

## RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UMA EXPERIÊNCIA DIFERENTE

Márcia Loureiro da Cunha  
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS  
[marcialoureiro77@hotmail.com](mailto:marcialoureiro77@hotmail.com)

**Resumo:** Este trabalho consiste no relato de uma experiência sobre o ensino e a aplicação prática das razões trigonométricas no triângulo retângulo realizado com os alunos de uma turma de sétima série, do Ensino Fundamental, de uma escola da rede estadual de ensino, no município de Canoas, Rio Grande do Sul. Propôs-se aos alunos a tarefa de calcular a medida da altura de alguns elementos presentes no terreno da escola, de acordo com seus interesses, a partir das medidas de ângulos e distâncias por eles obtidas, durante uma pesquisa de campo. Nessa proposta de trabalho, além dos instrumentos de medição de ângulos e distâncias, teodolito e trena (ou metro), utilizados na etapa de pesquisa e coleta de dados, foi adotado como recurso didático digital o software GeoGebra, programa de geometria dinâmica, para implementação e modelagem das situações abordadas. Ao final dessa experiência, pode-se observar pela reação dos alunos, a importância de um tratamento diferenciado dado aos conteúdos matemáticos, dentro e fora da sala de aula e o quanto esse tipo de metodologia pode contribuir para o processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Experimentação; Sala de aula; Software no ensino.

### A Experiência

A escolha pelo assunto Razões Trigonômicas no Triângulo Retângulo para esse tipo de abordagem de trabalho se deu por experiência vivenciada ao lecionar tal conteúdo de maneira tradicional, via aulas expositivas, exercícios de fixação, de aprendizagem e de aplicação e, no entanto, constatar que ao final do processo de aprendizagem, a compreensão não havia sido atingida pela maioria dos estudantes.

A aprendizagem, em especial na Matemática, não se dá através da utilização mecânica de fórmulas prontas. “O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.” (Ponte, 2009, 23)

Através da participação do aluno em atividades práticas que envolvam momentos de pesquisa de campo, coleta de dados, construção de instrumentos de medição, discussão em grupo e implementação e modelagem auxiliadas por recurso didático digital proporciona-se o envolvimento do aluno na sua aprendizagem.

Se tratarmos a Geometria

“... como um processo de interiorização e apreensão intelectual de experiências espaciais, o aprendizado passa por um domínio das bases de construção deste ramo do conhecimento, e aqui a abstração desempenha papel fundamental.”

(1996, Gravina, 26)

Foi na tentativa de se atingir a compreensão e a aprendizagem significativa do conteúdo que se norteou a atividade aqui descrita. Conforme Ausubel, a aprendizagem significativa ocorre quando o indivíduo se apropria do conhecimento segundo sua própria orientação no processo, através da aquisição de novas informações que estão diretamente relacionadas com seus conhecimentos prévios. Estes foram os objetivos ao se proporem aos alunos as atividades de pesquisa de campo, aplicações para conteúdos que ainda não foram trabalhados, incluindo experiências e conhecimentos que eles possuíam anteriormente.

O software GeoGebra foi adotado por ser considerado um software livre, mundialmente utilizado e reconhecido que, além de permitir a utilização e cópia (sem fins comerciais) e estar disponível para os sistemas Windows e Linux, possibilita a abordagem de diversos conteúdos de Ensino Fundamental e Médio, através da construção e visualização de figuras e objetos de forma interativa e dinâmica, auxiliando o professor como um recurso didático valioso no processo de ensino da Matemática. ([HTTP://www.geogebra.org/cms](http://www.geogebra.org/cms))

O conteúdo de Geometria, em geral, no Ensino Fundamental, recebe abordagem no final do ano letivo, devido à organização do programa de muitas escolas. Esse fato acarreta um aspecto negativo relevante que é a falta de tempo alegada pelos professores para tratar tal assunto com a importância devida.

As Razões trigonométricas no triângulo retângulo são previstas para serem trabalhadas no final da oitava série, como na escola referida há pelo menos dois anos, os alunos têm ingressado no Ensino Médio sem aprender tais conteúdos, pela razão especificada, eles foram abordados na série em questão, mesmo que esses alunos tivessem ainda poucas noções de Geometria.

Usualmente esse conteúdo é desenvolvido a partir do estudo do triângulo retângulo, seus elementos, suas propriedades, soma dos ângulos internos de um triângulo e apresentação das razões trigonométricas, utilizando como recursos didáticos apenas aulas expositivas e resolução de exercícios que exigem apenas o cálculo direto de tais razões.

Esse é o mesmo tratamento dado ao assunto em livros didáticos de oitava série, o que se percebe, se forem comparados os livros mais antigos para os mais recentemente publicados, e

fornecidos pelo Ministério da Educação, é a inserção de muitas figuras e problemas forçadamente modelados, que tentam dar uma nova aparência à mesma forma de trabalhar convencionalmente os mesmos conteúdos, tornando os livros menos compreensíveis em virtude da despreocupação com os formalismos e excessiva intenção de mostrar a aplicabilidade de conteúdos, muitas vezes estranha, aos olhos dos professores e até mesmo dos alunos. (Name, 1996; Andrini, 2006)

Essa não é uma maneira eficiente de trabalhar um conteúdo, mas como anteriormente foi descrito, os alunos têm sofrido com a deficiência no ensino de Geometria, sobretudo em virtude dessa organização curricular e pode-se considerar também, a falta de preocupação de alguns professores, ou até mesmo o seu despreparo por não se valerem de metodologias alternativas para suprir essa defasagem.

Quando se inicia com o estudo de Geometria as dificuldades que os alunos apresentam são inúmeras, visto que, pouco ou nada sabem sobre o assunto. Foram feitos alguns questionamentos aos alunos do Ensino Médio, que “revisaram” esse conteúdo na introdução da Trigonometria, considerando o estudo de triângulos e as suas razões trigonométricas. Foi possível enumerar as colocações pertinentes que eles explicitaram a seguir:

- Sabem identificar triângulos, mas não sabem classificá-los quanto a seus lados;
- Não sabem classificar quanto a seus ângulos;
- Não sabem quanto é a soma dos ângulos internos de um triângulo;
- Questionam em que usariam essas razões na vida prática;
- Quando apresentado um problema de cálculo de altura ou distância eles já dizem que “nunca” (palavra deles) teriam como obter as informações dadas no exercício para fazer o cálculo, isso deixa claro o distanciamento entre o que viram em sala de aula e a prática;
- “Nunca sei qual fórmula devo utilizar, depois de saber, fica fácil”, demonstrando que dominam a parte aritmética, porém, isso nada significa para eles.

## **Objetivos**

O objetivo maior dessa experiência foi fazer com que ao final desta atividade o aluno soubesse quais razões deve aplicar em casos diversos, mas principalmente que ele tivesse a

compreensão de como as razões trigonométricas podem ser utilizadas e não apenas calculadas nos exercícios de aplicação.

## **Estratégias**

Na primeira aula os alunos, divididos em grupos de quatro pessoas, construíram os teodolitos e foram para a pesquisa no pátio da escola sobre elementos que eles queriam calcular a altura. Cada grupo possuía, além do teodolito, um metro para medir as distâncias que considerassem relevantes para a construção do triângulo retângulo que ilustraria a situação escolhida e fizeram suas anotações.

Na segunda aula, os grupos de alunos, subdivididos em duplas, construíram no GeoGebra o triângulo correspondente ao problema escolhido pelo grupo utilizando os elementos que acharam necessários para isso.

Depois que todos os grupos concluíram a modelagem do problema e o solucionaram, foram propostos outros tipos de aplicações das Razões trigonométricas no triângulo retângulo, para serem resolvidas no GeoGebra.

## **Pré-Requisitos**

Para a realização das atividades descritas era necessário que o aluno possuísse um conhecimento mínimo sobre triângulos, seus elementos, classificação, propriedades e sobre ângulos. Uma pesquisa prévia sobre esses pontos foi solicitada aos alunos, pois eles ainda não haviam trabalhado tal conteúdo.

As razões trigonométricas no triângulo retângulo foram apresentadas em sala de aula para fins de introdução, mas trabalhadas e visualizadas em aula de laboratório com o auxílio do GeoGebra.

Como a atividade foi desencadeada pela situação-problema de cálculo de alturas, inicialmente, os alunos utilizaram as próprias anotações e considerações que levaram para implementação e modelagem no software. Depois de solucionado o problema escolhido por cada dupla, foram apresentadas outras situações, através de discussões em grupo, em que eles

necessitariam utilizar outras razões trigonométricas para resolver, além de outras modelagens no programa.

### **Descrição e Análise da Prática**

Na semana anterior ao desenvolvimento da prática, foi solicitada aos alunos uma breve pesquisa sobre triângulos, seus elementos, classificação, propriedades e sobre ângulos. Estes tópicos foram comentados em sala de aula, visto que, este era o primeiro contato que eles tinham com o conteúdo de triângulos, atendo-se mais especificamente, ao estudo do triângulo retângulo, seus elementos e ângulos.

As razões trigonométricas foram apresentadas aos alunos de forma tradicional, em aula expositiva. Elas foram definidas para cada um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, a fim de que os alunos tivessem esse conhecimento para, posteriormente, aplicá-lo em uma situação prática.

Na primeira aula, os dezessete alunos, reunidos em grupos de três e quatro pessoas, construíram seus teodolitos e foram para o pátio da escola escolher um elemento que quisessem para calcular a altura e realizar as medições e anotações necessárias. A orientação dada aos alunos era de que imaginassem ou fizessem um esboço da situação que pesquisaram no pátio, para visualizar como poderiam representá-la através de um triângulo retângulo e quais os dados precisariam coletar sobre esse “triângulo”.

Nesta fase de pesquisa de campo, os alunos mostraram-se entusiasmados e envolvidos com a atividade, os grupos fizeram suas escolhas, realizaram as medições, fotografaram os colegas e discutiram sobre que informações precisariam coletar para a realização da atividade posterior, certificando-se de que não faltariam dados para a continuidade do trabalho.

A situação-problema escolhida por cada grupo foi calcular: a altura de uma árvore, a altura de um poste de luz, a altura de uma parede, a altura de uma antena sobre o telhado do prédio da escola.

De volta à sala de aula, cada aluno fez suas anotações sobre a situação escolhida para calcular a altura com um esboço do triângulo retângulo que a ilustrava.

Na segunda aula, já no Laboratório de Informática, os alunos, reunidos em duplas e trios, receberam uma folha contendo as definições de cada razão trigonométrica, campos para preencherem sobre a situação que teriam que representar no GeoGebra e mais dois problemas para serem resolvidos, escolhidos previamente por eles, em aula anterior.

Para a modelagem no software, os alunos tiveram total liberdade na escolha das funções para a construção, e por isso, as primeiras apresentaram falhas, não respeitando o ângulo de  $90^\circ$  e o ângulo que deveriam utilizar, de acordo com o problema de cada grupo. Neste momento, foi necessário intervir questionando-os sobre “o que faz de um triângulo ser retângulo?”, “porque ele recebe essa denominação?” e o grupo começou a se dar conta de que não tinha utilizado um ângulo reto e passaram a questionar como fariam isso, até que alguns se lembraram das retas perpendiculares e todos testaram novas construções.

Após a utilização de retas perpendiculares, o problema foi para construir o ângulo de amplitude fixa, então uma dupla descobriu como, utilizando a função “ângulo com amplitude fixa” e indicou para os colegas, como fazer, o que não foi simples, pois tentavam marcar os ângulos sem cuidar se era em sentido horário ou anti-horário, mas depois de diversas tentativas, a maioria atingiu o objetivo.

Essa etapa de implementação do modelo matemático representativo da situação-problema ocupou 3 horas/aula. Os alunos não estão acostumados a trabalhar sem orientações detalhadas sobre o que deve ser feito, logo foi necessária essa adaptação e mudança de postura durante a atividade, o que acarretou num dispêndio maior de tempo do que havia sido previsto. Nem todos gostaram dessa fase, pois se sentiram desamparados sem receber as explicações específicas da atividade, porém foi muito produtiva, pois foi possível deixar que cada um construísse seu raciocínio sem a intervenção, muitas vezes podadora, mesmo que não intencional, do professor.

Escolher uma das razões trigonométricas para resolver o problema, não foi difícil, todos chegaram à conclusão de que poderiam utilizar a tangente, para o cálculo das alturas, conhecendo-se a distância até o objeto e o ângulo formado do topo do objeto com a horizontal. As dúvidas surgiram na hora de efetuar os cálculos. Foram fornecidos os valores das tangentes dos ângulos que estavam trabalhando, no entanto, eles montaram as relações e não desenvolveram os cálculos sozinhos. Os alunos conseguiram justificar a escolha pelo uso da

tangente, mas para finalizar o problema foi preciso dar-lhes as orientações para a resolução da equação.

### **Conclusões e Reflexões sobre a Experiência**

Este trabalho tratou do ensino de Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, voltado para o aluno de sétima série, do Ensino Fundamental e usou como recursos didáticos a pesquisa de campo, investigação e coleta de dados, problema de aplicação, modelagem matemática e o software GeoGebra.

Com a intenção de contribuir para a melhoria do cenário do ensino e da aprendizagem do conteúdo abordado, foi elaborado um plano de ensino, cujo objetivo principal foi o de possibilitar ao aluno a compreensão e aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo em situações práticas, ampliando a conotação dada usualmente a esse tópico, que se restringe a cálculos em exercícios de fixação.

Uma das intenções era a de que os alunos identificassem os ângulos e elementos de um triângulo retângulo na situação-problema que deveriam resolver e esse objetivo foi atingido quando, em pesquisa de campo, os alunos determinaram os dados que precisariam para fazer a modelagem e posteriormente, utilizando corretamente esses dados em suas anotações.

Outro objetivo que foi atingido foi o da modelagem da situação-problema no GeoGebra. Os alunos demonstraram ter o conhecimento da modelagem a ser feita e as dificuldades apresentadas foram em relação à construção correta de um triângulo retângulo. Todos começaram a construção desenhando um triângulo “a olho”, sem garantir o ângulo reto nem o ângulo fixo, que mediram em suas experiências de campo.

Nessa ocasião, foi solicitado que movimentassem os pontos do triângulo formado e observassem se continuaria a ser um triângulo retângulo, como afirmavam. Algumas das observações foram sobre o uso das retas perpendiculares. A mesma discussão se deu na hora de colocar o outro ângulo conhecido do triângulo e, entre eles, conseguiram solucionar o impasse, utilizando a função “ângulo de amplitude fixa”, onde fizeram algumas tentativas até conseguirem marcá-lo corretamente.

O único momento em que foi necessária uma intervenção foi na hora de efetuarem os cálculos das alturas. Diferente do que normalmente ocorre quando se trabalha esses conteúdos de

maneira tradicional, em que os alunos sabem realizar com destreza os cálculos, mas não sabem identificar quais as razões trigonométricas que devem utilizar para cada situação, esse grupo de alunos apresentou desempenho totalmente contrário. A escolha pela razão trigonométrica para resolver o problema foi algo que ocorreu naturalmente.

Portanto, o objetivo maior era que os alunos conseguissem “enxergar” a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo e soubessem escolhê-las corretamente para cada situação foi atingido.

Toda a atividade, desde a coleta de dados, a escolha pela situação-problema, elaboração de um esboço e a modelagem no GeoGebra foi conduzida pelos questionamentos dos alunos e suas investigações. A atuação docente se restringiu a uma orientação inicial sobre o conteúdo, a atividade a ser realizada e durante a prática, intervenções apenas quando os erros não eram detectados por eles, mas sempre priorizando a autonomia e a construção do processo de aprendizagem pelo próprio aluno.

Essa mudança de postura, de atividades orientadas passo a passo, frequentemente adotadas em sala de aula, para atividades de construção própria, é interessante para que se desenvolva a autonomia nos alunos e, conseqüentemente mais interação e participação no seu processo de aprendizagem. Nessa experiência, alguns alunos sentiram-se um pouco desorientados, pois não estavam acostumados com essa abordagem mais livre para a construção e desenvolvimento das atividades, mas isso exige um período de adaptação até que adquiram mais segurança para interagir ativamente do processo de construção e aquisição de conhecimentos.

Esse tipo de experiência é única para o professor, pois verifica-se que é possível aperfeiçoar, adaptar ou mudar sua metodologia de ensino, trazendo para a sala de aula situações que permitam ao aluno participar mais ativamente do processo de aprendizagem, proporcionando-lhes a construção do conhecimento com mais autonomia, interação e auxílio dos recursos digitais disponíveis (Gravina, 1998).

Fica como reflexão aos colegas da área que, mesmo dispondo de limitados recursos físicos e/ou tecnológicos há uma diversidade de caminhos para serem explorados (tanto pelo aluno, quanto pelo professor), nem sempre repleto de inovações, mas que podem contribuir muito para a atividade docente.

## Referências Bibliográficas

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J.. Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L.. Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. Anais do IV Congresso Ibero americano de Informática Educativa, v. 1, p. 25-35, 1998.

GRAVINA, M. A.. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996, Belo Horizonte. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996.

NAME, Miguel Assis. Tempo de Matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 1996.

PONTE, João Pedro. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

< [HTTP://www.geogebra.org/cms](http://www.geogebra.org/cms) > Acessado em