

## Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática

Helena Noronha Cury  
PUCRS  
[curyhn@via-rs.net](mailto:curyhn@via-rs.net)

Beatriz Konzen  
PUCRS  
[biakonzen@yahoo.com.br](mailto:biakonzen@yahoo.com.br)

### Resumo

A análise de erros é uma metodologia de pesquisa e ensino que pode auxiliar professores e alunos a rever conteúdos nos quais surgem dificuldades. Neste artigo, a partir de uma breve revisão sobre essa abordagem, são apresentados resultados de investigações sobre erros cometidos por estudantes universitários de Matemática que respondiam questões de Álgebra ou de Lógica Matemática. Com vistas à futura prática docente desses alunos, foram construídos jogos para revisão dos conteúdos em que eles tiveram maiores dificuldades. Esses jogos, adaptados para os conteúdos envolvidos, são sugestões práticas para aulas de Metodologia do Ensino de Matemática ou para atividades de estágio curricular.

**Palavras-chave:** Análise de erros. Álgebra e Lógica. Jogos.

### 1 - Introdução

A análise de erros nas soluções dos alunos em questões matemáticas vem sendo empregada por muito pesquisadores, com características diversas, que dependem do tema focado pela pesquisa, dos seus objetivos, dos pressupostos teóricos que embasam a investigação e dos resultados obtidos.

Tendo desenvolvido investigações sobre erros em disciplinas matemáticas de cursos da área de Ciências Exatas (Matemática, Engenharia, Ciência da Computação), estabelecemos uma metodologia de pesquisa que envolve elementos quantitativos e qualitativos, bem como a elaboração de recursos didáticos para auxiliar os estudantes em suas dificuldades.

Desde 2006, vimos trabalhando em novas pesquisas sobre erros cometidos por alunos calouros e escolhemos, para relatar neste artigo, conteúdos de Álgebra e Lógica e um tipo de recurso instrucional, que é o jogo. Essas investigações têm recebido o auxílio da bolsista de Iniciação Científica<sup>1</sup> que é co-autora deste trabalho.

---

<sup>1</sup> A aluna de Licenciatura em Matemática recebeu, em 2007, bolsa de Iniciação Científica da PUCRS.

Dividimos este artigo em três partes, apresentando alguns elementos sobre análise de erros, os dados da pesquisa e a descrição de dois dos jogos elaborados.

## **2 - Análise de Erros**

Em uma breve síntese, queremos inicialmente apresentar alguns teóricos que trouxeram contribuições para a análise de erros, considerada por nós como uma tendência em emergência na Educação Matemática, haja vista o número de dissertações, teses ou comunicações sobre o tema, mesmo que empreguem outras expressões para indicar a análise cuidadosa das produções dos estudantes.

O interesse pelo registro e análise dos erros levou Thorndike, no início do século XX, a sugerir aos professores que descrevessem minuciosamente os tipos de exercícios que deveriam ser propostos aos estudantes, pois ele se propunha a analisar a capacidade de realizar determinados cálculos, até chegar “a estabelecer um conjunto detalhado de hábitos ou de conexões mentais, cada um dos quais se converteria em candidato para sua formação e reforço.” (RESNICK; FORD, 1990, p. 28).

Na União Soviética, mais ou menos na mesma época, Krutetskii criticava a rigidez dos testes aplicados até então, em que não havia interesse em estudar o processo de solução em si. Dessa forma, ele abriu um novo caminho, investigando as habilidades matemáticas dos estudantes de uma forma abrangente, com instrumentos variados, com participação de alunos, professores e pais. A ênfase na observação detalhada da resolução dos problemas, com o cuidado de registrar o “pensar em voz alta” dos estudantes e de questionar suas respostas, trouxe novos rumos às análises de erros, ainda que não tenham recebido essa denominação naquelas pesquisas. (KRUTETSKII, 1976).

Mais recentes são os trabalhos de investigadores franceses que se preocupam com os erros constituídos em obstáculos. Brousseau (1983) comenta que há vários estudos voltados para os obstáculos na constituição dos conceitos e afirma:

Um obstáculo se manifesta, pois, por erros, mas estes não são devidos ao acaso. [...] Além disso, esses erros, em um mesmo sujeito, são ligados entre si por uma fonte comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente ainda que não seja correta, um “conhecimento” antigo e que é bem sucedido em todo um conjunto de ações. (p. 173-174).

A italiana Raffaella Borasi, trabalhando também nos Estados Unidos, sintetiza várias pesquisas sobre erros, desenvolvidas por ela e seus colaboradores e considera que as contribuições filosóficas que buscou em Kuhn, Lakatos e Kline e trouxe para a análise de erros lhe permitiram responder a questões desafiadoras sobre resultados apresentados por estudantes, tais como: “o que aconteceria se aceitássemos esse resultado?” ou “em que circunstâncias esse resultado pode ser considerado correto?” (BORASI, 1996, p. 29). Essas perguntas são a base de suas propostas de atividades para utilizar os erros para pesquisa e ensino em Matemática.

Borasi (1996) propõe uma taxionomia de uso dos erros, segundo o objetivo do processo de ensino e aprendizagem (remediar o erro, explorá-lo ou fazer descobertas por meio dele) e o foco do professor-pesquisador (conteúdo técnico-matemático, natureza da matemática, processo de aprendizagem em Matemática).

Ao analisarmos erros cometidos por alunos de Cálculo Diferencial e Integral, em cursos de Engenharia ou Ciência da Computação, por exemplo, nosso objetivo maior é auxiliar os estudantes na superação de suas dificuldades, detectadas pela análise qualitativa das suas respostas. Para isso, podemos usar vários recursos (inclusive trabalhando em laboratório de Informática) ou mesmo propondo, como sugere Borasi (1996), a aceitação do erro e desafiando o aluno a encontrar situações em que seja válida a fórmula ou regra aplicada por ele de forma equivocada.

No entanto, quando trabalhamos com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, além dos mesmos objetivos acima citados, ainda podemos aproveitar os erros para discutir metodologias de ensino e propor recursos instrucionais que possam ser usados na futura prática desses licenciandos. É com essa finalidade que criamos os jogos aqui exemplificados, para explorar dificuldades tanto da Educação Básica como da Superior.

Em pesquisa realizada em 2005 com 368 calouros de oito Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, a equipe de investigadores propôs duas questões envolvendo conteúdos de Álgebra do Ensino Fundamental, mas que são usados em disciplinas iniciais de

Cálculo. Uma das questões solicitava a simplificação da expressão  $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$ , para  $x \neq 2$

e não nulo; a outra, pedia a resolução da equação  $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} = \frac{2}{2x^2 + 19x + 45}$ , em  $\mathfrak{R}$ .

Na primeira questão, os que erraram ou não responderam correspondem a 67% dos

participantes. Já na segunda questão, a que apresentou maiores problemas para os alunos, apenas 17% deles acertaram.

A análise qualitativa revelou que a maior parte dos erros, em ambas as questões, se deve a dificuldades nas operações com frações algébricas, às tentativas de substituir valores nas alternativas dadas, a problemas nas operações com racionais ou ao desconhecimento da diferença entre expressão e equação, pois muitos alunos tentaram “resolver” a expressão da primeira questão, igualando numerador e denominador, obtendo uma equação de terceiro grau para a qual não encontraram fórmula de resolução. (CURY, 2006; CURY; KONZEN, 2006).

Os erros nessas questões estão relacionados a conteúdos e habilidades desenvolvidos em Álgebra, no Ensino Fundamental, mas as dificuldades com as operações com frações algébricas acarretam problemas para os alunos de disciplinas matemáticas em cursos superiores, como, por exemplo, no cálculo do limite de uma função em um ponto e na integração pelo método das frações parciais.

Outro conteúdo que faz parte da ementa de disciplinas de cursos de Ciências da Computação e de Licenciatura em Matemática são as operações lógicas. Nos cursos de Matemática, muitas vezes a apresentação dos conectivos lógicos e das operações com proposições introduz a primeira disciplina de Álgebra, haja vista que propicia a base para o estudo da Teoria dos Conjuntos. É sobre este tema que vamos apresentar, a seguir, parte de uma pesquisa sobre análise de erros.

### **3 - A pesquisa sobre Erros em Lógica Matemática**

Durante o ano letivo de 2007, vem se desenvolvendo na Pontifícia Universidade Católica do Rio grande do Sul (PUCRS) uma pesquisa que tem como objetivo analisar erros cometidos por alunos de disciplinas específicas do curso de Licenciatura em Matemática. Neste artigo, vamos apresentar apenas a análise de uma das questões aplicadas na primeira prova de Lógica Matemática, disciplina que é oferecida no primeiro semestre do curso e embasa a Álgebra A. Privilegiamos, na escolha, a questão que envolvia os conteúdos ou técnicas mais relevantes para a prática do futuro professor, escolha esta que foi feita de comum acordo com o professor responsável.

A prova foi realizada por 47 alunos e a questão 4, escolhida para análise, tem o seguinte enunciado: *Considerando que a proposição simbolizada por  $p \wedge q \rightarrow r \vee s$  tem valor lógico falso, determine, se possível, o valor lógico das proposições que seguem. Explique seu raciocínio:*

- a)  $p \vee q \leftrightarrow \sim s \vee m$   
 b)  $a \wedge b \rightarrow s \vee t$   
 c)  $a \wedge u \rightarrow p$

Dos 47 alunos, apenas dois deixaram em branco a questão. O quadro 1 indica a distribuição dos alunos que erraram cada item.

Item	Erraram	
	n°	%°
4 a	14	31
4 b	11	24
4 c	16	36

Quadro 1 – Distribuição dos alunos que erraram a questão 4

Vemos que a questão foi bem compreendida pelos estudantes, pois, em cada item, cerca de 70% da turma acertou. Analisamos qualitativamente as respostas daqueles que erraram em cada item, criando categorias. Não quantificamos cada classe, pois às vezes há apenas um exemplo de determinado erro, mas ele é importante para a revisão do conteúdo em futuras aulas da disciplina. Apresentamos a seguir as classes de erros encontrados em cada item:

**Item a:**

Classe A: o aluno confunde termos lógicos, pois usa letras diferentes para indicar V ou F, considerando que V é “tautologia”;

Classe B: o aluno não usa as informações dadas na questão, não analisa as condições para que o condicional seja falso e com isso não consegue valores para avaliar a proposição indicada no item a; em alguns casos, faz tabelas-verdade para quatro proposições e, no entanto, não enuncia uma conclusão porque não usa as informações;

Classe C: apesar de ter determinado os valores lógicos das proposições do enunciado, sabendo que s é falsa, considera que  $\sim s$  também é falsa;

Classe D: o aluno confunde-se nas explicações sobre o bi-condicional, diz, por exemplo, que se a disjunção é V isso “bicondiciona a outra proposição a ser V”;

**Item b:**

Classe E: o aluno faz afirmativas erradas sobre o condicional ou sobre as proposições envolvidas no condicional apresentado na questão: “se o antecedente é V então o condicional

é falso”; “no condicional, só é falso se o predicado lógico for falso e o sujeito verdadeiro, neste caso o predicado é verdadeiro, então é verdade”; “tanto  $a \wedge b$  como  $s \vee t$  podem apresentar valores diferentes”. Alguns ainda afirmaram que o valor do antecedente determina o valor do conseqüente, que o condicional depende diretamente do valor do conseqüente e, se este é falso, o condicional é falso;

Classe F: o aluno não usa as informações dadas na questão, por isso não consegue determinar os valores das proposições;

Classe G: apesar de determinar o valor lógico de  $s$  (F), no primeiro item, o aluno afirma que  $s$  é V; também usa informações que não foram dadas, como considerar que a proposição  $t$  é falsa.

**Item c:**

Classe H: o aluno confunde termos lógicos;

Classe I: o aluno parte do fato de que a proposição  $p$  é falsa quando já sabe que é verdadeira, pelo item a; atribui valores que não foram dados às proposições  $a$  e  $u$ ; mesmo sabendo que a proposição  $p$  é verdadeira, considera impossível atribuir um valor lógico ao condicional porque não conhece os valores de  $a$  e  $u$ , ou seja, considera necessário saber o valor lógico do antecedente mesmo sabendo que o conseqüente é verdadeiro;

Classe J: o aluno considera que o condicional é falso quando o conseqüente é falso;

Classe L: idêntica à classe C;

Classe M: o aluno considera que  $a \wedge u$  não é proposição.

Em todos os três itens, algumas respostas foram incompreensíveis, o que originou uma última classe, N.

Analisando em conjunto e refinando a classificação, podemos apresentar, para as respostas dessa questão 4 da prova de Lógica Matemática, as seguintes categorias:

- 1) o aluno confunde termos lógicos ou não aceita letras diferentes das habituais para proposições ( $p, q, r...$ );
- 2) o aluno não usa as informações que podem ser deduzidas do enunciado da questão;
- 3) o aluno confunde os valores lógicos das proposições, apesar de tê-los determinado a partir das informações do enunciado;
- 4) o aluno faz afirmativas erradas sobre condicional ou bi-condicional, confundindo-se em relação a antecedente e conseqüente;
- 5) o aluno escreve uma resposta incompreensível.

Pela comparação entre a análise quantitativa e a qualitativa, vemos que, apesar de não serem muitos os alunos que erraram, seus erros impedem a aprendizagem desse conteúdo e, talvez, de subseqüentes tópicos de Álgebra, visto que envolvem a compreensão dos conceitos básicos de Lógica.

A preocupação com a aprendizagem desses alunos, tanto em conteúdos do Ensino Fundamental, pré-requisitos para o Cálculo e básicos para os que vão ser professores de Matemática, quanto em conteúdos de Lógica, fundamentais para a aprendizagem de Álgebra e para qualquer demonstração de uma proposição matemática, nos levaram a elaborar recursos instrucionais para auxiliar os estudantes, especialmente os do curso de Licenciatura em Matemática. A seguir, descrevemos dois jogos, que podem ser adaptados para muitos outros conteúdos matemáticos ou mesmo para outras disciplinas.

#### **4 - A Elaboração dos Jogos**

Nos últimos anos, tem aumentado a publicação de livros sobre o uso de jogos na Educação Matemática, com recomendações e exemplos. Em geral, os autores dessas obras classificam os jogos, mencionando aqueles que envolvem conteúdos específicos e os que desenvolvem estratégias, e cada um desses tipos é importante em alguma etapa da aprendizagem. (RÊGO; RÊGO, 2000; LARA, 2003; FLEMMING; MELLO, 2003).

O uso do jogo no ensino tem vantagens para professores e alunos. Para os primeiros, há a possibilidade de analisar o desempenho dos estudantes na resolução de uma questão, verificando seu raciocínio lógico ou detectando os erros cometidos. Dessa forma, é possível diagnosticar dificuldades em um item específico do conteúdo e necessidades individuais ou coletivas, buscando, então, novas estratégias de ensino para auxiliá-los.

Ao empregar jogos em sala de aula, o professor deve tomar alguns cuidados para que a atividade não se esgote em si mesma, ou seja, para que seu emprego não se restrinja ao jogo em si, mas às habilidades que pode desenvolver.

Lara (2003) classifica os tipos de jogos: de construção, de treinamento, de aprofundamento e de estratégia. Os jogos de construção são aqueles que trazem ao aluno um assunto novo a ser trabalhado a partir da resolução de um problema. Seu uso vai além da memorização e auxilia o estudante a atingir níveis mais avançados de conhecimento.

Os jogos de treinamento, como o nome diz, são úteis para treinar alguma habilidade, memorizar conceitos, fórmulas, regras. Pode ser usado quando o professor prefere substituir listas de exercício por um recurso mais ágil. Sua principal característica é a repetição.

Os jogos de aprofundamento são aplicados após o estudo de um determinado assunto, permitindo que o aluno avance no seu aprendizado. Finalmente, os jogos de estratégia têm como meta desenvolver o raciocínio dedutivo, o que se evidencia na escolha das jogadas, levando o jogador a elaborar e reelaborar suas hipóteses a todo instante, para descobrir não só a estratégia que permitirá vencer, mas também para neutralizar a do adversário.

Levando em conta as observações acima mencionadas, elaboramos dois jogos, o *Quarteto das Frações Algébricas* e o *Vira e Confere*. Segundo a classificação de Lara (2003), o primeiro jogo pode ser considerado de aprofundamento, haja vista que os conteúdos já foram estudados pelos alunos (se pensarmos em estudantes de um curso de Licenciatura que tenham cometido os erros relatados acima) e nosso objetivo é revisá-los, para que eles possam, em outras disciplinas ou em suas práticas docentes, superar as dificuldades apresentadas.

O Quarteto das Frações Algébricas é um jogo elaborado, em princípio, para alunos de 7ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de desenvolver uma melhor compreensão das operações com frações algébricas. Este jogo é baseado em um similar, elaborado por Mungo-Verlag<sup>2</sup>, e que adaptamos para a nossa realidade e para o conteúdo em questão. Como motivação para estudantes de Matemática, escolhemos imagens de fractais<sup>3</sup> para ilustrar as cartas, conforme vemos na figura 1, a seguir:

---

<sup>2</sup> Firma alemã, especializada em recursos didáticos: <http://www.mungo-verlag.info/>

<sup>3</sup> Encontradas em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/galeria.htm> e <http://www.fractarte.com.br/galeria2/galeria.php>

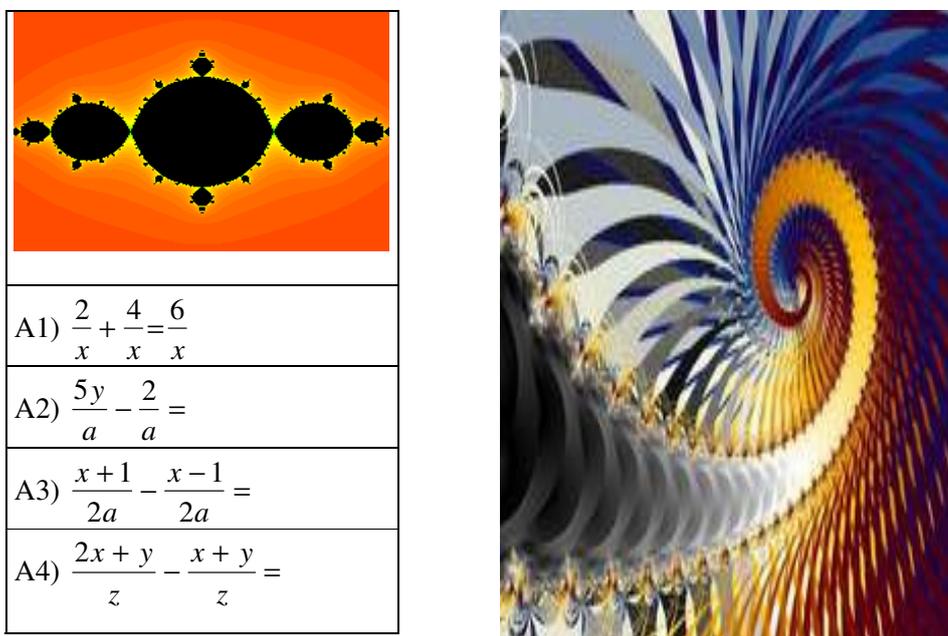


Figura 1 – Frente e verso de uma carta do Quarteto das Frações Algébricas  
 Fonte: Material das autoras

Os alunos recebem um baralho de 36 cartas, constituído de nove quartetos. Em cada quarteto, há quatro operações com frações algébricas, uma já realizada e as outras três em aberto. As cartas são embaralhadas e distribuídas para três ou quatro jogadores. Se algum jogador notar que já tem um quarteto formado, ele o coloca de lado. É escolhido um estudante para iniciar o jogo; ele pergunta ao colega da direita se este tem uma determinada carta que lhe falta para completar o quarteto. Por exemplo, ele possui a carta com a operação A1 já efetuada e pergunta ao seu colega se ele possui uma carta com A2 efetuada. Se o colega responder afirmativamente, então o primeiro deve dizer qual é a fração que é solução da operação em A2. Se acertar, o colega lhe entrega a carta e ele continua, perguntando pela carta com a operação A3 efetuada. Se errar, o colega a quem ele perguntou continuará o processo, da mesma forma. O jogo termina quando todos os quartetos forem formados.

O Vira e Confere é um jogo que pode ser usado com qualquer conteúdo no qual tenhamos exercícios com questões e respostas e é empregado individualmente, para fixação de conteúdo. No caso, elaboramos cartelas para equivalências entre proposições lógicas.

O jogo foi baseado em outro similar, chamado “Wrap Ups”, disponível em um site sobre material manipulativo para Matemática<sup>4</sup>. Consiste de uma cartela, em material rígido, em cuja ponta é inserido um barbante com um nó. O aluno pega a cartela, passa o barbante sobre a primeira ranhura acima, à esquerda, abaixo da qual há uma proposição. Encontra a proposição equivalente a ela na parte inferior da cartela e passa o barbante por cima, até a ranhura correspondente à resposta. Em seguida passa o barbante por baixo da cartela até a segunda ranhura e continua o processo até a última, depositando o barbante na ranhura central à direita. Vira, então, a cartela e confere o desenho determinado pelo barbante. Se coincidir com o da cartela, o aluno acertou todas as questões, caso contrário pode tentar novamente.

Abaixo, na figura 2, é apresentada a cartela do jogo para as equivalências lógicas.

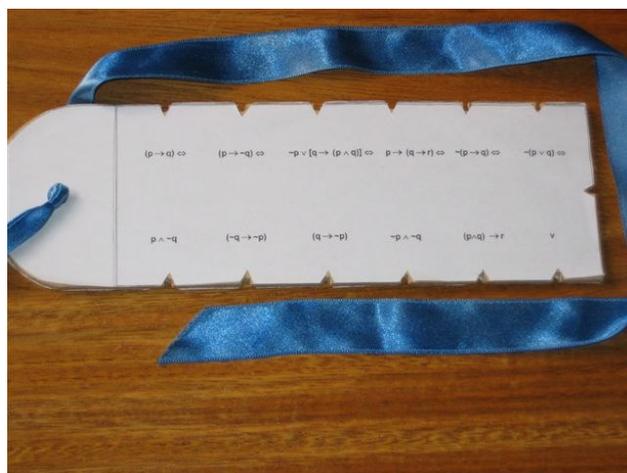


Figura 2 – Cartela das equivalências lógicas  
Fonte: Arquivo das autoras

Os dois modelos de jogos também foram adaptados para outros conteúdos de disciplinas matemáticas do mesmo curso de Licenciatura em Matemática objeto de nossa investigação. Assim, poderão ser empregados nas Disciplinas Integradoras, que trabalham os conteúdos das disciplinas específicas usando recursos instrucionais que podem ser utilizados nas aulas de estágio e na própria prática dos futuros licenciados.

## 5 - Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos algumas idéias sobre a análise de erros, considerada como metodologia de pesquisa e ensino. Também relatamos uma investigação realizada com alunos

<sup>4</sup> <http://www.learningwrapups.com/wrapsOverview.asp>

de um curso de Licenciatura em Matemática, escolhendo uma questão de Lógica Matemática para exemplificar os passos da análise. A seguir, mostramos dois jogos elaborados para auxiliar os alunos em suas dificuldades, especialmente levando em conta que, como futuros professores, precisam conhecer recursos instrucionais que possam ser adaptáveis para diferentes conteúdos.

Esperamos, assim, ter contribuído com sugestões para novas pesquisas em análise de erros e com idéias para elaboração de outros jogos que possam ajudar os estudantes a retomar os conteúdos nos quais apresentam maiores dificuldades.

### **Referências**

- BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors**. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 4, n.2, p. 165-198, 1983.
- CURY, H. N. A análise de erros na construção do saber matemático. In: JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais...**Passo Fundo: UPF, 2006. 1 CD-ROM.
- CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 7, n. 7, p. 33-41, 2005/2006.
- FLEMMING, D. M.; MELLO, A. C. C. **Criatividade e jogos lógicos**. São José: Saint Germain, 2003.
- KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.
- LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.
- RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. **Matematicativa**. João Pessoa: Ed. da UFPB, 2000.
- RESNICK, Lauren B.; FORD, Wendy W. **La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos**. Barcelona: Paidós, 1990.