

As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão¹

Síntria Labres Lautert² e Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO: O conhecimento matemático de crianças sobre a divisão foi investigado a partir de dois aspectos: desempenho em problemas de divisão e as concepções sobre a divisão. Oitenta crianças (5-9 anos) foram solicitadas a resolver dois tipos de problemas de divisão (um de partição e outro por quotas) e, em uma entrevista clínica, eram solicitadas a responder a pergunta 'O que é dividir?'. Cada criança foi classificada em um grupo de desempenho em função do número de acertos nos problemas. Diferentes tipos de definições foram identificados, os quais variavam desde definições sem um significado matemático até definições que expressavam um significado matemático exclusivamente associado à divisão. Os dados mostraram haver uma relação entre desempenho e as definições sobre a divisão, e que as crianças atribuem um significado matemático à divisão antes de adotarem procedimentos apropriados na resolução dos problemas. Os resultados inserem-se em um quadro teórico de desenvolvimento que analisa as relações entre conhecimento procedural e conhecimento explicitado linguisticamente.

Palavras-chave: divisão; problemas; definições.

The Relations Between Performance on Division Problems and Children's Ideas About Division

ABSTRACT: Children's mathematical knowledge of division was examined in two different perspectives: performance on division problems and children's ideas about division. Eighty children (5-9 years old) were presented with two word division problems (partitive and quotitive). After solving these problems they were asked to define 'What is division?' during a clinical interview. Each child was classified according to their performance on division problems. Different types of definitions were found which varied from definitions without mathematical meaning to definitions that expressed mathematical meaning associated with division. The findings revealed a relationship between children's performance and their ideas about division; also the results indicated that the mathematical meaning associated with division appears before children can successfully solve division word problems. The results are discussed in terms of a developmental approach in which the relations between procedural knowledge and explicit knowledge are considered.

Key words: division; problems; definitions.

Compreender um conceito matemático envolve diversos aspectos, tais como o uso de estratégias e procedimentos de resolução apropriados e o uso de representações diversas relacionadas ao conhecimento sobre número, quantidades e algoritmos. Além desses, existe um outro aspecto que, embora negligenciado, parece ser relevante: as noções que a criança apresenta sobre o que vem a ser um determinado conceito e os significados a ele atribuídos. Por exemplo, a simples pergunta 'O que é X?' pode suscitar respostas informativas acerca das concepções que a criança apresenta sobre X.

No presente estudo, o X acima mencionado refere-se a um importante conceito matemático inserido no campo das estruturas multiplicativas: o conceito de divisão. Embora de natureza complexa, a divisão está presente, desde cedo, em diversas atividades do cotidiano de crianças: dividir objetos com um parceiro, repartir quantidades (discretas ou contínuas) em partes iguais, colocar uma mesma quantidade de objetos em diversos recipientes. Antes mesmo de entrar na escola, as crianças apresentam um conhecimento espontâneo sobre vários conceitos matemáticos (Spinillo, 1994), dentre eles, a divisão (Anghileri, 1997; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Frydman, & Bryant, 1988). Este conhecimento tem sido investigado a partir da resolução de problemas e realização de tarefas (computacionais ou não) envolvendo a divisão. Entretanto, o conhecimento que o indivíduo possui acerca de determinado conceito, seja ele matemático ou não, pode, também ser explorado a partir de perguntas em que se busca, através de definições verbais, examinar os diferentes significados atribuídos àquele conceito. Imagine que, ao ser questionada a respeito do que é dividir, uma criança responda:

1 Parte dos dados apresentados neste artigo consta na Dissertação de Mestrado da primeira autora realizada, sob a orientação da segunda, na Pós-Graduação em Psicologia da UFPE. As autoras agradecem o apoio do CNPq e da FACEPE sob forma de bolsa de estudos conferida à primeira autora. Agradecimentos são também endereçados a Rômulo Lins da UNESP de Rio Claro pelos comentários perspicazes e estimulantes feitos sobre uma primeira versão deste artigo.

2 Endereço: Universidade Federal de Pernambuco - Pós-Graduação em Psicologia - CFCH 8º andar - Cidade Universitária - 50.670-901 Recife, PE - e-mail: spin@npd.ufpe.br

C1- "Dividir é dividir as coisas com os outros."

Suponha, por exemplo, que uma outra criança responda:

C2- *“Porque, vê assim: dezesseis dividido por três. Tem dois homens que tão vendendo tomate, não conseguiram vender nenhum. Aí querem dividir os tomates, mas não sabem como dividir. Então eles vão fazer uma conta de dividir: dezesseis dividido por três. Três que vai dar dezesseis. Aí vai o cinco que vai dar quinze menos dezesseis sobra um, que esse cinco que deu aqui vai tirar dos tomates, cada um vai levar cinco.”*

Imagine, ainda, que uma terceira criança venha a fornecer a seguinte resposta:

C3- *“Dividir é assim, por exemplo, se eu tenho uma quantidade de ... de coisas, eu quero... eu quero colocar em cada grupo igual, eu tô dividindo, eu tô colocando em cada grupo a mesma quantidade.”*

Analisando-se estas passagens, nota-se que C1 define a divisão em termos de compartilhar algo com alguém, estando esta concepção distante do significado matemático próprio da divisão. Por outro lado, as respostas fornecidas por C2 e C3 mostram-se mais próximas deste significado. C2, para ilustrar o que entende por dividir, procura formular um problema cuja solução requer uma operação de divisão (dezesseis dividido por três) que tenta resolver. Esta forma de definir o que entende por dividir se aproxima das situações escolares. C3, por sua vez, não fornece um exemplo particular, mas refere-se ao todo (‘uma quantidade de coisas’), às partes em que este todo deve ser dividido e ao tamanho de cada parte (‘colocando em cada grupo a mesma quantidade’).

Seriam estas respostas indicadoras de concepções distintas a respeito do que é dividir? Teria a instrução formal papel determinante sobre essas concepções? Estas são, sem dúvida, questões intrigantes, tratadas no presente artigo. Uma outra questão, também relevante, é investigar se tais concepções estariam associadas a desempenhos distintos na resolução de problemas de divisão. Uma criança que explicita suas concepções como o fez a C1 teria dificuldades em resolver problemas de divisão, enquanto as outras duas teriam desempenhos mais satisfatórios?

O presente estudo procura investigar, de forma exploratória, estas questões, visto que, está ausente na literatura, um exame das explicações das crianças sobre o que entendem por dividir, expressando o significado que atribuem à divisão.

As noções das crianças e o raciocínio envolvido na resolução de problemas de divisão

A divisão, como afirma Vergnaud (1982; 1983; 1986; 1991; 1997) envolve regras operatórias complexas (utilização de divisões sucessivas, multiplicação, subtração, busca de um quociente que pode envolver um resto e resultar em números fracionários) e requer o estabelecimento de relações diversas (considerar o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que deve ser o mesmo, a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes, a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes). Esta complexidade e diversidade podem ser ilustra-

das através da resolução de problemas. Vergnaud (1991) destaca três categorias distintas de problemas próprios das estruturas multiplicativas: produto de medidas, proporção múltipla e isomorfismo de medidas. Embora a resolução desses problemas envolva a realização de uma operação de divisão, o grau de dificuldade varia, como é o caso dos problemas de isomorfismo denominados divisão por partição e divisão por quotas.

Em *problemas de partição* é dada uma quantidade inicial e o número de vezes (número de partes) em que esta quantidade deve ser distribuída, devendo-se encontrar o tamanho de cada parte (número de elementos). Exemplos:

Paguei R\$ 12,00 por quatro garrafas de vinho. Qual o preço de uma garrafa?

Pedro comprou 15 carrinhos e tinha cinco caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa?

Para resolver problemas deste tipo, é preciso considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao tamanho das partes, que o dividendo é representado pelo todo (valor/quantidade a ser dividida) e que o divisor refere-se ao número de partes em que o todo é dividido.

Em *problemas de divisão por quotas* é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes). Exemplos:

Tenho R\$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de caramelo que custam R\$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes posso comprar com esta quantidade?

Pedro comprou 15 carrinhos e queria colocar cinco carrinhos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar?

Para resolver problemas de divisão por quotas, deve-se considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo é representado pelo todo e o divisor refere-se ao tamanho das partes (quota).

Mesmo mantendo-se os mesmos valores em ambos os tipos de problema, estes não podem ser considerados como de uma mesma natureza. A mudança da incógnita a ser encontrada altera a natureza da operação a ser aplicada. Estes exemplos ilustram a idéia de que existem diferentes situações que apelam para o domínio de propriedades diferentes relativas a um mesmo conceito.

A literatura mostra que problemas de partição são mais fáceis do que os de divisão por quotas (Kornilaki & Nunes, 1997; Selva, 1998). Uma das explicações para isto é que a noção inicial que a criança tem sobre a divisão, derivada das experiências sociais, é a de repartir um todo em partes iguais até que este todo se esgote. As noções sobre a divisão decorrem da idéia de distribuir, como evidenciam inúmeros estudos (Anghileri, 1993; Correa, 1996; Correa & Bryant, 1994; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Nunes & Bryant, 1997). A ação de compartilhar baseia-se na idéia de distribuir quantidades iguais entre cada receptor a partir da correspondência um-a-um para cada conjunto, até que se esgotem os elementos a serem distribuídos ou que reste um número insuficiente

de elementos para continuar a distribuição (no caso de haver resto). Importante ressaltar que esta idéia corresponde ao princípio envolvido nos problemas de partição. Por outro lado, problemas de divisão por quotas requerem iniciar o processo de resolução com base no tamanho de cada parte (quota), sendo esta forma de raciocinar menos usual nas experiências sociais informais do que a idéia de número de partes, e, inclusive, menos considerada nas situações didáticas no contexto escolar.

Será que as definições verbalmente expressas³ por crianças ainda não instruídas sobre a divisão também refletiriam esta tendência? Ou seja, será que inicialmente as definições sobre a divisão estariam relacionadas à idéia de distribuição, implícita em problemas de partição, e que a idéia de quotas só estaria presente nas verbalizações de crianças com um maior domínio do conceito de divisão?

O que expressam as explicitações verbais de crianças sobre um dado conceito

Como mencionado, inúmeras são as maneiras de examinar o conhecimento que as crianças possuem sobre um dado conceito. As situações de pesquisa, dependendo da metodologia adotada e do que se deseja investigar, podem incluir a realização de atividades por parte da criança, explicações ou o julgamento de aspectos particulares relevantes ao fenômeno em estudo (Spinillo, 1998). Há, ainda, situações de exame que envolvem basicamente depoimentos, explicitações verbais ou o fornecimento de definições sobre um dado objeto de conhecimento, seja ele lingüístico (Moreira, 1988; Spinillo, Albuquerque & Lins e Silva, 1998), social e biológico (Carey, 1985; Carvalho & Spinillo, 1996; Luria, 1990) ou matemático, como tratado neste artigo.

Donaldson (1986) aponta duas razões para que um indivíduo forneça explicações sobre algo: (1) quando deseja auxiliar alguém a compreender algo; ou (2) quando deseja demonstrar a alguém a própria compreensão sobre algo. Em relação ao segundo caso, a habilidade da criança em fornecer explicações sobre um conceito torna-se tão essencial quanto o próprio conhecimento que possui sobre este conceito. Por um lado, a dificuldade em explicar pode não significar, necessariamente, uma dificuldade em lidar com o conceito em questão, pois muitas vezes a criança domina um dado conceito embora não o explicita verbalmente, fato este conhecido na literatura como 'falso negativo', como indicam Roazzi & Bryant (1997). Por outro lado, como resalta Karmiloff-Smith (1992), a explicitação verbal de um conhecimento indica uma fase mais elaborada na aquisição deste conhecimento, pois permite tornar verbalmente explícito aquilo que está implícito nas representações procedimentais.

Assim, é preciso cautela ao se extrair conclusões sobre o que expressam as explicitações verbais de crianças, pois to-

mar as explicações e definições como indicadores do domínio de um conceito pode incorrer em subestimar-se a competência de crianças. Porém, explicar ou definir verbalmente um dado conceito pode ser considerado um indicador de um domínio maior do que aquele apresentado por crianças que sabem, mas que, no entanto, não são capazes de explicitar verbalmente. Como enfatizado por Donaldson (1986) e por Karmiloff-Smith (1992), explicações e definições envolvem aspectos cognitivos e lingüísticos, os quais devem ser apropriados ao fenômeno que está sendo investigado, e isto pressupõe que aquele que explica ou define expresse algum conhecimento sobre o fenômeno.

Objetivos do estudo

Pesquisas sobre resolução de problemas de divisão mostram que o nível de instrução que a criança recebeu sobre a divisão no contexto escolar influencia o desempenho (Lautert & Spinillo, 1999; Selva, 1998). Um bom desempenho estaria associado a concepções mais próximas do conceito matemático da divisão?

Considerando que, como mostra a literatura, a idéia de partição antecede a idéia de quotas e que problemas de partição são mais fáceis que problemas de divisão por quotas, é possível supor que crianças sem instrução formal sobre a divisão teriam um melhor desempenho em problemas de partição do que em problemas de divisão por quotas. Ou teriam dificuldades em ambos os tipos de problemas? Importante, ainda, examinar se a idéia de partes e a idéia de quotas estariam expressas na definição fornecida pela criança.

Um outro aspecto a investigar é a relação entre o desempenho em problemas de divisão e as definições fornecidas pelas crianças sobre o que é dividir. Será que as crianças com um bom desempenho nos problemas seriam aquelas que apresentariam definições associadas ao significado matemático da divisão; enquanto crianças com um desempenho limitado apresentariam definições distantes do significado matemático da divisão? Ou seriam, tais aspectos, independentes? Considerando os tipos de problemas investigados (divisão por partição e divisão por quotas), seria interessante examinar se crianças que têm um bom desempenho apenas nos problemas de partição apresentariam concepções exclusivamente relacionadas à idéia de partes.

A análise de tais aspectos pode contribuir para uma maior compreensão do desenvolvimento do raciocínio matemático em crianças e, em particular, para a compreensão do conceito de divisão em termos das relações entre conhecimento procedural (desempenho em problemas de divisão) e a concepção verbalizada (definição do que é dividir).

Método

Participantes

Oitenta crianças, de classe média, alunas de escolas particulares da cidade do Recife foram igualmente divididas em dois grupos: sem instrução sobre a divisão (Jardim e Alfabe-

3 Definições podem ser entendidas como uma forma, dentre outras, de se examinar as concepções que o indivíduo tem sobre um dado objeto de conhecimento. Em outras palavras, a definição seria uma concepção verbalizada.

tização, 5-7 anos) e com instrução sobre a divisão (1ª e 2ª séries, 7-9 anos).

Material

Gravador, filmadora, fitas (vídeo, áudio), papel e lápis para a resolução dos problemas.

Procedimento

Em um primeiro momento investigou-se o desempenho das crianças em dois problemas de divisão inexata, apresentados oralmente um por vez, sendo um de partição e outro por quotas⁴:

Divisão por Partição: 'Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?'

Divisão por Quotas: 'Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos será que ela vai precisar?'

À criança era dito que poderia resolver os problemas da forma que desejasse, usando lápis e papel.

Em um segundo momento investigou-se as concepções destas mesmas crianças sobre a divisão através de uma entrevista de natureza clínica em que se perguntava 'O que é dividir?'. A opção pelo termo 'dividir' ao invés do termo 'divisão' deveu-se ao fato de entender-se que este último estaria mais restrito a um sentido matemático de natureza escolar, enquanto o termo 'dividir' teria um sentido mais abrangente que poderia permitir o aparecimento de definições desta e de outra natureza. Além desta pergunta, outras eram formuladas com o objetivo de esclarecer as respostas fornecidas, como pode ser visto nas passagens exemplificadas mais adiante.

Tanto a entrevista como a atividade de resolução dos problemas foram aplicadas individualmente em duas sessões filmadas e transcritas em protocolos individuais. Os procedimentos adotados e registrados na folha de papel não foram examinados neste estudo⁵, considerando-se apenas se a resposta dada ao problema estava correta ou incorreta.

4 Importante mencionar que problemas semelhantes a esses foram utilizados em estudos anteriores que tinham por objetivo analisar as estratégias adotadas por crianças entre 5 e 8 anos (Correa & Bryant, 1994; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Nunes & Bryant, 1997; Selva, 1998). Cabe ressaltar, ainda, que os pares numéricos dos problemas foram os mesmo utilizados por Selva (1998), que não detectou diferença estatisticamente significativa no desempenho das crianças que pudesse ser atribuída ao tamanho dos pares numéricos. Desta forma, tanto os pares numéricos como os tipos de problemas podem ser entendidos como apropriados para crianças desta faixa etária. Estes problemas, como será mostrado em tabelas mais adiante, permitiram o surgimento de diferentes níveis de desempenho; aspecto este importante, visto que, não seria apropriado apresentar problemas que fossem muito fáceis ou muito difíceis de serem resolvidos por todos os participantes.

5 Material analisado em outra investigação sobre as representações gráficas da divisão (ver Lautert, 2000).

Análise dos dados e resultados

O desempenho na resolução de problemas de divisão

O desempenho foi analisado⁶ em função do número de acertos em cada tipo de problema⁷, como mostra a Tabela 1.

As crianças que haviam recebido instrução escolar sobre a divisão apresentaram um alto índice de acertos nos dois tipos de problemas (partição: 75% e por quotas: 67.5%), o mesmo não sendo observado entre as crianças sem instrução (partição: 2.5% e por quotas: 5%). Ao que parece, o desempenho depende mais da instrução do que do tipo de problema apresentado.

Em função do número de acertos, cada criança foi classificada em um dentre quatro grupos de desempenho: Grupo 1 (G1) – crianças que erram ambos os problemas; Grupo 2 (G2) – crianças que acertam o problema de divisão por partição, mas erram o de divisão por quotas; Grupo 3 (G3) – crianças que erram o problema de partição, mas acertam o de divisão por quotas; e Grupo 4 (G4) – crianças que acertam ambos os problemas (Tabela 2).

Tabela 1. Percentual de acertos em cada tipo de problema e em cada nível de instrução.

Nível de instrução	Tipos de Problema	
	Partição	Quotição
Com instrução (n = 40)	75	67.5
Sem instrução (n = 40)	2.5	5

Tabela 2. Percentual de crianças em cada grupo de desempenho por nível de instrução.

Nível de instrução	Grupos de Desempenho			
	G1 (erra ambos)	G2 (acerta partição)	G3 (acerta quotição)	G4 (acerta ambos)
Com instrução (n = 40)	20	12.5	5	62.5
Sem instrução (n = 40)	92.5	2.5	5	0

A maioria das crianças com instrução escolar acerta ambos os problemas (Grupo 4: 62.5%), enquanto a quase totalidade das crianças sem instrução erra os dois problemas (Grupo 1: 92.5%) e nenhuma delas foi incluída no G4. Note-se, ainda, que há mais crianças com instrução que acertam apenas os problemas de partição (12.5%) do que crianças sem instrução (2.5%). O percentual de crianças que acertam apenas o problema de divisão por quotas é idêntico tanto entre as crianças instruídas como entre aquelas sem instrução (5%).

6 Devido ao grande número de células vazias e com valores muito pequenos não foi possível a aplicação de testes estatísticos. Em vista disto, os dados foram discutidos em função das tendências indicadas pelos percentuais nas tabelas.

7 Acerto significa indicar o valor correto do quociente, mesmo estando o resto ausente na resolução.

As definições sobre o que é dividir

A partir da entrevista foram identificados diferentes tipos de definições sobre a divisão, como exemplificado nas passagens a seguir:

Tipo 1: a criança não define. Exemplos:

C- “Não sei.”

E- “Você já ouviu falar a palavrinha dividir?”

C- (faz que não sabe com a cabeça)

E- “Não! Em nenhum lugar? Eu acho que você já ouviu. Pensa um pouquinho.”

C- (faz que não sabe com a cabeça)

E- “Não?”

C- (faz que não sabe com os ombros)

E- “Quando eu falo prá você dividir, o que que é que você lembra?”

C- (pausa) “Não sei!”

E- “Você já ouviu falar a palavrinha dividir?”

C- (faz que sim com a cabeça)

E- “Já?! Aonde?”

C- (pausa) “Não me lembro mais não!”

Tipo 2: definição que não envolve um significado matemático. A idéia de divisão está associada a estar separado, estar longe, compartilhar algo com quem não tem, separar sílabas ou algarismos. Esta categoria incluiu uma grande variedade de respostas. Exemplos:

C- “... se a pessoa cortar no meio uma pessoa, aí (faz o gesto) divide o corpo.”

E- “Hum! Quando eu falo dividir o que você lembra?”

C- “Eu lembro que...uma vez lá, não tinham...cortado uma pessoa e dividiram o corpo.”

E- “É. Aonde foi que você ouviu isso?”

C- “É ...no filme.”

E- “Que filme?”

C- “No filme de terror.”

C- “O meu pai e a minha mãe viajou, quando eu tinha três anos.”

E- “E aí?”

C- “Meu pai viajou, minha mãe ficou.”

E- “E aí? O que que isso tem a ver?”

C- “Porque minha mãe e meu pai brigaram.”

C- (pausa) “Dividir é uma coisa que a gente divide.”

E- “Como assim?”

C- “A gente faz um nome, por exemplo.” (pega o lápis)

E- “Faz um?”

C- “Pa-pa-i. Pa...” (começa a riscar na mesa)

E- “Peraí! Faz aqui no papel! (pausa) Faz aqui no papel!” (entrega folha de papel para a criança separa as sílabas da palavra papai)

C- “A ...você divide cada...cada número ou cada flor.”

E- “Como assim? (pausa) “Quando é o número?”

C- “No número...não tem o número um? Aí você separa e coloca o número dois. Não tem o número dois? Separa e coloca o número três, aí separa o número três e coloca o número quatro, separa e coloca o número cinco, aí vai indo.”

Tipo 3: definição que envolve um significado matemático de natureza geral associado a operações diferentes da operação de divisão (adição, subtração, multiplicação). Exemplos:

C- “É assim, se eu botar, assim: fazer dois mais dois é igual a quatro. É assim.”

C- “É uma conta que... que tem conta de vezes, de menos.”

Tipo 4: definição que envolve um significado matemático associado exclusivamente à divisão. Três variações foram identificadas:

Tipo 4a: divisão em sentido geral. Exemplos:

C- “É a conta que a gente divide pelo número.”

C- “Dividir? É... se a gente tem um número e quer dividir por outro, não sabe a continha, a gente não sabe dividir se for um número muito grande, a gente precisa fazer a continha de dividir prá gente saber, o número qual é.”

Tipo 4b: divisão associada à idéia de partição: é dada uma quantidade inicial e o número de vezes que esta deve ser distribuída até esgotar o todo. A criança reconhece a necessidade da igualdade das partes. Exemplos:

C- “É assim: eu pego um número...É assim: quatro dividido por... (enquanto fala vai utilizando os dedos para explicar). Eu tenho quatro coisas para dividir para quatro pessoas, aí vai quer é... todas querem a mesma quantidade. Como eu tenho quatro e quero dividir prá quatro pessoas, aí vai ter... vai ser um, porque eu tenho quatro e vou dividir por quatro. Aí vai ser um prá cada pessoa.”

E- “Hum. Quando eu falo dividir, o que é que você lembra?”

C- (pausa) “É como uma metade.”

E- “Hum.”

C- “É ... eu tenho uma... uma barra de chocolate, aí eu quero dividir prá meu amigo, aí e... aí eu ‘toro’ ela no meio e dou uma parte pro meu amigo e fico com uma parte igual prá mim.”

Note-se que nesta passagem, a criança refere-se ao todo (“Eu tenho quatro coisas ...”) e ao número de partes em que este todo deve ser dividido (“...para dividir para quatro pessoas, ...”).

Tipo 4c: divisão associada à idéia de quotas: é dada uma quantidade inicial que deve ser distribuída em quotas preestabelecidas. A criança reconhece a necessidade da igualdade das partes. Exemplos:

C- “Dividir?! Colocar três garrafinhas aqui (aponta um lado da mesa) e três garrafinhas aqui (aponta o outro lado da mesa), porque tem seis (faz gesto de juntar). Aí uma pessoa quer garrafinha, outra pessoa quer garrafinha. Tem que dividir, um, um, aí, fica três aqui (aponta para um lado da mesa) e três aqui (aponta para o outro lado da mesa). “

E- “Huum. Quando eu falo dividir, o que é que você lembra?”

C- (pausa) “Que mainha, quando ela era gran... quando mainha era pequena ela dividia as coisas com a irmã dela. É botar em grupo.”

E- “É prá botar em grupo? Como assim, botar em grupo?”

C- (grande pausa) “É ... é pegar cinco ou quatro ou dez e botar assim, um separado do outro.”

Tabela 3. Percentual dos diferentes tipos de definições em função do nível de instrução

Nível de instrução	Tipos de Definições					
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4a	Tipo 4b	Tipo 4c
Com instrução (n = 40)	0	7.5	12.5	37.5	32.5	10
Sem instrução (n = 40)	15	47.5	17.5	5	7.5	7.5
Total (n = 80)	7.5	27.5	15	21	20	9

Nota: Tipo 1: não define; Tipo 2: sem significado matemático; Tipo 3: significado matemático não associado à divisão; Tipo 4a: significado matemático associado à divisão de modo geral; Tipo 4b: significado matemático associado à divisão como partição; e Tipo 4c: significado matemático associado à divisão como quotas.

Nesta passagem, a criança, de imediato, refere-se ao tamanho que cada parte deve ter (quota) (“Colocar três garrafinhas aqui e três garrafinhas aqui...”). Mais adiante nesta mesma passagem, a criança refere-se à necessidade de formar grupos (quotas) (“É botar em grupo.”).

A categorização das definições foi feita a partir de discussões entre dois juizes, sendo a distribuição dessas categorias ilustrada na Tabela 3.

As definições variam em função do nível de instrução escolar sobre a divisão. As crianças com instrução sistematicamente fornecem definições, sendo a grande maioria delas definições com um significado matemático associado exclusivamente à divisão (Tipo 4: 80%). As crianças sem instrução ou não definem (Tipo 1: 15%) ou quando o fazem fornecem definições sem um significado matemático (Tipo 2: 47.5%). Quando atribuem um significado matemático, este não está associado à divisão.

As diferenças encontradas entre os dois níveis de instrução decorrem do fato de que definições Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3 são mais adotadas pelas crianças sem instrução; enquanto as definições Tipo 4a e Tipo 4b são mais usadas pelas crianças com instrução. No geral, a idéia de quotas (Tipo 4c) foi pouco observada, sendo a divisão definida em termos gerais (Tipo 4a) ou em termos de partição (Tipo 4b).

As relações entre o desempenho nos problemas e as definições sobre a divisão

Para examinar as relações entre o desempenho nos problemas e as definições fornecidas sobre a divisão, elaborou-se a Tabela 4.

Tabela 4. Percentual dos diferentes tipos de definições em cada grupo de desempenho

Tipos de definições	Grupos de desempenho			
	G1 (erra ambos) (n = 45)	G2 (acerta partição) (n = 6)	G3 (acerta quotição) (n = 4)	G4 (acerta ambos) (n = 25)
1	13	0	0	0
2	40	0	25	12
3	19	33	0	8
4a	13	50	50	24
4b	9	17	25	40
4c	6	0	0	16
Total (n = 80)	56.5	7.5	5	31

Verifica-se que 40% das crianças do G1 (erra ambos os problemas) fornecem definições do Tipo 2 (sem significado matemático); enquanto 80% das crianças do G4 (acerta ambos os problemas) apresentam definições relacionadas exclusivamente à divisão (Tipo 4). Isto indica que as crianças com um baixo desempenho na resolução dos problemas apresentam definições que não expressam um significado matemático; quando o fazem, expressam apenas uma definição da divisão como uma conta (Tipo 4a). Por sua vez, as crianças com um bom desempenho nos problemas fornecem definições que expressam não apenas um sentido matemático geral (Tipo 4a), mas explicitam a idéia de partição (Tipo 4b) ou de quotas (Tipo 4c).

Analisando-se as definições do Tipo 4, observa-se que tanto no G1 como no G4 as definições relacionadas à idéia de partição (Tipo 4b) são mais frequentes do que aquelas relacionadas à idéia de quotas (Tipo 4c). Isto é marcante entre as crianças do G4, porém de forma pouco expressiva entre as crianças do G1. Parece que, como indica a literatura, a idéia de parte é mais facilmente compreendida do que a idéia de quotas; no entanto esta diferença surge apenas quando as crianças têm um bom nível de desempenho nos problemas.

Considerando-se os totais na Tabela 4, observa-se que 56.5% das 80 crianças encontram-se no grupo de desempenho G1, 31% no grupo de desempenho G4, sendo poucas as

Tabela 5. Percentual dos diferentes tipos de definições em cada grupo de desempenho e em cada nível de instrução

Tipos de definição	Com instrução			
	G1 (n = 8)	G2 (n = 5)	G3 (n = 2)	G4 (n = 25)
1	0	0	0	0
2	0	0	0	12
3	25	20	0	8
4a	62.5	60	50	24
4b	12.5	20	50	40
4c	0	0	0	16
Tipos de definição	Sem instrução			
	G1 (n = 37)	G2 (n = 1)	G3 (n = 2)	G4 (n = 0)
1	16	0	0	0
2	49	0	50	0
3	16	100	0	0
4a	3	0	50	0
4b	8	0	0	0
4c	8	0	0	0

Tabela 6. Número de crianças por nível de instrução nos dois grupos de desempenho mais representativos da amostra (G1: erra ambos problemas e G4: acerta ambos os problemas)

Nível de instrução	G1 (erra ambos)		
	Sem significado matemático (T2)	Significado matemático geral (T3)	Significado matemático da divisão (T4)
Sem instrução	18	6	7
Com instrução	0	2	6
Nível de instrução	G4 (acerta ambos)		
	Sem significado matemático (T2)	Significado matemático geral (T3)	Significado matemático da divisão (T4)
Sem instrução	0	0	0
Com instrução	3	2	20

que acertam apenas um dos tipos de problemas (G2: 7.5% e G3: 5%). Em vista destes percentuais, as discussões a seguir versam sobre os resultados obtidos pelas crianças dos grupos de desempenho G1 e G4, por serem eles os mais representativos da amostra.

Como mostra a Tabela 5, a maioria das crianças com instrução, independentemente do grupo de desempenho em que foram classificadas, apresenta definições Tipo 4 que expressam um significado matemático associado exclusivamente à divisão (G1: 75% e G4: 80%), seja ele de natureza geral (Tipo 4a) ou de natureza específica (por partes - Tipo 4b, ou por quotas - Tipo 4c).

Considerando as crianças sem instrução, observa-se que as definições do G1 não expressam um significado matemático (Tipo 2: 49%), sendo em menor frequência as definições que expressam um significado matemático associado exclusivamente à divisão (Tipo 4: 19%). Este resultado merece destaque, pois sugere que embora não resolvam com sucesso os problemas, estas crianças fornecem definições associadas a um significado matemático próprio da divisão. Ao que parece, definir matematicamente a divisão, não garante um bom desempenho nos problemas.

Na tentativa de estabelecer um quadro de resultados mais integrado acerca das relações entre desempenho nos problemas e o significado atribuído à divisão, elaborou-se a Tabela 6, cujos dados referem-se apenas às crianças que forneceram uma definição da divisão (T2, T3 e T4) e que foram classificadas nos dois grupos de desempenho mais representativos da amostra (G1 e G4).

Observa-se que existe uma relação entre a definição dada e o desempenho nos problemas. Esta relação decorreu do fato de que: (a) crianças que definem sem um significado matemático (T2) são, na grande maioria, aquelas que erram ambos os problemas (G1); isto é observado entre as crianças sem instrução sobre a divisão; (b) crianças que definem com um significado matemático associado exclusivamente à divisão (T4) acertam ambos os problemas, sendo elas crianças já instruídas sobre a divisão. As crianças que atribuem um significado matemático amplo, entendendo a divisão como uma conta qualquer (T3), tendem a errar ambos os problemas (G1) mais do que acertá-los (G4).

O dado mais interessante revelado na Tabela 6 refere-se ao fato de que existem 13 crianças que embora atribuam um significado matemático associado exclusivamente à divisão

(T4) erram os dois problemas (G1). Isto sugere que a atribuição de um significado matemático à divisão não garante o bom desempenho nos problemas. Importante mencionar, ainda, que 7 dessas 13 crianças não haviam sido instruídas sobre a divisão, o que indica que mesmo antes de aprender sobre este conceito algumas crianças atribuem um significado matemático associado à divisão (T4), mas, como não foram instruídas sobre a divisão e nem sobre o algoritmo da divisão, erram nos dois problemas (G1). Ao que parece, atribuir um significado matemático à divisão antecede a capacidade de resolver problemas de divisão.

Como explicar este resultado? Como mencionado anteriormente, as definições que envolviam uma concepção matemática precisa da divisão eram aquelas relacionadas à idéia de partição (Tipo 4b). Como afirmado por diversos autores (Correa (1996; Correa & Bryant, 1994; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Kornilaki & Nunes, 1997), embora a compreensão inicial da criança se baseie, sobretudo, na idéia de repartir (idéia esta associada à partição), esta concepção não garante a compreensão imediata das relações entre os termos da divisão, relações estas importantes para a resolução correta de problemas de divisão. Assim, o significado matemático preciso atribuído pelas crianças neste estudo era o de partição que, embora importante, era insuficiente para garantir o acerto nos problemas. Portanto, o desempenho apropriado parece requerer mais do que a idéia de partição, sendo necessário, ainda, uma compreensão das complexas relações entre os termos.

Discussão

O presente estudo investigou o conhecimento matemático de crianças sobre a divisão a partir de dois aspectos distintos: o desempenho em problemas de divisão e as definições do que vem a ser dividir. As definições, como já mencionado, podem ser entendidas como concepções verbalizadas sobre a divisão. O principal objetivo foi esclarecer as relações entre estes aspectos, considerando-os facetas distintas, porém relacionadas, do raciocínio matemático de crianças sobre a divisão.

Dois pontos norteiam as conclusões e discussões apresentadas a seguir. O primeiro trata, basicamente, das conclusões derivadas dos dados obtidos nesta investigação. O segundo ponto procura inserir tais conclusões em um quadro mais amplo de discussão, relacionando-as a perspectivas de desenvolvimento cognitivo que procuram estabelecer relações entre conhecimento procedural e conhecimento verbal explícito.

O desempenho nos problemas

8 Importante mencionar que o avanço em escolaridade (e, conseqüentemente, o nível de instrução escolar sobre a divisão) era acompanhado por um aumento da idade. Entretanto, é pouco provável que o aumento da idade isoladamente fosse capaz de produzir melhoras no desempenho em problemas como aqueles adotados neste estudo.

O tipo de problema não foi fator determinante do desempenho, o qual foi influenciado apenas pelo nível de instrução formal das crianças sobre a divisão⁸. Apesar disto, é pertinente ressaltar que as crianças já instruídas sobre a divisão tiveram um percentual de acertos ligeiramente maior no problema de partição do que no de divisão por quotas, dado este que está em acordo com a literatura na área. Esta tendência, entretanto, não é observada em relação às crianças sem instrução escolar que tiveram dificuldades em ambos os problemas.

As concepções das crianças expressas em suas definições

As definições fornecidas expressam concepções distintas a respeito do que é dividir: concepções sem um significado matemático, concepções com um significado matemático geral não associado à divisão, e concepções com um significado matemático associado exclusivamente à divisão. Dentre estas últimas, algumas expressam a idéia de número de partes ou a idéia de tamanho das partes (quota). A idéia de número de partes era identificada quando a criança fazia menção à necessidade de esgotar o todo em função de um determinado número de partes, por exemplo: “... eu tivesse que dividir entre mim e você, aí eu dividia: uma prá mim outra prá você, uma prá mim outra prá você, uma prá mim outra prá você.” Por outro lado, a idéia de quotas (tamanho das partes) era identificada quando a criança fazia menção à quantidade de elementos que deveriam estar inseridos em uma parte (quota), por exemplo: “... três garrafinhas aqui e três garrafinhas aqui.”

Enquanto a idéia de número de partes era mais frequente, a idéia de quotas era rara, mesmo entre as crianças já instruídas sobre a divisão; o que sugere que a idéia de partes é mais familiar e mais aceita do que a idéia de quotas. É possível que a maior familiaridade com a idéia de partes decorra do fato de que desde muito cedo as crianças realizam a ação de repartir em situações sociais diversas: dividir um chocolate com o colega, repartir as bolinhas de gude para iniciar o jogo com os amigos, dar metade do refrigerante para o irmão. A ação de repartir leva a criança a se concentrar na distribuição de quantidades em partes iguais, para cada receptor, através da correspondência um-a-um, até que não existam mais elementos ou até que o número de elementos seja insuficiente para continuar a distribuição (Anghileri, 1993; Correa, 1996; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2001). Portanto, a idéia de distribuição está fortemente associada à partição, justificando-se assim, o fato da idéia de número de partes ser mais frequente do que a idéia de tamanho de quotas.

A instrução foi fator importante no aparecimento dos diferentes tipos de definições. Crianças sem instrução não definiam, ou quando o faziam, forneciam definições bastante variadas, porém, sem um significado matemático. As crianças instruídas, por sua vez, apresentavam definições de natureza matemática associadas exclusivamente à divisão.

Seria interessante saber se as crianças que não atribuíram um significado matemático à divisão o fariam, caso lhes

fosse perguntado se haveria alguma outra forma de definir o que é dividir além daquela que acabara de mencionar; ou então questionar, por exemplo, se caso a professora perguntasse a ela ‘O que é dividir?’, o que ela responderia. É possível que, questionadas desta forma essas crianças atribuíssem um significado matemático à divisão. Talvez, algumas crianças tenham entendido a entrevista como um questionamento geral e outras tenham entendido a entrevista como algo relacionado ao significado escolar da divisão. De fato, a definição dada pode não expressar a única concepção que a criança possui, podendo ser, possivelmente, um dos diversos significados que atribui à divisão. Entretanto, a definição fornecida pode ser entendida como aquela que prevaleceu na ocasião da entrevista, sendo relevante considerar que a preferência da criança por uma dada definição é indicador da concepção mais saliente, pelo menos naquela situação. Esta noção mais saliente parece estar associada ao desempenho, como discutido a seguir.

As relações entre o desempenho nos problemas e as definições fornecidas

Dois pontos ilustram a complexidade das relações entre desempenho nos problemas e as definições fornecidas. De um lado, há evidências de que ambos aspectos estão relacionados, visto que, as crianças que atribuem um significado matemático exclusivamente voltado para a divisão são aquelas que apresentam um bom desempenho; enquanto as crianças que não atribuem um significado matemático à divisão apresentam um desempenho elementar.

Por outro lado, existem também evidências de que desempenho e definições guardam entre si certa independência, uma vez que, há crianças que mesmo atribuindo um significado matemático exclusivamente associado à divisão não resolvem com sucesso os problemas. Estas crianças sabem o que é dividir, porém não sabem aplicar a operação de divisão para solucionar os problemas. A concepção matemática da divisão parece anteceder o uso de procedimentos apropriados que permitam resolver corretamente os problemas, procedimentos estes que são adotados quando da instrução sobre a divisão no contexto escolar.

Embora tratados de forma exploratória, os dados obtidos contribuem para uma maior compreensão do conceito de divisão em termos de conhecimento procedural, aqui representado pelo desempenho na resolução de problemas de divisão, e em termos de conhecimento verbal explícito (concepção verbalizada), aqui representado pela definição sobre o que é dividir.

Colocada nesses termos, esta questão pode ser inserida em um quadro teórico mais amplo na psicologia do desenvolvimento cognitivo, tomando por base o modelo de descrição representacional proposto Karmiloff-Smith (1992). Segundo a autora, como mencionado nas discussões teóricas deste artigo, são múltiplas as formas de representar um conhecimento, formas estas que vão desde uma representação implícita até atingirem o formato em que estão tanto disponíveis à consciência como são também explicitadas na lin-

guagem. Nesta perspectiva, as crianças que resolvem com sucesso os problemas e que são também capazes de atribuir um significado matemático à divisão, estão de posse de ferramentas poderosas e necessárias ao raciocínio matemático. Em outras palavras, a criança que domina a linguagem matemática, aplicando-a aos princípios que governam a divisão, e que também resolve apropriadamente os problemas está em um nível de conhecimento mais elaborado do que a criança que sabe a linguagem e não resolve corretamente, ou que resolve e não sabe a linguagem. Saber a linguagem e aplicá-la, além de saber operar sobre os números envolvidos no enunciado dos problemas, são conhecimentos cujas relações precisam ser examinadas mais a fundo e em relação a outros conceitos matemáticos. Tão importante quanto compreender como as crianças estabelecem as relações numéricas envolvidas na divisão, ou em outros conceitos matemáticos, é compreender como a criança usa a linguagem própria desses conceitos e quais os significados a ela associados.

Referências

- Anghileri, J. (1993). The language of multiplication and division. Em K. Durkin & B. Shire (Orgs.), *Language in mathematical education. Research and practice* (pp. 95- 104). Buckingham, Philadelphia: Open University Press.
- Anghileri, J. (1997). Uses of counting in multiplication and division. Em I. Thompson (Org.), *Teaching and learning early number* (pp. 41-51). Buckingham: Open University Press.
- Carvalho, P.M. & Spinillo, A.G. (1996). Um estudo exploratório sobre conceitos biológicos em crianças. Em IV Congresso de Iniciação Científica da UFPE, Recife. *Livro de Resumos*. p. 432.
- Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em M.H. Novaes & M.R.F. Brito (Orgs.), *Psicologia na Educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP, 1, (5), 151-165, Rio de Janeiro: Editora Xenon.
- Correa, J. & Bryant, P. (1994). *Young children's understanding of division concept*. Proceedings of the XIII Biennial Meeting of The International Society for Study of Behavioural Development (ISSBD), p. 353.
- Correa, J. Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*, 90, (2), 321-329.
- Donaldson, M.L. (1986). *Children's explanations. A psycholinguistic study*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985) The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 16, 3-17.
- Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, 3, 323-339.
- Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity. A developmental perspective on Cognitive Science*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Kornilaki, E. & Nunes, T. (1997, julho). *What do young children understand about division?* Trabalho apresentado na 21st Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland.
- Lautert, S.L. (2000). *A representação de operações e problemas de divisão em crianças: da linguagem matemática oral para outras formas de representação*. Dissertação de Mestrado, Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Lautert, S.L. & Spinillo, A. G. (1999). Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem matemática oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia*. 7 (1), 23-36.
- Luria, A.R. (1990). *Desenvolvimento Cognitivo*. São Paulo: Editora Ícone
- Moreira, N.C.R. (1988). Portadores de texto: concepções de crianças quanto a atributos, funções e conteúdo. Em M.A. Kato (Org.), *A concepção da escrita pela criança*. (pp. 15- 52). São Paulo: Pontes.
- Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Nunes, T.; Campos, T.M.M.; Magina, S. & Bryant, P. (2001). *Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas*. São Paulo: PROEM Editora.
- Roazzi, A. & Bryant, P. (1997). Explicitness and conservation: Social class differences. *International Journal of Behavioural Development*, 21 (1), 51-70.
- Selva, A.C.V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. Em A. Schliemann & D. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e pesquisa* (pp. 95-119). Campinas: Papirus.
- Spinillo, A.G. (1994). O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola. *A Educação Matemática em Revista (SBEM)*, 2, (3), 41-50.
- Spinillo, A.G. (1998). Considerações acerca da relação adulto criança na pesquisa em psicologia cognitiva. *Teoria, Investigação e Prática*. 3, 97-110.
- Spinillo, A. G.; Albuquerque, E.B. & Lins e Silva, M.E. (1998). Para que serve ler e escrever? O depoimento de alunos e professores. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília*, 193 (79), 5-16.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Em T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Orgs.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. New Jersey: Lawrence Earlbaum.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh & M. Landau (Orgs.), *Acquisition of mathematics: Concepts and process* (pp. 127-174). London: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, (5), 76-90.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Recebido em 15/01/2001
Primeira decisão editorial em 11/12/2001
Versão final em 14/02/2002
Aceito em 10.08.2002 ■

ASSINATURAS

Assinaturas de *Psicologia: Teoria e Pesquisa* podem ser solicitadas diretamente à:

Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa
Secretaria de Divulgação
Universidade de Brasília - Instituto de Psicologia
70910-900 Brasília DF.

O valor da assinatura é R\$ 66,00 ou 2 parcelas de R\$ 33,00. Números avulsos para assinantes custam R\$ 20,00. Números avulsos para não assinantes custam R\$ 37,00. Valores sujeitos a atualização.

OFERTA ESPECIAL

Psicologia: Teoria e Pesquisa oferece um desconto especial de 20% na assinatura individual para estudantes de graduação ou pós-graduação para pedidos de, no mínimo, 10 assinaturas. A solicitação deste desconto especial deverá ser acompanhada de comprovante da respectiva instituição de ensino, ou carta assinada por professor, que ateste a condição de aluno dos solicitantes