estelares, como visto na subseção anterior. Nesta faixa de densidades, a EDE é ainda mais incerta. De qualquer modo, é esta região que concentra a imensa maioria da massa estelar (aproximadamente 98% da mesma [31], em média). Tal característica, como se viu nos perfis estelares da função de massa $m(r)$, está também presente no modelo de Oppenheimer-Volkov (basta observar os perfis de massa). Assim, a EDE da região interna da estrela (justamente onde ela é menos conhecida) tem peso bem maior nas propriedades estelares do que a EDE da crosta.

Pouco acima dos $\varepsilon_{nuc} = 2.7 \cdot 10^{14} g/cm^3$, temos o aparecimento de léptons mais pesados do que o elétron, a saber, os múons, porque o processo $n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu_\mu}$ torna-se possível do ponto de vista energético - o potencial químico eletrônico passa a exceder a massa de repouso do múon. Esta densidade ε_{nuc} é a densidade de equilíbrio da matéria nuclear uniforme. Atualmente, sabemos que a matéria nuclear até $2\varepsilon_{nuc}$ está nesse estado de fluido uniforme de nêutrons, com pequenas participações de prótons, elétrons e múons.

Bárions estranhos (com quarks s na composição), também denominados híperons, podem aparecer em densidades além dos $2\varepsilon_{nuc}$, por processos governados pela interação fraca. Assim que as densidades beiram os $10^{15} g/cm^3$, existe a possibilidade de transição da matéria nuclear para a fase de um fluido de quarks, o que, por si só, justifica o estudo de estrelas de quarks.

3.2 Alguns Dados Observacionais Recentes

Em tempos recentes, temos conseguido muita informação sobre as massas de estrelas de nêutrons, por meio de observações astronômicas. O que normalmente se detecta em tais observações são sistemas binários, compostos por uma estrela de nêutrons e um(a) companheiro(a), que pode ser uma estrela anã branca, um buraco negro ou mesmo outra estrela de nêutrons.

Até o fim dos anos 90, praticamente todas as massas de estrelas de nêutrons observadas ficavam ao redor de $1.35 - 1.45 M_s$ [44], ou seja, em uma estreita faixa de massas centrada aproximadamente em $1.4 M_s$, valor muito próximo ao limite de Chandrasekhar. A partir de 2002 começaram a ser divulgadas massas beirando $2.4 M_s$ [48], [54], [53] em sistemas binários. A partir de 2003, novos dados [45] reduziram os valores mínimos de massa conhecidos a $1.25 M_s$, demonstrando que estas estrelas podem ter um espectro de massas mais amplo do que se acreditava até alguns anos antes. No mesmo ano, observações do sistema binário Vela X-1 [47] indicaram massas entre $1.8 M_s$ e $2.4 M_s$ para as estrelas ali presentes. Nice, Splaver e Stairs [46] detectaram estrelas de nêutrons com massas em torno de $2.1 M_s$, e estrelas com massas similares foram também observadas por Shahbaz [49] em 2004.

3.3 Diferenças Entre Estrelas de Quarks

Estrelas de quarks tendem a ser mais compactas do que as estrelas de nêutrons, em geral, e apresentam valores mais altos para R e principalmente para M, pelo menos para os valores de B com os quais trabalhamos, a saber $B = 15 MeV/fm^3$, $50 MeV/fm^3$ e $B = 140 MeV/fm^3$. Vale relembrar, do capítulo anterior, que o valor mínimo de ε_0 é $4B$. Logo, estrelas com B alto têm valores de ε_0 permitidos mais altos. É importante vermos, assim, a faixa de densidades centrais com que estamos trabalhando, ao efetuar comparações entre estrelas de quarks e de nêutrons. Para os valores de B acima, temos $\varepsilon_{min} = 1.074 \cdot 10^{14} g/cm^3$, $3.579 \cdot 10^{14} g/cm^3$ e $1.002 \cdot 10^{15} g/cm^3$. Seguem-se as tabelas (3.1), (3.2) e (3.3) com valores de M, R e c para diferentes valores de B e ε_0.

Em tempo: o programa usado para integrar estrelas de quarks aparece no Apêndice G.

No que se segue, apresentamos a função R vs. ε_0 e M vs. ε_0 na Fig. (3.8) e a função M vs. ε_0 na Fig. (3.9), para os 3 valores de B que utilizamos.

Igualmente interessante seria mostrar algumas figuras com estrelas de quarks a esta altura. Temos disponíveis os perfis de p, ε e $M(r)$ versus r para estrelas de quarks, nas figuras (3.10), (3.11) e (3.12), para o caso em que $B = 15 MeV/fm^3$. Para outros valores de B, os resultados são semelhantes.

Nas figuras (3.10), (3.11) e (3.12), podemos ver claramente características distintivas de estrelas de quarks governadas pelo modelo MIT, como o não-

$\rho_0(g/cm^3)$	$R(m)$	$M(m)$	c
$1.5 \cdot 10^{14}$	19464.30	2802.19	0.28793
$2.0 \cdot 10^{14}$	21813.43	4400.41	0.40346
$3.0 \cdot 10^{14}$	22313.34	5459.84	0.48938
$4.0 \cdot 10^{14}$	21946.09	5738.35	0.52295
$5.0 \cdot 10^{14}$	21488.97	5799.22	0.53974
$7.0 \cdot 10^{14}$	20675.56	5733.75	0.55464
$1.0 \cdot 10^{15}$	19772.16	5543.87	0.56077
$1.5 \cdot 10^{15}$	18795.68	5256.62	0.55934
$2.0 \cdot 10^{15}$	18171.37	5036.95	0.55438
$2.5 \cdot 10^{15}$	17737.46	4867.48	0.54884
$3.0 \cdot 10^{15}$	17419.28	4733.12	0.54343
$3.5 \cdot 10^{15}$	17177.31	4623.96	0.53838
$4.0 \cdot 10^{15}$	16988.35	4533.50	0.53372
$4.5 \cdot 10^{15}$	16838.18	4457.31	0.52943
$5.0 \cdot 10^{15}$	16716.93	4392.30	0.52549
$5.5 \cdot 10^{15}$	16617.99	4336.23	0.52187
$6.0 \cdot 10^{15}$	16536.67	4287.44	0.51854
$6.5 \cdot 10^{15}$	16469.39	4244.64	0.51546
$7.0 \cdot 10^{15}$	16413.58	4206.88	0.51261
$7.5 \cdot 10^{15}$	16367.16	4173.37	0.50997
$8.0 \cdot 10^{15}$	16328.55	4143.48	0.50751
$9.0 \cdot 10^{15}$	16269.92	4092.67	0.50310
$1.0 \cdot 10^{16}$	16230.28	4051.40	0.49924
$1.1 \cdot 10^{16}$	16204.54	4017.52	0.49585
$1.2 \cdot 10^{16}$	16189.27	3989.50	0.49286
$1.4 \cdot 10^{16}$	16180.73	3946.74	0.48783
$1.6 \cdot 10^{16}$	16191.41	3916.79	0.48381
$1.8 \cdot 10^{16}$	16213.83	3895.82	0.48055
$2.0 \cdot 10^{16}$	16243.39	3881.30	0.47789

Tabela 3.1: Dados para estrelas de quarks com $B = 15MeV/fm^3$.

$\rho_0(g/cm^3)$	$R(m)$	$M(m)$	c
$4.0 \cdot 10^{14}$	7454.03	480.74	0.12899
$5.0 \cdot 10^{14}$	10661.02	1534.82	0.28793
$7.0 \cdot 10^{14}$	12041.44	2512.69	0.41734
$1.0 \cdot 10^{15}$	12221.52	2990.48	0.48938
$1.2 \cdot 10^{15}$	12114.90	3104.30	0.51248
$1.5 \cdot 10^{15}$	11895.03	3167.84	0.53263
$2.0 \cdot 10^{15}$	11534.54	3166.94	0.54912
$2.5 \cdot 10^{15}$	11228.83	3124.39	0.55649
$3.0 \cdot 10^{15}$	10975.14	3071.95	0.55980
$3.5 \cdot 10^{15}$	10762.93	3019.10	0.56101
$4.0 \cdot 10^{15}$	10583.07	2968.88	0.56106
$4.5 \cdot 10^{15}$	10428.74	2922.21	0.56041
$5.0 \cdot 10^{15}$	10294.81	2879.17	0.55934
$5.5 \cdot 10^{15}$	10177.45	2839.56	0.55801
$6.0 \cdot 10^{15}$	10073.75	2803.10	0.55652
$6.5 \cdot 10^{15}$	9981.43	2769.48	0.55493
$7.0 \cdot 10^{15}$	9898.71	2738.40	0.55328
$7.5 \cdot 10^{15}$	9824.19	2709.59	0.55162
$8.0 \cdot 10^{15}$	9756.72	2682.83	0.54995
$9.0 \cdot 10^{15}$	9639.38	2634.64	0.54664
$1.0 \cdot 10^{16}$	9540.94	2592.44	0.54343
$1.1 \cdot 10^{16}$	9457.34	2555.16	0.54036
$1.2 \cdot 10^{16}$	9385.68	2522.01	0.53742
$1.4 \cdot 10^{16}$	9269.83	2465.57	0.53196
$1.6 \cdot 10^{16}$	9181.16	2419.36	0.52703
$1.8 \cdot 10^{16}$	9112.05	2380.85	0.52257
$2.0 \cdot 10^{16}$	9057.51	2348.33	0.51854

Tabela 3.2: Dados para estrelas de quarks com $B = 50 MeV/fm^3$.

$\varepsilon_0(g/cm^3)$	$R(m)$	$M(m)$	c
$1.5 \cdot 10^{15}$	6651.06	1071.61	0.32224
$2.0 \cdot 10^{15}$	7215.36	1525.09	0.42273
$2.5 \cdot 10^{15}$	7312.22	1722.25	0.47106
$3.0 \cdot 10^{15}$	7286.15	1817.13	0.49879
$3.5 \cdot 10^{15}$	7219.53	1865.37	0.51676
$4.0 \cdot 10^{15}$	7140.94	1888.28	0.52886
$4.5 \cdot 10^{15}$	7060.39	1897.26	0.53744
$5.0 \cdot 10^{15}$	6982.05	1898.05	0.54369
$5.5 \cdot 10^{15}$	6907.57	1893.86	0.54834
$6.0 \cdot 10^{15}$	6837.51	1886.61	0.55184
$6.5 \cdot 10^{15}$	6771.88	1877.46	0.55449
$7.0 \cdot 10^{15}$	6710.51	1867.18	0.55649
$7.5 \cdot 10^{15}$	6653.13	1856.24	0.55800
$8.0 \cdot 10^{15}$	6599.43	1844.96	0.55913
$9.0 \cdot 10^{15}$	6501.87	1822.18	0.56051
$1.0 \cdot 10^{16}$	6415.65	1799.85	0.56108
$1.1 \cdot 10^{16}$	6338.93	1778.41	0.56111
$1.2 \cdot 10^{16}$	6270.24	1758.04	0.56076
$1.4 \cdot 10^{16}$	6152.33	1720.63	0.55934
$1.6 \cdot 10^{16}$	6054.72	1687.41	0.55739
$1.8 \cdot 10^{16}$	5972.55	1657.85	0.55516
$2.0 \cdot 10^{16}$	5902.42	1631.46	0.55281
$3.0 \cdot 10^{16}$	5665.33	1533.10	0.54122
$4.0 \cdot 10^{16}$	5531.34	1469.18	0.53122

Tabela 3.3: Dados para estrelas de quarks com $B = 140 MeV/fm^3$.

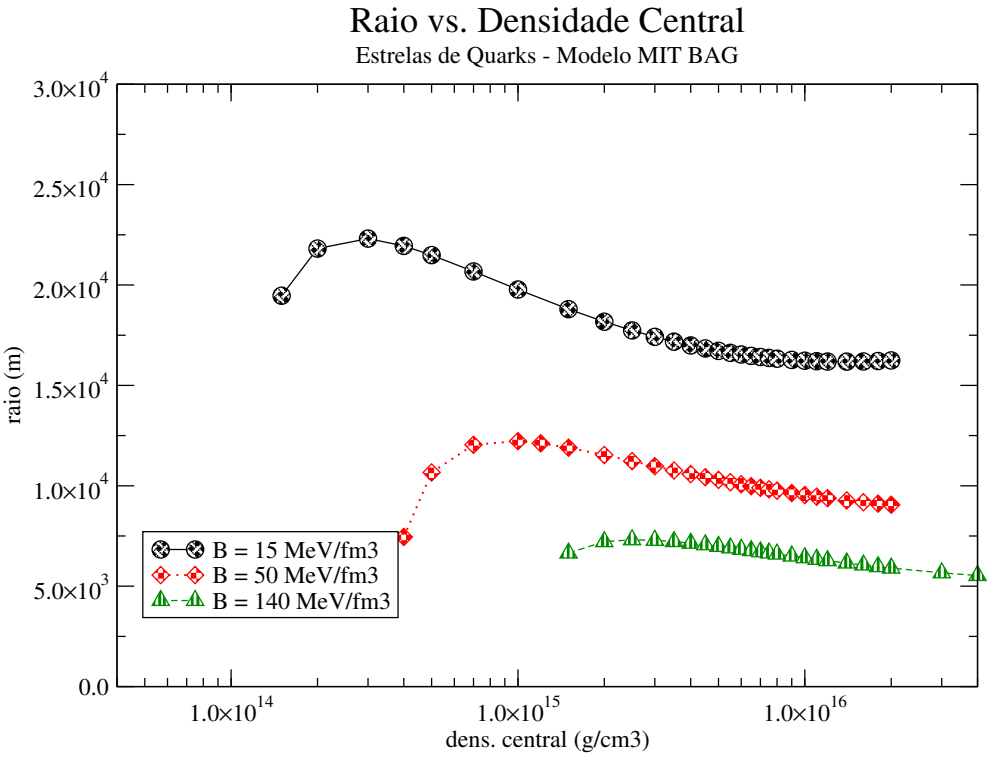

Figura 3.8: Gráfico de R vs. ε_0 para estrelas de quarks.

anulamento de ε em $r = R$ e a ausência de um platô na função de massa. Por fim, uma ilustração da coordenada tartaruga x para uma estrela de quarks com $B = 15MeV/fm^3$ e $\varepsilon_0 = 2.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$ está na Fig. (3.13). Nesta figura, temos x_0 mais negativo do que nas estrelas de nêutrons, o que é fruto da maior compactação desta estrela de quarks analisada. Mas, de qualquer forma, este valor x_0 é sempre finito, quaisquer que sejam B e ε_0.

Uma observação de crucial importância aqui é a comparação de nossos resultados numéricos com estimativas de massa máxima, M_{max}^{MIT-st} de estrelas de quarks estáticas governadas por esse modelo MIT de quarks não-massivos e não-interagentes. Estas estimativas de massa-limite já foram feitas em [37] e [38], também por meio de integração numérica, e reproduzimo-las aqui:

$$M_{max}^{MIT-st} = \frac{1.96 M_s}{\sqrt{B/B_0}}, \tag{3.3}$$

onde $B_0 = 60MeV/fm^3$. Assim, para os valores de B que tomamos aqui,

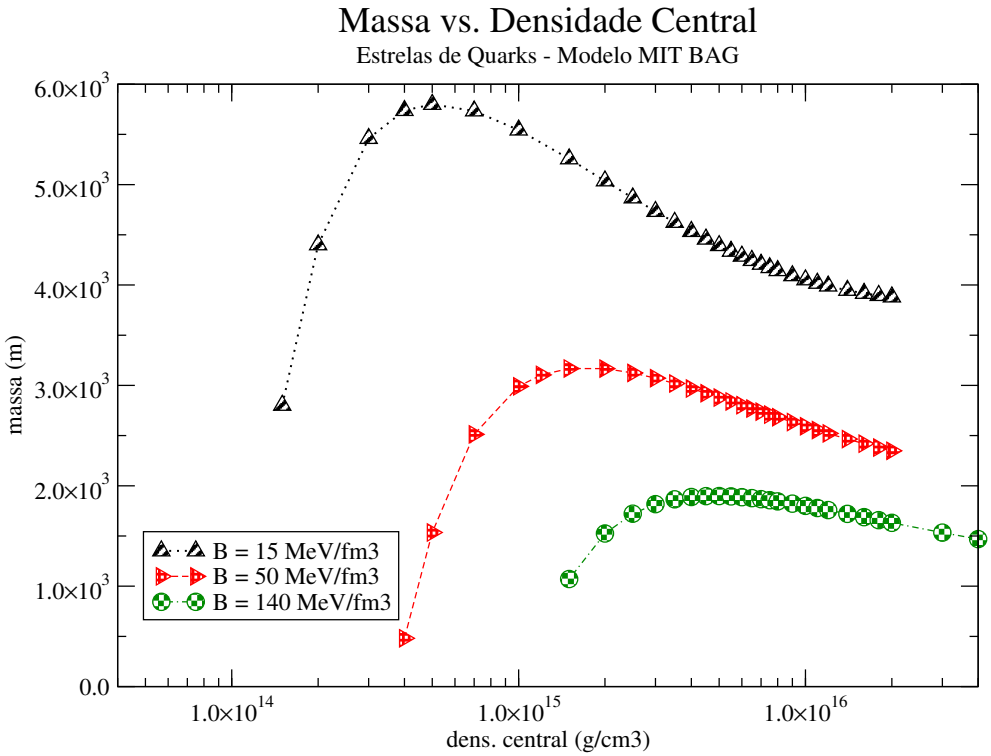

Figura 3.9: Gráfico de M vs. ε_0 para estrelas de quarks.

temos

$$\begin{aligned} M_{max}(B = 15MeV/fm^3) &= 3.92M_s \\ M_{max}(B = 50MeV/fm^3) &= 2.15M_s \\ M_{max}(B = 140MeV/fm^3) &= 1.28M_s, \end{aligned} \tag{3.4}$$

valores que mostram muito boa concordância com nossos resultados numéricos, que foram de $3.94M_s$, $2.16M_s$ e $1.29M_s$, respectivamente (diferenças inferiores a 1%).

Por fim, cabe-nos registrar aqui uma estimativa de valores de $M_{max}^{MIT-rot}$ para o caso de estrelas de quarks girantes: este cálculo já foi feito por Gourgoulhon [39], e dele resultou, no caso de rotações ultra-rápidas

$$M_{max}^{MIT-rot} = 1.44M_{max}^{MIT-st}, \tag{3.5}$$

de sorte que, para os valores de B aqui empregados, poderíamos ter massas beirando $5.5M_s$. Por rotações ultra-rápidas, entenda-se aquelas próximas

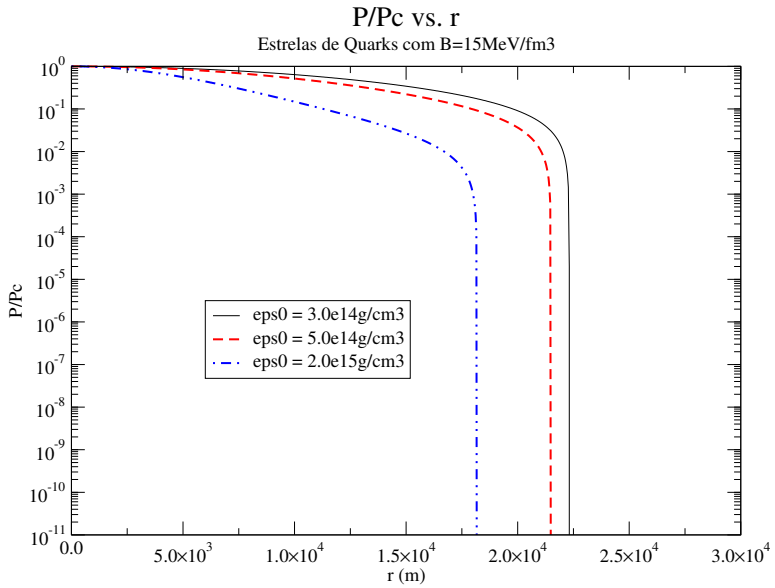

Figura 3.10: Gráfico de $\frac{p}{p_0}$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15MeV/fm^3$.

de levar a estrela a uma desintegração, pela expulsão de matéria devido à força centrífuga. Para rotações mais lentas, este limite de massa será menor do que o valor acima, embora superior ao que se espera para estrelas sem rotação. EDEs mais recentes e realistas para estrelas de quarks prevêem aumentos de massa de até 40% em casos de rotação rápida, praticamente o dobro do que se prevê para estrelas de nêutrons na mesma situação.

Não trabalhamos com estrelas girantes aqui, mas, de qualquer forma, parece-nos possível obter estrelas de quarks consideravelmente mais massivas do que as de nêutrons.

A partir das tabelas de que dispomos, podemos inferir algumas características das estrelas de quarks, a saber:

- O raio R das estrelas de quarks primeiramente cresce até uma determinada densidade central $\varepsilon_1 \approx (2.5 - 3.0)\varepsilon_{min}$, onde $\varepsilon_{min} = 4B$. Após tal máximo em ε_1, R decresce com o aumento da densidade central ε_0;

- Observação semelhante aplica-se às massas estelares M, a única diferença sendo no ponto de máximo, que geralmente fica no entorno de um valor $\varepsilon_2 \approx (1.5 - 2.0)\varepsilon_1$;

- A grandeza c - compacidade - para estas estrelas comporta-se prati-

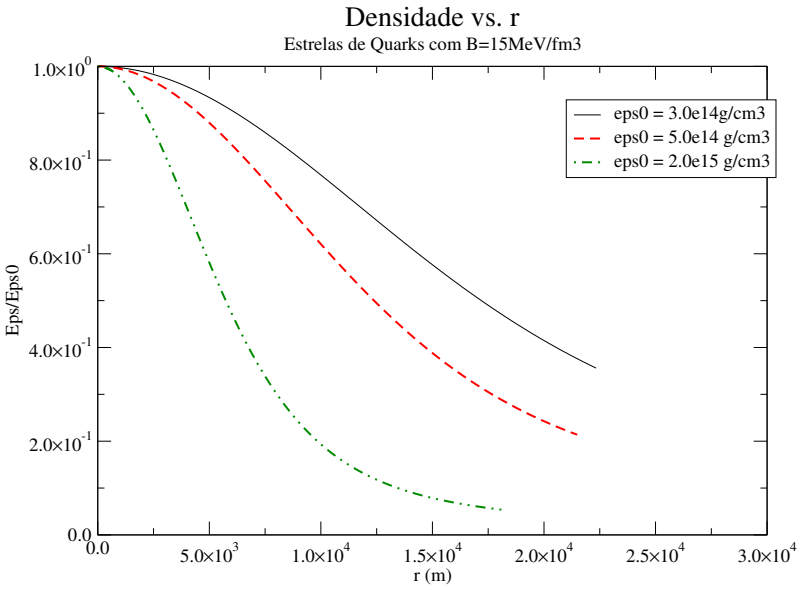

Figura 3.11: Gráfico de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15MeV/fm^3$. Notar que quando o raio estelar é atingido, ε não se anula.

camente da mesma forma que M e R, em relação a ε_0, atingindo um pico em torno de um determinado $\varepsilon_3 \approx 2\varepsilon_2$;

- O maior valor de R diminui conforme B aumenta, de aproximadamente $22km$ para $B = 15MeV/fm^3$ até $7km$ para $B = 140MeV/fm^3$, passando por $12km$ para $= 50MeV/fm^3$. Isto se deve ao fato de que um valor de B mais alto traduz-se em um confinamento mais intenso dos quarks, adensando-os em uma região menor do espaço;

- O máximo de M também diminui conforme B aumenta, variando de $5.8km$ $(3.9M_s)$ para $B = 15MeV/fm^3$ até $1.9km$ $(1.3M_s)$ quando $B = 140MeV/fm^3$, passando por $3.2km$ $(2.2M_s)$ quando $B = 50MeV/fm^3$. Aqui, M_s representa a massa solar $(1.47km)$;

- Uma constatação interessante é a de que o máximo de c aparentemente não depende de B, mantendo-se em torno de 0.56. Mesmo não estendendo as análises para outros valores de B, acreditamos que este valor-limite de c seja uma característica intrínseca ao modelo estudado (MIT Bag Model). De qualquer forma, estrelas de quarks obedecendo à equação de estado do modelo MIT Bag são consistentemente mais compactas do que as estrelas de nêutrons estudadas, estando no meio

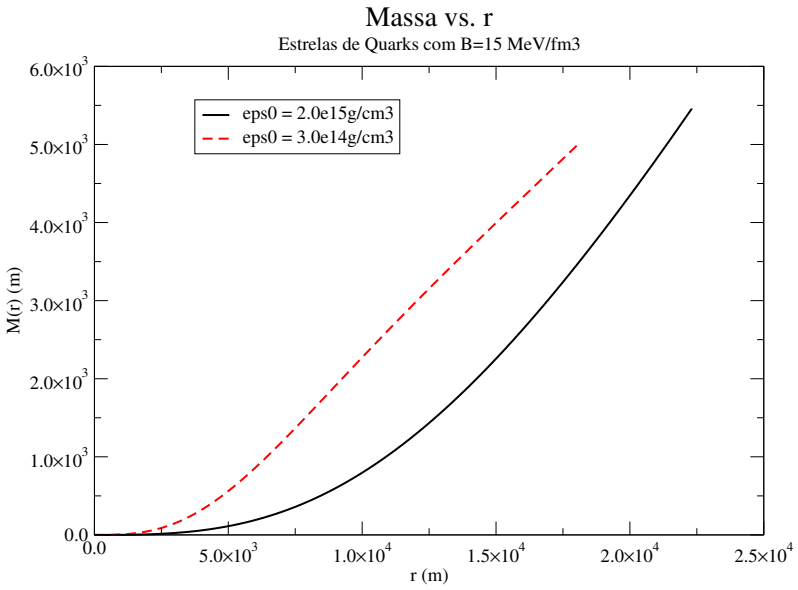

Figura 3.12: Gráfico de $m(r)$ vs. r para estrelas de quarks com $B = 15MeV/fm^3$. Observar a ausência de um platô na função de massa nas proximidades do raio estelar.

do caminho entre estas e os buracos negros.

3.4 Diferenciando Estrelas Compactas Entre Si

Com os dados apresentados neste capítulo acerca das estrelas de nêutrons e de quarks, podemos tirar as seguintes conclusões:

- Estrelas de quarks (no modelo MIT) são mais massivas do que as de nêutrons baseadas no modelo de gás de Fermi não-interagentes, ao menos para a faixa de densidades (e de B) com que trabalhamos. Acreditamos que isto se deve às diferentes EDEs envolvidas. Quanto aos raios, as estrelas de quarks com B baixo apresentam raios maiores ou pelo menos similares àqueles verificados para estrelas de nêutrons de mesma densidade central, enquanto que nos casos de B alto, as estelas de quarks apresentam raios menores do que aqueles verificados em estrelas de nêutrons;

- As massas das estrelas de quarks não apenas superam aquelas verificadas para as estrelas de nêutrons, como fazem-no com folgada margem, particularmente para baixos valores de B. Chegamos a obter

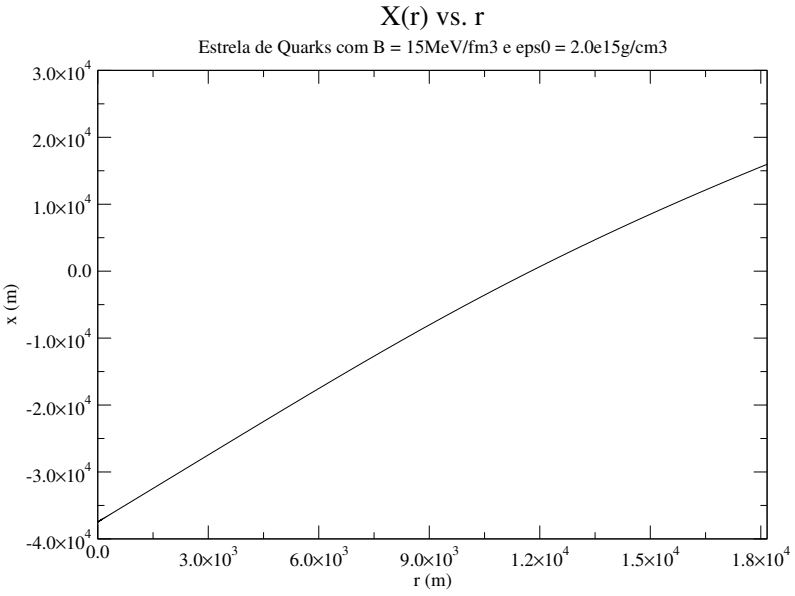

Figura 3.13: Gráfico de x vs. r para estrela de quarks com $B = 15MeV/fm^3$ e $\varepsilon_0 = 2.0 \cdot 10^{15} g/cm^3$.

estrelas de quarks com quase 4 massas solares, enquanto estrelas de nêutrons (no modelo estudado) não ultrapassavam cerca de 72% da massa solar;

- Estrelas de nêutrons apresentam um platô na função de massa $m(r)$, quando r aproxima-se de R. Tal platô inexiste para as estrelas de quarks;

- Estrelas de quarks não conhecem o anulamento da densidade quando a pressão se anula (na superfície), ao contrário das suas congêneres de nêutrons, o que gera uma descontinuidade bem nítida da densidade na superfície;

- A descontinuidade na densidade mencionada logo acima é bastante abrupta - a densidade passa de valores típicos da matéria nuclear para zero exatamente sobre a superfície. As estrelas de quarks, deste modo, têm superfícies extremamente duras;

- Os raios estelares decrescem monotonicamente com o aumento da densidade central ε_0 para as estrelas de nêutrons, ao menos na faixa de densidades centrais em que elas são comparadas às estrelas de quarks. Enquanto isso, estrelas de quarks têm raios que primeiro aumentam

com ε_0, para atingir um valor máximo e decrescer para ε_0 maiores. Esta é outra diferença importante entre os dois tipos de estrela;

- Nos dois casos, as massas estelares primeiro crescem com a densidade central ε_0, atingindo um máximo para algum $\varepsilon_1 > \varepsilon_{min}$ e decrescendo a partir daí. No entanto, o valor de ε_1, assim como o máximo de M, são diferentes;

- Do parágrafo anterior, deduzimos que há, para os dois tipos de estrelas, uma região com $\frac{dM}{d\varepsilon_0} > 0$ e outra região com $\frac{dM}{d\varepsilon_0} < 0$. Ou seja, há configurações estáveis e instáveis para os dois tipos de estrela;

- A compacidade c é nitidamente maior para as estrelas de quarks (chegando a ser quase o dobro do valor verificado em estrelas de nêutrons), indicando que as estrelas de quarks estão em uma posição intermediária entre as estrelas de nêutrons e os buracos negros.

- Apenas para fins de comparação, as estrelas de nêutrons descritas por EDEs mais modernas têm $0.2 < c < 0.4$ [11], o que está de acordo com $c = 0.3$ que achamos para as estrelas de nêutrons mais compactas. Anãs brancas têm $c \approx 10^{-4}$ e o Sol, com $M = 1470m$ e $R = 7 \cdot 10^8 m$, tem $c = 4.2 \cdot 10^{-6}$. A Terra tem aproximadamente $c = 1.5 \cdot 10^{-9}$.

É hora de colocarmos todos os dados e figuras sobre os dois tipos de estrela juntos, para realçar o que foi escrito neste capítulo.

A faixa de densidades centrais que aparece nas figuras a seguir é aquela em que os dois tipos de estrelas são comparáveis (acima de $10^{15} g/cm^3$). A figura (3.14) compara as massas estelares, enquanto a figura (3.15) compara os raios estelares.

Por fim, surge a pergunta: poder-se-ia dizer, à luz do que foi estudado neste capítulo, que as estrelas de nêutrons atualmente observadas poderiam ser, na verdade, estrelas de quarks ?

A resposta depende crucialmente da massa da estrela observada. Tomemos estrelas sem rotação, em um primeiro instante. Massas na faixa de $1.1-2M_s$, tanto podem representar estrelas de nêutrons quanto estrelas de quarks (dependendo dos valores de B que estas assumam), e muitas estrelas compactas observadas - quer em pares anã-branca/estrela de nêutrons ou outras combinações - apresentam massas nesta faixa. Massas até $3M_s$ (aproximadamente), já observadas em tempos recentes, poderiam ainda representar estrelas de nêutrons, mas massas além deste valor muito provavelmente representam outros tipos de estrelas, tais como estrelas de quarks ou estrelas híbridas (lembrando que obtivemos estrelas de quarks com massas até $4M_s$ e que a massa-limite para estrelas de nêutrons é atualmente estimada em $3M_s$).

Para estrelas com rotação em torno de seu eixo, as massas estelares podem ser até 30% maiores do que no caso estático (estrelas de nêutrons) e

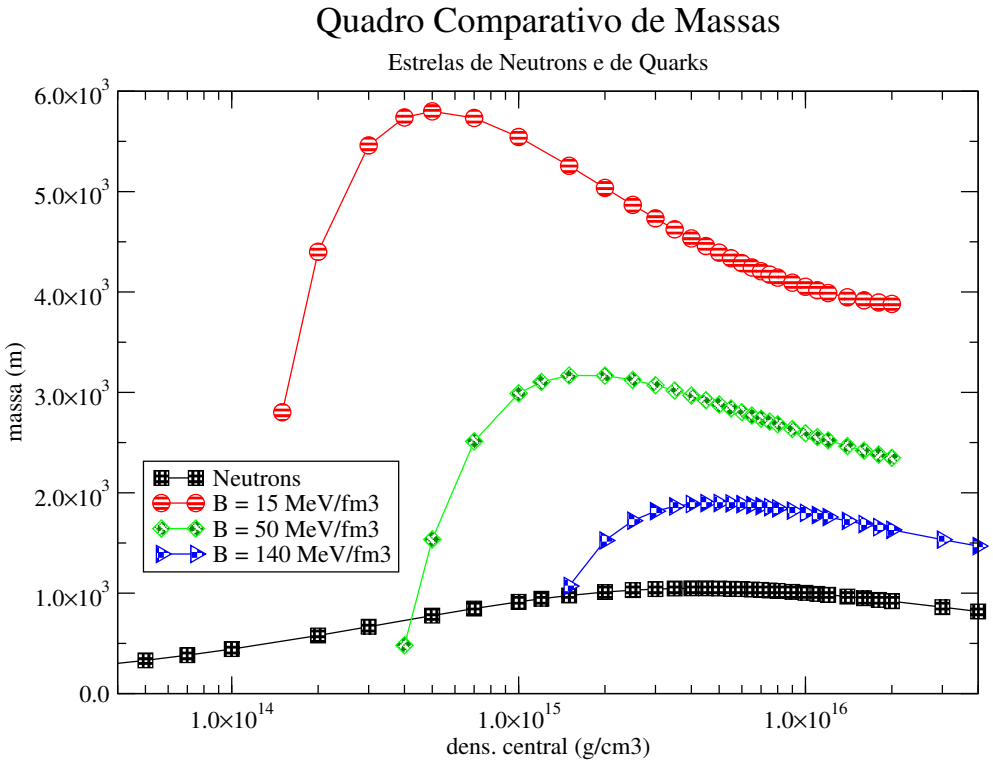

Figura 3.14: Gráfico de M vs. ε_0 para os dois tipos de estrela.

até 44% maiores do que no caso estático (estrelas de quarks), e se detectarmos estrelas girantes com massas até um pouco abaixo dos $4M_s$, não é impossível que estejamos ainda diante de estrelas de nêutrons, muito embora também possam ser estrelas de quarks ou híbridas, que também toleram massas maiores se forem girantes - mais até do que as estrelas de nêutrons, como vimos. Em verdade, se as massas observadas superarem $4M_s$, por exemplo, é muito mais provável que sejam estrelas de quarks.

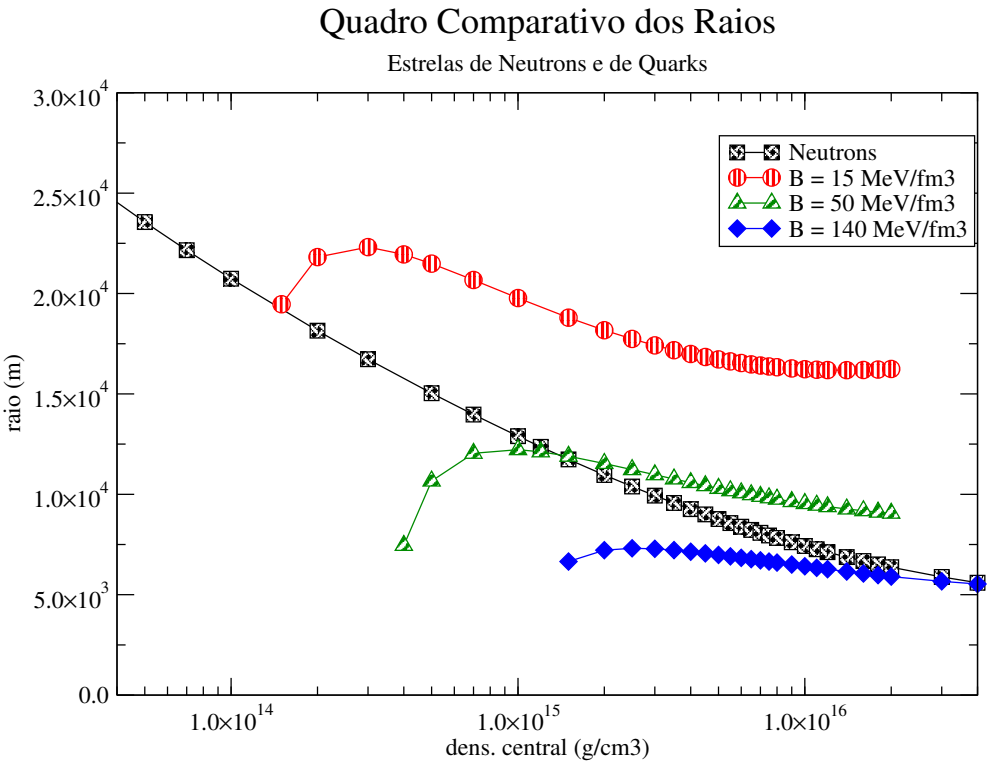

Figura 3.15: Gráfico de R vs. ε_0 para os dois tipos de estrela.

Capítulo 4

Perturbando o Buraco Negro S

O caso-limite de um corpo celeste, esfericamente simétrico e estático, quando nem mesmo a pressão do gás de Fermi de nêutrons (somada a interações nucleares, repulsivas a curta distância) é suficiente para deter o colapso gravitacional, é o buraco negro de Schwarzschild(S). Vimos, no caso de estrelas de nêutrons e de quarks, que as densidades intra-estelares ficavam na casa dos $10^{13} - 10^{16} g/cm^3$. Para buracos negros de massas equivalentes, os valores podem ir além dos $10^{17} g/cm^3$.

Já vimos, no início deste trabalho, que o raio de Schwarzschild para este tipo de buraco negro é dado por $r_+ = 2M$, em unidades geométricas. Para um corpo com a massa solar, $M = 1.47km$, ou $r_+ = 2.94km$. Nestes corpos, o termo g_{tt} da métrica anula-se no horizonte de eventos, e a coordenada tartaruga, x, dada por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} \\ x(r) &= r + 2M\log(-1+\frac{r}{2M}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

tende a $-\infty$ em $r = 2M$ e a ∞ se $r \to \infty$. No limite $r \to \infty$, $x \sim r$, enquanto que, no limite $r \to 2M$, temos

$$\frac{x-2M}{2M} = \log(-1+\frac{r}{2M}) \to r - 2M = 2M\exp(2\kappa_+(x-2M)), \tag{4.2}$$

onde κ_+ é dada por

$$\kappa_+ = \frac{1}{2}|\frac{dh(r)}{dr}|_{r=2M} = \frac{1}{M}, \tag{4.3}$$

representando a *gravidade superficial* no horizonte de eventos.

4.1 Os Potenciais Perturbativos

Buracos negros de Schwarzschild estão sujeitos a diversos tipos de perturbações, sendo que estudamos quatro deles: escalar, eletromagnética, gravitacional axial e gravitacional polar. É possível descrever todos estes tipos de perturbação por meio de uma única equação de onda, do tipo

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = V(r)\Psi, \tag{4.4}$$

em que o potencial que governa a perturbação em questão é dado por

$$V(r) = (1 - \frac{2M}{r})\Omega(r), \tag{4.5}$$

com

$$\begin{aligned}
\Omega_{sc} &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \\
\Omega_{el} &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \\
\Omega_{ax} &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \\
\Omega_{pol} &= \frac{2(n^2(1+n)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3)}{r^3(nr+3M)^2} \\
n &= \frac{(\ell-2)(\ell+1)}{2},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

conforme estejamos a estudar perturbações escalares, eletromagnéticas, gravitacionais axiais ou polares, respectivamente. A dedução das expressões (4.4), (4.5) e (4.6) é razoavelmente extensa e encontra-se no Apêndice E. Uma característica dos potenciais perturbativos em questão é o comportamento assintótico dos mesmos quando $x \to \infty$. Como neste limite tem-se $x \sim r$ e $(1 - \frac{2M}{r}) \to 1$, segue-se que $V(r) \approx \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \sim \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$. Esta observação será útil logo a seguir, na ilustração dos potenciais perturbativos de Schwarzschild.

Um apanhado das características mais importantes de potenciais perturbativos está disponível nas figuras (4.1) e (4.2).

Como fica evidente pelas figuras em questão, há um pico de V para algum $x = x_0$ (geralmente, não muito afastado de zero), com uma cauda do tipo lei de potência para $r \to \infty$ (pois $x \sim r$ para $r \to \infty$). Como $V = h(r)\Omega(r)$, e como $\Omega(r) \to \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ e $h(r) \to 1$ neste limite, então $V \to \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$. Já no regime onde $r \to 2M$ ($x \to -\infty$), temos $r - 2M \propto \exp(2\kappa_+ x)$. De $V = h(r)\Omega(r)$ e de (4.2), tiramos $V \propto \exp(2\kappa_+ x)$ para o limite $r \to 2M$, resultando em uma cauda exponencial.

De qualquer modo, temos todos os potenciais estritamente positivos, mesmo no caso em que $\ell = 0$ para o campo escalar (ver comentários sobre este caso ao fim do capítulo).

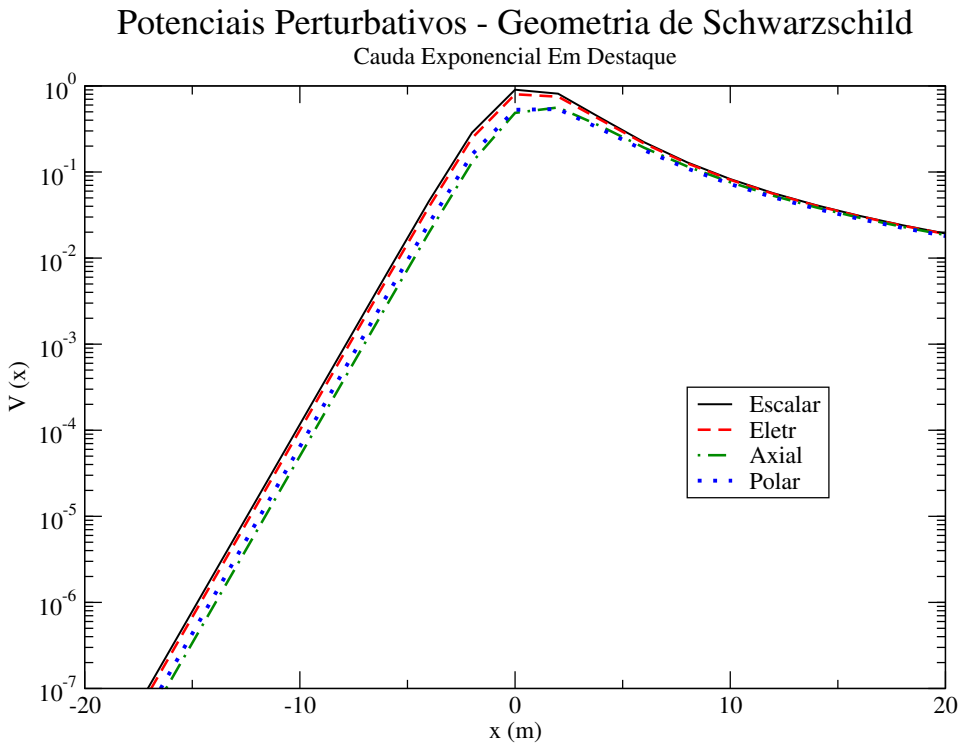

Figura 4.1: *Potencial para diversas perturbações, para* $M = 1.0m$ *e* $\ell = 2$*, com ênfase nas caudas do tipo exponencial junto ao horizonte de eventos.*

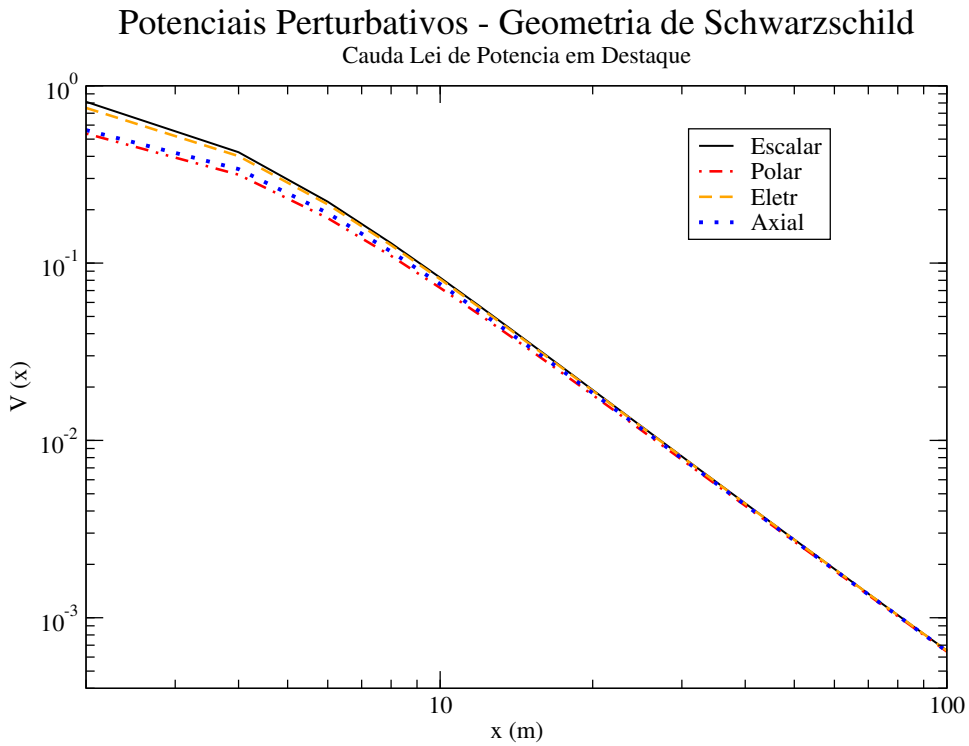

Figura 4.2: *Potencial para diversas perturbações, para* $M = 1.0m$ *e* $\ell = 2$*, com ênfase nas caudas do tipo lei de potência para* $r \to \infty$*. Próximo a* $x = 0$ *os potenciais diferem visivelmente, mas à proporção que* x *aumenta, os potenciais convergem, por terem a mesma forma assintótica.*

$M(m)$	ℓ	ω_{sc}	ω_{el}
1470.00	2	$0.000329 - 0.0000659i$	$0.000311 - 0.0000647i$
1470.00	3	$0.000459 - 0.0000657i$	$0.000447 - 0.0000651i$
1470.00	4	$0.000590 - 0.0000656i$	$0.000580 - 0.0000653i$
1046.25	2	$0.000461 - 0.0000923i$	$0.000436 - 0.0000906i$
1046.25	3	$0.000644 - 0.0000921i$	$0.000627 - 0.0000912i$
1046.25	4	$0.000828 - 0.0000920i$	$0.000814 - 0.0000914i$
977.12	2	$0.000495 - 0.0000992i$	$0.000468 - 0.0000974i$
977.12	3	$0.000691 - 0.0000989i$	$0.000672 - 0.0000981i$
977.12	4	$0.000888 - 0.0000988i$	$0.000873 - 0.0000983i$
846.54	2	$0.000571 - 0.000115i$	$0.000540 - 0.000112i$
846.54	3	$0.000798 - 0.000114i$	$0.000776 - 0.000113i$
846.54	4	$0.00102 - 0.000114i$	$0.00101 - 0.000114i$
665.74	2	$0.000726 - 0.000145i$	$0.000687 - 0.000143i$
665.74	3	$0.00101 - 0.000145i$	$0.000987 - 0.000144i$
665.74	4	$0.00130 - 0.000145i$	$0.00128 - 0.000144i$
443.34	2	$0.00109 - 0.000218i$	$0.00103 - 0.000214i$
443.34	3	$0.00152 - 0.000218i$	$0.00148 - 0.000216i$
443.34	4	$0.00196 - 0.000217i$	$0.00192 - 0.000216i$
330.49	2	$0.00146 - 0.000293i$	$0.00138 - 0.000288i$
330.49	3	$0.00204 - 0.000293i$	$0.00199 - 0.000290i$
330.49	4	$0.00262 - 0.000293i$	$0.00258 - 0.000291i$

Tabela 4.1: Freqüências para os MQNs dos Buracos Negros de Schwarzschild - Campos Escalar e Eletromagnético.

4.2 Os MQNs do Buraco Negro de Schwarzschild

O problema dos MQNs nesta geometria foi estudado primeiramente por Price [25], e depois Bicák [26] fez o mesmo para o caso dos buracos negros de Reissner-Nordstrom. Apesar de os resultados já serem de há muito conhecidos, é interessante determo-nos um pouco sobre os mesmos, visto que, mais adiante, podem ser comparados com os MQNs estelares.

Para obter os MQNs do buraco negro de Schwarzschild, integramos a equação de onda (4.4), para cada um dos potenciais (4.5), (4.6) em uma grade $u-v$ quadrada, em que $u = 0$ representa a região distante da estrela e $u = u_{max}$ (definido arbitrariamente) aproxima o horizonte de eventos - para maiores detalhes acerca do método, ver o Apêndice D. Escolhemos valores de M iguais ou muito próximos àqueles que obtivemos para algumas estrelas de nêutrons, com $\ell = 2, 3, 4$. Os dados estão contidos nas Tabelas (4.1) e (4.2).

Apenas a título de comparação, tomamos os dados das freqüências dos

$M(m)$	ℓ	ω_{ax}	ω_{po}
1470.00	2	$0.000254 - 0.0000620i$	$0.000254 - 0.0000606i$
1470.00	3	$0.000407 - 0.0000640i$	$0.000408 - 0.0000632i$
1470.00	4	$0.000550 - 0.0000653i$	$0.000550 - 0.0000641i$
1046.25	2	$0.000356 - 0.0000853i$	$0.000356 - 0.0000849i$
1046.25	3	$0.000572 - 0.0000888i$	$0.000572 - 0.0000884i$
1046.25	4	$0.000772 - 0.0000902i$	$0.000772 - 0.0000898i$
977.12	2	$0.000382 - 0.0000914i$	$0.000382 - 0.0000913i$
977.12	3	$0.000613 - 0.0000951i$	$0.000613 - 0.0000951i$
977.12	4	$0.000828 - 0.0000966i$	$0.000828 - 0.0000966i$
846.54	2	$0.000442 - 0.000106i$	$0.000442 - 0.000106i$
846.54	3	$0.000708 - 0.000111i$	$0.000708 - 0.000110i$
846.54	4	$0.000956 - 0.000112i$	$0.000956 - 0.000112i$
665.74	2	$0.000561 - 0.000134i$	$0.000561 - 0.000134i$
665.74	3	$0.000900 - 0.000140i$	$0.000900 - 0.000139i$
665.74	4	$0.00112 - 0.000142i$	$0.00122 - 0.000142i$
443.34	2	$0.000843 - 0.000201i$	$0.000843 - 0.000201i$
443.34	3	$0.00135 - 0.000209i$	$0.00135 - 0.000209i$
443.34	4	$0.00183 - 0.000212i$	$0.00182 - 0.000212i$
330.49	2	$0.00113 - 0.000270i$	$0.00114 - 0.000332i$
330.49	3	$0.00181 - 0.000281i$	$0.00181 - 0.000281i$
330.49	4	$0.00245 - 0.000286i$	$0.00245 - 0.000286i$

Tabela 4.2: Freqüências dos MQNs para os Buracos Negros de Schwarzschild, para os campos gravitacionais axial e polar.

$M(m)$	ℓ	ω_{sc}^{UV}	ω_{sc}^{XT}
330.49	2	$0.00146 - 0.000293i$	$0.00148 - 0.000280i$
330.49	3	$0.00204 - 0.000293i$	$0.00201 - 0.000280i$
330.49	4	$0.00262 - 0.000293i$	$0.00267 - 0.000312i$
443.34	2	$0.00109 - 0.000218i$	$0.00111 - 0.000209i$
443.34	3	$0.00152 - 0.000218i$	$0.00150 - 0.000208i$
443.34	4	$0.00196 - 0.000217i$	$0.00198 - 0.000239i$
846.54	2	$0.000571 - 0.000115i$	$0.000579 - 0.000109i$
846.54	3	$0.000798 - 0.000114i$	$0.000786 - 0.000109i$
846.54	3	$0.00102 - 0.000114i$	$0.00104 - 0.000125i$

Tabela 4.3: Comparando resultados para métodos diferentes - grade nula $u - v$ e grade $x - t$ - Campo Escalar.

$M(m)$	ℓ	ω_{el}^{UV}	ω_{el}^{XT}
330.49	2	$0.00138 - 0.000288i$	$0.00141 - 0.000279i$
330.49	3	$0.00199 - 0.000290i$	$0.00196 - 0.000274i$
330.49	4	$0.00258 - 0.000291i$	$0.00262 - 0.000317i$
443.34	2	$0.00103 - 0.000214i$	$0.00105 - 0.000208i$
443.34	3	$0.00148 - 0.000216i$	$0.00146 - 0.000204i$
443.34	4	$0.00192 - 0.000216i$	$0.00194 - 0.000241i$
846.54	2	$0.000540 - 0.000112i$	$0.000549 - 0.000109i$
846.54	3	$0.000776 - 0.000113i$	$0.000766 - 0.000107i$
846.54	3	$0.00101 - 0.000114i$	$0.00102 - 0.000127i$

Tabela 4.4: Comparando resultados para métodos diferentes - grade nula $u - v$ e grade $x - t$ - Campo Eletromagnético.

MQNs para o buraco negro de Schwarzschild utilizando um método numérico um pouco diferente, que envolve as coordenadas tartaruga, x, e temporal, t. Para maiores detalhes, consultar o Apêndice D. Neste método, observa-se a evolução temporal do campo em um determinado ponto x. Montamos tabelas comparativas - Tabelas (4.3) e (4.4) - dos resultados para o campo escalar, para alguns valores de massas.

Comparando os dados das freqüências para os campos escalar e eletromagnético, notamos uma concordância bastante boa entre as partes reais, com variações de até 2%, para mais ou para menos, entre os métodos. Já as partes imaginárias apresentaram discrepância maior, de até 10%. Uma das possibilidades para justificar a discrepância é o fato de, no caso da grade $x-t$, não estarmos próximos do horizonte de eventos, ao contrário do que se passava com a grade $u - v$. Os campos na grade $x - t$ foram calculados em $x = 0m$, próximos ao pico do potencial perturbativo. Utilizamos este breve comparativo para calibrar o método numérico utilizado para perturbações

estelares. O programa utilizado para este tipo de grade está disponível no Apêndice G.

Ilustrações de como ficam os MQNs nesta geometria aparecem nas três próximas figuras. A primeira mostra os MQNs para os buracos negros de $0.71M_s$ (equivalentes às estrelas de nêutrons mais massivas previstas pelo modelo de Oppenheimer-Volkov), resultantes de perturbações escalares, para $\ell = 2, 3, 4$ - Fig. (4.3). A segunda é para os buracos negros de mesma massa, mas diferentes perturbações, com $\ell = 4$ - Fig. (4.4). A terceira é para o mesmo tipo de perturbação (polar) e $\ell = 4$, mas com massas M distintas - Fig (4.5).

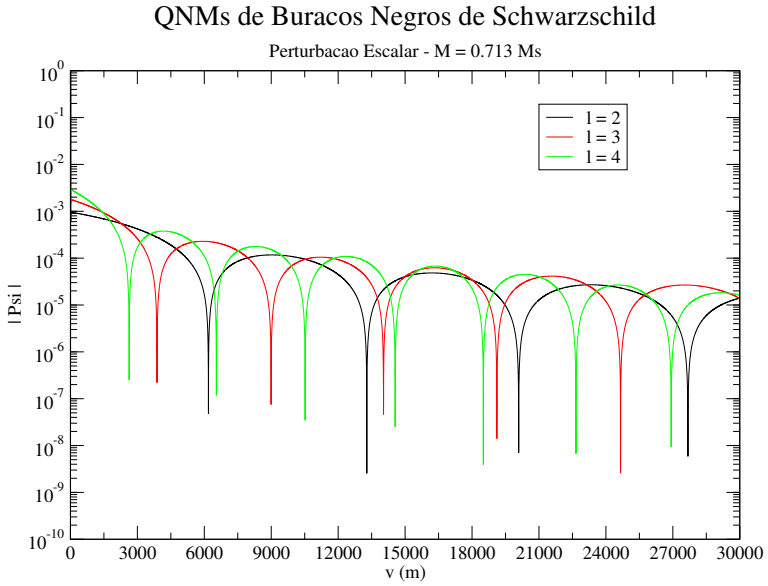

Figura 4.3: MQNs para um buraco negro de Schwarzschild. Perturbação escalar com $M = 0.713M_s$ e $\ell = 2, 3, 4$.

Tecemos a seguir algumas considerações sobre os dados obtidos.

- Para todos os tipos de perturbações conhecidas, a parte real das freqüências ω dos MQNs decrescia com o aumento da massa M (oscilações mais intensas dos campos quando os buracos têm massa menor). Tal fato parece indicar que, quanto mais massivo o buraco negro, menos suscetível ele se torna a perturbações de qualquer espécie;

- Observação idêntica aplica-se para as partes imaginárias de ω, estas sempre negativas, indicando amortecimento (*damping*) dos MQNs.

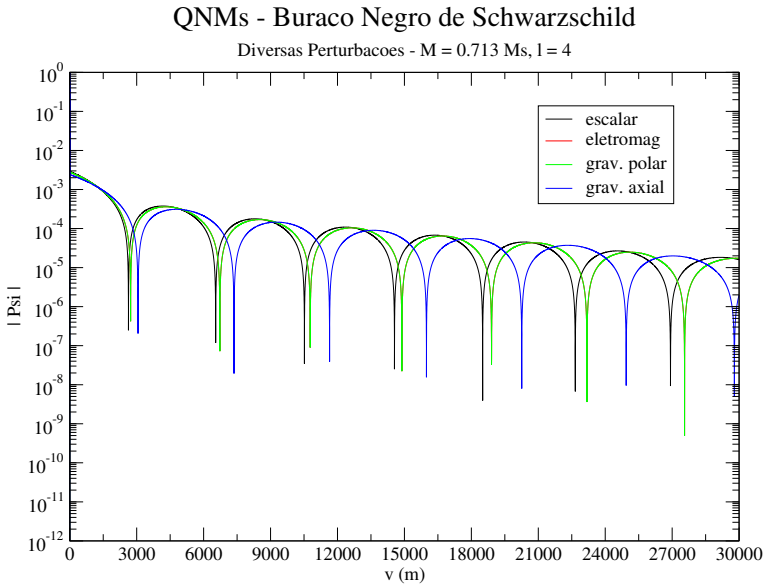

Figura 4.4: MQNs para um buraco negro nas mesmas condições, mas com $\ell = 4$ e todos os tipos de perturbações.

Quanto maior a massa M, tanto *menos negativa* fica $Im(\omega)$, isto é, mais *devagar* os campos decaem;

- O valor de ℓ também exerce preponderante papel na parte real das freqüências ω, aumentando-as conforme ℓ aumenta (mais intensas ficam as oscilações). Tal efeito, porém, mostra-se menos perceptível nas partes imaginárias de ω (taxas de decaimento dos campos), sendo que ℓ mais alto tem amortecimento ligeiramente maior. Novamente, tais características mantém-se para todos os campos estudados;

- Comparando-se buracos negros sujeitos a diferentes perturbações, podemos notar, para valores idênticos de M e de ℓ, que $Re(\omega)$ é maior para perturbações eletromagnéticas e escalares do que para perturbações gravitacionais polares e axiais;

- Entre as perturbações escalares e eletromagnéticas, as primeiras apresentam valores de $Re(\omega)$ ligeiramente maiores, muito embora a diferença entre elas neste ponto seja bem menor do que a que separa ambas das perturbações gravitacionais. Como o spin das perturbações é 0 para as escalares, 1 para as eletromagnéticas e 2 para as gravitacionais, temos aqui um decréscimo de $Re(\omega)$ com o aumento do spin da perturbação, para idênticos valores de M e ℓ;

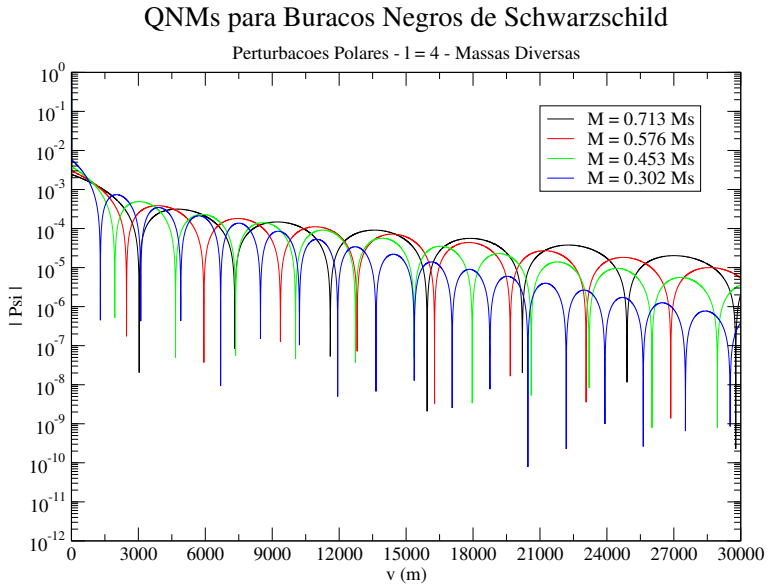

Figura 4.5: MQNs de perturbações polares para um buraco negro com $\ell = 4$ e todos os tipos de perturbações.

- No que toca a $Im(\omega)$, há uma ligeira diferença entre perturbações escalares e eletromagnéticas, sendo as segundas *menos negativas* do que as primeiras (isto é, com taxa de amortecimento ligeiramente inferior). Já as perturbações gravitacionais (as duas) têm $Im(\omega)$ ainda menos negativas do que as eletromagnéticas, indicando que são as mais difíceis de amortecer, além de apresentar menores taxas de oscilação do que as demais perturbações. Igualmente, tais observações aplicam-se para buracos com M e ℓ iguais;

- As perturbações polares e axiais têm valores de ω relativamente próximos, principalmente para os menores valores de M. Detectamos apenas discrepâncias ligeiras para os valores de M mais altos.

Falta observar um último ponto: as caudas pós-MQNs. Como neste capítulo trabalhamos com massas grandes, da ordem de $1M_s$, as grades de integração numérica ficaram muito grandes, e as caudas demoram muito a aparecer, muitoembora efetivamente apareçam. Apenas a título de comparação com os resultados do próximo capítulo, tomemos as caudas para o caso de uma massa $M = 1.0m$.

As caudas dependem de ℓ, tendo a forma de uma lei de potência, $t^{-2\ell-3}$, independentemente do tipo de perturbação estudado. Um exemplo ilustra-

tivo é dado na Fig. (4.6).

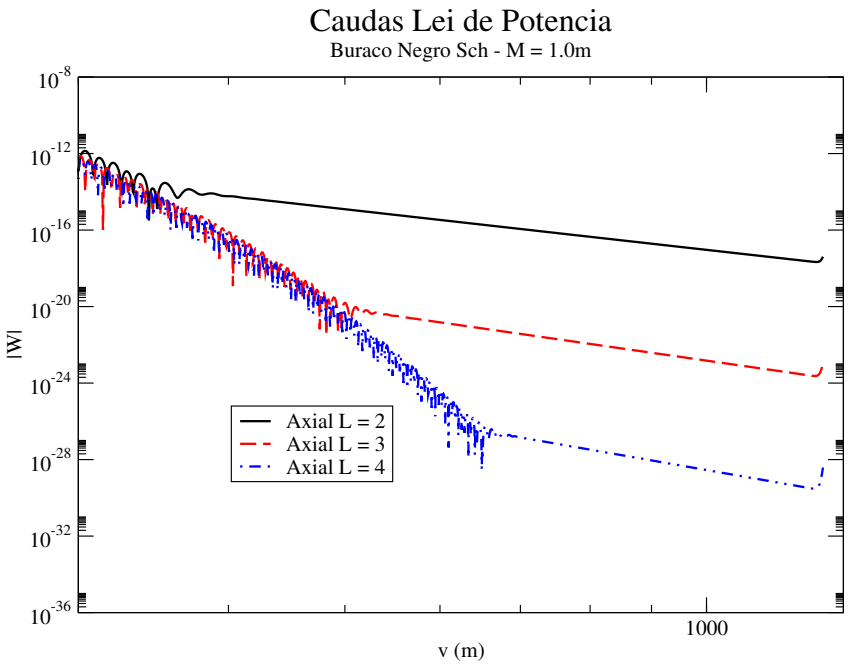

Figura 4.6: Caudas para o campo axial, com $M = 1.0$. Para os demais campos, o resultado é semelhante.

4.2.1 O Campo Escalar com $\ell = 0$

O caso em que $\ell = 0$ para o campo escalar, na geometria de Schwarzschild, não apresenta maiores dificuldades, pois o potencial correspondente (4.6) é positivo-definido neste caso, e a queda do mesmo (para $r \to \infty$) se dá sob a forma de uma lei de potência r^{-3} - ver Fig. (4.7).

O campo escalar sujeito a este potencial evolui como ilustrado na Fig. (4.8).

Podemos notar que o campo pouco oscila quando $\ell = 0$, decaindo como lei de potência, logo a seguir. Este comportamento indica que este campo escalar com $\ell = 0$ não sustenta uma fase oscilatória por muito tempo, se comparado a campos com ℓ mais alto. Tal comportamento qualitativo é verificado para outros valores de M, também. O decaimento da cauda é da forma t^{-3}, de conformidade com o resultado $t^{-2\ell-3}$ visto ao final da seção anterior.

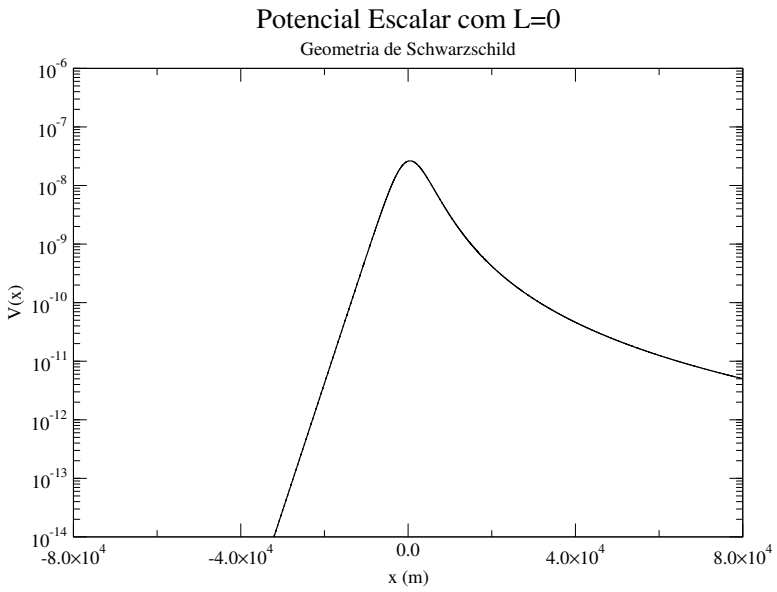

Figura 4.7: Potencial escalar com $\ell = 0$. Aqui, $M = 1000m$.

A razão para termos apresentado este caso à parte dos demais foi que o mesmo campo, analisado na geometria RNdS (no próximo capítulo) apresenta comportamento *sui generis*, que pode ser contrastado com o que foi exposto nesta seção.

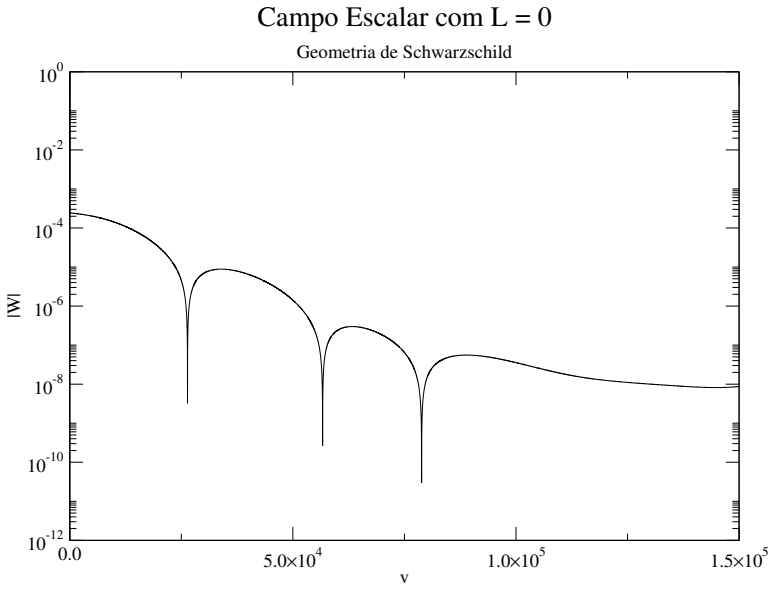

Figura 4.8: Campo escalar com $\ell = 0$, em Schwarzschild. Aqui, $M = 1000m$.

Capítulo 5

Perturbando Buracos Negros RNdS

Durante o curso este trabalho, lidamos também com buracos negros assintoticamente dS (de Sitter), cuja métrica já foi apresentada no início deste trabalho. Devido ao aparecimento de grandezas físicas novas, como carga Q e constante cosmológica $\Lambda > 0$, a estrutura do espaço-tempo se enriquece, com o aparecimento dos horizontes interno, r_- (nos casos em que Q aparece) e r_c (cosmológico), devido à constante cosmológica (quando $\Lambda > 0$). É útil definirmos aqui o raio de de Sitter, a, via $a^2 = \frac{3}{\Lambda}$. Neste capítulo, no entanto, lidaremos com buracos negros de massas reduzidas (quando comparados a buracos negros realistas, de massas comparáveis à massa solar, como os do capítulo anterior).

Como já vimos, buracos negros do tipo dS apresentam um horizonte de eventos, r_+, e um horizonte cosmológico, r_c, com $r_c > r_+$. No caso de buracos negros SdS, apenas estes dois horizontes existem, ao passo que no caso RNdS há um terceiro horizonte, o horizonte interno, r_-, tal que $r_- < r_+ < r_c$. Em qualquer caso, a região do espaço-tempo que nos interessa é dada por $r_+ < r < r_c$.

Nesta região, temos, para a coordenada tartaruga x,

$$\begin{aligned} h(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \\ \frac{dx}{dr} &= \frac{1}{h(r)} \\ x(r) &= -\frac{1}{2\kappa_c}\log(r_c - r) + \frac{1}{2\kappa_+}\log(r - r_+) - \frac{1}{2\kappa_-}\log(r - r_-) + \\ &+ \frac{1}{2\kappa_s}\log(r - r_s) \\ \kappa_i &= \frac{1}{2}\left|\frac{dh(r)}{dr}\right|_{r_i}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $r_s = -(r_+ + r_- + r_c)$. As constantes κ_i são simplesmente as gravidades superficiais nos horizontes r_i.

A teoria de perturbação para buracos negros do tipo SdS e RNdS é bem conhecida, de forma que as deduções formais das equações de onda que regem as tais perturbações encontram-se na literatura, como em [17]. Aqui já entraremos com as equações correspondentes. Por razões de economia de espaço, entraremos com as equações do caso RNdS, sendo que o caso SdS é facilmente obtido tomando-se o limite em que a carga Q tende a zero.

No caso RNdS, são 5 perturbações distintas: uma escalar, com o índice de multipolo mínimo $\ell_{min} = 0$, duas axiais (denotemo-las por W_1^- e W_2^-), e duas polares (denotemo-las por W_1^+ e W_2^+). O ponto relevante aqui é a mistura das perturbações eletromagnéticas e gravitacionais em $W_i^\pm$, o que não ocorre com buracos negros de Schwarzschild e SdS.

A equação de onda é similar, na forma, àquela vista na geometria de Schwarzschild,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = V_{pert}(x(r))W, \tag{5.2}$$

a diferença entre as perturbações estando nos potenciais V_{pert}, que assumem a forma abaixo,

$$\begin{aligned}
V_{esc} &= h(r)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \frac{2}{a^2}] \\
V_1^- &= h(r)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{4Q^2}{r^4} - \frac{3M - \sqrt{9M^2+8nQ^2}}{r^3}] \\
V_2^- &= h(r)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{4Q^2}{r^4} - \frac{3M + \sqrt{9M^2+8nQ^2}}{r^3}] \\
V_1^+ &= \frac{h(r)}{r^3}[U + \sqrt{9M^2+8nQ^2}A] \\
V_2^+ &= \frac{h(r)}{r^3}[U - \sqrt{9M^2+8nQ^2}A] \\
A &= \frac{rh(r)(2nr+3M)}{\alpha^2} + \frac{nr + M + \frac{2\Lambda r^3}{3}}{\alpha} \\
U &= (2nr+3M)A + (2M - \frac{2Q^2}{r} - \frac{2\Lambda r^3}{3}) - \frac{2nr^2h(r)}{\alpha} \\
\alpha &= nr + 3M - \frac{2Q^2}{r} \\
n &= \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

No limite em que a carga desaparece, $Q \to 0$, temos os potenciais $V_2^\pm$ transformando-se nos potenciais $V^\pm$ (polar e axial, respectivamente), da geometria SdS, dados por

$$V_{ax}^{SdS} = h_{SdS}(r)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}]$$

$$V_{pol}^{SdS} = \frac{2h_{SdS}(r)}{r^3(nr+3M)^2} \times [9M^3 + 3n^2Q^2r + 9M^2nr + 3Mn^2r^2 - \\ - 3M^2r^3\Lambda + n^2(n+1)r^3], \tag{5.4}$$

de sorte que apresentam $\ell_{min} = 2$. Já os potenciais $V_1^{\pm}$ tendem ao potencial eletromagnético da geometria SdS, dado por

$$V_{el}^{SdS} = h(r)\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \tag{5.5}$$

e, portanto, têm $\ell_{min} = 1$. Passando-se a equação de onda para as coordenadas nulas u e v, definidas exatamente como no caso da métrica de Schwarzschild, temos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}V(x(r))W, \tag{5.6}$$

que foi a forma usada no método numérico direto, para obtenção dos MQNs.

Com os potenciais à mão, é o momento de discutir os métodos empregados para a obtenção dos MQNs e suas respectivas freqüências ω.

Primeiramente, empregamos o método numérico direto utilizado nos buracos de Schwarzschild (com as devidas adaptações), bem como métodos semi-analíticos, como o método WKB. Um caso particular digno de nota é o caso de buracos negros RNdS quase-extremos, onde r_c e r_+ estão muito próximos, caso em que há solução analítica para as freqüências dos MQNs (potencial de *Pöschl-Teller*), como veremos mais adiante. Trabalhamos também com o caso em que $\Lambda << 1$, ou seja, $r_c >> r_+$, que é o caso conhecido como o limite assintoticamente plano.

Antes de descrevermos os métodos empregados na solução dos problemas de MQNs, convém ilustrar o comportamento dos potenciais $V(r)$ acima. Esta ilustração é pertinente, pois ajudar-nos-á a compreender a dinâmica dos campos na geometria RNdS, principalmente as características peculiares a esta.

Na fig. (5.1), fica explícita a presença de duas caudas do tipo exponencial, uma para $x \to \infty$, outra para $x \to \infty$, com um pico (barreira finita) para algum x_0. Para os mesmos valores dos parâmetros da geometria, não há diferenças qualitativas apreciáveis entre os potenciais avaliados.

É possível verificar os expoentes das caudas exponenciais. No caso em que $x \to -\infty$, $r \approx r_+$, de sorte que a função $x(r)$ fica

$$r - r_+ = (r_c - r_+)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_c}}(r_+ - r_-)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}(2r_+ + r_c + r_-)^{-\frac{\kappa_+}{\kappa_n}}\exp(2\kappa_+ x) \\ \approx C\exp(2\kappa_+ x), \tag{5.7}$$

e, sendo o potencial da forma $V(r) = h(x)\Omega(r_+)$ nas imediações de r_+, temos $V(x) \approx \exp(2\kappa_+ x)$. Analogamente, temos $V(x) \approx \exp(-2\kappa_c x)$ no limite $r \to r_c$ $(x \to \infty)$.

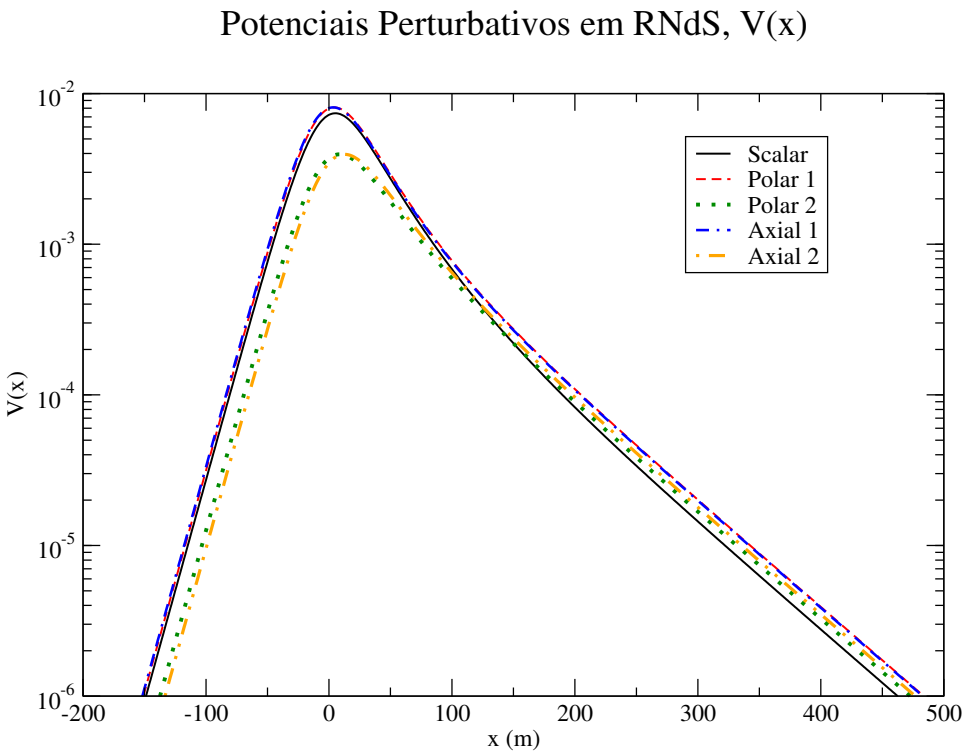

Figura 5.1: *Comparando os 5 tipos distintos de potenciais para massa, carga e constante cosmológica idênticos. Neste caso,* $\ell = 2$, $M = 11.76m$, $Q = 5.20m$ *e* $\Lambda = 2.10 \cdot 10^{-3}$.

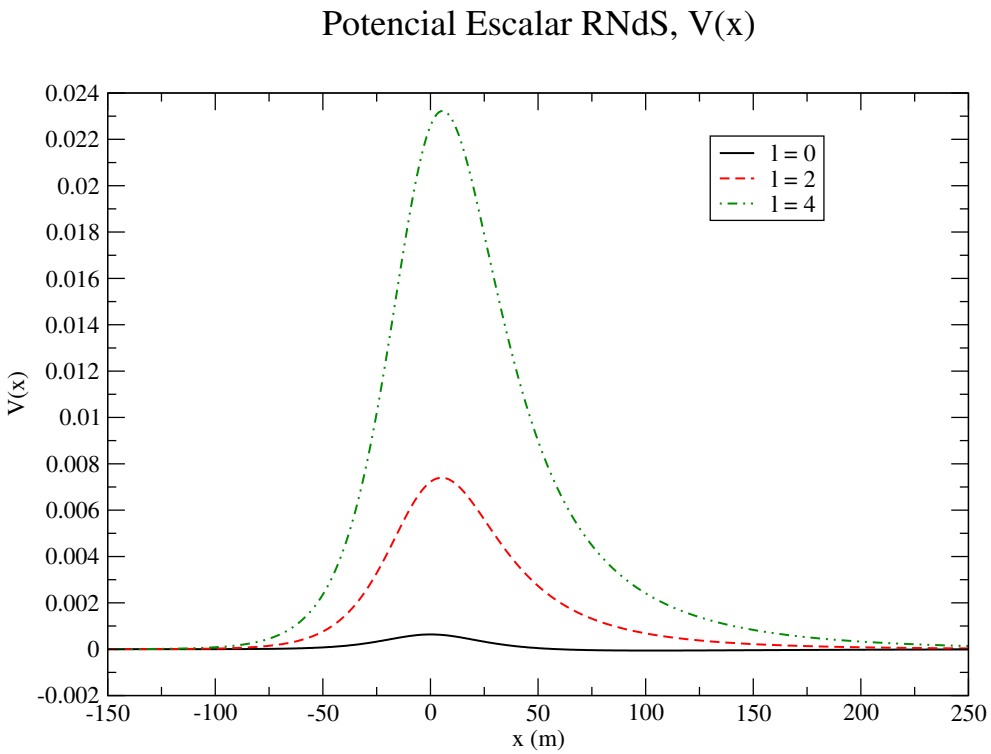

Figura 5.2: *Comparando valores distintos de ℓ para $\ell = 2$, $M = 11.76m$, $Q = 5.20m$ e $\Lambda = 2.10 \cdot 10^{-3}$, para o potencial escalar. Notar que o caso $\ell = 0$ apresenta uma região onde $V < 0$.*

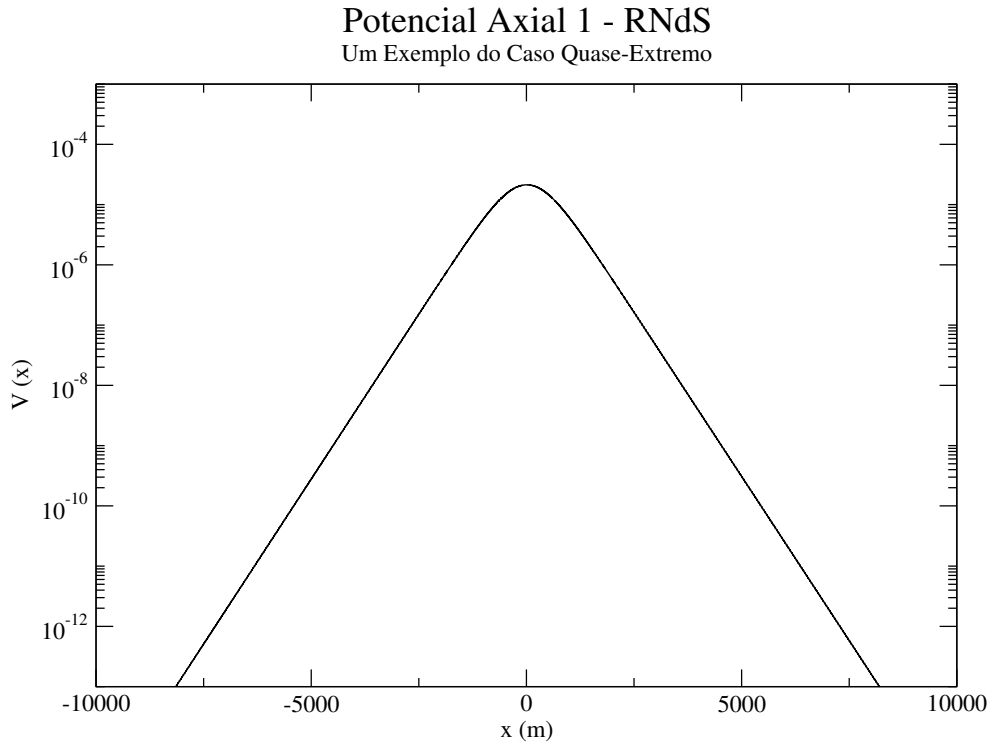

Figura 5.3: *Potencial para a perturbação axial* W_1^-, *para* $M = 1.0m$, $Q = 0.50m$ *e* $\Lambda = 1.2155 \cdot 10^{-1}$, *além de* $\ell = 3$. *Notar a simetria em torno de* $x = 0$, *típica de um potencial de Pöschl-Teller.*

No exemplo dado na fig. (5.7), temos, para todos os potenciais, uma forma funcional do tipo $V = \exp(-bx)$ com $b = 0.0677$ na região $x \to -\infty$. Para a região $x \to \infty$, temos $b = 0.0163$ para todos os potenciais.

Por fim, ilustraremos um exemplo do caso quase-extremo, na fig. (5.3).

5.1 Trabalhando com o Método Numérico Direto

Aqui, como na discussão sobre buracos negros de Schwarzschild, empregamos uma grade $u - v$ quadrada (cujos detalhes operacionais estão no Apêndice D) iniciando em $u = 0$ e $v = 0$, com uma condição inicial sendo colocada em $u = 0$, geralmente na forma de um pacote gaussiano centrado em algum $v = v_c$, com uma largura σ. Ao longo de $v = 0$, foi usada a condição de contorno $W = 0$, isto é, o campo é nulo na borda da grade.

A integração prossegue até que se atinja um valor máximo de u, u_{max},

que deve ser grande o bastante de modo a aproximar bem o horizonte de eventos. Em $v = v_{max}$, temos uma boa aproximação para o horizonte cosmológico. O campo obtido nestas regiões pode então ser analisado por meio de programas de ajuste não-linear, que nos permite obter as partes real (oscilatória) e imaginária (amortecimento) das frequências ω destes mesmos MQNs. Os valores de ω assim obtidos puderam ser então comparados com aqueles obtidos por métodos alternativos, como o WKB, objeto da próxima seção.

5.2 Trabalhando com o Método WKB

No regime dos MQNs, as perturbações têm a forma

$$W(x,t) = W(x)\exp(-i\omega t), \tag{5.8}$$

denominada dependência temporal harmônica. Esta dependência transforma as equações de onda em

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \omega^2 W = VW. \tag{5.9}$$

O método WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) é um método semi-analítico para se encontrar autovalores ω e autofunções W de problemas regidos pela equação (5.9), que aparecem não somente na física dos buracos negros, mas também em fenômenos que apresentam oscilações e dissipações diversas, como ocorre, por exemplo, em Mecânica Quântica. Em verdade, do ponto de vista matemático, o estudo dos MQNs de buracos negros guarda muitas semelhanças com o problema de espalhamento por barreiras finitas de potencial em Mecânica Quântica, pois todos os potenciais perturbativos aqui descritos têm forma semelhante, com um pico para algum $x = x_0$, e um decaimento para $x \to \infty$ e para $x \to -\infty$, dependendo da geometria em questão. Neste método, assumimos uma dependência funcional para W da forma

$$\begin{aligned} W(x) &= \exp(\frac{S(x)}{\delta}) \\ S(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \delta^n S_n(x) \end{aligned} \tag{5.10}$$

As expressões completas para as funções $S_n(x)$, bem como as adaptações necessárias para o estudo de MQNs, estão no Apêndice F.

Introduzamos aqui algumas notações: dado um potencial perturbativo V, e seu extremo (aqui, um ponto de máximo) x_0, o potencial calculado justamente em x_0 será denominado V_0. A n-ésima derivada de V relativamente a x, calculada em x_0, será denominada $V_0^{(n)}$. Com esta notação, as

freqüências dos modos quasinormais previstas pelo método WKB são dadas por

$$\omega^2 = (V_0 + P) - \alpha\sqrt{-2V_0^{(2)}}(1+Q)i, \tag{5.11}$$

onde

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{8}\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}}(\alpha^2+0.25) - \frac{1}{288}[\frac{V_0^{(3)}}{V_0^{(2)}}]^2(7+60\alpha^2) \\
Q &= -\frac{1}{2V_0^{(2)}}\Big\{\frac{5}{6912}[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}}]^4(77+188\alpha^2) - \\
&- \frac{1}{384}[\frac{V_0^{(4)}(V_0^{(3)})^2}{(V_0^{(2)})^3}](51+100\alpha^2) + \\
&+ \frac{1}{2304}[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}}]^2(67+68\alpha^2) + \frac{1}{288}\frac{V_0^{(3)}V_0^{(5)}}{(V_0^{(2)})^2} - \\
&- \frac{1}{288}\frac{V_0^{(6)}}{V_0^{(2)}}(5+4\alpha^2)\Big\}, \\
\alpha &= n + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

n sendo um número inteiro indicador do modo em questão, sendo $n = 0$ o modo fundamental. Os valores $n = 1, 2, 3, \ldots$ indicam modos acima do fundamental, com $Re(\omega) > 0$, e os valores $n = -1, -2, \ldots$ indicam modos com $Re(\omega) < 0$.

Tabelamos a seguir alguns valores obtidos para freqüências dos MQNs com métodos WKB e numérico direto.

Podemos ver que a concordância entre os valores fornecidos pelo método numérico e pelo método WKB é bastante boa, em geral, com discrepâncias inferiores a 1% tanto para as partes reais quanto para as partes imaginárias das freqüências. Um caso onde tal concordância não se mostrou tão boa foi o do campo W_1^- quando $\ell = 1$, para o qual $Im(\omega) = \omega_I$ apresentou discrepâncias inferiores a 1%, mas $Re(\omega) = \omega_R$ foi consideravelmente maior no método WKB, por vezes até 20% maior. Além do mais, os casos onde $\ell = 3$ (para todos os campos) apresentaram valores de $-\omega_I$ cerca de 10% mais altos no método WKB, em comparação com o método numérico direto. O método WKB parece funcionar melhor para valores mais baixos de ℓ.

Outra característica dos MQNs que salta aos olhos ao analisarmos as tabelas acima, é o comportamento de ω ao se fixar M e Q, mas variando Λ. Em todos os casos analisados, ω_R aumenta consideravelmente com o decréscimo de Λ, principalmente na faixa em que Λ varia de 10^{-1} até 10^{-3}. O aumento de ω_R torna-se desprezível para $\Lambda < 10^{-3}$. De qualquer modo, quanto menor a constante cosmológica, mais rápida é a oscilação do campo. Fenômeno semelhante ocorre com ω_I.

q = 0.5		Numérico		WKB	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
1	1.000E-5	3.07E-1	9.88E-2	3.05E-1	9.91E-2
	1.000E-4	3.05E-1	9.85E-2	3.05E-1	9.91E-2
	1.000E-3	3.05E-1	9.85E-2	3.03E-1	9.88E-2
	1.000E-2	2.95E-1	9.71E-2	2.90E-1	9.62E-2
	1.000E-1	1.15E-1	4.34E-2	1.15E-1	4.30E-2
2	1.000E-5	5.05E-1	8.57E-2	5.06E-1	9.80E-2
	1.000E-4	5.05E-1	8.59E-2	5.05E-1	9.79E-2
	1.000E-3	5.03E-1	8.52E-2	5.03E-1	9.76E-2
	1.000E-2	4.83E-1	5.43E-2	4.83E-1	9.43E-2
	1.000E-1	2.05E-1	4.21E-2	2.05E-1	4.16E-2
3	1.000E-5	7.06E-1	8.97E-2	7.06E-1	9.77E-2
	1.000E-4	7.06E-1	8.96E-2	7.06E-1	9.77E-2
	1.000E-3	7.03E-1	8.88E-2	7.03E-1	9.73E-2
	1.000E-2	6.76E-1	8.77E-2	6.75E-1	9.39E-2
	1.000E-1	2.92E-1	4.21E-2	2.92E-1	4.13E-2

Tabela 5.1: *Freqüências para o campo escalar W^{esc}, quando $q = 0.5$ e $m = 1.0$, usando os métodos numérico e WKB.*

q = 0.5		Numérico		WKB	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
1	1.000E-5	2.71E-1	9.51E-2	3.28E-1	9.53E-2
	1.000E-4	2.71E-1	9.50E-2	3.28E-1	9.53E-2
	1.000E-3	2.70E-1	9.47E-2	3.27E-1	9.49E-2
	1.000E-2	2.60E-1	9.11E-2	3.15E-1	9.14E-2
	1.000E-1	1.16E-1	4.08E-2	1.40E-1	4.08E-2
2	1.000E-5	4.94E-1	9.72E-2	4.94E-1	9.71E-2
	1.000E-4	4.93E-1	9.72E-2	4.94E-1	9.71E-2
	1.000E-3	4.91E-1	9.68E-2	4.92E-1	9.67E-2
	1.000E-2	4.73E-1	9.31E-2	4.73E-1	9.30E-2
	1.000E-1	2.09E-1	4.10E-2	2.09E-1	4.16E-2
3	1.000E-5	7.05E-1	8.95E-2	7.05E-1	9.77E-2
	1.000E-4	7.05E-1	8.94E-2	7.05E-1	9.76E-2
	1.000E-3	7.02E-1	8.87E-2	7.02E-1	9.73E-2
	1.000E-2	6.77E-1	8.50E-2	6.76E-1	9.35E-2
	1.000E-1	2.98E-1	4.10E-2	2.98E-1	4.10E-2

Tabela 5.2: *Freqüências para o campo axial W_1^-, quando $q = 0.5$ e $m = 1.0$, usando os métodos numérico e WKB.*

q = 0.5		Numérico		WKB	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
2	1.000E-5	3.82E-1	8.96E-2	3.81E-1	8.98E-2
	1.000E-4	3.82E-1	8.96E-2	3.81E-1	8.98E-2
	1.000E-3	3.80E-1	8.93E-2	3.80E-1	8.95E-2
	1.000E-2	3.66E-1	8.67E-2	3.65E-1	8.67E-2
	1.000E-1	1.60E-1	4.06E-2	1.60E-1	4.05E-2
3	1.000E-5	6.13E-1	8.59E-2	6.12E-1	9.33E-2
	1.000E-4	6.13E-1	8.59E-2	6.12E-1	9.32E-2
	1.000E-3	6.10E-1	8.59E-2	6.10E-1	9.29E-2
	1.000E-2	5.88E-1	8.50E-2	5.87E-1	8.97E-2
	1.000E-1	2.58E-1	4.07E-2	2.59E-1	4.07E-2

Tabela 5.3: *Freqüências para o campo axial W_2^- quando $q = 0.5$ e $m = 1.0$, usando os métodos numérico e WKB.*

q = 0.5		Numérico		WKB	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
1	1.000E-5	2.71E-1	9.51E-2	2.69E-1	9.55E-2
	1.000E-4	2.71E-1	9.50E-2	2.68E-1	9.55E-2
	1.000E-3	2.70E-1	9.47E-2	2.67E-1	9.51E-2
	1.000E-2	2.60E-1	9.11E-2	2.57E-1	9.15E-2
	1.000E-1	1.16E-1	4.08E-2	1.16E-1	4.08E-2
2	1.000E-5	4.94E-1	9.71E-2	4.93E-1	9.72E-2
	1.000E-4	4.94E-1	9.71E-2	4.93E-1	9.72E-2
	1.000E-3	4.92E-1	9.67E-2	4.91E-1	9.68E-2
	1.000E-2	4.73E-1	9.30E-2	4.73E-1	9.31E-2
	1.000E-1	2.09E-1	4.16E-2	2.09E-1	4.10E-2
3	1.000E-5	7.05E-1	8.95E-2	7.05E-1	9.77E-2
	1.000E-4	7.05E-1	8.94E-2	7.05E-1	9.76E-2
	1.000E-3	7.02E-1	8.86E-2	7.02E-1	9.73E-2
	1.000E-2	6.77E-1	8.50E-2	6.76E-1	9.35E-2
	1.000E-1	2.98E-1	4.10E-2	2.98E-1	4.10E-2

Tabela 5.4: *Freqüências para o campo polar W_1^+, quando $q = 0.5$ e $m = 1.0$, usando os métodos numérico e WKB.*

q = 0.5		Numérico		WKB	
ℓ	Λ	Re(ω)	-Im(ω)	Re(ω)	-Im(ω)
2	1.000E-5	3.82E-1	8.96E-2	3.81E-1	8.99E-2
	1.000E-4	3.82E-1	8.95E-2	3.81E-1	8.97E-2
	1.000E-3	3.80E-1	8.93E-2	3.79E-1	8.94E-2
	1.000E-2	3.66E-1	8.64E-2	3.65E-1	8.66E-2
	1.000E-1	1.60E-1	4.13E-2	1.60E-1	4.05E-2
3	1.000E-5	6.13E-1	8.56E-2	6.12E-1	9.33E-2
	1.000E-4	6.13E-1	8.56E-2	6.12E-1	9.32E-2
	1.000E-3	6.10E-1	8.56E-2	6.10E-1	9.29E-2
	1.000E-2	5.88E-1	8.49E-2	5.87E-1	8.97E-2
	1.000E-1	2.58E-1	4.07E-2	2.58E-1	4.07E-2

Tabela 5.5: *Freqüências para o campo polar W_2^+, quando $q = 0.5$ e $m = 1.0$, usando os métodos numérico e WKB.*

Um programa em Mathematica para o cálculo das frequências via WKB é dado ao final do Apêndice G.

5.3 O Caso Quase-Extremo

O caso quase-extremo da geometria RNdS é aquele caracterizado pela forte proximidade entre os horizontes cosmológico e de eventos, o que matematicamente se expressa pelo parâmetro adimensional δ, definido como

$$\delta = \frac{r_c - r_+}{r_+}, \tag{5.13}$$

sujeito à condição $0 < \delta << 1$. Este limite é interessante para se analisar, porque a relação entre r e x torna-se mais simples, simplificando sobremaneira o cálculo dos potenciais perturbativos e - melhor ainda - levando o problema dos MQNs a uma solução analítica, com expressões simples para as freqüências ω. Demonstraremos tais assertivas a seguir.

É conveniente reescrever a métrica RNdS em termos dos seus horizontes, como se segue,

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} = \frac{\Lambda}{3r^2}(r_c - r)(r - r_+)(r - r_-)(r + r_+ + r_- + r_c). \tag{5.14}$$

Como a região onde trabalhamos é bastante restrita em termos da coordenada radial r, aproximemos a expressão anterior por

$$h(r) = \frac{\Lambda}{3r_+^2}(r_c - r)(r - r_+)(3r_+ + r_-)(r_+ - r_-). \tag{5.15}$$

Integrando-se $\frac{dx}{dr} = \frac{1}{h(r)}$, temos

$$h(x) = \frac{(r_c - r_+)\kappa_+}{2\cosh^2(\kappa_+ x)} + O(\delta^3), \tag{5.16}$$

e os potenciais passam, neste limite, a se comportar como

$$V(x) = h(x)\Omega(r_+) + O(\delta) = \frac{V_0}{\cosh^2(\kappa_+ x)} + O(\delta). \tag{5.17}$$

Tais potenciais são conhecidos como potenciais de *Pöschl-Teller*. Estes potenciais e suas aplicações dentro da física de buracos negros são discutidos, por exemplo, em [21], [22], [23] e [24].

Naturalmente, o valor de V_0 diferenciará os diferentes tipos de potenciais, já que a forma funcional de todos os potenciais, no limite quase-extremo, é a mesma. As expressões para V_0 serão:

$$\begin{aligned}
V_0^{es} &= \frac{\ell(\ell+1)\kappa_+(r_c - r_+)}{2r_+^2} \\
V_0^{-1} &= \frac{\kappa_+(r_c - r_+)[\ell(\ell+1)r_+^2 + 4Q^2 - 3M + \sqrt{9M^2 + 8nQ^2}]}{2r_+^4} \\
V_0^{-2} &= \frac{\kappa_+(r_c - r_+)[\ell(\ell+1)r_+^2 + 4Q^2 - 3M - \sqrt{9M^2 + 8nQ^2}]}{2r_+^4} \\
V_0^{+1} &= \frac{\kappa_+(r_c - r_+)}{2r_+^4}[\frac{(2nr_+^2 + 3Mr_+ + r_+\sqrt{9M^2 + 8nQ^2})(nr_+ + M + \frac{2\Lambda r_+^3}{3})}{nr_+ + 3M - \frac{2Q^2}{r_+}} + Y] \\
V_0^{+1} &= \frac{\kappa_+(r_c - r_+)}{2r_+^4}[\frac{(2nr_+^2 + 3Mr_+ - r_+\sqrt{9M^2 + 8nQ^2})(nr_+ + M + \frac{2\Lambda r_+^3}{3})}{nr_+ + 3M - \frac{2Q^2}{r_+}} + Y] \\
Y &= 2Mr_+ - 2Q^2 - \frac{2\Lambda r_+^4}{3} \\
n &= \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Os MQNs devido a potenciais de Pöschl-Teller têm frequência ω dada por

$$\omega = \kappa_+\sqrt{\frac{V_0}{\kappa_+^2} - \frac{1}{4}} - i\kappa_+(\frac{1}{2} + m), \tag{5.19}$$

onde $m = 0, 1, 2, \ldots$ indica o modo. Estes valores teóricos podem ser comparados com os valores numéricos. De qualquer forma, podemos antecipar aqui que os campos W aqui têm dinâmica caracterizada inteiramente por MQNs, sem a presença de caudas de qualquer tipo após os MQNs. Ilustraremos esta observação a seguir, por meio das figuras (5.4), (5.5) e (5.6).

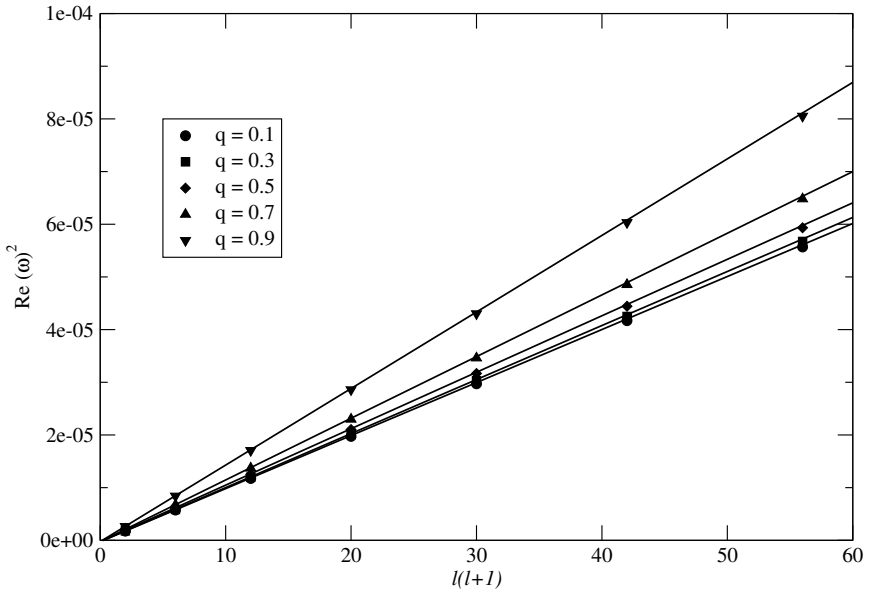

Figura 5.4: *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para o campo escalar. Os valores teóricos aparecem na forma de retas, ao passo que os valores obtidos numericamente aparecem como pontos.*

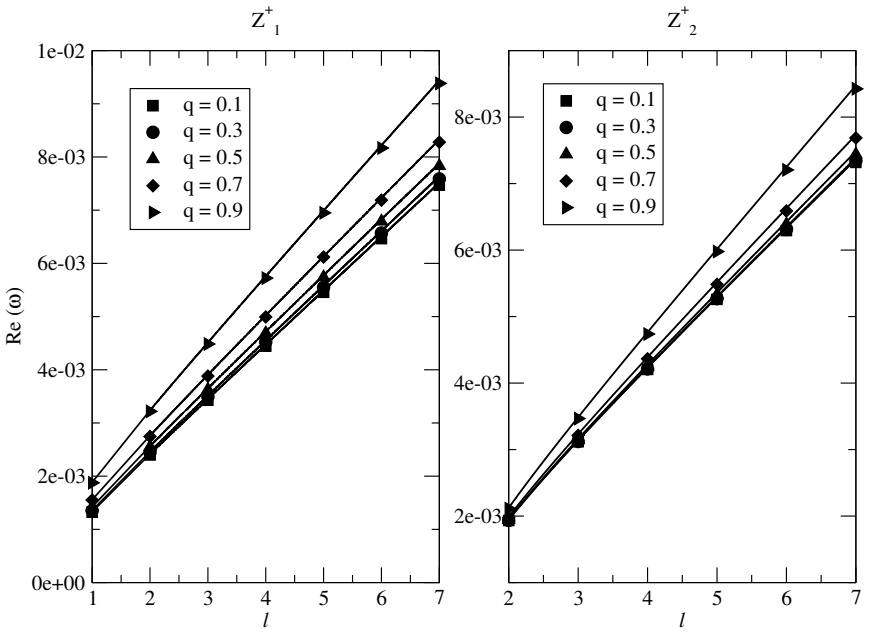

Figura 5.5: *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para os campos polares, $W^+_{1,2}$. À esquerda, estão os dados para W^+_1 e, à direita, para W^+_2.*

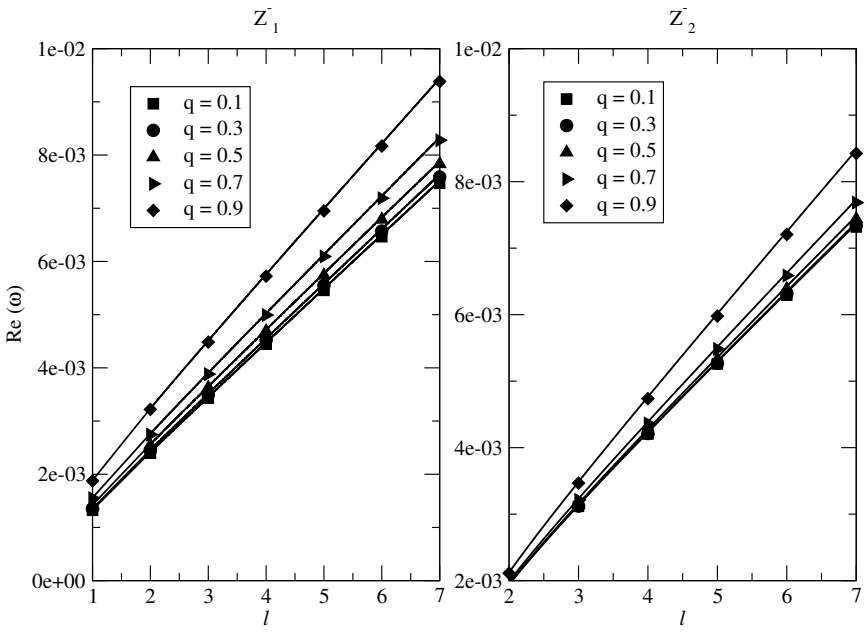

Figura 5.6: *Freqüências de MQNs no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q, para os campos axiais, $W^{-}_{1,2}$. À esquerda, estão os dados para W^{-}_{1} e, à direita, para W^{-}_{2}.*

Podemos, assim, observar a concordância (bastante boa) entre valores teóricos e numéricos, no regime quase-extremo. Em todas as figuras mostradas aqui, temos $M = 1.0$ para os buracos negros.

Para terminar esta seção, é interessante mostrar alguns dos MQNs que obtivemos, como nas figuras (5.7) e (5.8). Reparar a ausência de caudas de qualquer tipo.

Para a figura (5.7), no caso em que $Q = 0.1$, temos $\omega = 2.45 \cdot 10^{-3} - 5.16 \cdot 10^{-4} i$. No caso em que $Q = 0.5$, temos $\omega = 3.12 \cdot 10^{-3} - 6.31 \cdot 10^{-4} i$, enquanto que para $Q = 0.9$, $\omega = 2.62 \cdot 10^{-3} - 4.57 \cdot 10^{-4} i$. Já no caso da figura (5.8), os valores de ω são $\omega(Q = 0.1) = 2.46 \cdot 10^{-3} - 5.22 \cdot 10^{-4}$, $\omega(Q = 0.5) = 3.21 \cdot 10^{-3} - 6.31 \cdot 10^{-4} i$ e $\omega(Q = 0.9) = 2.90 \cdot 10^{-3} - 4.58 \cdot 10^{-4} i$. À parte o caso $Q = 0.9$ (onde as partes reais divergiram em mais de 10%), os valores de ω estão bastante próximos para os dois tipos de perturbações.

Ao observar as figuras de MQNs do caso quase-extremo, para os diferentes campos, notamos que há uma relação entre $Re(\omega^2)$ e a quantidade $\ell(\ell + 1)$, e esta relação pôde ser quantificada, sendo da forma

$$Re(\omega^2) = A(Q) + B(Q)\ell(\ell + 1), \tag{5.20}$$

onde $A(Q)$ e $B(Q)$ dependem do campo e da carga Q do buraco negro RNdS. Nós obtivemos, para os campos escalar, $W^{\pm}_{1}$ e $W^{\pm}_{2}$, os valores de $A(Q)$ e de $B(Q)$, listando-os nas Tabelas (5.6), (5.7) e (5.8).

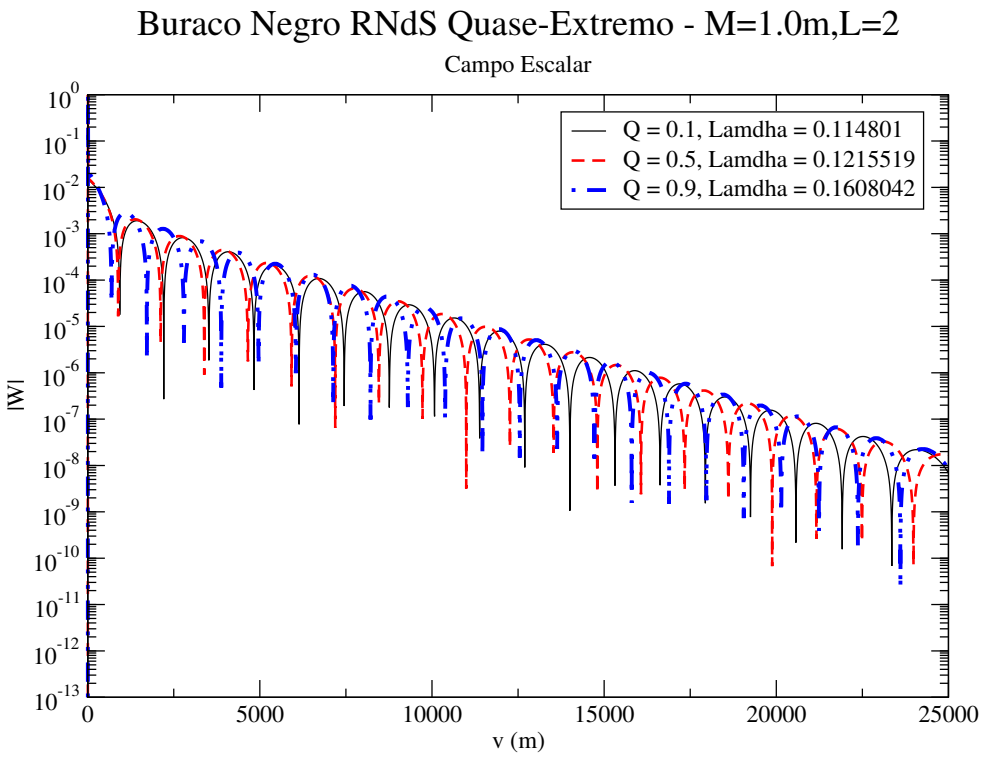

Figura 5.7: *MQNs do campo escalar no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q e Λ, mantendo-se $M = 1.0m$ e $\ell = 2$. Temos $\kappa_+ = 10^{-3}$ em todos os casos.*

Q	$A(Q)$	$B(Q)$
0.1	$-4.95E-7$	$9.99E-7$
0.3	$-5.02E-7$	$1.02E-6$
0.5	$-5.05E-7$	$1.06E-6$
0.7	$-5.00E-7$	$1.16E-6$
0.9	$-4.97E-7$	$1.44E-6$

Tabela 5.6: Relação entre $Re(\omega^2)$ e $\ell(\ell+1)$, para o campo escalar.

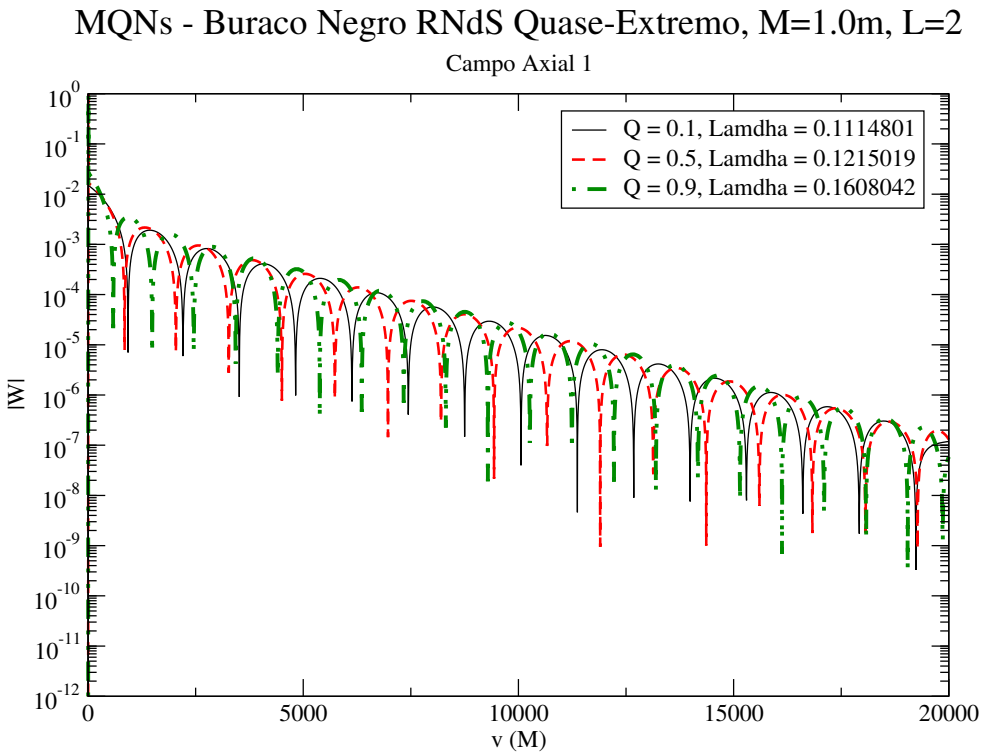

Figura 5.8: *MQNs do campo axial* W_1^- *no caso quase-extremo para diferentes valores da carga* q *e* Λ*, mantendo-se* $M = 1.0m$ *e* $\ell = 2$*. Temos* $\kappa_+ = 10^{-3}$ *em todos os casos.*

Q	$A(Q)$	$B(Q)$
0.1	$-5.00E-7$	$1.00E-6$
0.3	$-4.40E-7$	$1.03E-6$
0.5	$-2.44E-7$	$1.10E-6$
0.7	$1.70E-7$	$1.22E-6$
0.9	$1.20E-6$	$1.55E-6$

Tabela 5.7: Relação entre $Re(\omega^2)$ e $\ell(\ell+1)$, para os campos $W_1^{\pm}$.

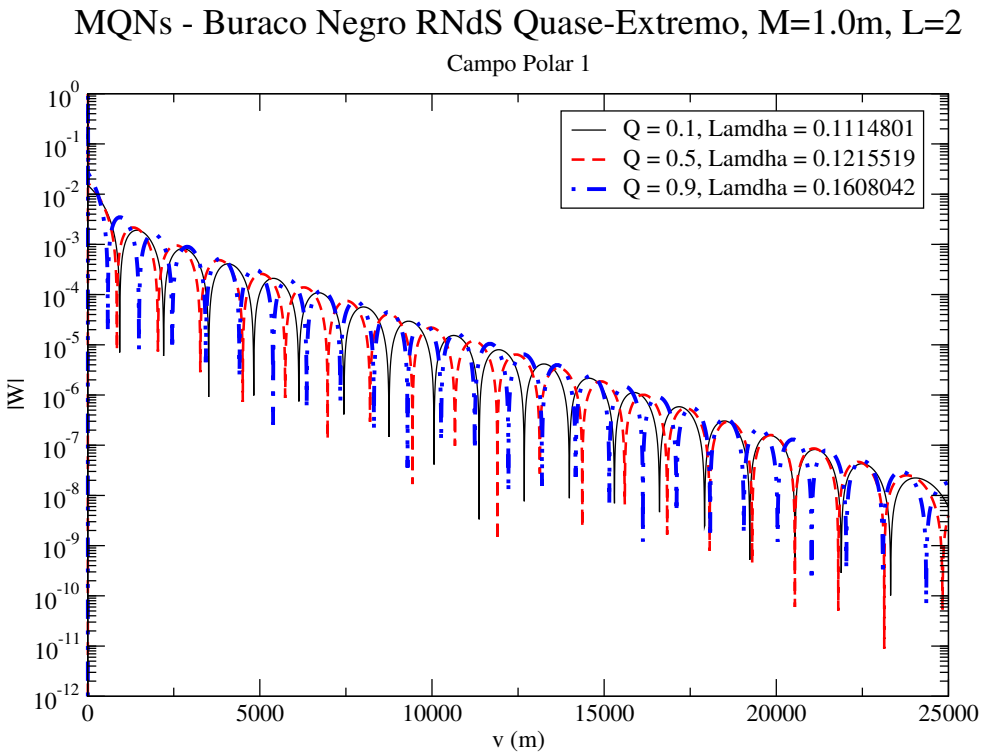

Figura 5.9: *MQNs do campo axial W_1^+ no caso quase-extremo para diferentes valores da carga q e Λ, mantendo-se $M = 1.0m$ e $\ell = 2$. Temos $\kappa_+ = 10^{-3}$ em todos os casos.*

Q	$A(Q)$	$B(Q)$
0.1	$-2.46E-6$	$9.92E-7$
0.3	$-2.55E-6$	$1.00E-6$
0.5	$-2.75E-6$	$1.03E-6$
0.7	$-3.16E-6$	$1.10E-6$
0.9	$-4.20E-6$	$1.33E-6$

Tabela 5.8: Relação entre $Re(\omega^2)$ e $\ell(\ell+1)$, para os campos $W_2^{\pm}$.

As tabelas (5.6), (5.7) e (5.8) deixam transparecer que $B(Q)$ cresce com a carga, independentemente do campo estudado. Já o termo $B(Q)$ é praticamente constante (e negativo) para o campo escalar. Para os campos $W_2^{\pm}$, $A(Q)$ é negativo e decresce com o aumento da carga Q. Já para os campos $W_1^{\pm}$, $A(Q)$ começa negativo com baixos valores de Q, crescendo e passando a positivo conforme Q cresce.

5.4 Região Intermediária

Nesta região intermediária, os métodos numérico direto e WKB foram amplamente empregados, pois não há como aproximar por funções analíticas a relação entre as coordenadas radial r e tartaruga x ou as soluções da equação de onda aqui, diferentemente do que ocorria no caso quase-extremo.

Observamos aqui uma evolução temporal marcada, de início, por modos quasinormais, seguidos por uma cauda do tipo exponencial. Aqui temos uma diferença importante entre os casos Schwarzschild e RNdS: nos primeiros, tal decaimento é do tipo lei de potência. Em outras palavras, temos, em RNdS, um decaimento do tipo

$$W_i \sim \exp(-\gamma_i v) \tag{5.21}$$

para $v \to \infty$ (na prática, $t \to \infty$). Estes expoentes, no limite de $\Lambda \to 0$ (isto é, baixos valores de κ_c), portam-se como

$$\gamma_i \approx \ell(\kappa_c + b_i \kappa_c^2), \tag{5.22}$$

onde b_i é uma constante que depende do campo estudado.

Um outro ponto relevante nessas caudas exponenciais é a não-dependência delas com a carga Q, ao contrário do que se passa com as freqüências dos MQNs, onde a carga tem seu papel, como veremos nas figuras (5.10) e (5.11).

As freqüências que obtivemos, para o campo axial W_2^-, foram $\omega = 0.372 - 0.0886i$ quando $Q = 0.1$, $\omega = 0.386 - 0.0893i$ quando $Q = 0.5$ e $\omega = 0.412 - 0.0881i$ quando $Q = 0.9$. Já para o campo escalar, os valores obtidos foram $\omega = 0.484 - 0.0855i$ se $Q = 0.1$, $\omega = 0.505 - 0.0911i$ se $Q = 0.5$ e $\omega = 0.581 - 0.0858i$ se $Q = 0.9$. Assim, vemos que um aumento na carga Q reflete-se no aumento da parte real das freqüências, isto é, as oscilações são mais freqüentes. Já a parte imaginária ω_I mostrou comportamento diverso: um aumento de Q inicialmente aumentava ω_I (aumentando a taxa de amortecimento do modo), até determinado ponto. Um novo aumento de Q reduzia ω_I. De qualquer maneira, as variações em Q afetaram mais a freqüência oscilatória, ω_R, do que a taxa de amortecimento (damping), ω_I.

Um caso que merece menção à parte é aquele em que $\ell = 0$ para o campo escalar. Trataremos dele a seguir.

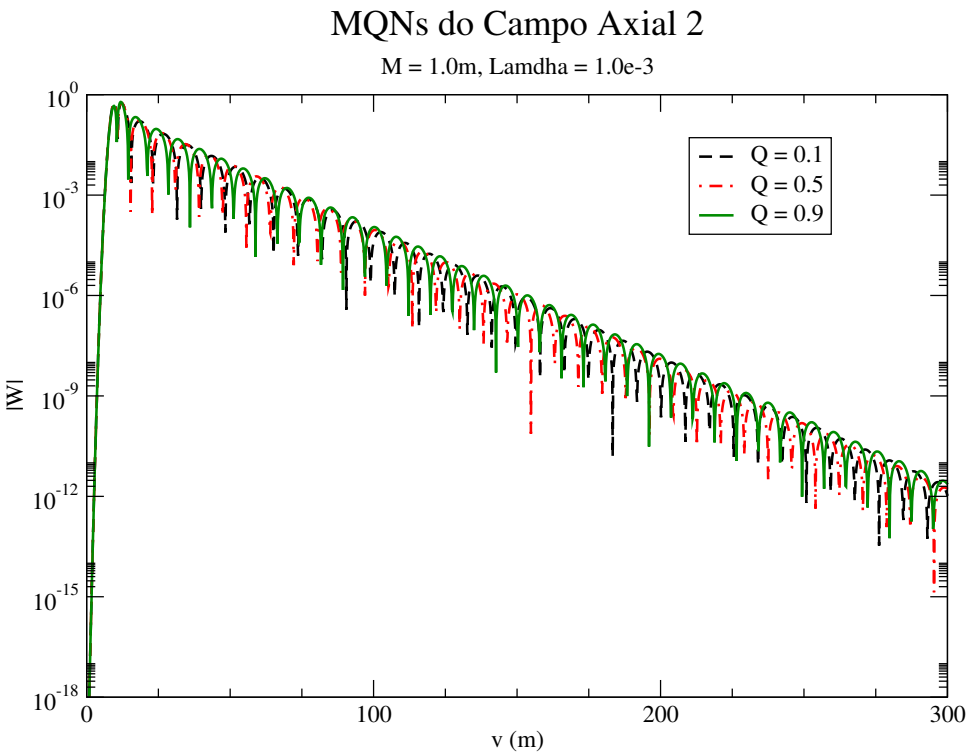

Figura 5.10: *MQNs para o campo axial W_2^-, mostrando a dependência destes com a carga Q. Os parâmetros fixos são $\ell = 2$, $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$.*

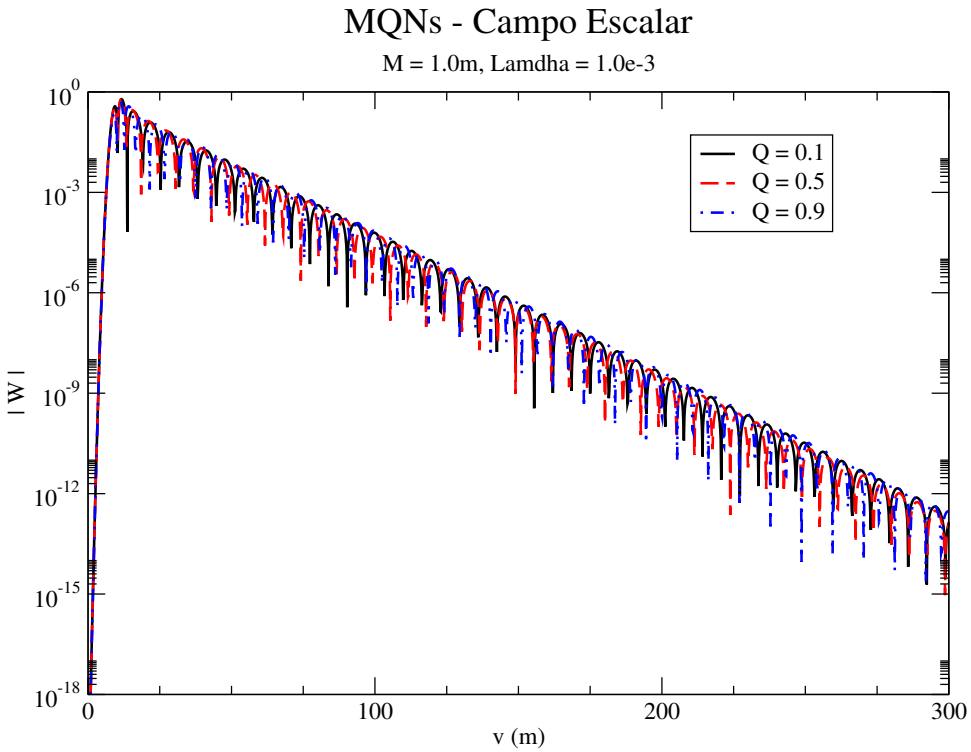

Figura 5.11: *MQNs para o campo escalar, mostrando a dependência destes com a carga Q. Os parâmetros fixos são $\ell = 2$, $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$.*

5.4.1 O Caso do Campo Escalar com $\ell = 0$.

Este é o único caso onde o potencial perturbativo não é positivo-definido. Dependendo da relação entre os parâmetros da geometria (M, Q e Λ), podemos ter $V < 0$ para alguns valores de r (ou de x). Um exemplo disso é claramente visível na Fig. (5.12).

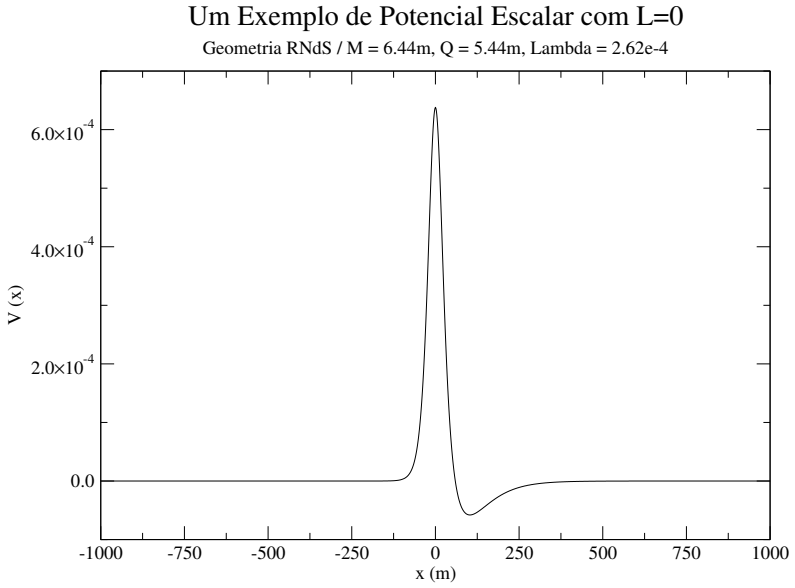

Figura 5.12: Potencial escalar com $\ell = 0$. Aqui, $M = 6.44$, $Q = 5.44$ e $\Lambda = 2.62 \cdot 10^{-4}$. Notar a existência de dois extremos: um máximo de V positivo seguido de um mínimo de V negativo.

O campo escalar com $\ell = 0$ em geometrias RNdS apresenta dinâmica própria, diversa de todos os demais campos. Tal campo inicialmente oscila e decai como os demais, mas não forma MQNs bem definidos, pois esta fase de oscilação com dissipação logo cede o lugar para uma fase onde o valor do campo estabiliza-se até tornar-se constante. O problema em questão foi discutido para geometrias SdS em [27] e em [28], dentre outros trabalhos. Julgamos conveniente estudar o mesmo problema na geometria RNdS. Uma ilustração do problema aparece na Fig. (5.13).

Vemos então que, diferentemente do caso da geometria de Schwarzschild, onde o caso $\ell = 0$ não despertava maior interesse, o campo escalar com o mesmo ℓ em geometrias RNdS apresenta comportamento *sui generis*, bem diferente dos demais campos estudados. O mesmo vale para as geometrias SdS [27], [28].

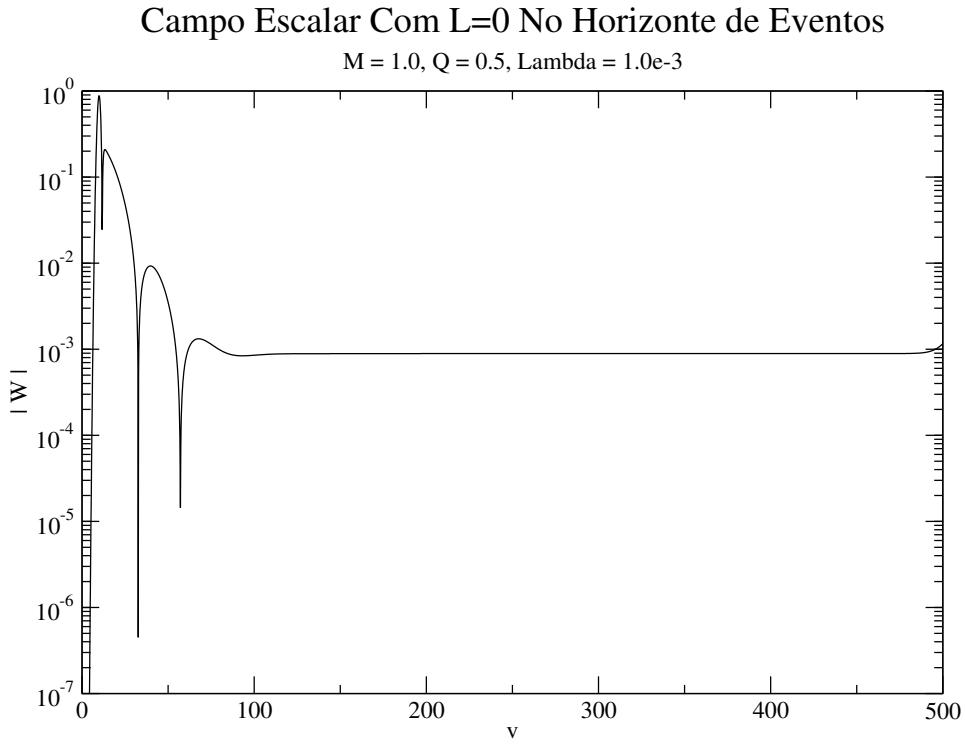

Figura 5.13: *A evolução do campo escalar com $\ell = 0$ na geometria RNdS. Os demais parâmetros são $M = 1.0m$ e $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-3}$. Notamos que o campo tende a uma constante, depois de uma rápida fase oscilatória inicial.*

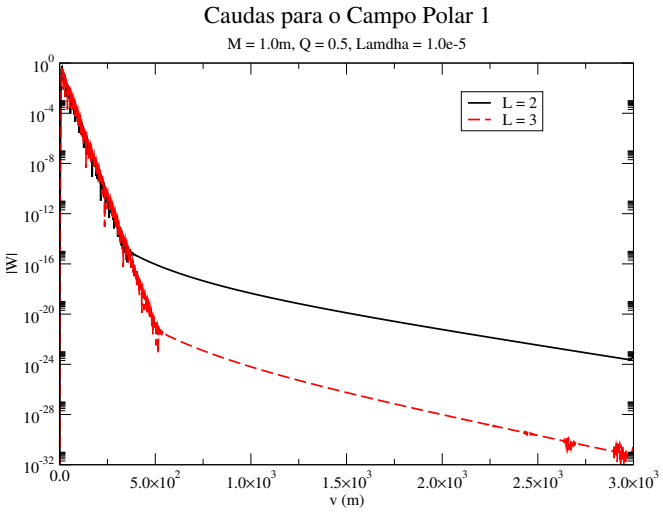

Figura 5.14: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo polar* W_1^+. *A parte inicial da cauda é do tipo lei de potência, transformando-se em exponencial ao final da evolução temporal, para* v *alto.*

5.5 Limite Assintoticamente Plano

Este limite assintoticamente plano caracteriza-se, como já vimos, por $\Lambda \to 0$ ou, analogamente, $r_c >> r_+$. Retomando o parâmetro δ que utilizamos para a discussão do caso quase-extremo, temos, neste caso,

$$\delta = \frac{r_c - r_+}{r_+} > 50, \tag{5.23}$$

o valor 50 tendo sido determinado empiricamente, por meio dos resultados obtidos com o método numérico direto.

Já vimos que, no caso da geometria de Schwarzschild (S), os MQNs eram seguidos por caudas do tipo lei de potência, com esta fase de cauda apresentando uma dependência com o índice de multipolo, ℓ, do tipo $t^{-2\ell-3}$. Como a métrica RNdS, aqui, aproxima-se assintoticamente da métrica S, com $r_c \to \infty$, é interessante verificar se a dinâmica dos campos escalar, polares e axiais, no limite assinalado, reproduz a cauda do tipo lei de potência típica de espaços-tempos assintoticamente planos, ou se há alguma diferença qualitativa entre as dinâmicas S e RNdS com $\Lambda \to 0$.

Constatamos, pelo método numérico direto, que de fato aparece uma região entre os MQNs (valores baixos de v) e a cauda exponencial dominante para valores altos de v, onde aparece uma cauda do tipo lei de potência, à semelhança do que se passava com geometrias assintoticamente planas. A

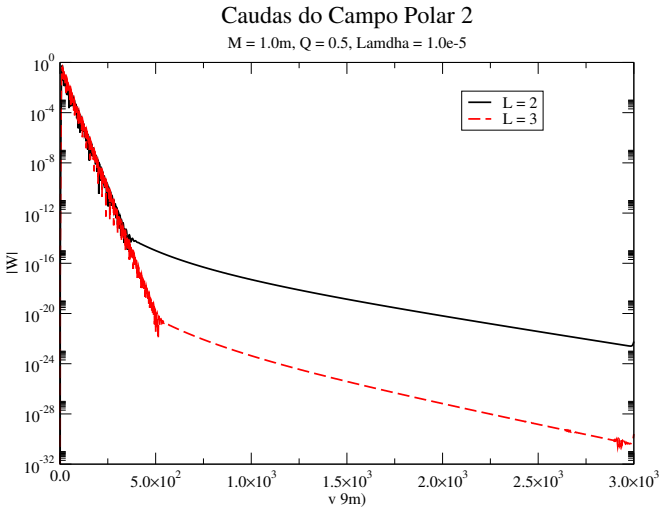

Figura 5.15: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo polar* W_2^+. *A parte inicial da cauda é do tipo lei de potência, transformando-se em exponencial ao final da evolução temporal, para* v *alto.*

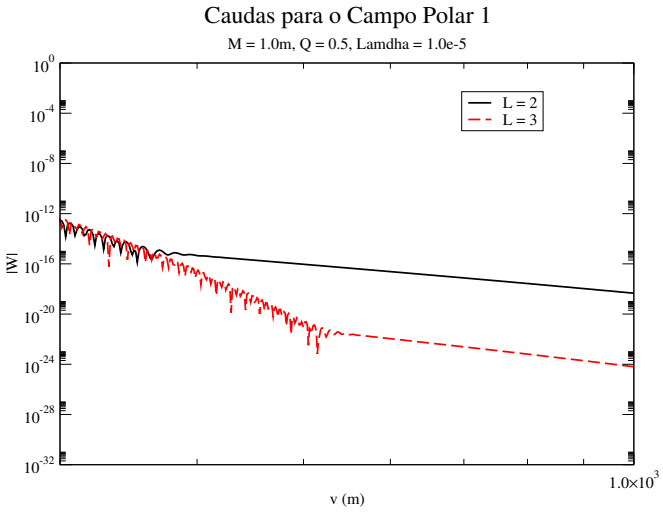

Figura 5.16: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo* W_1^+. *Aqui, a cauda lei de potência - na região intermediária entre os MQNs e a cauda exponencial - foi realçada. Obtivemos, para a potência* b *em* v^{-b}, $b = 10.1$ *se* $\ell = 3$ *e* $b = 7.86$ *se* $\ell = 2$.

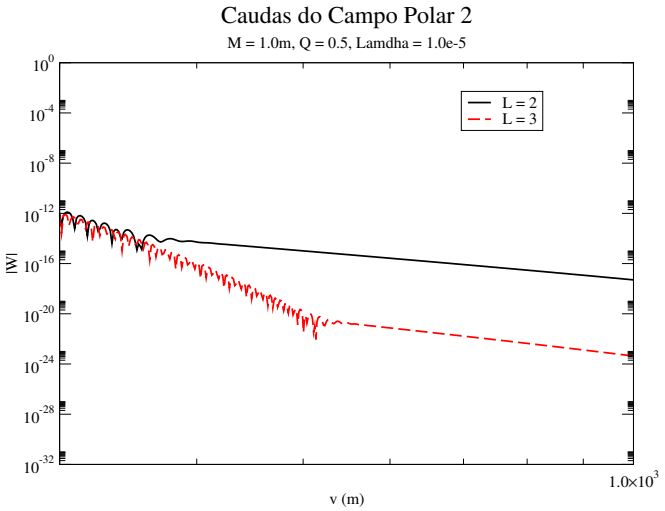

Figura 5.17: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo* W_2^+. *Aqui, a cauda lei de potência - na região intermediária entre os MQNs e a cauda exponencial - foi realçada. Obtivemos, para a potência* b *em* v^{-b}, $b = 10.2$ *se* $\ell = 3$ *e* $b = 7.88$ *se* $\ell = 2$.

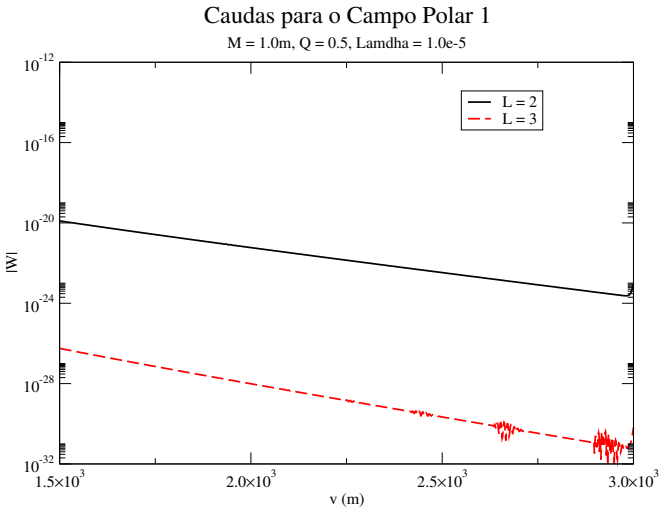

Figura 5.18: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo* W_1^+. *Aqui, a cauda exponencial - ao final da evolução temporal dos campos analisados - foi realçada.*

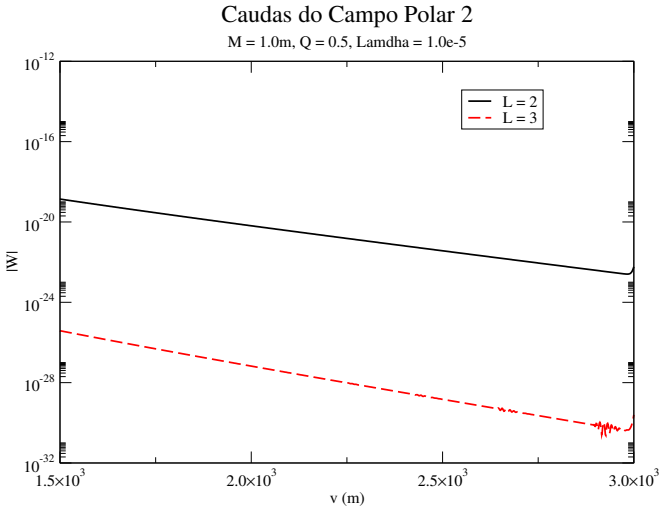

Figura 5.19: *MQNs seguidos por caudas do tipo lei de potência no limite* $\Lambda \to 0$, *com* $M = 1.0m$, $Q = 0.5m$ *e* $\Lambda = 1.0 \cdot 10^{-5}$, *para o campo* W_2^+. *Aqui, a cauda exponencial - ao final da evolução temporal dos campos analisados - foi realçada.*

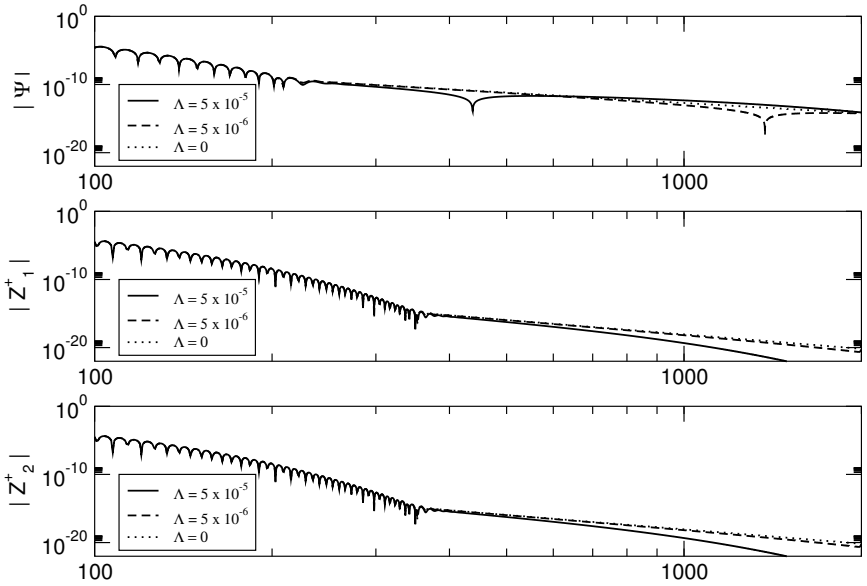

Figura 5.20: *Campo escalar* ($\ell = 1$), *campos polares* W_1^+ *e* W_2^+ ($\ell = 2$) *aproximando-se do limite assintoticamente plano. Os parâmetros da geometria são* $Q = 0.5$, $M = 1.0$. *Atentar para a cauda puramente lei de potência no caso* $\Lambda = 0$, *para fins de comparação.*

seqüência de figuras (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19) ilustra este ponto. Embora as figuras sejam relativas aos dois campos polares, $W^{+}_{1,2}$, vale notar que os demais campos apresentam a mesma dinâmica destes dois, no limite $\Lambda \to 0$.

Tal região intermediária torna-se cada vez mais pronunciada, em detrimento da cauda exponencial, à proporção que $\Lambda \to 0$, como evidenciado pela figura (5.20), em que o caso $\Lambda = 0$ serve-nos de parâmetro para comparação com os demais casos.

Capítulo 6

Os MQNs de Estrelas Compactas

Damos aqui os primeiros passos para o interessante problema dos MQNs de estrelas de nêutrons e de quarks. A importância de um tal estudo vai além do escopo da Relatividade Geral, chegando aos domínios da Física Nuclear e de Partículas, uma vez que a natureza da matéria estelar tem papel central na determinação da estrutura estelar. Se a estrutura estelar tiver algum papel preponderante na dinâmica dos MQNs estelares - é o que pretendemos investigar - então poderemos inferir o papel da EDE da matéria estelar nesses mesmos MQNs. Como a EDE depende da própria natureza da matéria estelar, esta poderia, em princípio, afetar os MQNs. A futura comparação de dados observacionais com as previsões teóricas para cada modelo de estrutura estelar (e, consequentemente, de EDE) pode ajudar-nos a entender melhor o próprio comportamento da matéria conhecida nas condições extremas de densidade e pressão no interior estelar.

Assim como no problema dos MQNs em buracos negros, as estrelas de nêutrons estão sujeitas a diversos tipos de perturbações, com um espectro muito rico delas. Isto se deve ao fato de o fluido (matéria) estelar apresentar modos próprios, que apareceriam mesmo no caso de estrelas não-relativísticas[1]. Uma boa introdução ao tema é encontrada em [9] e em [52]. Aqui, limitar-nos-emos aos casos de perturbações escalares e gravitacionais axiais, por razões descritas no próximo parágrafo.

As perturbações gravitacionais em estrelas, assim como se passava com buracos negros, subdividem-se em polares e axiais, e foram estudadas por S. Chandrasekhar e V. Ferrari [51], entre outros. Entre as perturbações polares e axiais, as primeiras são mais difíceis de descrever e de estudar, porque excitam o fluido estelar, ao passo que as perturbações axiais não o fazem, uma vez que, por definição, não introduzem movimentos nas direções radial,

[1] Estrelas onde a pressão p do fluido estelar não contribui significativamente para o campo gravitacional e onde temos uma compacidade $c \ll 1$

r, e polar, θ. Pode-se demonstrar [51] que mesmo na direção azimutal, ϕ, nenhum movimento do fluido estelar existe, não havendo assim acoplamento de perturbações axiais com o fluido estelar. Desta forma, as perturbações axiais em estrelas são matematicamente mais simples de se descrever. E as perturbações escalares em estrelas têm a sua dedução e formulação no Apêndice E.

Estas perturbações são governadas por equações de onda muito similares àquelas vistas no estudo de MQNs de buracos negros,

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=V\Psi, \tag{6.1}$$

onde V representa o potencial perturbativo, escalar ou axial,

$$\begin{aligned} V_{esc} &= \exp(2\nu(r))[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2m(r)}{r^3}+4\pi(\varepsilon(r)-p(r))] \\ V_{ax} &= \exp(2\nu(r))[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{6m(r)}{r^3}+4\pi(\varepsilon(r)-p(r))]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Vemos, na equação (6.2), que os potenciais perturbativos aqui descritos são semelhantes - na forma funcional - aos potenciais perturbativos de buracos negros, diferindo destes pelo aparecimento de termos de densidade e pressão. Naturalmente, ao sairmos da estrela, temos $m(r)=M$, $\exp(2\nu(r))=1-\frac{2M}{r}$ e $p=\varepsilon=0$. Ou seja, a região externa à estrela tem potenciais do tipo Schwarzschild. As semelhanças com o caso de Schwarzschild, no entanto, esgotam-se aí. Enquanto no caso dos buracos negros parávamos em $r=2M$, onde $V=0$, aqui podemos ir até o centro da estrela, em $r=0$. Só que, ao tomarmos o limite $r\to 0$, obtemos (para os dois potenciais tratados, se $\ell=1,2,\ldots$)

$$\lim_{r\to 0} V=\infty, \tag{6.3}$$

devido ao termo $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$, uma vez que p,ε,ν são todos finitos em $r=0$, e o termo $\frac{m(r)}{r^3}$ é praticamente constante nas vizinhanças de $r=0$. Tal característica, que imita um potencial do tipo coulombiano, inexiste no contexto de buracos negros, e é responsável pela imposição de uma condição de contorno para os MQNs típica de estrelas em geral: o campo Ψ deve se anular no centro estelar, isto é, $\Psi(r=0)=0$ ou, equivalentemente, $\Psi(x_0)$, onde x_0 é o valor da coordenada tartaruga em $r=0$ (veremos o porquê mais adiante). Para o caso do campo escalar com $\ell=0$, o potencial é finito na origem, valendo

$$V_{esc}(\ell=0,r=0)=\frac{4\pi}{3}\exp(2\nu_0)(5\varepsilon_0-3p_0), \tag{6.4}$$

o que acarreta, para a condição de contorno, um campo regular (finito) na origem. Aqui, p_0 e ε_0 são a pressão e a densidade centrais, respectivamente, enquanto ν_0 é o valor central de $\nu(r)$.

Ilustraremos os potenciais perturbativos acima a seguir, comparando-os com aqueles obtidos no caso da geometria de Schwarzschild. Nas figuras (6.1) e (6.2) temos ilustrações comparativas dos potenciais escalar e axial para estrelas de nêutrons e buracos negros de mesma massa. A diferença fica clara na região onde $r \to 0$, quando os potenciais estelares apresentam divergência.

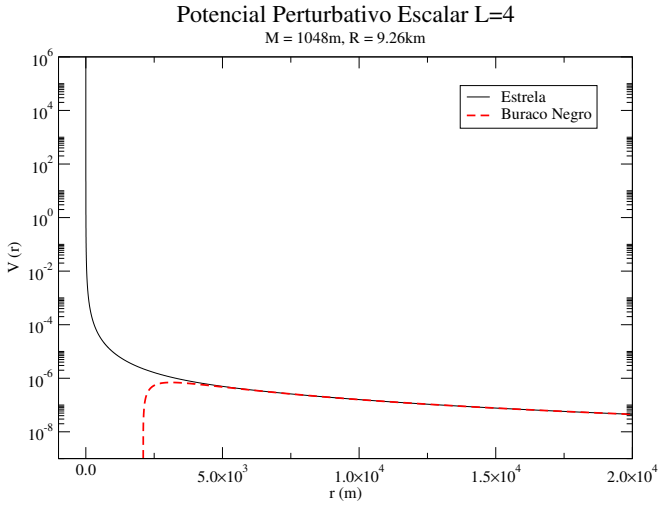

Figura 6.1: Gráfico do potencial escalar $V(r)$ vs. r, para estrela de nêutrons e buraco negro com $M = 1048m$, comparando os dois casos.

Vamos demonstrar rapidamente que se $\ell \neq 0$, $\Psi(r=0) = 0$. Em primeiro lugar, vejamos a forma da coordenada tartaruga nas proximidades de $r = 0$. Sabemos que a $r = 0$ corresponde um valor mínimo de x, x_0. A relação entre x e r, já vista antes neste trabalho, é

$$\frac{dx}{dr} = \frac{\exp(-\nu(r))}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}, \tag{6.5}$$

sendo que $\frac{2m(r)}{r} \propto r^2 \to 0$ e as funções $p(r)$, $\varepsilon(r)$ e $\nu(r)$ podem ser expandidas em séries de potências em torno de $r = 0$ [51], como se segue:

$$\begin{aligned} p(r) &= p_0 + p_2 r^2 + p_4 r^4 + \ldots \\ \varepsilon(r) &= \varepsilon_0 + \varepsilon_2 r^2 + \varepsilon_4 r^4 + \ldots \\ \nu(r) &= \nu_0 + \nu_2 r^2 + \nu_4 r^4 + \ldots, \end{aligned} \tag{6.6}$$

sendo que, no limite $r \to 0$, $\nu(r) \approx \nu_0 = const.$. Assim, tem-se

$$\frac{dx}{dr} \approx \exp(-\nu_0), \tag{6.7}$$

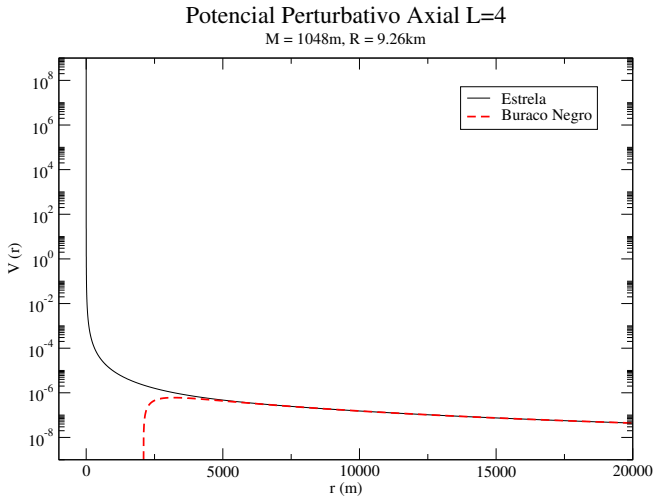

Figura 6.2: Gráfico do potencial axial $V(r)$ vs. r, para estrela de nêutrons e buraco negro com $M = 1048m$, comparando os dois casos.

o que acarreta $x - x_0 \approx r\exp(-\nu_0)$ para r muito próximo de zero. Nos potenciais perturbativos acima descritos, o termo $\exp(2\nu(r))$ vale então $\exp(2\nu_0)$ e o termo dominante nas proximidades de $r = 0$ é o termo em $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$, que pode ser reescrito como $\frac{\exp(-2\nu_0\ell(\ell+1))}{(x-x_0)^2}$. Assim, temos, nos arredores de $x = x_0$,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \omega^2\Psi = V(r)\Psi = \frac{\ell(\ell+1)}{(x-x_0)^2}\Psi, \tag{6.8}$$

onde assumimos uma dependência temporal harmônica para Ψ, $\Psi(x,t) = \exp(-i\omega t)\Psi(x)$. Se expandirmos Ψ como uma série de potências em volta de $x = x_0$ [51],

$$\Psi = A(x-x_0)^{\alpha} + B(x-x_0)^{\alpha+2} + \ldots, \tag{6.9}$$

com A, B constantes, e substituirmos tal expressão em (6.8), poderemos facilmente encontrar $\alpha = -\ell$ e $\alpha = \ell + 1$. Como o campo deve se anular em $x = x_0$ ($r = 0$) por conta da barreira de potencial ali existente, e como ℓ aqui é positivo, temos $\alpha = \ell + 1$, ou seja, $\Psi = A(x-x_0)^{\ell+1}$ junto a $x = x_0$ (A é uma constante multiplicando a solução). Como $x - x_0 \propto r$ na região em questão, temos $\Psi \propto r^{\ell+1}$, o que efetivamente anula o campo em $r = 0$. Passemos aos resultados numéricos disponíveis.

Ilustremos alguns dos modos obtidos - em estrelas de nêutrons - com o método numérico da grade $x - t$, sucintamente descrito no Apêndice D. As figuras são (6.3), (6.4), (6.5) e (6.6).

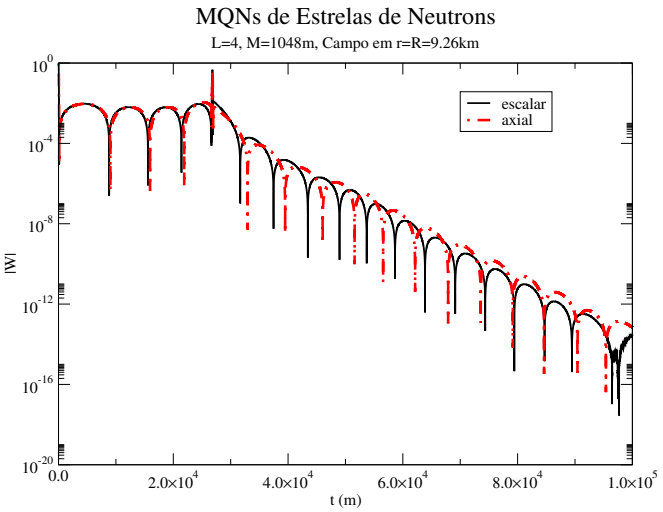

Figura 6.3: Gráfico dos MQNs dos campos escalar e axial para o caso de $M = 1048m$, $\ell = 4$.

$MassaEstelar(m)$	ℓ	ω_{esc}	ω_{ax}
1048	3	$0.000455 - 0.000290i$	$0.000452 - 0.000290i$
1048	4	$0.000664 - 0.000333i$	$0.000555 - 0.000345i$
977	3	-	-
977	4	$0.000500 - 0.000316i$	$0.000467 - 0.000301i$

Tabela 6.1: *Freqüências dos modos quasi-normais em estrelas de nêutrons, para os campos escalar e axial. Valores obtidos junto à superfície estelar. Onde há traços, é porque não foi possível obter os dados com segurança.*

Os resultados exibidos nas figuras de (6.3) a (6.6) são ainda preliminares, e estão ainda sujeitos a verificações mais profundas, no momento em que este trabalho está sendo escrito. De qualquer maneira, é interessante comparar estes resultados preliminares com aqueles verificados para buracos negros de Schwarzschild, no capítulo 4, usando o método numérico da grade $u - v$, que nos permitia obter as freqüências dos MQNs junto ao horizonte de eventos. As freqüências de alguns MQNs estelares por nós encontrados estão na tabela (6.1).

Para comparação, os valores obtidos para o buraco negro de Schwarzschild - junto ao horizonte de eventos - com as massas mais próximas possíveis às destas estrelas estão na tabela (6.2).

A tabela (6.1) mostra as freqüências obtidas em $r = R$, u seja, junto á superfície estelar. Verificamos as mesmas freqüências dentro e fora da

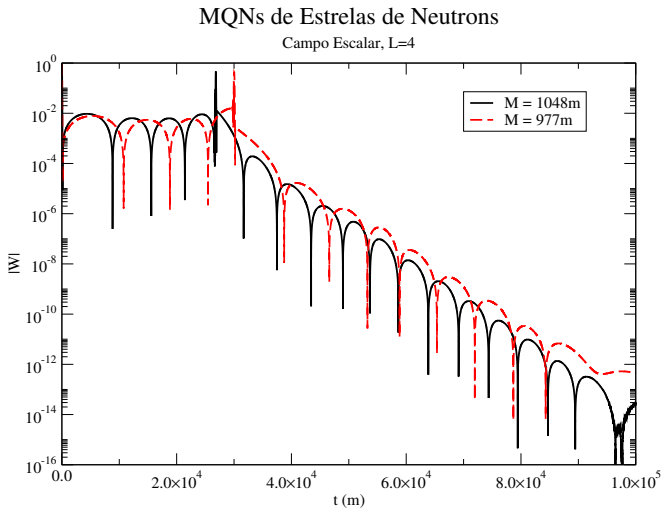

Figura 6.4: Gráfico dos MQNs do campo escalar, $\ell = 4$, para $M = 1048m$ e $M = 977m$.

$MassaEstelar(m)$	ℓ	ω_{esc}	ω_{ax}
1046.25	3	$0.000644 - 0.0000921i$	$0.000572 - 0.0000888i$
1046.25	4	$0.000828 - 0.0000920i$	$0.000772 - 0.0000902i$
977.12	3	$0.000691 - 0.0000989i$	$0.000613 - 0.0000951i$
977.12	4	$0.000888 - 0.0000988i$	$0.000828 - 0.0000966i$

Tabela 6.2: *Freqüências dos modos quasi-normais para o buraco negro de Schwarzschild, para comparação.*

estrela, para detectarmos possíveis discrepâncias, o que de fato ocorreu. Para o caso em que $M = 1048m$, temos os valores da tabela (6.3). O fenômeno repetiu-se para $M = 977m$.

Pelo que pudemos inferir das tabelas (6.1) e (6.3), os modos dentro da estrela têm $Im(\omega)$ mais negativo do que na superfície, indicando amortecimento mais intenso ali. Fora da estrela, não detectamos, até agora, uma tendência clara para $Im(\omega)$. Pareceu-nos haver também oscilações menos intensas no interior estelar ($Re(\omega)$ menor), quando comparadas àquelas vistas na superfície. Os modos axiais oscilaram um pouco mais lentamente do que os escalares, como na geometria de Schwarzschild, mas os valores de $Re(\omega)$ caíram com a diminuição da massa, ao contrário do que se passava na geometria de Schwarzschild. Como os dados obtidos até aqui não foram muitos, necessitando de estudos mais amplos, preferimos não prolongar esta discussão.

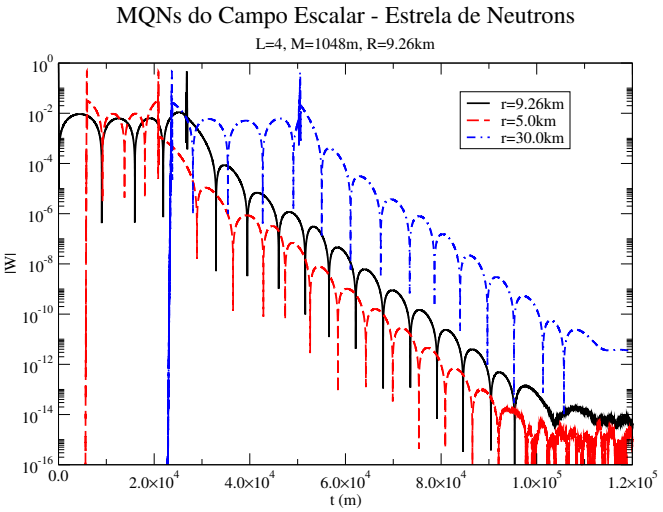

Figura 6.5: Gráfico dos MQNs do campo axial com $M = 1048m$, $\ell = 2$, para diferentes valores de r - dentro da estrela, na superfície e fora da estrela. Houve pequenas diferenças nas freqüências ω dentro e fora da estrela, embora não muito pronunciadas - ver texto.

Ao comparar as tabelas (6.1) e (6.3) com a tabela (6.2), detectamos algumas características que podem distinguir os MQNs estelares daqueles dos buracos negros de Schwarzschild: os MQNs estelares aparentemente oscilam mais devagar e têm amortecimentento consideravelmente mais intenso do que aqueles de buracos negros, ao menos nos poucos casos que pudemos observar aqui. Uma análise mais extensiva e aprofundada destes MQNs estelares está em nossos planos futuros.

$Campo$	ℓ	ω_{sup}	ω_{int}	ω_{ext}
esc	3	$0.000455 - 0.000290i$	$0.000485 - 0.000326i$	$0.000441 - 0.000344i$
esc	4	$0.000664 - 0.000333i$	$0.000601 - 0.000375i$	$0.000538 - 0.000333i$
ax	3	$0.000452 - 0.000290i$	$0.000434 - 0.000325i$	-
ax	4	$0.000555 - 0.000345i$	$0.000547 - 0.000377i$	$0.000563 - 0.000255i$

Tabela 6.3: *Freqüências dos modos quasi-normais em estrelas de nêutrons de* $M = 1048m$, *para os campos escalar e axial, na superfície da estrela* (ω_{sup}), *bem como dentro* (ω_{int}) *e fora da mesma* (ω_{ext}). *Raio estelar* $R = 9.26km$, *posição de cálculo de* ω_{int}: $5.0km$, *posição de cálculo de* ω_{ext}: $30.0km$ *(a partir do centro estelar).*

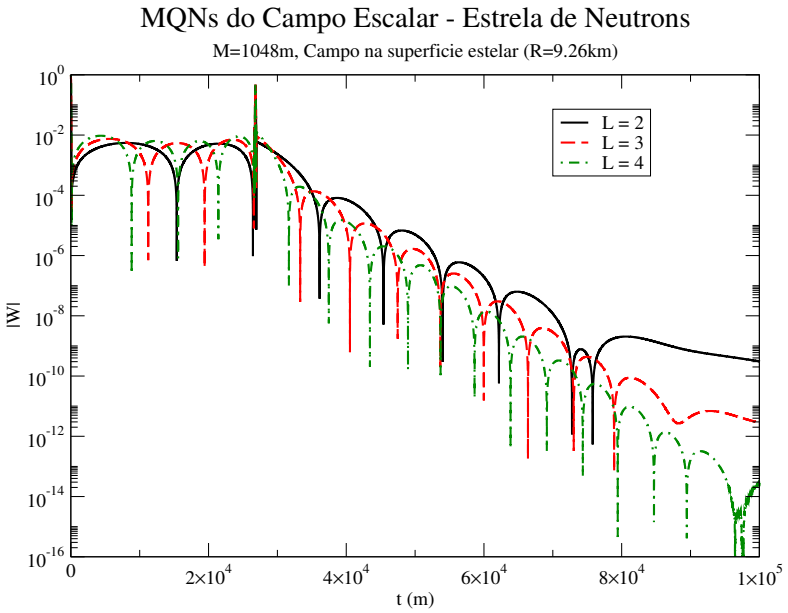

Figura 6.6: Gráfico dos MQNs do campo escalar com $M = 1048m$, variando-se ℓ. Como era de se esperar, as oscilações ficam mais rápidas com ℓ mais alto.

Capítulo 7

Conclusões

Neste capítulo reunimos as conclusões de nosso trabalho.

- O primeiro modelo de estrelas de nêutrons conhecidos, o de Oppenheimer-Volkov, baseado na suposição de que a matéria em tais estrelas é composta essencialmente de um gás de nêutrons não-interagentes, não é capaz de explicar as massas atualmente observadas para tais estrelas, que oscilam de pouco mais de $1M_s$ até mais de $2.5M_s$ - o modelo vai até $0.72M_s$, mas reproduz algumas características fundamentais dessa classe de estrelas: a faixa esperada de densidades centrais - até $4 \cdot 10^{15} g/cm^3$, o lento decaimento da densidade até as proximidades da superfície e o subsequente fenômeno de *neutron drip* com uma diminuição drástica da densidade (e da pressão) até que se atinja a superfície estelar;

- As massas estelares atuais são bem descritas por uma vasta gama de EDEs mais modernas, baseadas no estudo de interações hadrônicas e mesmo da Teoria Quântica de Campos. Baseando-nos apenas nas massas, todavia, não se pode afirmar qual a EDE correta, sendo necessário tomarmos outros parâmetros da estrela, como o raio R, por exemplo. De qualquer maneira, o modelo de gás de Fermi de nêutrons não-interagentes à temperatura nula (no sentido de termos $T << T_F^{nuc} \approx 10^{11} K$), é interessante no estudo de modos quasi-normais dessas estrelas, uma vez que os cálculos de estrutura estelar, bem como dos potenciais perturbativos, torna-se bastante simples, sem que percamos de vista as características fundamentais dessas estrelas, como vimos no parágrafo anterior. Os graus de compactação das estrelas de nêutrons conhecidas hoje tem c entre 0.2 e 0.4, sendo que o modelo aqui estudado ficou dentro desta faixa;

- As estrelas de quarks que estudamos, à luz do modelo MIT, no entanto, apresentaram massas bem maiores do que aquelas por nós verificadas no modelo de Oppenheimer-Volkov de estrelas de nêutrons,

chegando mesmo a beirar os $4M_s$ em alguns casos (baixos valores da constante B), e encaixando-se sem problemas na faixa de massas observadas para estrelas de nêutrons. Como alguns autores estimam que a massa-limite de uma estrela de nêutrons está próxima de $3M_s$, e o aumento de massa permitido pela rotação - não estudado aqui - dificilmente excede 20 a 30% da massa da estrela sem rotação, podemos dizer, com alguma segurança, que estrelas com raios menores do que algumas dezenas de quilômetros com massas excedendo $4M_s$ são muito provavelmente estrelas de quarks ou possivelmente híbridas. Estrelas igualmente compactas na faixa de $1 - 3M_s$ podem ser de qualquer um destes tipos. De novo, apenas a massa, sozinha, não determina com precisão o tipo de estrela com que estamos lidando;

- Estrelas de quarks têm raios comparáveis aos de estrelas de nêutrons, ao menos para os valores de B e de densidade central, ε_0, considerados. Além do mais, estrelas de quarks têm superfície extremamente lisa e dura, com descontinuidade brutal na densidade em sua superfície, ao passo que estrelas de nêutrons por nós estudadas têm densidade tendendo a zero na superfície (se comparada às densidades em seu interior). As estrelas de quarks tendem a ser mais compactas do que as de nêutrons e, desta forma, estão mais próximas dos buracos negros do que suas congêneres;

- Buracos negros de Schwarzschild têm MQNs bem conhecidos, que conseguimos reproduzir aqui no intuito de compará-los com os MQNs estelares. Observamos aqui oscilações mais lentas dos MQNs à medida que a massa aumentava. Além disso, o aumento da massa dos buracos negros diminuía a taxa de decaimento dos MQNs. Estas características mantém-se para todos os campos estudados. Fisicamente, isto indica que um buraco negro massivo é mais difícil de ser perturbado;

- Ainda com relação aos MQNs dos buracos negros de Schwarzschild, perturbações escalares têm freqüências oscilatórias ligeiramente maiores e amortecimento ligeiramente mais intenso do que as eletromagnéticas, que por seu turno têm amortecimento maior e oscilações mais rápidas do que as gravitacionais axiais e polares. Entre estas duas últimas, as variações são diminutas. De qualquer forma, dado um buraco negro de massa M e o índice de multipolo ℓ da perturbação, as freqüências de oscilação e taxas de amortecimento dos MQNs diminuem com o aumento do spin da perturbação;

- Quanto à dinâmica dos campos para tempos t suficientemente grandes, obtivemos decaimentos do tipo lei de potência, $t^{-2\ell-3}$, como esperado;

- Com relação aos buracos negros da geometria RNdS, pudemos avaliar a riqueza da dinâmica das perturbações de diversos tipos, causada

pela estrutura consideravelmente mais rica do espaço-tempo estudado. Em primeiro lugar, o caso do campo escalar com $\ell = 0$, que não apresentava nada de excepcional na geometria de Schwarzschild, mas que inicialmente oscila e depois estabiliza-se em um valor constante, não-nulo;

- No caso de buracos negros RNdS quase-extremos, os MQNs dominam por completo a evolução temporal dos campos, independentemente da natureza destes. E nossos resultados numéricos concordaram bastante bem com previsões teóricas;

- Se os buracos negros RNdS não eram quase-extremos, a dinâmica dos campo era caracterizada por duas fases bem distintas: uma primeira fase com os MQNs bem visíveis - até que o campo não mais tenha energia para oscilar, o que dá início à segunda fase - em que os campos decaem exponencialmente. E esta cauda exponencial é a primeira diferença significativa entre a dinâmica dos campos em RNdS e em Schwarzschild (lei de potência);

- Estas caudas exponenciais em geometrias RNdS não dependiam da carga Q dos buracos negros, embora variassem com M e Λ. Mais exatamente, dependiam de ℓ e de κ_c;

- A carga Q, no entanto, tinha influência - moderada - nos MQNs; As oscilações ficam mais rápidas no caso de cargas maiores, e o amortecimento (*damping*) das oscilações inicialmente aumentava com Q, atingindo um pico para algum valor intermediário de Q e depois caindo com cargas progressivamente maiores. Porém esta variação no *damping* era muito reduzida se comparada á variação no ritmo das oscilações;

- No limite de carga nula, a dinâmica dos campos em RNdS tornava-se idêntica à dinâmica dos campos na geometria SdS, com o desacoplamento das perturbações eletromagnéticas e gravitacionais;

- A constante cosmológica Λ tem papel mais interessante do que a carga Q na dinâmica dos campos em RNdS. Quanto maior Λ, menores serão a taxa de oscilação dos MQNs e também as taxas de amortecimento dos mesmos, particularmente para $\Lambda > 10^{-3}m^{-2}$. Abaixo deste valor, as tendências acima mencionadas continuam, mas com menor intensidade. Além disso, o limite $\Lambda \to 0$ provoca o aparecimento de uma fase intermediária entre os MQNs e as caudas exponenciais. Esta fase intermediária é a cauda do tipo lei de potência, imitando a dinâmica dos campos na geometria de Schwarzschild. Esta cauda fica tanto mais clara quanto mais Λ tende a zero, e torna-se a cauda dos campos estudados quando $\Lambda = 0$, como esperado. Este é o limite assintoticamente plano.

- Uma breve nota sobre os MQNs de estrelas de nêutrons: os poucos dados disponíveis até o momento levam-nos a crer que os MQNs estelares são mais fortemente amortecidos e oscilam menos do que os MQNs de buracos negros de Schwarzschild. Pretendemos continuar o estudo dos MQNs estelares de forma mais extensiva e aprofundada, daqui por diante.

Apêndice A

A Equação de Oppenheimer-Volkov

Deduzir a equação de Oppenheimer-Volkov é relativamente simples. Recordando a forma do tensor de energia-momento,

$$T_{\alpha\beta} = (p+\varepsilon)U_\alpha U_\beta + p g_{\alpha\beta}, \tag{A.1}$$

bem como a forma da 4-velocidade U, $U^\mu = (\exp(-\nu), 0, 0, 0)$, além da métrica,

$$ds^2 = -\exp(2\nu)dt^2 + \exp(2\mu_2)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{A.2}$$

pode-se chegar na equação (2.5), por meio das equações de Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{A.3}$$

sendo que precisamos apenas das componentes R_{tt}, R_{rr} e $R_{\theta\theta}$.

Para as componentes em causa, temos

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \nu_{,r}^2 + \nu_{,r,r} - \nu_{,r}\mu_{2,r} - \frac{2\mu_{2,r}}{r} = -4\pi(\varepsilon - p)\exp(2\mu_2) \\
R_{\theta\theta} &= -1 + \exp(-2\mu_2) + r\exp(-2\mu_2)(\nu_{,r} - \mu_{2,r}) = -4\pi r^2(\varepsilon - p) \\
R_{tt} &= \exp(2\nu - 2\mu_2)[-\nu_{,r,r} - \frac{2\nu_{,r}}{r} + \nu_{,r}\mu_{2,r} - \nu_{,r}^2] = \\
&= -4\pi\exp(2\nu)(3p + \varepsilon)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Temos ainda a equação de equilíbrio hidrostático, deduzida um pouco mais adiante,

$$\nu_{,r} = -\frac{1}{p+\varepsilon}\frac{dp}{dr}. \tag{A.5}$$

Montemos uma equação para $\exp(2\mu_2)$. Tomamos a expressão

$$\begin{aligned}
\frac{R_{rr}\exp(-2\mu_2)}{2} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}\exp(-2\nu)}{2} &= -\frac{2\mu_{2,r}\exp(-2\mu_2)}{r} - \frac{1}{r^2} + \\
&+ \frac{\exp(-2\mu_2)}{r^2} = -8\pi\varepsilon,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

que se reescreve como

$$\frac{d(r\exp(-2\mu_2))}{dr} = 1 - 8\pi r^2\varepsilon, \tag{A.7}$$

cuja solução (finita em $r = 0$) é

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}\ln(1 - \frac{2m(r)}{r}), \tag{A.8}$$

$m(r)$ definida como em (2.3). Com o auxílio de (A.5) e de (A.8), eliminamos os potenciais μ_2 e ν da equação para $R_{\theta\theta}$. Isolando o termo $\frac{dp}{dr}$ da expressão encontrada, temos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\varepsilon)(m(r) + 4\pi r^3 p)}{r^2(1 - \frac{2m(r)}{r})}, \tag{A.9}$$

que é a equação de Oppenheimer-Volkov, obtida pela primeira vez por J. R, Oppenheimer e G. M. Volkov em 1939 [32].

A equação (A.5) vem da conservação do tensor momento-energia, $T^{\mu\nu}$. Com efeito, temos

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\varepsilon)U^\mu U^\nu, \tag{A.10}$$

e a equação de conservação deste tensor é $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. Aplicando esta derivada covariante em $T^{\mu\nu}$ acima, temos

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = p^{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{-g}(p+\varepsilon)U^\mu U^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(p+\varepsilon)U^\nu U^\alpha, \tag{A.11}$$

onde g é o determinante da métrica. Temos, ainda, $U^\mu U_\mu = -1$ e como o fluido está sendo analisado em um referencial onde se encontra em repouso, $U^t = \sqrt{-g_{tt}}$ e $U^r = U^\theta = U^\phi = 0$. E nenhum dos $g_{\mu\nu}$, nem p e nem ε dependem do tempo. Temos, ainda,

$$\Gamma^\beta_{tt} = -\frac{1}{2}g^{\beta\nu}\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^\nu} \tag{A.12}$$

e, com a forma que U^μ assume aqui,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[(p+\varepsilon)U^\mu U^\nu] = 0. \tag{A.13}$$

A equação para $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ acima pode ser multiplicada por $g_{\mu\chi}$, o que resulta em

$$-p_{,\chi} = \frac{1}{2}(p+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x\chi}\log(-g_{tt}), \tag{A.14}$$

para $\chi = r, \theta, \phi$. Se $\chi = t$, a equação acima é trivialmente satisfeita. A equação (A.14) é simplesmente a equação de equilíbrio hidrostático na Relatividade Geral. Tomando-se $\chi = r$, chega-se à equação (A.5), após tomarmos $g_{tt} = -\exp(2\nu(r))$. Ficamos assim com

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{1}{(p+\varepsilon)}\frac{dp}{dr}, \tag{A.15}$$

que é a equação procurada.

Apêndice B

EDE para Estrelas de Nêutrons

Reservamos este apêndice para a dedução das expressões para a EDE que rege as estrelas de nêutrons compostas por um gás de nêutrons puro, sem a presença de outras partículas.

Da estatística de Fermi-Dirac, temos o número médio n_j de ocupação do j-ésimo orbital (estado quântico) em função da temperatura recíproca β e do potencial químico μ,

$$n_j = \frac{1}{1 + \exp(\beta[\epsilon - \mu])}, \tag{B.1}$$

e a grande função de partição Ξ, dada por

$$\ln(\Xi) = \sum_j \ln[1 + \exp(-\beta[\epsilon_j - \mu])], \tag{B.2}$$

que se relaciona com o grande potencial termodinâmico Φ por

$$\Phi = -\frac{\ln(\Xi)}{\beta}. \tag{B.3}$$

Da Termodinâmica conhecemos a relação entre a pressão p e Φ, dada por

$$\Phi = -pV, \tag{B.4}$$

V sendo o volume do sistema estudado. Da equação acima e de (B.3), tiramos

$$p = \frac{kT}{V} \ln \Xi. \tag{B.5}$$

A forma exata de p dependerá do espectro de energia ϵ_j. Para a energia U do sistema, temos

$$U = \sum_j \epsilon_j n_j, \tag{B.6}$$

que resulta em uma densidade de energia

$$\rho = \frac{U}{V}. \tag{B.7}$$

O número de partículas do sistema, por unidade de volume, é

$$N = \sum_j n_j. \tag{B.8}$$

Feitas estas considerações iniciais, podemos calcular as grandezas de interesse. Como estamos limitando-nos a um sistema de temperatura nula ($T = 0$), a função definida em (B.1) passa a ser uma função degrau dependendo da máxima energia do sistema, ϵ_F (energia de Fermi). Se $\epsilon_j < \epsilon_F$, $n_j = 1$ e $n_j = 0$ de outra forma. Além do mais, tomamos o espectro de energia do gás de Fermi de nêutrons como sendo relativístico,

$$\epsilon(k) = c\sqrt{k^2 + m^2c^2}, \tag{B.9}$$

sendo k o momento linear e m a massa do nêutron. Temos ainda $k_F = \frac{\sqrt{E_F - m^2c^2}}{c}$ (momento de Fermi).

Tomando o limite de um número muito grande de partículas (limite termodinâmico), as expressões para N e ρ passam às formas integrais abaixo,

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi s}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F} k^2 dk \\ \rho &= \frac{4\pi s}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{k_F} k^2 dk\sqrt{k^2}, \end{aligned} \tag{B.10}$$

onde s é a multiplicidade de estados de spin. Para nêutrons, $s = 2$. Após integração, a expressão acima para N transforma-se em

$$N = \frac{k_F^3}{12\pi^3\hbar^3}, \tag{B.11}$$

indicando que o momento de Fermi é proporcional a $N^{\frac{1}{3}}$. Para integrarmos ρ, façamos $z = \frac{k}{mc}$ na expressão para ρ em (B.10). O resultado será

$$\begin{aligned} \rho &= 3\rho_c \int_0^b dz \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}} \\ \rho_c &= \frac{m^4c^5}{3\pi^2\hbar^3} \\ b &= \frac{k_F}{mc} \end{aligned} \tag{B.12}$$

que, integrado, fornece-nos

$$\rho(b) = \frac{3\rho_c}{8}[(2b^3 + b)\sqrt{1+b^2} - \ln(b + \sqrt{1+b^2})]. \tag{B.13}$$

No limite de baixas energias, onde $b \to 0$, temos

$$\rho(b) \propto b^3, \tag{B.14}$$

ao passo que, no limite oposto ($b \to \infty$), vale

$$\rho(b) = \frac{3b^4}{4}. \tag{B.15}$$

Quanto à pressão p tínhamos

$$p = \frac{\ln(\Xi)}{\beta}, \tag{B.16}$$

que no limite termodinâmico assume a forma integral

$$p = \frac{4\pi s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^b k^2 dk \ln[1 + \exp(-\beta[\epsilon - \mu])], \tag{B.17}$$

que, após integração por partes, termina em

$$p = \frac{\rho_c}{3} \int_0^b dz \frac{z^4}{\sqrt{1+z^2}}, \tag{B.18}$$

ou

$$p = \frac{\rho_c}{8}[(2b^3 - 3b)\sqrt{1+b^2} + 3\ln[b + \sqrt{1+b^2}]], \tag{B.19}$$

usando a mesma notação do cálculo de ρ. Para a expressão (B.19), temos

$$\lim_{b\to 0} p(b) \propto b^5$$
$$\lim_{b\to\infty} p(b) = \frac{b^4}{4}. \tag{B.20}$$

Assim, no limite $b \to 0$, temos $p \propto \rho^{\frac{5}{3}}$ e, no limite $b \to \infty$, $p = \frac{\rho}{3}$ (esta última EOS é típica de um gás relativístico). Fora destes limites, tomamos o valor de p (ρ), resolvemos para b e calculamos ρ (p).

Apêndice C

Integrando Estrelas Compactas

Utilizamos o clássico método Runge-Kutta para integrar as equações de estrutura estelar, mas com passo de integração variável (adaptativo), para controle de erros locais de truncamento.

Neste método, é resolvida uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{C.1}$$

onde x é a variável independente, sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$. Seja x o ponto (atual) onde y foi calculada, e seja $y(x + h)$ a mesma função no ponto $x + h$, onde h é o passo (atual) de integração (podendo ser positivo ou negativo). Em um método Runge-Kutta clássico, de ordem 4, teríamos 4 passos intermediários entre x e $x + h$, a saber,

$$\begin{aligned} g_1 &= h * f(x, y) \\ g_2 &= h * f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{g1}{2}) \\ g_3 &= h * f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{g2}{2}) \\ g_4 &= h * f(x + h, y + g_3), \end{aligned} \tag{C.2}$$

que seriam utilizados para se achar $y(x + h)$ a partir de $y(x)$, via

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(g1 + g4 + 2g3 + 2g2) + O(h^5), \tag{C.3}$$

onde temos o erro de truncamento local proporcional a h^5, sendo o método acurado até a ordem h^4 (donde a designação *quarta ordem*).

O problema deste método é que o passo de integração h é constante, o que pode não ser adequado a circunstâncias nas quais a função a ser integrada não é suave, ou apresenta muitas oscilações, ou simplesmente tem

uma forma sobre a qual não temos nenhuma indicação prévia. Nestes casos, seria interessante um monitoramento mais cauteloso do erro local de truncamento, mantendo-o dentro de limites previamente estabelecidos. Tal procedimento implicaria na correção do passo de integração h em cada ponto. Este procedimento existe e foi primeiramente descrito por Fehlberg.

O método descrito por (C.2) e (C.3) precisa de 4 cálculos intermediários para chegar a uma resposta. Métodos de ordem $r > 4$ precisarão de $r+1$ ou $r+2$ cálculos. Fehlberg [42] descobriu um método de ordem 5 que precisava de 6 cálculos intermediários, sendo que uma dada combinação desses mesmos cálculos resultava em um método de ordem 4. A diferença entre as respostas para $y(x+h)$ dadas por estes dois métodos de Fehlberg poderia ser utilizada como estimativa do erro de truncamento local da solução. Se tal estimativa ficar acima de um valor pré-estabelecido, significa que o passo h deve ser reduzido para reduzirmos este erro local estimado, recalculando então $y(x+h)$. Do contrário, podemos usar a resposta atual e redefinir h, aumentando-o, para o passo seguinte. E assim sucessivamente.

Atualmente, o procedimento de Fehlberg tem diversas variantes, mas têm as mesmas características básicas, como a forma dos cálculos intermediários, a saber

$$\begin{aligned}
q_1 &= hf(x,y) \\
q_2 &= hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_{21}q_1) \\
q_3 &= hf(x+\alpha_3 h, y+\beta_{31}q_1+\beta_{32}q_2) \\
q_4 &= hf(x+\alpha_4 h, y+\beta_{41}q_1+\beta_{42}q_2+\beta_{43}q_3) \\
q_5 &= hf(x+\alpha_5 h, y+\beta_{51}q_1+\beta_{52}q_2+\beta_{53}q_3+\beta_{54}q_4) \\
q_6 &= hf(x+\alpha_6 h, y+\beta_{61}q_1+\beta_{62}q_2+\beta_{63}q_3+\beta_{64}q_4+\beta_{65}q_5), \qquad \text{(C.4)}
\end{aligned}$$

sendo que a solução $y(x+h)$ de ordem 5 é dada por

$$y_{5th}(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{6} \gamma_i q_i + O(h^6) \qquad \text{(C.5)}$$

A solução de ordem 4 é

$$y_{4th}(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{6} \zeta_i q_i + O(h^5), \qquad \text{(C.6)}$$

o que resulta em uma diferença entre as duas estimativas, dada por

$$\Delta = y_{5th}(x+h) - y_{4th}(x+h) = \sum_{i=1}^{6} (\gamma_i - \zeta_i) q_i \propto h^5. \qquad \text{(C.7)}$$

As constantes α_i, ζ_i[1], γ_i e β_{ij} podem mudar, dependendo da variante do método utilizada. A variante que usamos aqui foi a de Cash-Karp [43], com

[1]Este símbolo não representa a função Zeta de Riemann, nem está, de algum modo, relacionado a ela. É simplesmente uma escolha notacional.

os valores a seguir:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0.2 \\ \alpha_3 &= 0.3 \\ \alpha_4 &= 0.6 \\ \alpha_5 &= 1.0 \\ \alpha_6 &= 0.875, \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{37}{378} \quad \zeta_1 = \frac{2825}{27648} \\ \gamma_2 &= 0 \quad \zeta_2 = 0 \\ \gamma_3 &= \frac{280}{621} \quad \zeta_3 = \frac{18575}{48384} \\ \gamma_4 &= \frac{125}{621} \quad \zeta_4 = \frac{13525}{55296} \\ \gamma_5 &= 0 \quad \zeta_5 = \frac{277}{14336} \\ \gamma_6 &= \frac{512}{1771} \quad \zeta_6 = 0.25 \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned} \beta_{21} &= 0.2 \quad \beta_{31} = 0.075 \quad \beta_{32} = 0.225 \\ \beta_{41} &= 0.3 \quad \beta_{42} = -0.9 \quad \beta_{43} = 1.2 \\ \beta_{51} &= -\frac{11}{54} \quad \beta_{52} = 2.5 \quad \beta_{53} = -\frac{70}{27} \\ \beta_{54} &= \frac{35}{27} \quad \beta_{61} = \frac{1631}{55296} \quad \beta_{62} = \frac{175}{512} \\ \beta_{63} &= \frac{575}{13824} \quad \beta_{64} = \frac{44275}{110592} \quad \beta_{65} = \frac{253}{4096}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Este conjunto de valores tem a propriedade de minimizar o erro de truncamento cometido em um dado passo de integração.

Como Δ é proporcional a h^5, temos o seguinte raciocínio: se h_t produz um erro Δ_t, então o valor de h que resultaria em um outro erro Δ_v é

$$h_v = h_t(\frac{\Delta_v}{\Delta_t})^{\frac{1}{5}}. \tag{C.11}$$

Seja então Δ_v o erro previamente estabelecido (erro-limite, que não deve ser ultrapassado), e Δ_t o erro atualmente obtido com o passo h_t. Se $\Delta_t > \Delta_v$, h_t deve ser reduzido até h_v, de acordo com a prescrição (C.11), e o passo atual, repetido, com h_v no lugar de h_t; o programa passa a andar mais devagar na região em x por onde está passando. Se $\Delta_t < \Delta_v$, então podemos aceitar o passo atual e usar (C.11) para estimar o valor de $h = h_v$ para o *próximo*

passo, que será então maior do que o passo h_t atual, deixando o programa andar mais rápido.

A discussão acima pode ser generalizada para um sistema de equações diferenciais, e as quantidades $y(x)$ e Δ acima definidas transformam-se em vetores. O erro deve ser monitorado para cada equação, e o maior dentre os erros estimados, em qualquer tempo, guiará a escolha do passo de integração, que é o mesmo, em cada ponto, para todas as equações componentes do sistema. Os programas utilizados foram as rotinas *odeint*, *rkck* e *rkqs* da referência [12].

No nosso problema de integração de estrelas (quarks ou nêutrons), havia 4 equações diferenciais de ordem 1, acopladas. Na estrela de nêutrons, tínhamos b (momento de Fermi especifíco), m (massa), ν (expoente do termo g_{tt} da métrica interna à estrela) e x (coordenada tartaruga). Na estrela de quarks, b foi trocado por ε (densidade de energia), as demais variáveis sendo as mesmas da estrela de nêutrons. Em qualquer caso, o erro estimado em cada variável era armazenado em um vetor y_{err}, sendo que o erro relativo em cada componente deveria ficar abaixo de um certo valor ϵ, que tomamos como 10^{-15}, um valor mais do que suficiente para obtermos soluções convergentes, isto é, soluções que mudam muito pouco com a variação de ϵ. A integração parava sempre que a pressão p atingia o valor zero, pois o anulamento da pressão é o que define a superfície (raio) da estrela.

Apêndice D

Método Numérico Direto em BNs

O método numérico direto por nós utilizado para a resolução de equações da forma

$$\frac{\partial^2 \Psi(u,v)}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4} V(u,v)\Psi(u,v), \tag{D.1}$$

no contexto de buracos negros (BNs) é aqui sucintamente discutido.

Em primeiro lugar, devemos delimitar a região do espaço-tempo onde estamos trabalhando. Tal forma depende do problema em questão, mais precisamente da geometria do espaço-tempo. Normalmente, tomamos uma região do tipo $0 < v < vmax$ e $0 < u < umax$, em que $u = umax$ representa o horizonte de eventos de um buraco negro e $v = vmax$ pode representar, no caso de geometrias do tipo dS, um horizonte cosmológico. Frequentemente temos $vmax = umax$, mas tais escolhas não são obrigatórias: podem ser ajustadas a cada problema de buracos negros estudado. O próximo passo é transformar a equação (D.1) em uma equação integral no plano $u - v$. Perfazendo a integração em um retângulo nulo, como visto na figura (D).

Nesta figura, temos os limites de integração u_1, u_2 em u e v_1, v_2 em v. A integral de superfície de (D.1) fica

$$\int \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} du dv = \int_{v_1}^{v_2} [\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} du] dv = -\frac{1}{4} \int_{v_1}^{v_2} [\int_{u_1}^{u_2} V(u,v)\Psi du] dv. \tag{D.2}$$

Levando a integração do lado esquerdo da equação acima a cabo, vem

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} [\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} du] dv &= \\ = \Psi(u_2, v_2) - \Psi(u_2, v_1) - \Psi(u_1, v_2) + \Psi(u_1, v_1) &= \\ \Psi_N - \Psi_W - \Psi_E + \Psi_S. & \end{aligned} \tag{D.3}$$

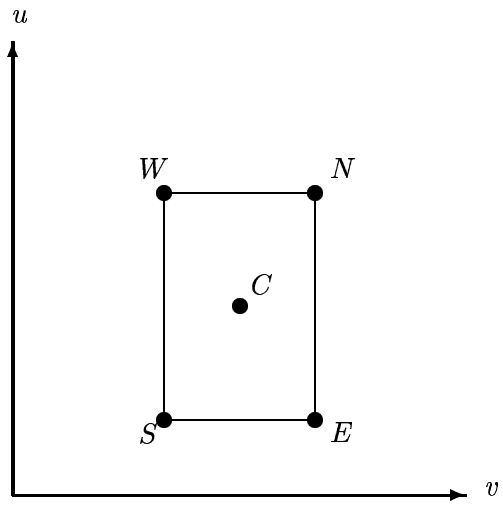

Figura D.1: O Retângulo Nulo.

Em outras palavras, temos, em (D.2),

$$\Psi_N - \Psi_W - \Psi_E + \Psi_S = -\frac{1}{4}\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} V(u,v)\Psi(u,v). \tag{D.4}$$

Seja agora $g(u,v) = V(u,v)\Psi(u,v)$. Assim,

$$\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_2}^{u_1} V(u,v)\Psi(u,v)dudv = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} g(u,v)dudv. \tag{D.5}$$

Tomando a figura (D), podemos, sem perda de generalidade, tomar a origem do sistema de coordenadas como estando no centro do retângulo nulo. Desta forma, $u_2 = -u_1 = \frac{\Delta u}{2}$ e $v_2 = -v_1 = \frac{\Delta v}{2}$. A última equação transforma-se em

$$\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} g(u,v)dudv = \int_{-\frac{\Delta v}{2}}^{\frac{\Delta v}{2}}\int_{\frac{-\Delta u}{2}}^{\frac{\Delta u}{2}} g(u,v)dudv = p(ux,vx)\Delta u\Delta v, \tag{D.6}$$

onde, na última passagem, usamos o Teorema do Valor Médio, com $u_1 < ux < u_2$ e $v_1 < vx < v_2$. Continuando, supomos que $g(u,v)$ seja da classe C^2 (duplamente diferenciável) nas variáveis u e v, dentro do retângulo nulo. Podemos expandir g, dentro do retãngulo nulo, em torno da origem, como se segue.

$$g(ux,vx) = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial u}ux + \frac{\partial g}{\partial v}vx + O(\Delta^2), \tag{D.7}$$

onde as derivadas são calculadas na origem. Com a expansão acima, temos

$$\int_{-\frac{\Delta v}{2}}^{\frac{\Delta v}{2}} \int_{\frac{-\Delta u}{2}}^{\frac{\Delta u}{2}} g(u,v)dudv \quad =$$

$$(g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial u}ux + \frac{\partial g}{\partial v}vx)\Delta u\Delta v + O(\Delta^4) =$$

$$g(0,0)\Delta u\Delta v + \Delta v \int_{-\frac{\Delta u}{2}}^{\frac{\Delta u}{2}} (ux)du + \Delta v \int_{-\frac{\Delta v}{2}}^{\frac{\Delta v}{2}} (vx)dv + O(\Delta^4) =$$

$$g(0,0)\Delta u\Delta v + O(\Delta^4). \qquad \text{(D.8)}$$

Já sabemos o valor do lado esquerdo de (D.2), presente em (D.3). Podemos agora voltar à equação (D.2) e completar o lado direito.

$$\Psi_N - \Psi_W - \Psi_E + \Psi_S = -\frac{1}{4}\int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1^{v_2}} V(u,v)\Psi(u,v) = V(C)\Psi(C)\Delta v\Delta u + O(\Delta^4), \qquad \text{(D.9)}$$

onde C representa o ponto no centro do retângulo, $(u = 0, v = 0)$. Por fim, é possível escrever

$$\Psi_C = \frac{1}{2}[\Psi_W + \Psi_E] + O(\Delta^4), \qquad \text{(D.10)}$$

e, como $V(N) = V(S) = V(C)$, escrevamos $V(C) = V(S)$. Com estas considerações finais, temos

$$\Psi_N = \Psi_W + \Psi_E - \Psi_S + \frac{1}{8}\Delta u\Delta v V(S)[\Psi(W) + \Psi(E)], \qquad \text{(D.11)}$$

que é a equação procurada. Com o conhecimento do campo Ψ em 3 pontos (S, W, E), do potencial perturbativo em S e dos espaçamentos $\Delta u.\Delta v$ nas direções u, v, calculamos o campo Ψ no quarto ponto, N. Trabalhamos com $\Delta u = \Delta v$ ao utilizar este método numérico para caracterizar a dinâmica dos campos nas geometrias de Schwarzschild e assintoticamente de Sitter.

O método acima necessita de condições iniciais em $u = 0$. Normalmente, temos aí um pulso gaussiano - a forma do pulso inicial não interfere nos MQNs e caudas, sendo visível apenas no transiente dos campos, isto é, em tempos muito curtos após o início da perturbação. Além disso, devemos especificar o campo em $v = 0$, que aqui foi tomado como sendo zero.

Uma ilustração do método aqui detalhado está na Fig. (D.2).

No caso do método da grade $x - t$, temos a expressão

$$\begin{aligned}\Psi(t_0 + \delta t, x_0) &= -\Psi(t_0 - \delta t, x_0) + (2 - \delta^2 x V(x_0) - \frac{5\delta t^2}{2\delta x^2})\Psi(t_0, x_0) + \\ &+ \frac{4\delta t^2[\Psi(t_0, x_0 + \delta x) + \Psi(t_0, x_0 - \delta x)]}{3\delta x^2} - \\ &- \frac{\delta t^2[\Psi(t_0, x_0 - 2\delta x) + \Psi(t_0, x_0 + 2\delta x)]}{12\delta x^2} \qquad \text{(D.12)}\end{aligned}$$

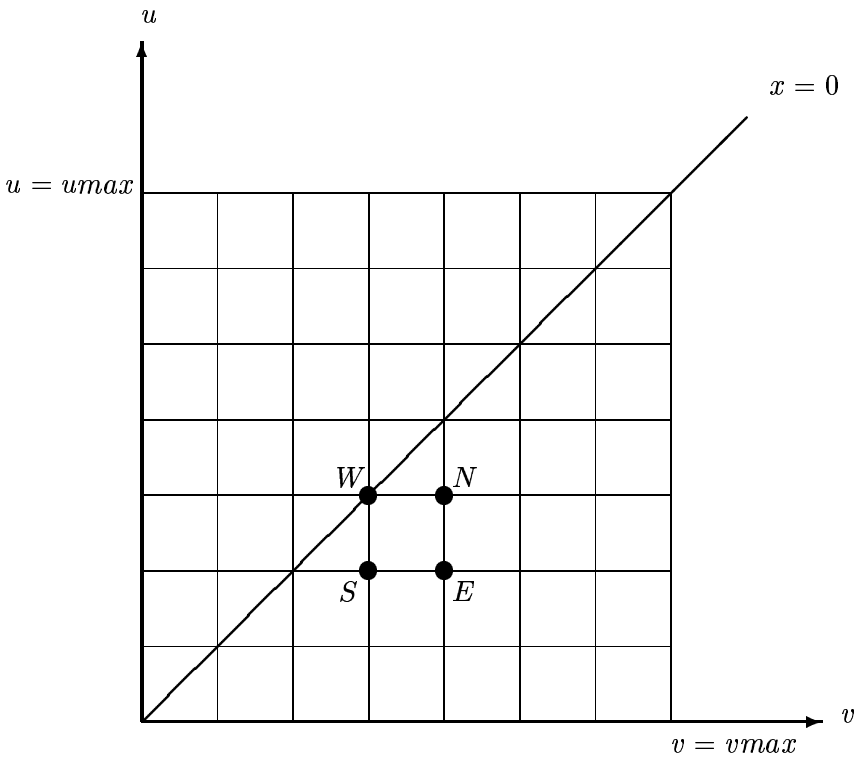

Figura D.2: Exemplo de Grade $u - v$ com espaçamento idêntico em u e v, origem em $(u = 0, v = 0)$ e tendo por limites $u = umax$ (aproximando o horizonte de eventos) e $v = vmax$ (aproximando o horizonte cosmológico, quando for o caso)). Notar os pontos S, E, W, N onde o campo Ψ é calculado. Com os dados de Ψ_W, Ψ_E, Ψ_S, calcula-se Ψ_N de acordo com a fórmula (D.11).

para o cálculo do campo Ψ no ponto $(t, x) = (t_0 + \delta t, x_0 + \delta x)$. Este cálculo necessita do campo em 5 pontos no instante t_0 e do campo em um ponto no instante $t_0 - dt$, e precisamos especificar, no instante inicial t_{ini}, não apenas o campo Ψ, mas também a sua derivada temporal $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, em uma região do espaço que vai de x_{ini} até x_{fin}. A cada instante, serão necessários mais dois pontos em x, tanto à direita do x_{max} atual quanto à esquerda do x_{fin} atual, de forma que toda a integração (até que x ou t atinjam um certo valor predeterminado) se passa dentro de um cone invertido. Um ponto importante a ser notado aqui é que o espaçamento temporal δ_t deve ser sempre inferior ao espaçamento em x, δ_x, isto é, se $m = \frac{\delta_t}{\delta_x}$, devemos ter $m < 1$, para garantir a estabilidade numérica do algoritmo. Esta grandeza adimensional m é denominada *mesh ratio*. Uma ilustração da grade é a Fig. (D).

Utilizamos este método numérico extra para perturbações estelares, uma

vez que a presença de valores mínimos para a coordenada tartaruga x imposta pela métrica estelar impedia-nos de usar as grades $u - v$ com a mesma desenvoltura com que a utilizávamos para estudar perturbações de buracos negros, onde $x \to -\infty$ no horizonte de eventos, não limitando a grade.

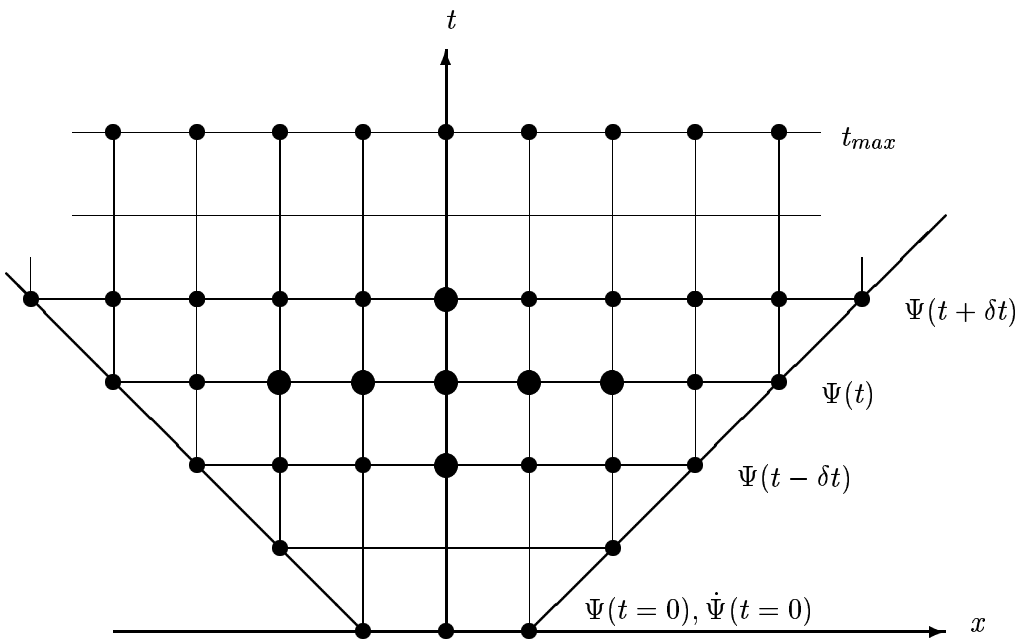

Figura D.3: A Grade $x - t$.

Apêndice E

Equações de Perturbação de SGs

Aqui encontram-se as deduções das equações de onda que governam os diversos tipos de perturbações de sistemas gravitacionais(SGs). Por serem extensas as deduções e diversos os tipos de perturbações estudados, subdividiremos este capítulo em quatro partes: a que introduz a métrica empregada, a que trata de perturbações escalares, a que trata das perturbações eletromagnéticas e a que trata de perturbações gravitacionais (tanto axiais quanto polares).

E.1 Apresentando a Métrica

Uma métrica bastante geral, que descreve sistemas axialmente simétricos e estacionários, é dada pela expressão

$$ds^2 = \exp(2\nu)dt^2 - \exp(2\psi)[d\phi - \omega dt]^2 - \exp(2\mu_2)dr^2 - \exp(2\mu_3)d\theta^2, \quad \text{(E.1)}$$

onde ν, ψ, μ_2 e μ_3 são funções de r e de θ, mas não de t ou de ϕ. Tomamos, neste trabalho, $\omega = 0$, isto é, não lidamos com corpos em rotação. Tal simplificação diagonaliza a métrica acima, que fica

$$ds^2 = \exp(2\nu)dt^2 - \exp(2\mu_2)dr^2 - \exp(2\mu_3)d\theta^2 - \exp(2\psi)d\phi^2. \quad \text{(E.2)}$$

Seu determinante g vale, neste caso em que não há rotação envolvida,

$$g = -\exp(2(\nu + \psi + \mu_2 + \mu_3)). \quad \text{(E.3)}$$

No que se segue, a simetria esférica traduz-se por $\mu_2 = \mu_2(r)$ e $\nu = \nu(r)$, bem como por

$$\begin{aligned} \exp(2\mu_3) &= r^2 \\ \exp(2\psi) &= r^2 \sin^2(\theta), \end{aligned} \quad \text{(E.4)}$$

o que nos deixa com $g = -r^4 \sin^2(\theta) \exp(2[\mu_2 + \psi])$.

E.2 Perturbações Escalares

A equação que rege os campos escalares Φ é

$$\Phi^{;\mu}_{;\mu} = m^2\Phi, \tag{E.5}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Phi_{,\nu})}{\partial x^\mu} - m^2\Phi = 0, \tag{E.6}$$

m representando a massa do campo escalar (que pode ser zero).

Utilizando a métrica definida na seção anterior, temos

$$\begin{aligned} - & \exp(-2\nu)\Phi_{,t,t} + \frac{\exp(-[\nu+\mu_2])}{r^2}(r^2\exp(\nu-\mu_2)\Phi_{,r})_{,r} + \\ + & \frac{1}{r^2\sin(\theta)}(\sin(\theta)\Phi_{,\theta})_{,\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi_{,\phi,\phi} - m^2\Phi = 0. \end{aligned} \tag{E.7}$$

No caso de campos escalares, é possível expandirmos o termo Φ em harmônicos esféricos,

$$\Phi(r,t,\theta,\phi) = \Phi(r,t)Y_l^k(\theta,\phi), \tag{E.8}$$

o que simplifica a expressão (E.7), que se torna (após a fatoração do termo $Y_l^k(\theta,\phi)$)

$$-\exp(-2\nu)\Phi_{,t,t} + \frac{\exp(-\nu-\mu_2)}{r^2}(r^2\exp(\nu-\mu_2)\Phi_{,r})_{,r} - \frac{\ell(\ell+1)\Phi}{r^2} - m^2\Phi = 0. \tag{E.9}$$

Tomamos $\Phi = \Psi/r$ na equação acima, obtendo

$$\begin{aligned} -\exp(-2\nu)\Psi_{,t,t} & + \exp(-2\mu_2)\Psi_{,r,r} + \exp(-2\mu_2)[\nu_{,r} - \mu_{2,r}]\Psi_{,r} - \\ & - \exp(-2\mu_2)\frac{\nu_{,r}-\mu_{2,r}}{r}\Psi - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m^2\Psi = 0. \end{aligned}$$

Falta apenas a transformação de r para a coordenada tartaruga x, definida como

$$\frac{dx}{dr} = \exp(-\nu+\mu_2). \tag{E.10}$$

Com esta transformação, chega-se a

$$\begin{aligned} \exp(-2\nu)[-\Psi_{,t,t} & + \Psi_{,x,x}] - f(r)\Psi = 0 \\ f(r) & = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\exp(-2\mu_2)}{r}(\nu_{,r} - \mu_{2,r}) - m^2. \end{aligned} \tag{E.11}$$

A forma final fica, após a simplificação da expressão acima, com as definições da métrica e a equação (A.5) para ν

$$\Psi_{,x,x} - \Psi_{,t,t} = V(r)\Psi, \tag{E.12}$$

onde

$$V(r) = \exp(2\nu)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m(r)}{r^3} + 4\pi(\rho - p)], \tag{E.13}$$

sendo que, fora da estrela, $p = \rho = 0$ e $\exp(2\nu) = 1 - \frac{2M}{r}$, idêntico ao caso do buraco negro de Schwarzschild,

$$V(r) = (1 - \frac{2M}{r})[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}] \tag{E.14}$$

No caso particular dos buracos negros, para métricas mais gerais do que a de Schwarzschild, mas que preservam a simetria esférica desta, como a métrica RNdS, temos

$$V(r) = h(r)[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2\Lambda}{3}], \tag{E.15}$$

onde $h(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q^2}{r^2}$. Eliminando-se Q (preservando Λ) destas expressões, temos o potencial escalar da métrica SdS. Preservando-se Q e eliminando-se Λ, é o potencial escalar da métrica RN que resulta.

E.3 Perturbações Eletromagnéticas

As perturbações eletromagnéticas necessitam das equações de Maxwell para serem descritas. Estas equações, no contexto da Relatividade Geral, são

$$\begin{aligned} g^{\epsilon\alpha}F_{\alpha\beta;\epsilon} &= 0 \\ \nabla_\epsilon F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\epsilon} + \nabla_\beta F_{\epsilon\alpha} &= 0, \end{aligned} \tag{E.16}$$

onde $F_{\alpha\beta}$ é o tensor do campo eletromagnético. Como estamos trabalhando com uma teoria de perturbação linear, podemos ignorar a reação da radiação que, se levada em conta, alteraria a métrica. Assim, neste problema, a métrica não se altera.

O tensor $F_{\alpha\beta}$ relaciona-se com o potencial vetor A_α do campo eletromagnético via

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \tag{E.17}$$

A primeira das equações em (E.16) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(F^{\alpha\beta})}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{E.18}$$

Dada a forma de $F_{\alpha\beta}$ em (E.17), o procedimento usual é decompor A_α em harmônicos esféricos vetoriais, separando os termos com paridade positiva dos termos com paridade negativa. Há, assim, duas equações independentes para as perturbações eletromagnéticas, dependendo da paridade dos harmônicos esféricos tensoriais envolvidos. Mas as duas equações em

questão se reduzem a apenas uma equação para todas as componentes de A_α. O formalismo completo pode ser encontrado em [29]. A equação em questão é

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\Psi_{el}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Psi_{el}}{\partial x^2} &= V_{el}(r(x))\Psi_{el} \\ V_{el}(r(x)) &= h(r)\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \end{aligned} \tag{E.19}$$

onde $h(r)$ é a função da métrica.

E.4 Perturbações Gravitacionais

Discutiremos aqui as perturbações gravitacionais, tanto axiais quanto polares. Reescrevendo a métrica geral em (E.1) como

$$ds^2=\exp(2\nu)dt^2-\exp(2\psi)[d\phi-\omega dt-q_2dr-q_3d\theta]^2-\exp(2\mu_2)dr^2-\exp(2\mu_3)d\theta^2, \tag{E.20}$$

em que ω, q_2 e q_3 são as perturbações que introduzem termos cruzados (rotação) na métrica não-perturbada, Eq. (E.1). E são estes termos cruzados que definem as perturbações axiais - perturbações que provocam a rotação em sistemas que eram, antes destas aparecerem, esfericamente simétricos e estáticos. Diferentemente das perturbações polares, em que estes termos cruzados não existem, e as mudanças ocorrem nas funções ψ, ν, μ_2 e μ_3.

Introduzimos aqui a notação $q_0=\omega$ e $Q_{A,B}=q_{A,B}-q_{B,A}$.

Para as perturbações axiais, como temos apenas o aparecimento de q_2, q_3 e ω, as equações que regem as perturbações são

$$\delta R_{12}=\delta R_{13}=0, \tag{E.21}$$

o que, dadas as expressões já existentes para R_{12} e R_{13} válidas para a métrica (E.20), traduz-se por

$$\begin{aligned} (\exp(3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3)Q_{23})_{,3} &= -\exp(3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2)Q_{02,0} \\ (\exp(3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3)Q_{23})_{,2} &= \exp(3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3)Q_{03,0}. \end{aligned} \tag{E.22}$$

Definindo-se $\Delta=r^2-2Mr$ e $Q=\Delta Q_{23}=-\Delta Q_{32}$, as equações acima transformam-se em

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^4\sin^3(\theta)}\frac{\partial Q}{\partial\theta} &= -(\omega_{,r}-q_{2,t})_{,t} \\ \frac{1}{r^4\sin^3(\theta)}\frac{\partial Q}{\partial r} &= (\omega_{,\theta}-q_{3,t})_{,t}. \end{aligned} \tag{E.23}$$

Eliminemos ω das equações acima, derivando a primeira com respeito a θ e a segunda com respeito a r, somando-as em seguida. Tal procedimento

resultará (após multiplicação do resultado por $r^4 \sin^3(\theta)$) em

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\partial Q}{\partial r}) + \sin^3(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{1}{\sin^3(\theta)}\frac{\partial Q}{\partial \theta}) - \frac{r^4}{\Delta}\frac{\partial Q}{\partial t^2}. \tag{E.24}$$

A função Q pode ser decomposta em suas partes radial e angular (em θ), como

$$Q = Q(r,\theta) = Q(r)G_{l+2}^{-\frac{3}{2}}(\theta), \tag{E.25}$$

onde G_α^β representa uma classe de funções conhecida como *funções de Gegenbauer*, que obedecem à equação

$$\frac{d}{d\theta}(\sin^{2\beta}(\theta)\frac{dG_\alpha^\beta}{d\theta}) + \alpha(\alpha+2\beta)\sin^{2\beta}(\theta)G_\alpha^\beta(\theta) = 0. \tag{E.26}$$

Fatorando a função de Gegenbauer, obtemos a equação radial,

$$\Delta\frac{d}{dr}(\frac{\Delta}{r^4}\frac{dQ}{dr}) - (l-1)(l+2)\frac{\Delta Q}{r^4} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0. \tag{E.27}$$

É o momento de fazermos as duas últimas manipulações: definimos a coordenada tartaruga, x, via

$$\frac{dx}{dr} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt}}} = \exp(-\nu+\mu_2) = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}, \tag{E.28}$$

em conjunto com a função $Z = \frac{Q}{r}$. Aqui já empregamos os valores $\exp(2\nu) = 1-\frac{2M}{r}$ e $\exp(2\mu_2) = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}$ da geometria de Schwarzschild. Inserindo-se tais definições em (E.27), chega-se finalmente à equação desejada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= V_{ax}(r)Z \\ V_{ax}(r) &= (1-\frac{2M}{r})[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6m}{r}]. \end{aligned} \tag{E.29}$$

A partir daí, é só proceder à transformação $u = t - x$, $v = t + x$, para se chegar a

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}V_{ax}Z, \tag{E.30}$$

forma-padrão encontrada neste trabalho. Para estrelas, a dedução é virtualmente a mesma, a única diferença é que não tomamos $\Delta = r^2 - 2Mr$, mas sim $\Delta = r^2\exp(2\nu - 2\mu_2)$ e $\exp(2\mu_2) = \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}}$, de sorte que, em (E.27), aparecerão as derivadas de ν e de μ_2. Como $\nu_{,r} = \frac{m+4\pi r^3}{r^2(1-\frac{2m(r)}{r})}$ e $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\varepsilon$, onde p e ε significam pressão e densidade de energia do fluido estelar, respectivamente, aparecerão termos dem p e ε no potencial perturbativo, que assumirá a forma

$$V_{ax} = \exp(2\nu(r))[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6m(r)}{r^3} + 4\pi(\varepsilon - p)], \tag{E.31}$$

que se reduz à forma vista em (E.29) fora da estrela.

Para as perturbações polares, a dedução é um pouco mais complicada. Estas perturbações não introduzem rotações na estrela, apenas alterando os termos (funções) já existentes na métrica (E.20). Em outras palavras, variamos os termos ψ, ν, μ_i da métrica em questão.

Tomando as variações (até primeira ordem de perturbação) das componentes R_{02}, R_{03}, R_{23}, G_{22} e R_{11} dos tensores de Ricci e Einstein, temos

$$\begin{aligned}
(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r} &+ (\frac{1}{r}-\nu_{,r})(\delta\psi+\delta\mu_3)-\frac{2}{r}\delta\mu_2=0\\
(\delta\psi+\delta\mu_2)_{,\theta} &+ (\delta\psi-\delta\mu_3)\cot(\theta)=0\\
(\delta\psi+\delta\nu)_{,r,\theta} &+ (\delta\psi-\delta\mu_3)_{,r}\cot(\theta)+(\nu_{,r}-\frac{1}{r})\delta\nu_{,\theta}-(\nu_{,r}+\frac{1}{r})\delta\mu_{2,\theta}=0\\
\exp(-2\mu_2)[\frac{2}{r}\delta\nu_{,r} &+ (\frac{1}{r}+\nu_{,r})(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}-2\delta\mu_2(\frac{2}{r}\nu_{,r}+\frac{1}{r^2})]+\\
&+ \frac{1}{r^2}[\frac{2}{r}\delta\nu_{,r}+(\frac{1}{r}+\nu_{,r})(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}-2\delta\mu_2(\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r}\delta)]-\\
&- \exp(-2\nu)(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,0,0}=0\\
\exp(2\nu)[\delta\psi_{,r,r} &+ 2(\frac{1}{r}+\nu_{,r})\delta\psi_{,r}+\frac{1}{r}(\delta\psi+\delta\nu-\delta\mu_2+\delta\mu_3)_{,r}-2\frac{\delta\mu_2}{r}(\frac{1}{r}+2\nu_{,r})]+\\
&+ \frac{1}{r^2}[\delta\psi_{,\theta,\theta}+(2\delta\psi+\delta\nu+\delta\mu_2-\delta\mu_3)_{,\theta}\cot(\theta)+2\delta\mu_3]-\\
&- \exp(-2\nu)\delta\psi_{,0,0}=0. \qquad \text{(E.32)}
\end{aligned}$$

Aqui, como nas demais deduções, a dependência temporal é do tipo harmônico, $\exp(i\sigma t)$, σ sendo complexo. Tal fator é comum a todas as equações (E.32) e pode ser eliminado por fatoração.

Podemos aplicar uma separação de variáveis ao conjunto de equações (E.32), da forma que se segue:

$$\begin{aligned}
\delta\nu &= N(r)P_\ell\cos(\theta), \qquad \delta\mu_2=L(r)P_\ell\cos(\theta),\\
\delta\mu_3 &= T(r)P_\ell+V(r)P_{\ell,\theta,\theta}, \quad \delta\psi=T(r)P_\ell+V(r)P_{\ell,\theta}\cot(\theta), \qquad \text{(E.33)}
\end{aligned}$$

em que $P_\ell\cos(\theta)$ representa o polinômio de Legendre de ordem ℓ em $\cos(\theta)$. A segunda das equações em (E.32), ao ser reescrita com o auxílio das equações (E.33) e com o uso da equação de Legendre,

$$P_{\ell,\theta,\theta}+P_{\ell,\theta}\cot(\theta)=-\ell(\ell+1)P_\ell, \qquad \text{(E.34)}$$

revela-nos a seguinte identidade entre as funções radiais T, L e V,

$$T+L-V=0. \qquad \text{(E.35)}$$

Ou seja, das 4 funções radiais utilizadas em (E.33), somente 3 são LI (linearmente independentes). Trabalharemos doravante apenas com N, L e V.

Podemos agora reescrever todo o conjunto de equações em (E.32) fazendo uso do conjunto (E.33) e eliminando T com o uso de (E.35). Ei-las em nova forma:

$$\begin{aligned} N_{,r} - L_{,r} &= (\frac{1}{r} - \nu_{,r})N + (\frac{1}{r} + \nu_{,r})L \\ L_{,r} + (\frac{2}{r} - \nu_{,r})L &= -n(V_{,r} + (\frac{1}{r} - \nu_{,r})V) = -X_{,r} - \\ &- (\frac{1}{r} - \nu_{,r})X \end{aligned} \tag{E.36}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{r}N_{,r} &+ \ell(\ell+1)\frac{\exp(-2\nu)}{r^2}N - \frac{2}{r}(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r})L - 2(\frac{1}{r} + \nu_{,r})(L + nV)_{,r} - \\ &- 2n\frac{\exp(-2\nu)}{r^2}(V - L) - 2\sigma^2\exp(-4\nu)(L + nV) = 0 \\ V_{,r,r} &+ 2(\frac{1}{r} + \nu_{,r})V_{,r} + \frac{\exp(-2\nu)}{r^2}(N + L) + \sigma^2\exp(-4\nu)V = 0. \end{aligned} \tag{E.37}$$

Tomamos $X = nV$, com $n = \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2}$. Como temos 3 funções LI e 4 equações, segue-se que uma delas é combinação linear das outras três. Podemos tomar a última das equações em (E.37) como sendo LD (linearmente dependente) das demais. Temos agora um sistema de três equações LI acopladas para N, L e $X = nV$. Antes de passarmos à etapa final desta dedução, vejamos formas alternativas para a segunda e a quarta equações da série (E.36) e (E.37), respectivamente,

$$\begin{aligned} (L + X)_{,r} &= -\frac{(2r - 5M)L + (r - 3M)X}{r(r - 2M)} \\ X_{,r} &= -\frac{nr + 3M}{r(r - 2M)}N + \frac{n + 1}{r - 2M}L - \\ &- [\frac{1}{r - 2M} - \frac{M}{r(r - 2M) + \frac{M^2 + r^4\sigma^2}{r(r-2M)^2}}](L + X). \end{aligned} \tag{E.38}$$

A última etapa desta dedução consiste em transformar o conjunto de equações (E.36), (E.37) em uma única equação de onda. Tomemos a função W, dada por

$$W = rV - \frac{r^2}{nr + 3M}(L + X). \tag{E.39}$$

Esta função, ao ser derivada com relação à coordenada tartaruga, x, fica, após o uso da primeira componente de (E.38)

$$\begin{aligned} W_{,x} &= \frac{dr}{dx}Z_{,r} = (1 - \frac{2M}{r})Z_{,r} \\ &= (r - 2M)V_{,r} + \frac{nr^2 - 3nMr - 3M^2}{(nr + 3M)^2}(L + X) + \\ &+ \frac{3M(r - 2M)V}{r(nr + 3M)}. \end{aligned} \tag{E.40}$$

Derivamo-la outra vez, agora com relação a r.

$$\begin{aligned} W_{,x,r} &= (r-2M)V_{,r,r} + (1+\frac{3M(r-2M)}{r(nr+3M)})V_{,r} + \frac{3M(-nr^2+4Mnr+6M^2)}{r^2(nr+3M)^2}V + \\ &+ \frac{3Mn[r(\ell(\ell+1))-M]}{(nr+3M)^3} - \frac{nr^2-3Mnr-3M^2}{r(r-2M)(nr+3M)^2} \times \\ &\times [(2r-5M)L + (r-3M)X]. \end{aligned} \tag{E.41}$$

Temos, na equação acima, um termo contendo $V_{,r,r}$, que também apareceu no conjunto de equações (E.32). Usemos a expressão lá contida para $V_{,r,r}$, em termos de N, L, V e $V_{,r}$. Para $V_{,r}$, usamos a segunda componente de (E.38), já que $V = \frac{X}{n}$. Feitas as devidas substituições (e simplificações) em (E.41), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{dx^2} &+ \sigma^2 W = V_{pol}(r)W, \\ V_{pol}(r) &= \frac{2(1-\frac{2M}{r})}{r^3(nr+3M)^2} \times \\ &\times [n^2(1+n)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3], \end{aligned} \tag{E.42}$$

que é a equação de onda procurada, regendo as perturbações polares, também conhecida como a equação de Zerilli.

Apêndice F

O Método WKB

Aqui ilustraremos brevemente o método WKB que mencionamos no decorrer deste trabalho, particularmente no capítulo dedicado às perturbações da geometria RNdS . Este método tem amplo uso em problemas físicos envolvendo oscilações e dissipações, como ocorre com os MQNs, sendo aplicável para uma ampla gama de equações diferenciais descrevendo tais sistemas, notavelmente aquelas sem soluções analíticas conhecidas. Para não fugirmos aos propósitos do presente trabalho, ater-nos-emos às equaçẽs com as quais efetivamente lidamos, do tipo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V(x)y, \tag{F.1}$$

onde, no caso dos MQNs, temos dependências temporais da forma $exp(-i\omega t)$, resultando em uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (V(x) - \omega^2)y = Q(x)y, \tag{F.2}$$

onde estamos interessados em encontrar o autovalor complexo ω, correspondendo às frequências dos MQNs. Para o método funcionar, $Q(x)$ deve ser bem-comportada (no presente contexto, deve ser uam função de variação lenta, isto é, deve variar por δx quando o argumento x variar por δx) para os valores de x que nos interessam. Reescrevamos a última equação como

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (V(x) - \omega^2)y = Q(x)y, \tag{F.3}$$

onde ε é um parâmetro de controle. Assumindo uma solução y da forma assintótica abaixo,

$$y \sim \exp(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S(x)_n), \tag{F.4}$$

onde tomamos o limite $\varepsilon \to 0$. Ao substituir esta expressão na equação (F.3) e igualar os termos com potências iguais de ε, vêm as equações para

as funções $S(x)_n$:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= \pm \int^x dt \sqrt{Q(t)} \\ S_1(x) &= -\frac{1}{4}\log(Q(x)) \\ S_2(x) &= \pm \int^x dt [\frac{Q^{(2)}}{8Q^{\frac{3}{2}}} - \frac{5(Q^{(1)})^2}{32Q^{\frac{5}{2}}}] \\ S_3(x) &= -\frac{Q^{(2)}}{16Q^2} + \frac{5(Q^{(1)})^2}{64Q^3}, \end{aligned} \tag{F.5}$$

e assim sucessivamente. Índices envolvidos por parênteses indicam ordem de diferenciação com respeito a t. Os dois sinais ($\pm$) refletem a existência de 2 soluções independentes para uma equação diferencial de ordem 2. O índice n em S_n indica a ordem da aproximação WKB empregada. Se pararmos em $n = k$, por exemplo, temos o método WKB de ordem k. No nosso trabalho, $k = 3$.

Uma última observação a fazer sobre a solução (F.4) é quanto à sua validade. Para uma aproximação WKB de ordem N ser considerada de boa qualidade, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \varepsilon^k S(x)_{k+1} &\ll \varepsilon^{k-1} S(x)_k, k = 1, 2, \ldots, N \\ \varepsilon^N S(x)_{N+1} &\ll 1, \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{F.6}$$

Para os casos aqui tratados, estas condições estão geralmente satisfeitas. Os problemas surgem quando $Q(x) \to 0$, pois então o termo $S_1(x)$ em (F.5) diverge. Os pontos onde $Q(x) = 0$ são os *pontos de retorno*. Para geometrias S, RN, SdS e RNdS, $V(x)$ tem a forma de uma barreira de potencial finita centrada em um ponto de máximo x_0, indo a zero para $x \to \pm\infty$. Logo, $Q(x) = V(x) - \omega^2$ apresenta tipicamente dois pontos de retorno. Para tais problemas, é possível determinar as freqüências ω e mesmo as autofunções y que nos interessam, através de técnicas de conexão (conectando soluções assintóticas para $x \to \pm\infty$ - i.e., longe da barreira - através de uma solução aproximada para a equação (F.3) na região da barreira. As expressões para tais soluções, em um método WKB de ordem 3, têm dedução bastante complexa e extensa que não cabe aqui, podendo ser encontradas na literatura, como nas referências [19] e [18]. Limitar-nos-emos a deixar as expressões para as freqüências dos MQNs, obtidas com este método. Assim, para o n-ésimo modo quasinormal, temos

$$\omega^2(n) = (V_0 + P) - i\alpha \left(-2V_0^{(2)}\right)^{1/2} (1 + Q) \ , \tag{F.7}$$

onde as funções P e Q são dadas por

$$P = \frac{1}{8}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}}\right]\left(\frac{1}{4} + \alpha^2\right) - \frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(3)}}{V_0^{(2)}}\right]^2 \left(7 + 60\alpha^2\right) \ , \tag{F.8}$$

$$
\begin{aligned}
Q \;=\; & \frac{1}{-2V_0^{(2)}}\left\{\frac{5}{6912}\left[\frac{V_0^{(3)}}{V_0^{(2)}}\right]^4\left(77+188\alpha^2\right)-\frac{1}{384}\left[\frac{V_0^{(3)2}V_0^{(4)}}{V_0^{(2)3}}\right]\left(51+100\alpha^2\right)\right. \\
& +\frac{1}{2304}\left[\frac{V_0^{(4)}}{V_0^{(2)}}\right]^2\left(67+68\alpha^2\right)+\frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(3)}V_0^{(5)}}{V_0^{(2)2}}\right]\left(19+28\alpha^2\right) \\
& \left.-\frac{1}{288}\left[\frac{V_0^{(6)}}{V_0^{(2)}}\right]\left(5+4\alpha^2\right)\right\}\;, \qquad \text{(F.9)}
\end{aligned}
$$

onde $\alpha = n + 1/2$. Aqui, V_0^p significa a derivada de ordem p (com relação a x) do potencial $V(x)$, calculada em $x = x_0$, seu ponto de máximo. Para comparações com simulações numéricas, usamos $n = 0$, correspondendo ao modo fundamental para cada valor de q, m, Λ e ℓ, para um dado tipo de perturbação, regido pelo potencial correspondente. Isto porque o método numérico, salvo em circunstâncias muito particulares, não detecta modos acima do fundamental, isto é, modos com $n = 1, 2, \ldots$.

Apêndice G

Programas Utilizados

Aqui damos os programas utilizados para os cálculos numéricos e semi-analíticos efetuados ao longo deste trabalho. Em sua quase totalidade, os programas foram escritos na linguagem de programação FORTRAN 77.

Primeiramente damos os programas utilizados para as perturbações dos buracos de Schwarzschild.

```
************************************************************************
*                                                                      *
*     PROGRAMA dinamica.f                                              *
*                                                                      *
*     Geometria Schwarzschild                                          *
*     Dimensao 4                                                       *
*                                                                      *
*                                                                      *
*                                                                      *
*     Campos:     ES  - Escalar                                        *
*                 Electromagnetic                                      *
*                 Axial                                                *
*                 Polar                                                *
*                                                                      *
*                                                                      *
*                                                                      *
*     Versao 4.0                                                       *
*                                                                      *
*                                                                      *
************************************************************************
*
*     Variaveis de entrada
*
      implicit none
```

```
      real*8 rp
*
      integer l
*
      real*8 vmax, umax
      integer ncv
*
      real*8 vc, sigma
*
      logical she
*
*     Variaveis para o campo
*
      real*8 psi1(700000), psi2(700000)
      real*8 psihc(700000), psix(700000)
      real*8 v_array(700000), potbh
*
      real*8 psin, psis, psie, psiw
*
*     Variaveis calculadas por subrotinas
*
      real*8 m
      real*8 c2
*
      real*8 bpsiini
*
*     Variaveis da grade
*
      real*8 delta, u0, v0
      integer ncu
*
*     Inteiros correspondentes a variaveis
*
      integer us, vs
*
*     Variavel de erro
*
      integer ier
*
*     Inteiros para loops diversos
*
      integer i, j
*
      real*8 outd, ms, ucurr, vcurr, xcurr, potcurr, conf, diff
```

```
*
*     Compartilha variaveis com subprogramas
*
      common m, c2, ier
*
      integer index
*
*     Formatacoes usadas
*
 10   format('Trabalho realizado: ',f6.2,'%')
 20   format(101d15.6)
*
*     Le arquivo de entrada S.dat
*
      call sentrada(rp, l, vmax, ncv,
     $                    vc, sigma, she, index)
*
*     Calcula constantes compartilhadas com subprogramas
*
      c2 = rp
      m  = rp/2.0d0
*
*     Faz vmax = 2*umax (tomamos redes retangulares)
*
      umax = 0.5d0*vmax
      ncu = ncv/2
*
*     Calcula u0 e v0
*
      u0 = 0.0d0
      v0 = 0.0d0
*
*     Calcula espacamento da rede
*
      delta = (vmax - v0)/dfloat(ncv)
*
*     Limpa vetores psit e psitp
*
      open(unit=90,file='initialpulse.dat',status='unknown')
*
      do vs=1,ncv+1
*
         psi1(vs) = bpsiini(vs, delta, v0, sigma, vc)
         outd = dabs(psi1(vs))
```

```
         if (outd.le.1.0d-99) outd = 1.0d-99
         write(90,20) v0 + dfloat(vs-1)*delta, outd
*
      enddo
*
      close(90,status='keep')
*
      psi2(1) = 0.0d0
*
*     Loops em us e vs (parte dinamica do programa)
*
      do us=1,ncu
*
         do vs=1,ncv
*
*           Resolve celulas normais
*
            psis = psi1(vs)
            psiw = psi2(vs)
            psie = psi1(vs+1)
*
            call scelula3(index, rp, l, psiw, psis, psie, psin,
     $                    u0, v0, vs, us, delta, potbh)
*
            psi2(vs+1) = psin
            v_array(vs) = potbh
*
*           Salva ultimo valor de PSI(us)
*
         enddo
*
*        Atualiza vetor psi1
*
         do j=1,ncv + 1
            psi1(j) = psi2(j)
         enddo
*
         if (us.eq.500) then
*
            open(unit=89,file='500thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(89,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
```

```
            enddo
            close(89,status='keep')
*
         endif
*
         if (us.eq.1000) then
*
            open(unit=90,file='1000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(90,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(90,status='keep')
*
         endif
*
         if (us.eq.2000) then
            open(unit=91,file='2000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(91,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(91,status='keep')
         endif
*
         if (us.eq.5000) then
            open(unit=92,file='5000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(92,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(92,status='keep')
         endif
*
         if (us.eq.5000) then
            open(unit=93,file='5000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               write(93,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(93,status='keep')
```

```
         endif
*
         if (us.eq.4000) then
            open(unit=94,file='4000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               write(94,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(94,status='keep')
         endif
*
         if (us.eq.5000) then
            open(unit=95,file='5000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(95,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(95,status='keep')
         endif
*
         if (us.eq.7500) then
            open(unit=96,file='7500thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(96,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(96,status='keep')
         endif
*
         if (us.eq.10000) then
            open(unit=97,file='10000thstep.dat',status='unknown')
            do j=1,ncv+1
               ms = dabs(psi2(j))
               if (ms.le.1.0d-99) ms = 1.0d-99
               write(97,20) v0 + dfloat(j-1)*delta, ms
            enddo
            close(97,status='keep')
         endif
*
      enddo
*
*     Salva resultados em arquivos de saida
```

```
*
      write(*,*) 'Salvando resultados...'
*
      if (she) then
         open(unit=1, file='he.dat', status='unknown')
         open(unit=8, file='hea.dat',status='unknown')
         do vs=1,ncv + 1
            write(1,20) v0 + dfloat(vs - 1)*delta, psi2(vs)
*
            if (dabs(psi2(vs)).lt.1.0d-99) then
               outd = 1.0d-99
            else
               outd = dabs(psi2(vs))
            endif
*
            write(8,20) v0 + dfloat(vs - 1)*delta, outd
*
         enddo
         endfile(unit=1)
         endfile(unit=8)
*
*         open(unit=77,file='greattest.dat',status='unknown')
*         open(unit=78,file='he2a.dat',status='unknown')
*         open(unit=79,file='diff.dat',status='unknown')
*
* 300     format(1x,i6,2x,d16.6,2x,d16.6,2x,d16.6,2x,d16.6,2x,d16.6,2x,
*     $          d16.6,2x,d16.6,2x,d16.6,2x,d16.6)
*
*         ucurr = u0 + dfloat(ncu)*delta
*         do vs=2,ncv+1
*
*            vcurr = v0 + dfloat(vs-1)*delta
*            xcurr = 0.5d0*(vcurr - ucurr)
*            psin = psi2(vs)
*            psiw = psi2(vs-1)
*            psie = psi1(vs)
*            psis = psi1(vs-1)
*            potcurr = v_array(vs-1)
*            conf = -psis + psie + psiw - 0.125d0*delta*delta*potcurr*
*     $              (psiw + psie)
*            diff = psin - conf
*
*            write(77,300) vs, vcurr, xcurr, psis, psie, psiw, potcurr,
*     $                    conf, psin, diff
```

```
*
*           write(78,20) vcurr, dabs(conf)
*           write(79,20) vcurr, dabs(diff)
*
*         enddo
*
*         endfile(unit=77)
*         endfile(unit=78)
*         endfile(unit=79)
          close(1,status='keep')
          close(8,status='keep')
*         close(77,status='keep')
*         close(78,status='keep')
*         close(79,status='keep')
      endif
*
      stop
*
      end
```

A seguir, damos o programa denominado *dinamica.f*, empregado no estudo de perturbações de buracos negros RNdS.

```
************************************************************************
*                                                                      *
*     PROGRAMA dinamica.f                                              *
*                                                                      *
*     Geometria Reissner-Nordstrom-de Sitter                           *
*     Dimensao 4                                                       *
*                                                                      *
*                                                                      *
*                                                                      *
*     Campos:     ES  - Escalar                                        *
*                 Z+1 - bvZ+1                                          *
*                 Z+2 - bvZ+2                                          *
*                 Z-1 - bvZ-1                                          *
*                 Z-1 - bvZ-1                                          *
*                                                                      *
*                                                                      *
*                                                                      *
*     Versao 4.0                                                       *
*                                                                      *
```

```
*                                                                      *
************************************************************************
*
*     Variaveis de entrada
*
      real*16 rc, rp, rm
*
      real*16 xi
*
      integer l
*
      integer nt
      real*16 tini, tfin
*
      integer nx
      real*16 xini, xfin
*
      real*16 vmax
      integer ncv
*
      real*16 vc, sigma
*
      logical she, shc, ccargaN, cFQ
*
*     Variaveis para o campo
*
      real*16 psi1(50000), psi2(50000)
      real*16 psihc(50000), psix(50000)
      real*16 psit(100,50000), psitp(100,50000)
*
      real*16 psin, psis, psie, psiw
*
*     Variaveis calculadas por subrotinas
*
      real*16 m, bm, qs, bqs, as, bas
      real*16 c1, bc1, c2, bc2, c3, bc3, c4, bc4
*
      real*16 bpsiini, bcargaN, bfator4
*
*     Variaveis da grade
*
      real*16 delta, u0, v0
      integer ncu
*
```

```
*     Inteiros correspondentes a variaveis
*
      integer us, vs, xs, ts, dois_ts(100), dois_x1s, xsmax
*
*     Variavel de erro
*
      integer ier
*
*     Inteiros para loops diversos
*
      integer i, j
*
*     Variaveis especificando regioes de analise
*
      real*16 tanalise, xanalise
*
*     Variaveis para o calculo da carga
*
      real*16 cargaN(100)
      integer xsi, xsf
*
*     Fator de qualidade
*
      real*16 FQ, dFQ, FQp,FQn
*
*
*
      integer tamanho
*
*
*     Compartilha variaveis com subprogramas
*
      common m, qs, as, c1, c2, c3, c4, ier
*
*     Formatacoes usadas
*
 10   format('Trabalho realizado: ',f6.2,'%')
 20   format(101d15.6)
*
*     Le arquivo de entrada bh.dat
*
      call  sentrada(rc, rp, rm, xi, l, nt, tini, tfin,
     $                    nx, xini, xfin, vmax, ncv,
     $                    vc, sigma, she, shc, ccargaN, cFQ)
```

```
*
*     Calcula constantes compartilhadas com subprogramas
*
      c1 = bc1(rc,rp,rm)
      c2 = bc2(rc,rp,rm)
      c3 = bc3(rc,rp,rm)
      c4 = bc4(rc,rp,rm)
      m  = bm(rc,rp,rm)
      qs = bqs(rc,rp,rm)
      as = bas(rc,rp,rm)
*
*     Faz vmax = umax (tomamos redes quadradas)
*
      umax = vmax
      ncu = ncv
*
*     Calcula u0 e v0
*
      u0 = 0.0q0
      v0 = 0.0q0
*
*     Calcula espacamento da rede
*
      delta = (vmax - v0)/qfloat(ncv)
*
*     Calcula inteiros correspondente a t = t1, t2,..
*     Forca 2TS ser par
*
      do 30 i=1,nt
         tanalise = tini + (tfin - tini)*qfloat(i - 1)/qfloat(nt - 1)
*
         dois_ts(i) = iqint(2.0q0 + (2.0q0*tanalise - v0 - u0)/delta)
*
         if(mod(dois_ts(i),2).ne.0) dois_ts(i) = dois_ts(i) + 1
*
*      WRITE(*,*)
*      WRITE(*,*) 'Ti, DOIS_TS(i):',tanalise, DOIS_TS(i)
 30   continue
*
*     Calcula o valor maximo de xs
*
      xsmax = dois_ts(nt) - 1
*      WRITE(*,*) 'XSMAX:',XSMAX
*
```

```
*     Limpa vetores psit e psitp
*
      do 50 i=1, nt
         do 40 xs=1,ncu + 1
            psit(i,xs) = 0.0q0
            psitp(i,xs) = 0.0q0
 40      continue
 50   continue
*
*     Calcula inteiros correspondente a x = x1, x2,..
*
*      dois_x1s = iqint((2.0q0*xanalise - v0 + u0)/delta)
*
      do 60 vs=1,ncv+1
         psi1(vs) = bpsiini(vs, delta, v0, sigma, vc)
 60   continue
*
      psi2(1) = 0.0q0
      psihc(1) = psi1(ncv+1)
*
*     Fator de qualidade - calculo inicial (soma psis e psie)
*
      if (cFQ) then
         FQ = 0.0q0
         FQp = 0.0q0
         FQn = 0.0q0
*
         if (psi1(1).gt.0.0q0) then
            FQp = FQp + psi1(1)
         else
            FQn = FQn + psi1(1)
         endif
*
         if (psi1(ncv+1).gt.0.0q0) then
            FQp = FQp + psi1(ncv+1)
         else
            FQn = FQn + psi1(ncv+1)
         endif
      endif
*
*     Loops em us e vs (parte dinamica do programa)
*
      do 100 us=1,ncu
         do 80 vs=1,ncv
```

```
*
*           Resolve celulas normais
*
            psis = psi1(vs)
            psiw = psi2(vs)
            psie = psi1(vs+1)
*
*            WRITE(*,*)
*            WRITE(*,*) 'CELULA:', (us-1)*ncv + vs
*            WRITE(*,*) 'US,VS:',US,VS
*            WRITE(*,*) 'T:', 0.5D0*(U0 + V0 + DFLOAT(US+VS-2)*DELTA)
*            WRITE(*,*) 'PSIS, PSIW, PSIE:',PSIS, PSIW, PSIE
*
            call scelula(rc, rp, rm, xi, l, psiw, psis, psie, psin,
     $                   u0, v0, vs, us, delta)
*
*            WRITE(*,*) 'PSIN:',PSIN
*
            psi2(vs+1) = psin
*
*           Fator de qualidade: elementos de integracao
*
            if (cFQ) then
               dFQ = bfator4(rc, rp, rm, xi, l, psiw, psis,
     $         psie, psin, u0, v0, vs, us, delta)
*
               if (dFQ.gt.0.0q0) then
                  FQp = FQp + dFQ
               else
                  FQn = FQn + dFQ
               endif
            endif
*
*           Salva ultimo valor de PSI(us)
*
            if ((vs.eq.ncv).and.shc) then
               psihc(us+1) = psi2(ncv+1)
            endif
*
*           Salva valor de PSI(t(vs)) no eixo x = x1
*
*            if ((vs - us).eq.dois_x1s) then
*               psix(vs) = psi1(vs)
*            endif
```

```
*
*           Salva valor de PSI(xs) no eixo t = t1,t2,...
*
*            if (ts.gt.0) then
*               do 70 i=1,nt
*                  if ((vs + us).eq.dois_ts(i)) then
*                     xs = (vs - us + xsmax + 1)/2
*
*                     psit(i,xs) = psi1(vs)
*                     psitp(i,xs) = psi2(vs+1)
*
*                  WRITE(*,*) 'EIXO i:',i
*                  WRITE(*,*) 'XS: ',XS
*                  WRITE(*,*) 'X:',0.5D0*(V0-U0+DFLOAT(2*XS-xsmax-2)*DELTA)
*                  endif
* 70              continue
*            endif
*
 80      continue
*
*        Atualiza vetor psi1
*
         do 90 vs=1,ncv + 1
            psi1(vs) = psi2(vs)
 90      continue
*
         write(*,10) qfloat(us)*100.0q0/qfloat(ncu)
*
 100  continue
*
*     Calcula cargas conservadas
*
      if (ccargaN.and.(nx.gt.0)) then
         do 110 i=1,nt
           xsi = (2 - dois_ts(i) + xsmax + 1)/2
           xsf = (dois_ts(i) - 2 + xsmax + 1)/2
           cargaN(i) = bcargaN(rc,rp,rm,xi,l,v0,u0,delta,
     $                         psit,psitp,i,xsi,xsf,xsmax)
*          WRITE(*,*) 'i, CARGAN:', i, cargan(i)
 110     continue
      endif
*
*     Fator de qualidade: ultimas contribuicoes (psiw e psin)
*
```

```
      if (cFQ) then
         if (psi2(1).gt.0.0q0) then
            FQp = FQp + psi2(1)
         else
            FQn = FQn + psi2(1)
         endif
*
         if (psi2(ncv+1).gt.0.0q0) then
            FQp = FQp + psi2(ncv+1)
         else
            FQn = FQn + psi2(ncv+1)
         endif
*
         FQ = FQp + FQn
      endif
*
*     Salva resultados em arquivos de saida
*
      write(*,*) 'Salvando resultados...'
*
*
      if (she) then
         open(unit=1, file='he.dat', status='unknown')
         do 120 vs=1,ncv + 1
            write(1,20) v0 + qfloat(vs - 1)*delta, psi2(vs)
 120     continue
         endfile(unit=1)
         close(1,status='keep')
      endif
*
*
      if (shc) then
         open(unit=2, file='hc.dat', status='unknown')
         do 130 us=1,ncu + 1
            write(2,20) u0 + qfloat(us - 1)*delta, psihc(us)
 130     continue
         endfile(unit=2)
         close(2,status='keep')
      endif
*
*
      if (nx.gt.0) then
         open(unit=3, file='ts.dat', status='unknown')
         do 140 xs=1,xsmax
```

```
            write(3,20) 0.5q0*(v0 - u0 + qfloat(2*xs-xsmax-2)*delta),
     $                   (psit(i,xs), i=1,nt)
 140     continue
         endfile(unit=3)
         close(3,status='keep')
*
*
         open(unit=4, file='ts+.dat', status='unknown')
         do 150 xs=1,xsmax
            write(4,20) 0.5q0*(v0 - u0 + qfloat(2*xs-xsmax-2)*delta),
     $                   (psitp(i,xs), i=1,nt)
 150     continue
         endfile(unit=4)
         close(4,status='keep')
*
*
      open(unit=5, file='dts.dat', status='unknown')
      do 160 xs=1,xsmax
         write(5,20) 0.5q0*(v0 - u0 + qfloat(2*xs-xsmax-2)*delta),
     $               ((psitp(i,xs)-psit(i,xs))/delta, i=1,nt)
 160  continue
      endfile(unit=5)
      close(5,status='keep')
*
      endif
*
*
      if (ccargaN.and.(nx.gt.0)) then
         open(unit=6, file='QN.dat', status='unknown')
         do 170 i=1,nt
            write(6,20)  0.5q0*(v0 + u0 + qfloat(dois_ts(i)-2)*delta),
     $                     cargaN(i)
 170     continue
         endfile(unit=6)
         close(6,status='keep')
      endif
*
*
      if (cFQ) then
         open(unit=7, file='FQ', status='unknown')
         write(7,*) ncu*ncv, FQ
         endfile(unit=7)
         close(7,status='keep')
      endif
```

```
*
      stop
      end
```

A seguir, deixamos à disposição dos leitores os programas empregados na integração da estrutura estelar. Primeiramente, colocamos o programa *odeint.f* que integrou as estrelas de nêutrons, seguido pelo programa que integrou as estrelas de quarks.

```
*
*     odeint.f - INTEGRANDO ESTRELAS DE NEUTRONS
*
      subroutine odeint(index,l,ystart,eps,noise,
     $   derivs,rkqs,radius,mstar,nicen,xcen,store_x2,store_v2,
     $   jmax,sign,rmax,xmax)
*
      implicit none
      integer MAXSTP,NMAX,MX, ch
      real*8 eps,h,radius,ystart(4),TINY,mstar,nicen,xcen,k
      EXTERNAL derivs,rkqs
      PARAMETER (MAXSTP=1000000,NMAX=30,MX=55000,TINY=1.0d-30)
      PARAMETER (k=4.539d-9)
      integer i,nstp,j,jmax
      real*8 hdid,hnext,r,dydr(4),y(4),ynew(4), yint(4)
      real*8 yscal(4), noise, pot
      real*8 b0, rhocen, pcen, b, rho, p, m, ni, x, rint
      integer npoints, sign, l, index
      real*8 store_v(MX), store_r(MX), store_x(MX), store_ni(MX)
      real*8 store_m(MX), store_b(MX), store_1(MX), store_2(MX)
      real*8 nith, xth, store_x2(MX), store_v2(MX)
      real*8 f
*
      real*8 xradius, xmax, rmax, deltar
*
      sign = 0
      b0 = ystart(1)
      rhocen = k*f(b0,0.0d0,2)
      pcen = k*f(b0,0.0d0,1)
*
*     Especificacoes de formato
*
 10   format(1x,d20.9,2x,d20.9)
```

```
*
*     Inicializando passo h e valor minimo de r
*
      r = 0.0d0
      h = 1.0d-3
*
*     Inicializando vetor y (de variaveis: b, m, ni, x)
*
      do i=1,4
*
        y(i) = ystart(i)
*
      enddo
*
*
*
      do nstp=1,MAXSTP
*
*     Calcula dydr
*
        call derivs(r,y,dydr)
*
*     Vetor de erros yscal eh definido
*
        do i=1,4
*
          yscal(i) = dabs(y(i)) + dabs(h*dydr(i)) + TINY
*
        enddo
*
*     Chamando a rotina integradora (Runge-Kutta)
*
        call rkqs(y,dydr,r,h,eps,yscal,hdid,hnext,derivs,ynew)
*
*     Vetor ynew deve ser checado; r foi retornado atualizado
*
        b = ynew(1)
        m = ynew(2)
        ni = ynew(3)
        x = ynew(4)
        rho = k*f(b,0.0d0,2)
        p = k*f(b,0.0d0,1)
*
        if ((p/pcen).ge.noise) then
```

```
*
*     Pressao ainda positiva e a integracao das estrelas de neutrons
*     deve continuar
*
*     Ataulizando vetor y  a partir de  ynew
*
          do i=1,4
*
            y(i) = ynew(i)
*
          enddo
*
*     valor de h para o proximo passo
*
          h = hnext
*
          store_m(nstp) = m
          store_r(nstp) = r
          store_1(nstp) = ni
          store_2(nstp) = x
*
        else if ((p/pcen).ge.0.0d0) then
*
*     Regiao de ruido numerico - integracao para no r atual (raio R da
*
*     estrela) - Valores das diferentes grandezas em r=R sao
*
*     armazenados
*
          radius = r
          b = ynew(1)
          store_r(nstp) = radius
          mstar = ynew(2)
          store_m(nstp) = mstar
          ni = ynew(3)
          store_1(nstp) = ni
          x = ynew(4)
          store_2(nstp) = x
*
*      Sai do loop; integracao acabou
*
          goto 140
*
        else
```

```
*
*      Pressao negativa nao pode ocorrer - Pare o r no valor atual
*
         call lininter(r,r-hdid,ynew,y,rint,yint)
*
         radius = rint
*
         store_r(nstp) = radius
         b0 = yint(1)
         store_b(nstp) = b0
         mstar = yint(2)
         store_m(nstp) = mstar
         ni = yint(3)
         store_1(nstp) = ni
         x = yint(4)
         store_2(nstp) = x
*
*        Sai do loop; integracao acabou
*
         goto 140
*
       endif
*
      enddo
*
*     Variavel sinalizadora sign com valor 1 significa
*           'a integracao acabou'
*
 140  sign = 1
*
*     Corrigindo dados
*
*     Valores analiticos de x(R) e ni(R) sao definidos
*
      nith = 0.5d0*dlog(1.0d0 - 2.0d0*mstar/radius)
      xth = radius + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + radius/2.0d0/mstar)
*
*     Correcoes em ni e em x
*
      nicen = nith - ni
      xcen = xth - dexp(-nicen)*x
*
*     Corrige vetores de dados para x e ni ; vetores contem nstp pontos
*
```

```
      do i=1,nstp
*
          store_ni(i) = store_1(i) + nicen
          store_x(i) = xcen + dexp(-nicen)*store_2(i)
*
      enddo
*
*     Calculando potenciais perturbativos DENTRO da estrela
*
*      open(unit=84,file='starpot.dat',status='new')
*
 50   format(1x,d18.9,2x,d18.9)
*
      do i=1,nstp
*
          m = store_m(i)
          ni = store_ni(i)
          r = store_r(i)
          x = store_x(i)
          b = store_b(i)
          p = k*f(b,0.0d0,1)
          rho = k*f(b,0.0d0,2)
*
          call vns(r,ni,l,m,rho,p,index,pot)
          store_v(i) = pot
*
*          write(84,50) x, pot
*
      enddo
*
      j=1
      do i=1,nstp
         x = store_x(i)
         pot = store_v(i)
         if ((x-xcen).ge.1.0d-3) then
            store_x2(j) = x
            store_v2(j) = pot
            if (i.ne.nstp) j=j+1
         endif
      enddo
*
*     Diferenca entre indices i e j
*
      ch = nstp - j
```

```
*
*     Queremos completar os vetores store_i ateh algum rmax
*          fora da estrela
*
*     Definindo rmax
*
      rmax = 10.5d0*radius
*
*     Calculando x(rmax) e x(R)
*
      xradius = radius + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + radius/2.0d0/mstar)
      xmax = rmax + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + rmax/2.0d0/mstar)
*
*     Numero de posicoes ainda disponiveis nos vetores store_i
*
      npoints = MX - nstp
*
*     Espacamento em r para o restante dos vetores
*
      deltar = (rmax - radius)/dfloat(npoints)
*
      r = radius + deltar
*
      do i=nstp+1,MX
*
        store_r(i) = r
        store_x(i) = r + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + r/2.0d0/mstar)
        store_b(i) = 0.0d0
        store_m(i) = mstar
        store_ni(i) = 0.5d0*dlog(1.0d0 - 2.0d0*mstar/r)
*
        x = store_x(i)
        ni = store_ni(i)
*
*    Calculando o potencial fora da estrela
*
        call vns(r,ni,l,mstar,0.0d0,0.0d0,index,pot)
*
        store_v(i) = pot
*
        store_x2(i-ch) = store_x(i)
        store_v2(i-ch) = store_v(i)
*
*        write(84,50) x, pot
```

```
*
        r = r + deltar
*
      enddo
*
*     Tamanho dos vetores store_x e store_v
*
      jmax = MX - ch
*      close(84,status='keep')
*
      return
*
      end
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.



*
*     odeint.f - INTEGRANDO ESTRELAS DE QUARKS
*
      subroutine odeint(ystart,r1,eps,noise,h,nsteps,derivs,
     $  rkqs,radius,mstar,nicen,xcen,sign)
*
      implicit none
      integer MAXSTP,NMAX,MX
      real*8 eps,h,r1,radius,ystart(4),TINY,mstar,nicen,xcen
      EXTERNAL derivs,rkqs
      PARAMETER (MAXSTP=100000000,NMAX=30,MX=110000,TINY=1.0d-30)
      integer i,nstp,j,div,nsteps
      real*8 hdid,hnext,r,dydr(4),y(4),ynew(4), yint(4)
      real*8 yscal(4), noise
      real*8 B, rhocen, pcen, rho, p, m, ni, x, rint
      integer npoints, sign
      real*8 store1(MX), store2(MX)
      real*8 store3(MX)
      real*8 nith, xth, rmax, deltar
*
      common B
*
      sign = 0
      div = 1000
      rhocen = ystart(1)
      pcen = (rhocen - 4.0d0*B)/3.0d0
*
```

```
*     Opens Output Files
*
      open(unit=1,file='rho.dat',status='unknown')
      open(unit=2,file='mass.dat',status='unknown')
      open(unit=3,file='ni.dat',status='unknown')
      open(unit=4,file='x.dat',status='unknown')
      open(unit=5,file='p.dat',status='unknown')
*
*     Sends first data to them
*
      write(1,5) r1, 1.0d0
      write(2,5) r1, ystart(2)
      write(5,5) r1, 1.0d0
*
      r = r1
*
 5    format(1x,d20.9,2x,d20.9)
*
      store1(1) = r
      store2(1) = ystart(3)
      store3(1) = ystart(4)
*
*     Initializes y from ystart (initial conditions)
*
      do i=1,4
*
        y(i) = ystart(i)
*
      enddo
*
*     Integration Loop
*
      do nstp=1,nsteps
*
        j = nstp/div
*
*     Computes dydr
*
        call derivs(r,y,dydr)
*
*     Error scaling array yscal defined
*
        do i=1,4
*
```

```
          yscal(i) = dabs(y(i)) + dabs(h*dydr(i)) + TINY
*
        enddo
*
*     Calling integration routine (Runge-Kutta)
*
        call rkqs(y,dydr,r,h,eps,yscal,hdid,hnext,derivs,ynew)
*
*     Array ynew must be checked; r was returned updated
*
        rho = ynew(1)
        p = (rho - 4.0d0*B)/3.0d0
*
        if ((p/pcen).ge.noise) then
*
*     Pressure still positive and quark star integration must continue
*
*     Updating y array from ynew
*
          do j=1,4
*
            y(j) = ynew(j)
*
          enddo
*
*     defining next stepsize (hnext)
*
          h = hnext
*
*        if ((nstp-div*j).eq.0) then
*
          write(1,5) r, rho/rhocen
          write(2,5) r, y(2)
          write(5,5) r, p/pcen
*
          store1(nstp+1) = r
          store2(nstp+1) = y(3)
          store3(nstp+1) = y(4)
*
*        endif
*
        else if ((p/pcen).ge.0.0d0) then
*
*     Numerical noise region - integration should stop
```

```
*
*     Values of different quantities at the star radius are stored
*
          radius = r
          mstar = ynew(2)
          ni = ynew(3)
          x = ynew(4)
*
          write(1,5) radius, rho/rhocen
          write(2,5) radius, mstar
          write(5,5) radius, p/pcen
*
          store1(nstp+1) = radius
          store2(nstp+1) = ni
          store3(nstp+1) = x
*
*     Analytical values of ni and x are defined
*
          nith = 0.5d0*dlog(1.0d0 - 2.0d0*mstar/radius)
          xth = radius + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + radius/2.0d0/mstar)
*
*     Corrections to be made to output files ni.dat and x.dat
*
          nicen = nith - ni
          xcen = xth - dexp(-nicen)*x
*
          sign = 1
*
          goto 200
*
        else
*
*       Negative pressure is unphysical - stop r at the current point
*
          call lininter(r,r-hdid,ynew,y,rint,yint)
*
          radius = rint
          mstar = yint(2)
          ni = yint(3)
          x = yint(4)
*
          store1(nstp+1) = radius
          store2(nstp+1) = ni
          store3(nstp+1) = x
```

```
*
          write(1,5) radius, rho/rhocen
          write(2,5) radius, mstar
          write(5,5) radius, p/pcen
*
*     Analytical values of ni and x are defined
*
          nith = 0.5d0*dlog(1.0d0 - 2.0d0*mstar/radius)
          xth = radius + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + radius/2.0d0/mstar)
*
*     Corrections to be made to output files ni.dat and x.dat
*
          nicen = nith - ni
          xcen = xth - dexp(-nicen)*x
*
          sign = 1
*
          goto 200
*
        endif
*
      enddo
*
*     Correcting ni and x
*
 200  do i=1,nstp+1
*
            store2(i) = store2(i) + nicen
            store3(i) = xcen + dexp(-nicen)*store3(i)
*
      enddo
*
      open(unit=3,file='ni.dat',status='old')
      open(unit=4,file='x.dat',status='old')
*
*     Sends corrected data to ni.dat, x.dat
*
      do i=1,nstp+1
*
         write(3,5) store1(i), store2(i)
         write(4,5) store1(i), store3(i)
*
      enddo
*
```

```
      rmax = 3.0d0*radius
      m = mstar
      div = MX - (nstp+1)
      deltar = (rmax-radius)/dfloat(div)
      r = radius + deltar
*
      do j=nstp+2,MX
*
        x = r + 2.0d0*mstar*dlog(-1.0d0 + r/2.0d0/mstar)
        ni = 0.5d0*dlog(1.0d0 - 2.0d0*mstar/r)
*
        write(3,5) r, ni
        write(4,5) r, x
*
        r = r + deltar
*
      enddo
*
      close(3,status='keep')
      close(4,status='keep')
*
      close(1,status='keep')
      close(2,status='keep')
      close(5,status='keep')
*
      return
*
      end
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.
```

O leitor deve ter notado que as duas rotinas são bastante semelhantes. De fato, a diferença entre ambas reside na subrotina *derivs.f*, que contém as expressões do lado direito das equações diferenciais.

```
*
*       derivs.f - p/ estrelas de neutrons
*
      subroutine derivs(r,y,dydr)
*
      implicit none
      real*8 r, y(4), dydr(4)
*
```

```
      real*8 b, pi, rho, p, m, ni, k
      PARAMETER (k=4.537d-9)
      real*8 f
*
      pi = dacos(-1.0d0)
*
*     lendo b, m, ni a partir do vetor y
*
      b = y(1)
      m = y(2)
      ni = y(3)
*
      rho = k*f(b,0.0d0,2)
      p = k*f(b,0.0d0,1)
*
      if (r.lt.1.0d1) then
*
        dydr(1) = -4.0d0*pi*r*(rho/3.0d0 + p)*(1.0d0 + b*b)
*
        dydr(3) = 4.0d0*pi*r*(rho/3.0d0 + p)
*
        dydr(4) = dexp(-ni)
*
      else
*
        dydr(1) = -(1.0d0 + b*b)*(m + 4.0d0*pi*r**3*p)/b/r/r/
     $             (1.0d0 - 2.0d0*m/r)
*
        dydr(3) = (m + 4.0d0*pi*r**3*p)/r/r/(1.0d0 - 2.0d0*m/r)
*
        dydr(4) = dexp(-ni)/dsqrt(1.0d0 - 2.0d0*m/r)
*
      endif
*
      dydr(2) = 4.0d0*pi*r**2*rho
*
      return
*
      end

*
*     derivs.f - para estrelas de quarks
*
      subroutine derivs(r,y,dydr)
```

```
*
      implicit none
      real*8 r, y(4), dydr(4)
*
      real*8 B, pi, rho, m, ni
*
      common B
*
      pi = dacos(-1.0d0)
*
*     Lendo rho, m, ni a partir do vetor y
*
      rho = y(1)
      m = y(2)
      ni = y(3)
*
      if (r.lt.1.0d1) then
*
        dydr(1) = -32.0d0*pi*r*(rho - B)*(rho - 2.0d0*B)/3.0d0
*
        dydr(3) = 8.0d0*pi*r*(rho - 2.0d0*B)/3.0d0
*
        dydr(4) = dexp(-ni)
*
      else
*
        dydr(1) = -4.0d0*(rho-B)*(3.0d0*m+4.0d0*pi*r**3*(rho-4.0d0*B))/
     $             r/r/3.0d0/(1.0d0-2.0d0*m/r)
*
        dydr(3) = (3.0d0*m + 4.0d0*pi*r**3*(rho - 4.0d0*B))/3.0d0/r/r/
     $            (1.0d0 - 2.0d0*m/r)
*
        dydr(4) = dexp(-ni)/dsqrt(1.0d0 - 2.0d0*m/r)
*
      endif
*
      dydr(2) = 4.0d0*pi*r**2*rho
*
      return
*
      end
```

Seguem-se as rotinas *rkqs.f* e *rkck.f*, auxiliares das duas rotinas anteri-

ores, nos cálculos RKF.

```
*
*     rkqs.f
*
      subroutine rkqs(y,dydr,r,htry,eps,yscal,hdid,hnext,derivs,ynew)
*
      integer n,NMAX
      real*8 eps,hdid,hnext,htry,r,dydr(4),y(4),yscal(4),ynew(4)
      EXTERNAL derivs
      PARAMETER (NMAX=50)
CU    USES derivs,rkck
      integer i
      real*8 errmax,h,htemp,rnew,yerr(NMAX),ytemp(NMAX),SAFETY,PGROW
      real*8 PSHRNK,ERRCON
      PARAMETER (SAFETY=0.9d0,PGROW=-0.2d0,PSHRNK=-0.25d0)
      PARAMETER (ERRCON=1.89d-4)
*
      h = htry
*
 1    call rkck(y,dydr,r,h,ytemp,yerr,derivs)
*
      errmax = 0.0d0
*
      do 11 i=1,4
*
        errmax = dmax1(errmax,dabs(yerr(i)/yscal(i)))
*
 11   continue
*
      errmax = errmax/eps
*
      if (errmax.gt.1.0d0) then
*
        htemp = SAFETY*h*(errmax**PSHRNK)
        h = dsign(dmax1(dabs(htemp),0.10d0*dabs(h)),h)
        rnew = r + h
*
        if (rnew.eq.r) then
*
           write(*,*) 'stepsize underflow in rkqs'
           stop
*
```

```
        endif
*
        goto 1
*
      else
*
        if (errmax.gt.ERRCON) then
*
          hnext = SAFETY*h*(errmax**PGROW)
*
        else
*
          hnext = 5.0d0*h
*
        endif
*
        hdid = h
        r = r + h
*
        do 12 i=1,4
*
          ynew(i) = ytemp(i)
*
 12     continue
*
        return
*
      endif
*
      end
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.




*
*     rkck.f
*
      subroutine rkck(y,dydr,r,h,yout,yerr,derivs)
*
      integer NMAX
      real*8 h,r,dydr(4),y(4),yerr(4),yout(4)
      EXTERNAL derivs
      PARAMETER (NMAX=50)
```

```
CU    USES derivs
      integer i
*
      real*8 ak2(NMAX),ak3(NMAX),ak4(NMAX),ak5(NMAX),ak6(NMAX)
      real*8 ytemp(NMAX),A2,A3,A4,A5,A6,B21,B31,B32,B41,B42,B43,B51,B52
      real*8 B53,B54,B61,B62,B63,B64,B65,C1,C3,C4,C6,DC1,DC3,DC4,DC5,DC6
*
      PARAMETER (A2=0.2d0,A3=0.3d0,A4=0.6d0,A5=1.0d0,A6=0.875d0)
      PARAMETER (B21=0.2d0,B31=3.0d0/40.0d0,B32=9.0d0/40.0d0)
      PARAMETER (B41=0.3d0,B42=-0.9d0,B43=1.2d0,B51=-11.0d0/54.0d0)
      PARAMETER (B52=2.5d0,B53=-70.0d0/27.0d0,B54=35.0d0/27.0d0)
      PARAMETER (B61=1631.0d0/55296.0d0,B62=175.0d0/512.0d0)
      PARAMETER (B63=575.0d0/13824.0d0,B64=44275.0d0/110592.0d0)
      PARAMETER (B65=253.0d0/4096.0d0)
      PARAMETER (C1=37.0d0/378.0d0,C3=250.0d0/621.0d0)
      PARAMETER (C4=125.0d0/594.0d0,C6=512.0d0/1771.0d0)
      PARAMETER (DC1=C1-2825.0d0/27648.0d0,DC3=C3-18575.0d0/48384.0d0)
      PARAMETER (DC4=C4-13525.0d0/55296.0d0,DC5=-277.0d0/14336.0d0)
      PARAMETER (DC6=C6-0.25d0)
*
      do 11 i=1,4
*
        ytemp(i) = y(i) + B21*h*dydr(i)
*
 11   continue
*
      call derivs(r+A2*h,ytemp,ak2)
*
      do 12 i=1,4
*
        ytemp(i) = y(i) + h*(B31*dydr(i)+B32*ak2(i))
*
 12   continue
*
      call derivs(r+A3*h,ytemp,ak3)
*
      do 13 i=1,4
*
        ytemp(i) = y(i) + h*(B41*dydr(i)+B42*ak2(i)+B43*ak3(i))
*
 13   continue
*
      call derivs(r+A4*h,ytemp,ak4)
*
```

```
      do 14 i=1,4
*
        ytemp(i) = y(i) + h*(B51*dydr(i)+B52*ak2(i)+B53*ak3(i)+
     $                       B54*ak4(i))
*
 14   continue
*
      call derivs(r+A5*h,ytemp,ak5)
*
      do 15 i=1,4
*
        ytemp(i)= y(i) + h*(B61*dydr(i)+B62*ak2(i)+B63*ak3(i)+B64*ak4(i)
     $                 + B65*ak5(i))
*
 15   continue
*
      call derivs(r+A6*h,ytemp,ak6)
*
      do 16 i=1,4
*
        yout(i) = y(i) + h*(C1*dydr(i)+C3*ak3(i)+C4*ak4(i)+C6*ak6(i))
*
 16   continue
*
      do 17 i=1,4
*
        yerr(i) = h*(DC1*dydr(i)+DC3*ak3(i)+DC4*ak4(i)+DC5*ak5(i)+DC6*
     $                 ak6(i))
*
 17   continue
*
      return
*
      end
C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software #>,13.
```

Apresentamos agora o programa encarregado de trabalhar com grades do tipo $x - t$, para a obtenção de MQNs e outras características de campos diversos em geometrias de buracos negros e estrelas.

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
      implicit none
      real*8 XRL, DT, DX, X0, XMAX, DELTAR, XCRIT
      integer TYPE, ITMAX, NJ, TJ, NIT, JL, JR, J, I, L, NDIV
      real*8 XPEAK, ARG1, ARG2, M, AUX, AUX2, LIM1, LIM2, ALPHA
      real*8 XCURR, TCURR, T0, X1, X2, X3
      real*8 SIGMA, EN
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      PARAMETER (NJ=300001,ITMAX=100000)
      PARAMETER (DELTAR=1.0d-11)
CCCCCCCCCCCCCCccccccccccccccccccccc
      real*8 ZERO(NJ), PSI0(NJ), PSI1(NJ), PSIA(NJ), V(NJ), ARR(NJ)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C     Input Vars
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      write(*,*) 'Calling input subroutine.'
      call input(TYPE,M,L,NIT,X0,XMAX,NDIV)
      if (NIT.gt.ITMAX) NIT=ITMAX
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C       Minimum value for x, due to machine precision
C      limitations in the root-finding BFUNR.F routine
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C      XCRIT = 2.0q0*M + DELTAR + 2.0q0*M*QLOG(DELTAR/2.0q0/M)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      write(*,*) 'INITIAL X0:', X0
C      write(*,*) 'XCRIT:', XCRIT
C      if (X0.lt.XCRIT) X0 = XCRIT + 1.0q0
C      write(*,*) 'EFFECTIVE X0:', X0
      DX = (XMAX - X0)/DFLOAT(NDIV)
      TJ = NDIV + 1
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  MESH RATIO M = DT/DX DEFINED HERE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      DT = 0.50d0*DX
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      T0 = 0.0d0
      write(*,*) 'NDIV,TJ,DX,DT:',NDIV,TJ,DX,DT
      if (TJ.gt.NJ) then
         write(*,*) 'Decrease number of divisions along v.'
         stop
      endif
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    PEAK OF THE INITIAL PULSE RIGHT IN THE MIDDLE OF THE GRID
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      XPEAK = 0.5d0*(XMAX + X0)
```

```
      SIGMA = 2.0d1
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    FETCHING ARRAY OF DATA ON THE POTENTIAL (V)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      call sch(TYPE,M,X0,XMAX,DX,L,V,ARR)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
 5    format(1x,d17.9,2x,d17.9)
 10   format(1x,d17.9,2x,d17.9,2x,d17.9)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    OPENING FILES
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C      open(1,FILE='psi1st.dat', STATUS='UNKNOWN')
C      open(2,FILE='initialpulse.dat', STATUS='UNKNOWN')
C      open(3,file='v.dat',status='unknown')
C      open(4,file='r.dat',status='unknown')
      open(58,file='energy.dat',status='unknown')
      JL = NDIV/2 - 500 + 1
      JR = NDIV/2 + 500 + 1
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C     COMPUTING THE FIRST STEP IN TIME
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      do J=1,TJ
CCCCCCCCCCCCCcccccccccccccccccccccccccccccccccc
C         write(3,5) x0 + dfloat(j-1)*dx, v(j)
C         write(4,5) x0 + dfloat(j-1)*dx, arr(j)
         IF (J.LT.JL) THEN
           PSI0(J) = 0.0d0
         ELSE IF (J.GT.JR) THEN
           PSI0(J) = 0.0d0
         ELSE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C     1ST INITIAL CONDITION / FIELD AT T=0
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
           ARG1 = X0 + DFLOAT(J - 1)*DX
           PSI1(J) = DEXP(-0.5d0*((ARG1 - XPEAK)**2)/SIGMA/SIGMA)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C     2ND INITIAL CONDITION / FIELD DERIVATIVE AT T=0
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
           PSI0(J) = 0.0d0
         ENDIF
         zero(j) = 0.0d0
      enddo
      call ener(v,zero,psi1,psi0,dt,dx,jl,jr,en)
      write(58,*) t0, en
```

```
      do j=1,TJ
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C     FIELD AT T = T0 + DT
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
         PSIA(J) = PSI1(J) + PSI0(J)*DT
         AUX = DABS(PSIA(J))
         AUX2 = DABS(PSI1(J))
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
         if (AUX.le.1.0d-100) AUX = 1.0d-100
         if (AUX2.le.1.0d-100) AUX2 = 1.0d-100
C         write(1,5) X0 + DFLOAT(J - 1)*DX, AUX
C         write(2,5) X0 + DFLOAT(J - 1)*DX, AUX2
CCCCCCCCCCCCCCccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      enddo
C      call ener(v,psia,psi1,,dt,dx,jl,jr,en)
C      write(58,*) t0 + dt, en
C      close(1, STATUS='KEEP')
C      close(2, STATUS='KEEP')
C      close(3, STATUS='KEEP')
C      close(4, STATUS='KEEP')
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    UPDATING ARRAYS SWEEPING THROUGH THE GRID
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      do j=1,TJ
         psi0(j) = psi1(j)
         psi1(j) = psia(j)
      enddo
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  EXPANDING & CONTROLLING THE BORDERS OF THE LIGHT CONE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      JL = MAX(4,JL-2)
      JR = MIN(TJ-3,JR+2)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    SPECIFYING X-VALUES TO LOOK AT
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      X2 = XPEAK
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    NORMAL ITERATIONS
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      open(8,FILE='x2.dat',STATUS='unknown')
      open(9,file='x2a.dat',status='unknown')
      do I=2,NIT
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    COMPUTING TIME T
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
        TCURR = T0 + DFLOAT(I)*DT
        do J=JL-1,JR+1
          PSIA(J) = 2.0d0*PSI1(J) - PSI0(J) -DT**2*V(J)*PSI1(J)+
     $              DT**2*(16.0d0*( PSI1(J+1) + PSI1(J-1)) -
     $              PSI1(J+2) - PSI1(J-2) - 30.0d0*PSI1(J))/
     $              (12.0d0*DX**2)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C    FIELD AT SELECTED X-VALUES
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
          XCURR = X0 + DFLOAT(J-1)*DX
          if (DABS(XCURR-X2).le.(0.5d0*DX)) then
            AUX = DABS(PSIA(J))
            if (AUX.le.1.0d-100) AUX = 1.0d-100
            write(9,5) TCURR, AUX
            write(8,5) TCURR, PSIA(j)
          endif
        enddo
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   UPDATING ARRAYS FOR NEXT T
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
        do J=1,TJ
          PSI0(J) = PSI1(J)
          PSI1(J) = PSIA(J)
        enddo
        JL = MAX(4,JL-2)
        JR = MIN(JR+2,TJ-3)
        if ((JL.le.4).or.(JR.ge.(TJ-3))) then
          write(*,*) 'Reaching border. Stopping now.'
          write(*,*) 'I, TCURR:', I, TCURR
          stop
        endif
      enddo
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   CLOSING FILES
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      close(8,status='keep')
      close(9,status='keep')
      close(58,status='keep')
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      end
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

Por fim, o programa (em Mathematica) utilizado para o cálculo das freqüências pelo método WKB. Neste exemplo, as freqüências são para o campo polar W_1^+ da geometria RNdS. Para os demais campos, os programas são similares.

```
Constantes de entrada

m = 1.0
q = 0.5
Lambda = 1.0*10^(-5)
l = 1
n = 0

Funcao h(r)

h[r_] = 1 - 2m/r + q^2/r^ 2 - Lambda*r^2/3

Horizontes de evento e cosmologico

Zeros = Sort[r /. NSolve[h[r] == 0, r]];
rc = Zeros[[Length[Zeros]]]
rp = Zeros[[Length[Zeros] - 1]]
rm = Zeros[[Length[Zeros] - 2]]

Calcula c, p1, p2, wbar[r]

c = (l - 1)*(l + 2)/2
p1 = 3*m + Sqrt[9*m^2 + 8*q^2*c]
p2 = 3*m - Sqrt[9*m^2 + 8*q^2*c]
wbar[r_] = c*r + 3*m - 2*q^2/r

Calcula W[r] e U[r]

W[r_] = Simplify[(r*h[r]/wbar[r]^2)*(2*c*r + 3*m) + (c*r + m +
            2*Lambda*r^3/3)/wbar[r]]
U[r_] = Simplify[(2*c*r + 3*m)*W[r] + (wbar[r] - c*r - m - 2*Lambda*r^3/3) -
      2*c*r^2*h[r]/wbar[r]]

Potencial Efetivo Escalar

V[r_] = h[r]*(U[r] + (p1 - p2)*W[r]/2)/r^3

Ponto Extremo do Potencial
```

```
eq = Simplify[D[V[r], r]] == 0;
r0 = r /. FindRoot[eq, {r, rp, rp, rc}]

Derivadas do Potencial

V1[r_] = h[r]*D[V[r], r];
V2[r_] = Simplify[h[r]*D[V1[r], r]];
V3[r_] = Simplify[h[r]*D[V2[r], r]];
V4[r_] = Simplify[h[r]*D[V3[r], r]];
V5[r_] = Simplify[h[r]*D[V4[r], r]];
V6[r_] = Simplify[h[r]*D[V5[r], r]];

Valores do Potencial e de suas derivadas no ponto extremo

V0 = V[r0] ;
V02 = V2[r0];
V03 = V3[r0];
V04 = V4[r0];
V05 = V5[r0];
V06 = V6[r0];

Frequencias WKB

alpha = n + 1/2;
P = (V04/V02)*(1/4 + alpha^2)/8 - (V03/V02)^2*(7 + 60*alpha^2)/288;
Q = ((5/6912)*(V03/V02)^4*(77 + 188*alpha^2) - (1/384)*(V03^2*
                V04/V02^3)*(51 + 100*alpha^2) + (1/2304)*(V04/V02)^2*(67 +
                68*alpha^2) + (1/288)*(V03*V05/V02^2)*(19 + 28*alpha^2) - (1/
                288)*(V06/V02)*(5 + 4*alpha^2))/(-2*V02);
wsq = V0 + P - I*(n + 1/2)*Sqrt[-2*V02]*(1 + Q);
w = Sqrt[wsq]
```

Apêndice H

O Sistema Geométrico de Unidades

Já foi mencionado na Introdução que empregamos o sistema geométrico de unidades no curso deste trabalho. Neste sistema, temos $G = c = \hbar = k_B$, o que tem a vantagem de facilitar bastante os cálculos teóricos - donde seu emprego em aspectos teóricos da Relatividade Geral, Cosmologia e áreas correlatas. O preço a ser pago por esta simplificação é óbvio: não é um sistema de unidades próprio para aplicações práticas, pois estas precisam das unidades físicas convencionais (MKS ou CGS). Neste contexto, é pertinente uma descrição de como se passa de um sistema convencional de unidades (CGS ou MKS) para o sistema em questão, e vice-versa.

Qualquer grandeza física pode ser expressa em termos de comprimento (X), tempo (T) e massa (M), isto é, as dimensões têm a forma $X^\alpha T^\beta M^\gamma$, onde os expoentes α, β, γ dependerão da grandeza estudada em particular. Em unidades convencionais, a constante c tem dimensão X^1T^{-1}, enquanto G tem dimensão $X^3T^{-2}M^{-1}$, de sorte que G/c^2 tem dimensão X^1T^{-1}. Estas considerações serão úteis nas conversões a seguir.

Comecemos pelas medidas de comprimento. Estas são idênticas nos sistemas convencionais e no geométrico, sem necessidade de conversão.

Em segundo lugar, vêm as medidas de tempo. Se a luz leva 1 segundo para percorrer $2.9979245 \cdot 10^8 m$ no vácuo, basta multiplicar o tempo (em segundos) por $c = 2.9979245 \cdot 10^8 m/s$ (no MKS) ou no $c = 2.9979245 \cdot 10^{10} cm/s$ (no CGS), para se ter a medida do tempo em metros (ou centímetros), nas unidades geométricas. Inversamente, para converter o tempo em unidades geométricas para as convencionais, basta dividir por c.

Depois, vêm as medidas de velocidade (v). Todas as velocidades são comparadas à velocidade da luz no vácuo, c, e toma-se então a razão entre v e c, do que resultará um número entre 0 e 1. Assim, a velocidade é adimensional no sistema geométrico. A multiplicação do valor resultante desta operação por c leva-nos de volta ao sistema convencional.

Já para as massas, vimos que G/c^2 tem dimensão de X/M, de sorte que se M for multiplicada por G/c^2, terá dimensão de comprimento. Assim, a massa é medida em unidades de comprimento no sistema geométrico, sendo G/c^2 o fator de conversão do sistema convencional para o geométrico. Para exemplificar, uma massa como a do Sol, $M = 2 \cdot 10^{30} kg$ no MKS, vale $1.47 km$ no sistema geométrico. Para retornar ao sistema convencional, basta dividir o valor em unidades geométricas por G/c^2.

Desta forma, vemos que se uma grandeza tem dimensão $X^\alpha T^\beta M^\gamma$ em unidades convencionais, em unidades geométricas ela terá dimensão $X^{\alpha+\beta+\gamma}$, sendo $G^\gamma c^{\beta-2\gamma}$ o fator de conversão (de unidades convencionais para geométricas).

Assim, podemos converter todas as grandezas físicas conhecidas para unidades geométricas, utilizando os fatores de conversão apropriados. Para voltar às unidades convencionais, multiplica-se o valor em unidades geométricas pelo fator inverso. Temos, por exemplo, os fatores G/c^4 para a densidade de energia e para a pressão, G/c^4 para a própria energia, c^{-2} para a aceleração, G/c^4 para a força, G/c^3 para o momento angular (e também para o momento linear), $\sqrt{G/c^4}$ para a carga elétrica, e assim sucessivamente. Tabelas de conversão bem detalhadas estão em [40] e [41].

Referências Bibliográficas

[1] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).

[2] A. Riess et al., Astrophys. J. **116**, 1009 (1998).

[3] C. Molina, D. Giugno, E. Abdalla, A. Saa, Phys. Rev. D **69**, 104013 (2004).

[4] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **64**, 084017 (2001).

[5] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, Class. Quantum Grav. **18**, 5257 (2001).

[6] B. Wang, C. Lin and E. Abdalla, Phys. Lett. B, **481**, 79 (2000).

[7] B. Wang, C. Molina and E. Abdalla, Phys. Rev. D **63**, 084001 (2001).

[8] Horowicz, G. T. & Hubeny, V. E., Phys. Rev. D, **62**, 024027 (2000).

[9] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, Living Rev. Relativity **2**, 2 (1999).

[10] N. K. Glendenning, *Compact Stars - Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*, Second Edition, AA Library, Springer, 2000.

[11] Haensel, P., *Final Stages of Stellar Evolution*, EAS Publications Series, **7**, 249-282 (2003).

[12] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in Fortran* (Cambridge University Press, 1992).

[13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, 1972).

[14] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Edusp, 1997).

[15] F. Weber, *Strange Quark Matter and Compact Stars*, astro-ph/0407155.

[16] F. Weber, A. Torres i Cuadrat, A. Ho and P. Rosenfield, astro-ph/0602047.

[17] F. Mellor and I. Moss, Phys. Rev. D **67**, 403 (1990).

[18] S. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. D **35**, 3621 (1987).

[19] C. Bender and S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (Springer-Verlag, New York, 1999).

[20] E. Farhi and R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **30**, 2379 (1984).

[21] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **67**, 084020 (2003), gr-qc/0301078.

[22] C. Molina, Phys. Rev. D **68**, 064007 (2003), gr-qc/0304053.

[23] G. Poschl and E. Teller, Z. Phys. **83**, 143 (1933).

[24] V. Ferrari and B. Mashhoon, Phys. Rev. D **30**, 295 (1984).

[25] R. H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972) and Phys. Rev. D **5**, 2439 (1972).

[26] J. Bicak, Gen. Relativ. Grav. **3**, 331 (1972).

[27] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. Krivan and P. Laguna, Phys. Rev. D **55**, 7538 (1997).

[28] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. G. Laarakkers and E. Poisson, Phys. Rev. D **60**, 064003 (1999).

[29] Ruffini, R., Tiomno, J. and J. Vishveshwara, Lettere al Nuovo Cimento, v. 3, n. 5, 211-215 (1972).

[30] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky,*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, Ed. John Wiley and Sons, 1983.

[31] O. Benhar, astro-ph/0507497.

[32] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkov, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

[33] Harrison, B. K., Thorn, K. S., Wakano, M. and Wheeler, J. A., *Gravitational Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press, Chicago (1965).

[34] Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., *Relativistic Astrophysics*, Vol. 1 - University of Chicago Press, Chicago (1971).

[35] Lasota, J.-P., Haensel, P. and Abramowicz, M. A., Astrophys. J., **456**, 300 (1996).

[36] Koranda, S. Stergioulas, N. and Friedman, J. L. Astrophys. J., **488**, 799 (1997).

[37] Witten, E., Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).

[38] Alcock, C., Farhi, E. & Olinto, A., Ap. J., **310**, 261-272 (1986).

[39] Gourgoulhon, E., Haensel, P., Livine, R., Paluch, E., Bonazzola, S. and Marck, J.-A., A&A, **349**, 851 (1999).

[40] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., *Gravitation*, (W. H. Freeman and Company, 1973).

[41] Wald, R. M., *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).

[42] Fehlberg, E., Z. Angew. Math. Mech. **44**, T17-T29 (1964); Z. Angew. Math. Mech. **46**, 1-16 (1966); Computing **4**, 93-106 (1969); Computing **6**, 61-71 (1970).

[43] Cash, J. R. and Karp, A. H., *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 16, pp. 201-222.

[44] Thorsett, S. E. & Chakrabarty, D., Ap. J. **512**, 288 (1999).

[45] Burgay, M., D'Amico, N., Possenti, A. et al., Nature, **426**, 531 (2003).

[46] Nice, D. J., Splaver, E. M., Stairs, I. M., astro-ph/0411207 (2004).

[47] Quaintrell, H., Norton, A., Ash, T. D. C. et al., MNRAS, **345**, 1077 (2003).

[48] Clark, J. S., Goodwin, S. P., Crowther, P. A. et al., A&A, **392**, 909 (2002).

[49] Shahbaz, T., Casares, J., Watson, C. et al., astro-ph/0409752 (2004).

[50] Ouyed, R.& Butler, M., ApJ **522**, 453 (1999).

[51] Chandrasekhar, S. and Ferrari, V., *On The Non-Radial Oscillations of a Star*, Proc. R. Soc. Lond. A (1991) **432**, 247-279.

[52] Nollert, H.-P., Class. Quantum Grav. **16** (1999), R159-R216.

[53] van Kerkwijk, M. H., astro-ph/0403489 (2004).

[54] Heinke, C. O., Grindlay, J. E., Lloyd, D. A. & Edmonds, P. D., ApJ, **588**, 452 (2003).

[55] Zhang, Y. & Su, R.-K., Phys. Rev. C, **67**, 015202 (2003).