



## CONHECIMENTOS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO SOBRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dilvana Maria Melo da Silva

Professora da Secretaria Executiva de Educação do Pará

[dilvanamelo@yahoo.com.br](mailto:dilvanamelo@yahoo.com.br)

Mario Oliveira Thomaz Neto

Universidade do Estado do Pará

[mthomazneto@uol.com.br](mailto:mthomazneto@uol.com.br)

### RESUMO

Este estudo apresenta os resultados de uma pesquisa realizada com 37 alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública no Pará, tendo como objetivo verificar quais os conhecimentos destes quanto às definições, às relações e aos problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Os dados foram coletados por meio de um teste escrito. Os resultados, dentre outros, apontam que os alunos não conseguem identificar corretamente, os elementos (lados e ângulos) do triângulo retângulo e, por conseqüência, as definições das razões trigonométricas. Quanto às relações trigonométricas, os alunos não estabeleceram corretamente as relações entre os elementos, pois escreveram as razões trocando termos ou utilizando termos desconhecidos.

**Palavras-chave:** Ensino de Trigonometria; Razões Trigonométricas; Resolução de Problemas.

### Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) relatam que a Matemática, além de ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, deve também, desempenhar um papel instrumental, por ser uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

O estudo da Trigonometria no ensino médio, como qualquer outro ramo da Matemática, consegue adquirir caráter significativo, quando nos possibilita desenvolver habilidades consideradas significativas no que diz respeito à

leitura e à interpretação de fatos reais que envolvem não somente os conhecimentos matemáticos, mas as demais atividades da vida do aluno.

A Trigonometria segundo Ledur, Enriconi e Seibert (2001, p.9), surgiu com a necessidade de resolver problemas relativos à Astronomia, à Navegação, à Cartografia e à Topografia e tem como um dos seus principais objetivos “estudar as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo”. Vem sendo ao longo de sua história objeto de estudo, por ter alcançado um grau significativo de importância, não apenas no ensino específico da Matemática, mas em todo o contexto social no qual estes conhecimentos podem ser utilizados. Dentre os estudos que abordam a Trigonometria, citamos os realizados por Nacarato, Bredariol e Passos (2001); Sobrinho, Lima, Thomaz Neto (2004); Brighenti (1998) e Manrique e Bianchini (2005).

Nacarato, Bredariol e Passos (2001) realizaram uma pesquisa bibliográfica e documental, a fim de analisar ao longo do século XX, a transposição didática do conhecimento matemático da Trigonometria para as propostas curriculares e os livros didáticos e a relação com seu desenvolvimento histórico. Para isto, selecionaram 18 livros didáticos de diferentes décadas para distinguir as tendências pedagógicas e as concepções do ensino da Matemática em cada momento histórico. Com esse estudo foi possível constatar que até os anos 80, havia sintonia entre os programas curriculares e os livros didáticos, que eram indicados pelos programas. Após este período, as propostas curriculares passaram a apresentar o conteúdo de Trigonometria como resolução de problemas, onde os conceitos trigonométricos são utilizados.

Sobrinho, Lima, Thomaz Neto (2004) realizaram um estudo sobre o desempenho de alunos na resolução de problemas verbais<sup>1</sup> e não-verbais em trigonometria. O instrumento utilizado para a coleta de dados foi um teste escrito contendo seis problemas que focalizavam o conteúdo matemático razões trigonométricas no triângulo retângulo, sendo três com estrutura verbal e três com estrutura não-verbal. O objetivo desse estudo foi o de comparar o desempenho dos alunos por estrutura dos problemas verbal e não-verbal, além

---

<sup>1</sup> São situações-problema que apresentam um predomínio de termos e expressões da língua materna e que se encontram ou não inseridas em contextos reais.

de investigar os erros presentes em suas tentativas de resoluções dos quesitos propostos. Os resultados apontam que os alunos apresentam desempenho melhor nos problemas não-verbal, além da existência de erros aqui denominados como erro na representação geométrica, erro na razão trigonométrica e erro de cálculo. Os resultados encontrados possibilitam uma visão do ponto de vista cognitivo das dificuldades encontradas por alunos em suas tentativas de resoluções dos problemas aqui focalizados.

Brighenti (1998) em um estudo realizado com três professoras de Matemática do Ensino Médio, elaborou uma seqüência de atividades envolvendo a representação geométrica em Trigonometria, baseada na teoria da aprendizagem significativa elaborada por David Ausubel, a fim de verificar a viabilidade da utilização de uma proposta metodológica que proporcionasse aos alunos momentos de descontração e prazer, durante a construção dos conceitos trigonométricos, diferentemente das propostas sugeridas nos livros didáticos. De acordo com o relato dos professores envolvidos no estudo, a realização de atividades que permitem o manuseio de material concreto, torna mais fácil a compreensão de conceitos trigonométricos. De acordo com a autora a construção de cada situação a partir da visualização no ciclo trigonométrico, leva os alunos a comentarem e refletirem, sobre as definições trigonométricas que serão de suma importância para a seqüência de conhecimentos posteriores.

Manrique e Bianchini (2005) em um estudo realizado com 42 professores que ministram aulas de Matemática em escolas públicas e particulares, no ensino médio, utilizaram a técnica conhecida como mapas conceituais, com o objetivo de proporcionar uma reflexão pessoal sobre os seus conhecimentos em Trigonometria e suas práticas profissionais. De acordo com este estudo, os professores tiveram a oportunidade de analisarem, em grupos, as suas necessidades e anseios em sala de aula, tanto no que se refere aos conteúdos matemáticos quanto aos aspectos cognitivos e afetivos, sensibilizando-os a refletirem sobre a importância da valorização e verificação dos conhecimentos prévios dos alunos, bem como na modificação de suas posturas com relação aos erros apresentados por esses. A técnica utilizada pelos autores teve como intuito promover a ruptura de cláusulas que implicam no ato educativo, bem

como estabelecer um melhor entendimento entre os indivíduos atuantes no processo educacional.

Na busca pela compreensão da capacidade do entendimento dos alunos do ensino médio, no que se refere à aquisição dos conhecimentos matemáticos, foi proposto por nós um estudo a respeito das razões trigonométricas, buscando responder ao questionamento:

*Qual o desempenho dos alunos do ensino médio da escola pública no que diz respeito às definições, às relações e aos problemas verbais em Trigonometria?*

Ao promover este estudo no campo do conhecimento matemático utilizando como objeto de investigação a questão proposta, procuramos avaliar não apenas o rendimento cognitivo dos alunos em relação a alguns conhecimentos em trigonometria, mas também proporcionar aos professores uma reflexão sobre sua postura em relação a tomada de decisões frente a este saber.

## **Metodologia**

Os sujeitos envolvidos no estudo são alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública no interior do Pará, onde 57 % estão na faixa etária entre 15 a 17 anos; 32% entre 18 a 20 anos e 11% com mais de 20 anos. Destes, 43% são alunos do sexo masculino e que 57%, são do sexo feminino.

Para a coleta de dados foi utilizado um *teste escrito*, composto de duas partes: A Primeira, consiste na identificação do aluno (escola, nome, sexo, idade e série). Na segunda, propomos cinco questões que se referem às *Definições, às Relações e aos Problemas*, que envolvem as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

No teste propomos, as questões 1 e 2 que se referem as definições, sendo a questão 1, relacionada aos lados do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e a questão 2, às razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante); as questões 3 e 4 abordam as relações trigonométricas, a partir de figuras apresentadas no teste escrito e a questão 5 apresenta três problemas que foram denominados por 5a , 5b e 5c.

A aplicação do teste escrito ocorreu durante os horários destinados as aulas de Matemática, após conversa prévia com os professores das turmas e com os alunos. Durante a resolução dos problemas não foi utilizada a tabela das razões trigonométricas, pois os mesmos já traziam na sua composição a razão

a ser utilizada com sua referida medida. Os alunos durante a resolução das questões fizeram algumas indagações para esclarecimento de algum item que lhes parecia obscuro como foi o caso de *plano horizontal* (questão 5, problema 5c). Quanto às questões referentes às Definições (questões 1 e 2) e referentes às Relações (questões 3 e 4), os alunos fizeram indagações como *qual o lado oposto do ângulo, como se encontra o seno, a secante é o inverso de quem?* Mas que não foram respondidas, pois iriam influenciar no desempenho do teste.

### **Resultados da Investigação**

A seguir apresentamos o desempenho dos alunos nas questões que envolvem as definições, as relações e os problemas relacionados às razões trigonométricas.

#### **Quanto às Definições**

Foram perguntadas duas questões quanto às definições. A primeira para nomear os elementos do triângulo retângulo, onde constatamos que os alunos investigados apresentaram um desempenho de 85% de acertos, enquanto que 15% não conseguiram responder corretamente a questão proposta. A seguir evidenciamos os erros dos alunos e seus respectivos percentuais:

- 18,5% para a *identificação do cateto oposto ao ângulo  $\alpha$* . Alguns exemplos de erros foram considerarem este cateto como: “a hipotenusa” e “o ângulo  $\alpha$ ”;
- 25,9% para a *identificação da hipotenusa*. Alguns exemplos de erros foram a identificarem como: “um cateto” e “o ângulo  $\alpha$ ”;
- 25,9% para a *identificação do cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$* . Alguns exemplos de erros foram identificarem esse cateto como: “hipotenusa” e “ângulo”;
- 11,2% para a *identificação do cateto adjacente ao ângulo  $\beta$* . Alguns exemplos de erros foram o considerarem como: “cateto oposto a esse ângulo” e “hipotenusa”;
- 18,5% para a *identificação do cateto oposto ao ângulo  $\beta$* . Alguns exemplos de erros foram considerarem esse cateto como: “adjacente ao ângulo  $\beta$ ” e “hipotenusa”.

A segunda questão diz respeito às definições das razões trigonométricas. Nesta questão foi observado que 76,1% correspondem aos alunos que relacionaram corretamente as razões com suas definições, 21,6% aos que relacionaram incorretamente e 2,2% aos que deixaram em branco.

No que se refere às respostas incorretas, vamos encontrar as seguintes relações:

- 12,5% relacionaram a razão Seno como a definição de: “Secante”, “Cotangente”, “Cosseno”, “Cossecante” e “Tangente”;
- 18,6% relacionaram a razão Cosseno como: “Seno”, “Tangente” e “Secante”;
- 14,9% relacionaram a razão Tangente como: “Cosseno”, “Cotangente”, “Secante” e “Seno”;
- 10,4% relacionaram a definição da razão Cotangente como: “Cossecante”, “Cosseno”, “Secante”, “Seno” e “Tangente”;
- 25% relacionaram a razão Secante com: “Cossecante”, “Cosseno” e “Tangente”;
- 18,6% relacionaram a razão Cotangente como: “Secante”, “Tangente”, “Cosseno” e “Seno”.

### **Quanto às Relações**

Foram perguntadas duas questões quanto às relações. A primeira em que foi apresentado um triângulo retângulo, onde os alunos deveriam destacar as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante). Para esta questão temos 63,6% para as respostas corretas, 32,8% para as incorretas e 3,6% para as em branco.

No que se refere aos erros apresentados pelos alunos nos registros escritos, foi possível constatar que:

- 15,2% escreveram a razão Seno como: “cateto oposto sobre cateto adjacente”, “cateto adjacente sobre cateto oposto”, “hipotenusa sobre cateto adjacente”, “cateto adjacente sobre a hipotenusa” e “hipotenusa sobre cateto oposto”;

- 16,7% escreveram a razão Cosseno como “cateto oposto sobre a hipotenusa”, “cateto adjacente sobre cateto oposto”, “hipotenusa sobre cateto adjacente” e os que utilizaram o ângulo em estudo ou um termo desconhecido;
- 9,7% escreveram a razão Tangente como sendo: “hipotenusa sobre cateto adjacente”, “hipotenusa sobre cateto oposto”, “cateto adjacente sobre cateto oposto”, “cateto oposto sobre a hipotenusa” e os que utilizaram um termo que não pertence ao triângulo;
- 16,7% escreveram a razão Cotangente como: “cateto oposto sobre cateto adjacente”, “hipotenusa sobre cateto oposto”, “cateto oposto sobre a hipotenusa”, “cateto adjacente sobre a hipotenusa” e os que utilizaram um termo desconhecido;
- 22,2% escreveram a razão Secante como: “hipotenusa sobre cateto oposto”, “cateto oposto sobre cateto adjacente” e o que utilizou um termo desconhecido;
- 19,5% escreveram a razão Cossecante como: “hipotenusa sobre cateto adjacente”, “cateto adjacente sobre a hipotenusa”, “cateto oposto sobre cateto adjacente” e os que utilizaram um termo que não pertence ao triângulo;

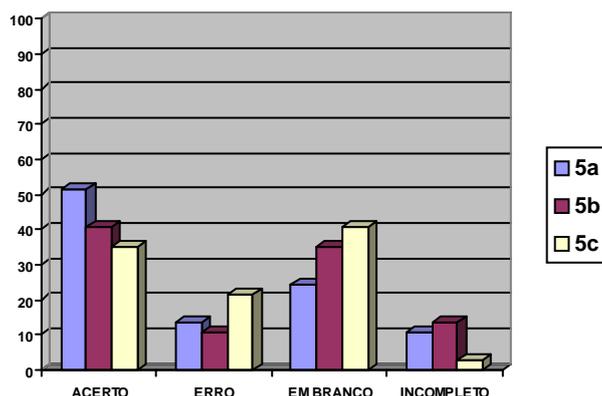
Na segunda questão referente às Relações, foi apresentado aos alunos um triângulo retângulo com dois ângulos em foco. Os alunos deveriam escrever as relações relativas a esses ângulos. Nesta questão, constatamos que 67,7% dos alunos investigados conseguiram escrever corretamente as relações apresentadas, 25,9% escreveram as relações apresentando erros e 6,3% deixaram algumas das respostas em branco.

Ao analisarmos as respostas incorretas emitidas, podemos constatar que 34,8% dos alunos cometeram erro parcial ao escreverem a relação em foco, ou seja, escreveram corretamente ao referir-se a um ângulo, porém incorretamente ao referir-se ao outro ângulo. Já 65,2% cometeram erro total, pois erraram a relação ao escrevê-la para os dois ângulos. Esses acertos e erros verificados com relação a mesma razão trigonométrica, leva-nos a perceber que esses alunos ainda não conseguiram associar a definição com a sua respectiva razão.

### Quanto ao desempenho na resolução dos problemas verbais

O gráfico 1, apresenta o desempenho dos alunos na resolução dos três problemas verbais propostos. As produções escritas dos alunos nos possibilitaram analisar os acertos, os erros, as respostas em branco e as respostas incompletas.

Gráfico 1 – Desempenho dos alunos por Problema



Constatamos que os alunos investigados apresentaram índice de acerto de 51,4% no problema 5a, de 40,5% no problema 5b e de 35,1% no problema 5c. Os percentuais de erros identificados correspondem a 13,5% no problema 5a; 10,8% no problema 5b e 21,6% no problema 5c. Ao analisarmos as produções escritas dos alunos investigados quanto aos problemas verbais propostos, os resultados demonstram que o problema 5a, que traz na sua composição a representação geométrica, teve maior índice de acerto que os demais problemas. Nos demais problemas (5b e 5c) os alunos teriam que construir a representação geométrica associando-a ao modelo matemático subjacente ao contexto real; nestes problemas, o índice de acerto foi menor. O fato dos alunos terem que construir a representação geométrica a partir das idéias matemáticas subjacentes, pode ter contribuído para que estes tivessem um desempenho menor quanto aos acertos em relação ao problema 5a. Tal fato aponta para a necessidade de estudos posteriores onde se possa comparar o desempenho de alunos na resolução de problemas que apresentem representação figural das idéias com aqueles que não a representam.

As respostas em branco tiveram índices relevantes em todos os problemas. No problema 5a, esse índice foi de 24,3%, no problema 5b, foi de 35,1% e no problema 5c, foi de 40,5%. Diante de tal ocorrência, podemos considerar que

ao deixar os problemas em branco, tais alunos, mesmo respondendo as questões anteriores (questões 1, 2, 3 e 4), não conseguiram colocar em prática tais conhecimentos quando foram solicitados para solucionar os problemas verbais. Este fato pode estar associado ao não entendimento dos aspectos semânticos e sintáticos presentes no contexto verbal do problema, como descrito por Thomaz Neto (2002, 2003). Assim, podemos evidenciar que esses alunos ainda não conseguiram eliminar a dificuldade em associar os conceitos de elementos matemáticos com a prática, como é o caso de resolver problemas verbais com contexto real.

O percentual referente às respostas incompletas é de 10,8% para o problema 5a; de 13,5% para problema 5b e de 2,7% para o problema 5c. Embora estes percentuais possam não ser tão significativos, eles na verdade expressam a necessidade de outros estudos nessa direção, onde se possa estar entrevistando os alunos para saber os porquês das respostas incompletas. Conforme podemos perceber nas produções escritas, estes alunos conseguem utilizar elementos presentes nos contextos verbais dos problemas, para escrever a estrutura matemática correspondente aos mesmos. Entretanto, não conseguem absorver estas informações para encontrar uma resposta para a pergunta do problema, caracterizando assim, suas respostas como incompletas.

A leitura do gráfico 1 nos possibilitou identificar o desempenho dos alunos na resolução dos problemas verbais propostos. À guisa de conclusão parcial podemos verificar, entre outros aspectos que: 1 – Os alunos demonstraram maior dificuldade em resolver os problemas 5b e 5c, que não apresentaram na sua composição a representação geométrica; 2 – Os percentuais de respostas em branco para todos os problemas foram maiores que os percentuais de erros e respostas incompletas; 3 – O problema 5b apresentou maior percentual para as respostas consideradas incompletas do que os problemas 5a e 5c e, 4 – O problema 5c foi onde os alunos apresentaram o menor índice de desempenho.

## **Conclusões**

O estudo nos oportunizou identificar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos no que se refere aos conhecimentos sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Os erros quanto às definições das razões trigonométricas, podem ter sido em função das dificuldades em identificar o que seja cateto oposto ou cateto adjacente no triângulo retângulo, assim como em confundir a hipotenusa com um cateto e vice-versa. Vale ressaltar que vários alunos identificaram o ângulo em foco como hipotenusa ou cateto.

Os erros referentes às relações trigonométricas no triângulo retângulo estão diretamente ligados às dificuldades que os alunos apresentaram quanto às definições destas. Após as análises realizadas, isso fica evidente, uma vez que os alunos que não identificaram corretamente os elementos do triângulo não conseguiram escrever as relações trigonométricas de modo correto.

Os alunos apresentaram maior percentual de acerto na resolução do problema 5a (51,4%) em comparação com os problemas 5b (40,5%) e 5c (35,1%). Vale ressaltar que este problema trazia na sua composição a representação geométrica referente ao contexto verbal, o que não ocorreu nos outros problemas. Essa dificuldade em resolver problema sem a representação geométrica é um agravante que deve ser repensado pelos professores em suas proposições para sala de aula. Sugerimos que ao abordarem os problemas, devem também fazê-lo não utilizando a representação geométrica correspondente ao contexto verbal do problema.

## **Referências**

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais. *Ensino Médio: ciências da natureza e suas tecnologias*. Brasília, DF, 1999.

BRINGUENTI, Maria José L. Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio: a representação de algumas professoras. *Zetetiké*, v. 8, n. 13/14, p. 51-79, 2000.

LEDUR, B. S.; ENRICONI, M. H. S.; SEIBERT, T. E. *Trigonometria: por meio de construção de conceitos*. São Leopoldo, RS: UNISINOS, 2001.

MANRIQUE, Ana Lúcia; BIANCHINI, Bárbara Lutaif. Percepções de professores de matemática sobre trigonometria no projeto pró-ciências. In: *V Congresso ibero-americano de educação matemática*. Porto, 2005. 1CD-ROM.

NACARATO, Adair Mendes; BREDARIOL, Claudia Cristiane; PASSOS, Miriam Paula Franco. *Trigonometria: uma análise de sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares*. In: *V Congresso ibero-americano de educação matemática*. Porto, 2005. 1CD-ROM.

SOBRINHO, Ed'Elmano Gomes Martins; LIMA, Jairo Pereira; THOMAZ NETO, Mario Oliveira. Desempenho de alunos do ensino médio na resolução de problemas verbais e não-verbais em trigonometria. In: *VII Congresso norte/nordeste de educação em ciências e matemáticas*. Belém: UFPA/NPADC/CEJUP, 2004, p. 225-233.

THOMAZ NETO, Mario Oliveira; MEDEIROS, Cleide Farias de. Análise Interpretativa das Produções Escritas e Oraís de Estudantes do Ensino Fundamental na Resolução de Problema Matemático Verbal. In: *III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos, 2003. 1CD-ROM.