CURY, Helena N. (Org.) Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2000. p.49-87.

É necessário ser preciso? É preciso ser exato?
"Um estudo sobre argumentação matemática" ou "Uma investigação sobre a possibilidade de investigação"

Antonio Vicente Marafioti Garnica

Introdução

Esta introdução foi, naturalmente, produzida depois de todo o texto ter sido elaborado. E, providencialmente, inicia-se com um alerta: não sacralizemos o escrito. Pensemos no livro, no artigo, no manifesto, no panfleto, como uma forma de circulação de idéias, um compartilhar de pensamentos. Assim concebendo, estas anotações foram geradas mais como uma proposta de pesquisa futura do que como cristalização de uma investigação já terminada.

Iniciamos este capítulo, porém, com uma retomada do que, até o momento, tem sido nosso principal foco de atenção na pesquisa em Educação Matemática: a linguagem.

Ao estudo das formas de linguagem – natural e artificial – encontradas nas salas de aula de Matemática temos nos dedicado. No começo, auscultamos as possibilidades de leitura do texto escrito, como o manual didático, para, depois, percebendo que o estilo da Matemática poderia ser caracterizado pela prova rigorosa, num ambiente formalizado, partirmos para o estudo das demonstrações.

Sendo a pesquisa atividade de procura – não ponto de chegada –, nos deparamos com a necessidade de estudar outras formas de argumentação, menos formalizadas do ponto de vista matemático, que ocorrem em momentos de ensino e aprendizagem. Algumas perplexidades, sempre existentes mas pouco elaboradas sistemática e conscientemente, tomaram vulto durante os estudos que, no momento, estamos desenvolvendo como professor visitante na Indiana University Purdue University Indianapolis[1]. É este o motivo pelo qual incluímos, no *corpus* do texto, um breve esboço das atuais linhas norteadoras da Educação nos Estados Unidos da América: uma visão panorâmica do contexto educacional que, embora

[1] Curiosamente, um dos momentos em que se pode perceber a gestação da idéia desenvolvida neste capítulo ocorreu quando discutíamos dificuldades próprias da alfabetização em língua estrangeira e certas particularidades da atividade de tradução. Tentávamos, então, explicar a quase impossibilidade de uma tradução que, em certos casos, preservasse toda a beleza da criação poética, para o que demos como exemplo a conhecida frase de Fernando Pessoa que inspirou, também, o título desse estudo.

inicial, já nos permite perceber a proximidade dos norteadores que regem, em Educação Matemática, tanto a política educacional americana quanto a brasileira. Uns poucos relatos recolhidos em salas de aula de curso de formação de professores para a escola elementar são explicitados para que, a partir deles, possamos estabelecer a proposta de pesquisa, no final desse capítulo.

É essa, pois, a seqüência iniciada com o próximo tópico, em que tratamos a questão da linguagem sob um olhar de natureza filosófica, para continuar o percurso até a proposta de trabalho acima anunciada.

Linguagem, Matemática e Educação Matemática

A comunicação da experiência vivida é surpreendente porque paradoxal, conflituosa. A plenitude do que vivenciamos, o nosso olhar sobre o mundo é, reconheçamos, uma experiência intransferível. Mas, no entanto, podemos nos referir às coisas com as quais convivemos e, na tentativa de romper a solidão própria do humano, lançamo-nos no exercício de comunicar a experiência experienciada. E algo de misterioso ocorre pois, a cada instante da vida, rompemos essa incomunicabilidade da experiência: algo fica no que comunicamos para o outro. Fica um sentido. Ficam fagulhas de compreensão com as quais reconstróem-se, cada um ao seu modo, as experienciações. Viver como seres da linguagem não é, pois, uma luta vã, embora seja necessário reconhecer os limites de nossas possibilidades. Se somos eternos encarcerados nas malhas da linguagem somos, também, pela linguagem libertados. E nos manifestamos no mundo.

Essa nossa manifestação no mundo ocorre de várias formas. Há um equívoco, próprio do senso comum, em pensar a linguagem já como linguagem escrita ou falada. Conquanto a escrita tenha permitido ao humano o sabor de muitas de suas conquistas – a própria noção de “cultura” pode ser a ela creditada[2] - , o registro de caracteres gráficos é um elemento recente na história da humanidade e, portanto, não pode responder por todo o processo comunicativo. Embora nossa intenção, aqui, seja a de uma investigação sobre a linguagem matemática – sendo que, para isso nos deteremos em formas de comunicação essencialmente vinculadas à escrita – nossa concepção de linguagem engloba as mais diversas formas de manifestação, que já se iniciam com o próprio estar-se jogado no mundo, passando, por exemplo, pelo escrito, pelo oral, pelo gestual e pelo pictórico.

[2] Alguns trabalhos de Paul Ricoeur são, sob nosso ponto de vista, essenciais para a compreensão das questões relativas ao texto e sua interpretação. Dentre esses, duas obras têm especial importância: os dois “Ensaios de Hermenêutica” (***O conflito das interpretações***. Lisboa: edições 70, 1986; e ***Du texte à l’áction***. Paris: Denil, 1986) e ***O discurso da Ação***. Lisboa: edições 70, 1988. Na perspectiva histórica sobre a escrita são também extremamente significativos os trabalhos publicados sob a vertente da História Nova. Em especial, citamos o volume “Memória e História” da ***Enciclopédia Einaudi***, em sua versão portuguesa.

Mais do que investigar a linguagem matemática – o que certamente exige um estudo, mesmo que rápido, de seus estilos e formas discursivas – nossa intenção é investigar a linguagem matemática no contexto da sala de aula. Essa alteração de foco é extremamente significativa, posto que se mudam, além das regiões de conhecimento, as manifestações e concepções, esboçando-se, obviamente, um novo campo para o debate político. Por mais que se afirme que o campo científico deve caracterizar-se pelo livre e público escrutínio, sabe-se que muitas das esferas da ciência estão, ainda, no domínio do privado. A Matemática, pensada como prática científica, certamente está dentre as formas de conhecimento que, por inúmeras razões, encapsulam-se na privacidade. Sua linguagem, sua forma de comunicação, talvez seja um dos elementos mais possantes a exigir e defender essa privacidade e, na tentativa de desvincular-se do mundano (uma das características do pensamento formal), detém-se a grupos restritos, em formas específicas e cifradas de ação.

“Ação” é, também, um dos termos que nos serão muito caros. Pois a própria Educação, em seus estudos teóricos (dos quais esse artigo não é exceção), exercita-se paradoxalmente num rompimento com o cotidiano. A linguagem da pesquisa em Educação, tanto quanto a linguagem da pesquisa em Matemática, não é uma forma “simples” de comunicação: também ela se veste com conceitos próprios e constrói argumentações pautadas nesses conceitos que, não poucas vezes, são obscuros ao grande grupo externo ao meio em que as teorias são produzidas. Ocorre que a Educação – e falamos especificamente, aqui, de Educação Matemática – realiza-se numa prática, numa ação de comprometimento e vinculação com o mundo, o que, no senso comum, chamamos de “o mundo real”, sem as divagações filosóficas usuais quando o termo “realidade” entra em cena. Isso credencia a Educação Matemática como uma área de conhecimento teórico-prático, que ocorre exatamente no campo de interseção dos avanços teóricos que visam à prática e são possíveis a partir dessa mesma prática, num processo de retro-alimentação. Por esse motivo, nossa estratégia, nesse capítulo, é a de vincular, tanto quanto possível, a trama teórico-filosófica a exemplos concretos, coletados em salas de aula “reais”, embora saibamos do risco de tal iniciativa poder ser tomada como artificial na elaboração de um estudo que se pretende teórico-prático.

O território teórico-prático exige reconhecimento. É necessário esboçar certas linhas divisórias, certos modos típicos de ação. No campo da prática, buscando investigar a linguagem matemática em suas potencialidades e seus limitantes, algumas considerações são importantes, embora óbvias em sua maioria. A primeira constatação, já previamente esboçada, diz respeito à manifestação da Matemática no mundo, que se dá em duas grandes frentes: a “científica” e a “pedagógica”. É exatamente essa a manifestação que nos permite falar em uma prática (“científica”) matemática e uma abordagem teórico-prática à Matemática (a

Educação Matemática) como formas distintas – mas conectadas – de compreensão do mundo.

A manifestação do discurso “científico” da Matemática dá-se, fundamentalmente, na pesquisa, na construção do conhecimento matemático, como feita por seus profissionais. Nisso incorporam-se outras manifestações, das quais são fundamentais: a produção do conhecimento matemático em estado nascente, a discussão sobre o conhecimento produzido – que se dá entre os pares de comunidade científica, oral ou textualmente, possibilitando reelaboração, embora restrita ao grupo, do que foi inicialmente gerado – e, finalmente, sua divulgação – preponderantemente via textos especializados, publicados em veículos específicos e dificilmente abertos a reelaborações, mas sugerindo possibilidades de serem complementados. Colocam-se, nessa manifestação do discurso científico, o oral e o escrito. A mediação do oral servirá não só como forma de veiculação do escrito, mas terá, no grupo restrito de especialistas no qual se dá a comunicação da produção, a função de explicitar intuições primeiras (que são não discursivas em sua gênese) ocultadas pelo texto que é discurso fixado, concretizado, pela escrita.

Há que se reiterar a curiosa e contraditória especificidade de uma linguagem – a matemática – preponderantemente escrita que, embora se pretendendo formal, dicotomizando radicalmente semântica e sintaxe, necessita, ainda, do apoio da linguagem natural para a comunicação das idéias. A linguagem natural, sendo freqüentemente escritura e oralidade, interfere nas pretensões formais e força, assim, a natural vinculação entre forma e conteúdo tão arduamente defendida como domínios separados numa linguagem artificial cuja gramática é definida pela Lógica.

Por um outro lado, vemos que a manifestação do discurso pedagógico da Matemática dá-se nas inúmeras e divergentes situações de ensino e aprendizagem, dentre as quais a prática educativa da escolaridade formal tem sido hegemônica – e talvez, equivocadamente – focada nos trabalhos dos quais temos tido referência. Mesmo que aqui estejamos focando a linguagem matemática em cursos universitários (especificamente, veremos em breve, os cursos de formação de professores de Matemática nas licenciaturas) deve-se reconhecer a pluralidade das formas de ensino e aprendizagem de Matemática, além das que ocorrem intra-muros na instituição escolar. Mesmo a pesquisa em Educação Matemática tem incorrido nesse equívoco de não considerar, em suas abordagens, formas alternativas de ação, culturalmente legítimas e essenciais para o entendimento dos modos de argumentação acerca dos objetos matemáticos. A “Educação” tem sido, não raras vezes, equivocadamente tomada como “escolaridade formal” e, decorrente disso, a “Educação Matemática” é concebida como o estudo das formas de apropriação do conteúdo matemático em salas de aula. Conceber “Educação” como a luta pela atribuição de significados, como nos ensinava Joel Martins, permitindo a ampliação do atual panorama, parece ser essencial.

No discurso pedagógico da Matemática – o campo de uma Educação Matemática – interagem posturas, metodologias, didáticas, textos e oralidade, “esferas” obviamente não disjuntas. Interessados nas formas de tratamento da linguagem matemática em cursos formais de licenciatura, nos restringiremos, aqui, à busca de similaridades e divergências entre essas duas formas de manifestação discursivas da Matemática: a pedagógica e a “científica”, seguindo, muito de perto, o trabalho de Seiji Hariki[3].

Como elementos de reconhecimento mútuo, temos que ambos os discursos pautam-se na construção do conhecimento matemático plasmada na comunicação, na negociação oral de significados e na mediação desempenhada pelo texto escrito. E nesses mesmos elementos encontramos as divergências entre os discursos: a comunicação entre os especialistas, na prática científica, restrita a um grupo fechado, funda-se na competência de conteúdos e no domínio absoluto da linguagem própria da área. A comunicação na prática pedagógica, ao contrário, é rica em pluralidades: contextos educativos distintos são distintos mundos, comportando pessoas distintas quer seja em relação aos conteúdos, quer seja quanto ao domínio lingüístico – natural ou formal – envolvido, havendo diferentes vivências contextais em jogo (vivências essas que a pertença a um grupo, na prática científica, trata de abrandar, partindo de uma “homogeneidade” entre os filiados). Há significativa diferença na qualidade das mensagens enviadas em cada um desses grupos: no discurso científico, são tratadas formas de Matemática em estado nascente; no pedagógico, trabalha-se com uma Matemática já solidificada, disponível, intensivamente reproduzida. Também é distinta a mediação feita pelo texto: sua função, na prática científica, é de divulgação, escoamento de produção; na prática pedagógica, a função precípua é a da interiorização. A natureza dos textos envolvidos difere relativamente, embora caracterizem-se, ambos, pelo modo apresentacional, sendo negligenciadas as formas de apreensão de conceitos, as trajetórias para obtenção de resultados: o “caminho das pedras”, em suma. Mas os textos didáticos são quase-formais, enquanto textos científicos são radicalmente formalizados.

Embora esse estudo introdutório sobre os discursos científico e pedagógico estabeleça, mesmo que apoucadamente, elementos para análise mais demorada, o essencial para nossos propósitos não foi claramente explicitado: trata-se do tráfego de concepções existente entre os domínios científico e pedagógico.

---

[3] HARIKI, S. ***Analysis of Mathematical Discourse: multiple perspectives***. Doutorado em Filosofia. University of Southampton, Inglaterra, 1992.

Na sala de aula de Matemática, posturas e valores, próprios do campo da pesquisa, insinuam-se, são reproduzidos, fortalecidos e legalizados. Há um deslizamento da prática científica para a prática pedagógica da Matemática, prevalecendo o discurso científico sobre o discurso pedagógico, como pertinentemente apontado no trabalho de Maria Regina Gomes da Silva[4].

Nesse deslizamento de concepções, parece ser natural que a forma de argumentação utilizada para garantir a validade do conhecimento matemático seja, hegemonicamente, a prova rigorosa, a demonstração formal. Ela é o foco de convergência dos olhares quando da gestação, geração, análise e avaliação do conhecimento matemático, quer seja na prática científica, quer seja na prática pedagógica desenvolvida, principalmente, nos cursos superiores.

Curiosamente, em artigo de 1970[5], Morris Kline, debatendo-se contra a implantação do que foi então chamado Matemática Moderna, e aparentemente

---

[4] SILVA, M.R.G. da. ***Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática***. Mestrado em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro, 1993.

[5] Morris Kline, "Logic *versus* Pedagogy" In ***The American Mathematical Monthly***, Vol. 77, n. 3. (Mar., 1970), pp. 264-282. Desse artigo, por dar suporte à nossa trama argumentativa, citamos algumas considerações sobre os motivos pelos quais, segundo o autor, tomar o método dedutivo como modelo pedagógico é uma distorção:

> "Primeiro ponto: a Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas. Mesmo quando um matemático está convencido de que seu resultado é correto, há muito para ser criado até encontrar a prova disso. Como Gauss afirmou: 'Tenho meu resultado, mas ainda não sei como obtê-lo'. Todo matemático sabe que trabalho árduo /…/ é necessário e o sentido da realização deriva do esforço criativo. Construir a forma dedutiva final é uma tarefa chata. A lógica não descobre nada, nem o enunciado de um teorema nem sua prova, nem mesmo a construção de formulações axiomáticas de resultados já conhecidos /…/ Há um outro motivo pelo qual a versão lógica é uma distorção. Os conceitos, teoremas e provas emergem do mundo real./…/ a organização lógica é posterior. De fato, se for pedido a um aluno realmente inteligente que cite a lei comutativa para justificar, digamos, 3.4=4.3, ele muito bem pode perguntar: 'Por que a lei comutativa é correta?'. De fato, nós aceitamos a lei comutativa porque nossa experiência com grupos de objetos nos diz que 3.4=4.3 e não o contrário. /…/ A insistência na abordagem dedutiva engana o aluno ainda de outro modo. Ele é levado a acreditar que a matemática é criada por gênios que começaram pelos axiomas e raciocinaram diretamente desses axiomas para os teoremas. O aluno sente-se humilhado e desconcertado, mas o professor, prestativo, está totalmente preparado para demonstrar-se como um gênio em ação. Talvez a maioria de nós não necessite ouvir como a Matemática é criada, mas parece ser útil atentar para as palavras de Félix Klein: 'Você pode ouvir de não-matemáticos, especialmente dos filósofos, que a Matemática consiste exclusivamente em traçar conclusões a partir de premissas claramente enunciadas; e que, nesse processo, não faz diferença o que essas premissas significam, se são verdadeiras ou falsas, desde que elas não se contradigam. Mas alguém que tenha produzido Matemática falará algo bem diferente. De fato, aquelas

contradizendo essas nossas afirmações, defende que a visão da abordagem dedutiva e formal como sendo a essência da Matemática é uma consideração equivocada que (apoiado em Félix Klein) ele credita aos filósofos e não aos matemáticos. Kline pretende, com sua possante retórica e apoiado em exemplos históricos extremamente esclarecedores, restabelecer o primado da intuição nos processos de criação do conhecimento matemático, advogando para que essa atenção à intuição seja levada às salas de aula como proposta pedagógica. Mas a contradição, segundo cremos, é apenas aparente, pois as práticas hegemônicas estão presentes, diluídas em várias manifestações claramente perceptíveis. Não convivemos com os Lagranges, Poincarés e Weils que dão suporte aos exemplos de Klein. Convivemos com profissionais que em seu trabalho diário, bem nos mostram pesquisas recentes, desenvolvem e reproduzem a ideologia da certeza matemática como certeza absoluta, do método dedutivo como redentorista e da concepção de que a excelência do conteúdo, por si, garante a prática pedagógica. No mais, convivemos com os vetores da mesma ideologia que, em meados da década de 60, intituiu a abordagem pedagógica que, nesse artigo, é alvo do autor.

Disso, chegamos ao que é o tema central desse nosso texto: as formas de argumentação acerca do conteúdo matemático utilizadas em programas de licenciatura[6].

Algumas questões podem nortear nossa investigação: que é a prova rigorosa? Por quais caminhos iniciou sua presença, hoje dominante, na produção de conhecimento matemático? Há outras possíveis formas de argumentação sobre a validade das afirmações em Matemática? Quais (e por que) resistências têm sido enfrentadas para a utilização de modos alternativos de justificar?

---

pessoas estão pensando somente na forma cristalizada na qual as teorias matemáticas são apresentadas ao final de um processo. O investigador em Matemática ou em outra ciência, entretanto, não trabalha nesse rigoroso esquema dedutivo. Ao contrário, ele faz uso essencial de sua imaginação e procede indutivamente, apoiado por expedientes heurísticos. Pode-se dar numerosos exemplos de matemáticos que descobriram teoremas da maior importância que eles mesmos não puderam provar. Poderíamos, então, nos recusarmos a reconhecer isso como uma enorme realização e, em referência ao que foi dito acima, insistir que isso não é matemática? /…/ nenhum julgamento de valor pode negar que o trabalho indutivo da pessoa que primeiro anuncia um teorema é, ao menos, tão valoroso quanto o trabalho dedutivo daquele que primeiro o provou. Pois ambos são igualmente necessários, e a descoberta é a pressuposição de sua conclusão posterior'."

[6] Este tema tem estado sob nosso olhar, de forma mais sistemática, desde os estudos para o doutorado (GARNICA, A.M.G. ***Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professsor de Matemática***. UNESP, Rio Claro, 1995). Parte desse trabalho, especificamente o levantamento bibliográfico realizado, está publicado em GARNICA, A.V.M. "Da Literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: um levantamento". ***Quadrante***. Lisboa: Portugal. Vol. 5, n. 1, 1996. Nossas considerações, aqui, são retomadas desse mesmo material.

Argumentação e Prova Rigorosa

No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidos como sinônimos: é a argumentação que atesta a veracidade ou autenticidade; o que dá garantias; é testemunho, processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios; é dedução que mantém a verdade de sua conclusão, apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras. Em Matemática, "Prova" ou "demonstração" sempre vêm, implícita ou explicitamente, adjetivados: são rigorosas. A necessidade ou não de uma tal adjetivação dependerá, em muito, dos aspectos focados: para uns – os matemáticos chamados "puros" – uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor estabeleceria, entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas do programa estabelecido por Euclides, n'***Os Elementos***, no terceiro século antes de Cristo. O programa euclideano, plasmado numa concepção platônica, assegurado e elevado ao status de essencial ao fazer matemático opera, principalmente, pelo formalismo, concepção que mais do que qualquer outra abordagem., intervém no fazer cotidiano da sala de aula e na própria produção científica em Matemática. A noção de prova é um dos principais eixos pelo qual trafegam as concepções sobre Matemática. Nesse eixo são engendrados tanto o caráter mítico da Matemática, quanto uma proliferação desmedida da ideologia da certeza, as significações unívocas de seus conceitos e seu caráter de eternidade espaço-temporal. A formalização do texto matemático, operando pela tentativa de exclusão do sentido, causa para este sentido, na verdade, uma "morte em moratória", mas legaliza ideologias e mitos freqüentemente danosos ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Em Lavalle[7] vemos, com mais clareza, aspectos dessa afirmação:

> "*/.../ o texto formalizado será dominável, certo, tranqüilizador e rigoroso. A formalização se apresenta sempre como elaboração, remanejamento de um discurso espontâneo, natural, ingênuo, centrado na intuição da presença do objeto. /.../ Uma 'palavra', segundo a expressão de Bourbaki, é um signo no texto inicial, isto é, totalidade de um significante e de um significado. O que é signo para o matemático em sua prática primeira torna-se forma vazia na formalização de seu texto. /.../ O ponto capital em tudo isso é que a forma não suprime o sentido, ela não faz senão empobrecê-lo, afastá-lo, conservá-lo a sua disposição. Crê-se que o sentido vai morrer, mas é uma morte em moratória: o sentido perde o seu valor, mas guarda a vida, da qual a*

[7] LAVALLE, P. "O mito em Matemática" In LUCCIONI, G. (org.). ***Atualidade do Mito***. São Paulo: Duas Cidades, 1977.

> *forma do mito vai nutrir-se. /…/ A Matemática torna-se mítica quando procura fundar-se pela exclusão do sentido.*” (p. 193-202).

O programa euclideano, fundante da formalização que modernamente se cristalizará com a Axiomática de Hilbert, está visceralmente vinculado à transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva. Duas são as explicações mais freqüentemente dadas a essa transformação. Arsac[8] trata dessas duas teses, gerando, por exclusões e complementações, uma terceira. A tese clássica sobre os motivos para o surgimento da prova rigorosa – conhecida como “*externalista”* por não envolver diretamente a produção de conhecimento matemático – é dada na afirmação de que, naturalmente, ocorreria, na Matemática então produzida, a aplicação das regras do debate argumentativo que governava a vida política na cidade grega, a *pólis*. Por outro lado, a tese internalista, cuja pergunta é “qual problema (matemático) tornou necessária a demonstração?” – considera como gerador da transformação o obstáculo enfrentado com a questão da irracionalidade. Em relação a essa tese, duas faces devem ser consideradas: uma análise num quadro aritmético e outra num quadro geométrico. No primeiro, constata-se que o número 2 não admite raiz quadrada racional, enquanto que na abordagem geométrica constata-se a impossibilidade da diagonal do quadrado admitir partição comum com seu lado. A incomensurabilidade, porém, é impossível de ser constatada única e exclusivamente a partir do traçado gráfico. Pela figura, acreditar-se-ia na possibilidade da partição comum. Assim, as provas da irracionalidade no domínio aritmético implicam o uso do raciocínio por absurdo. Não se pode, entretanto, precisar o grau de abstração e a necessária axiomatização do conceito de número utilizada, mas essas considerações permitem a Arsac elaborar uma nova tese, dupla: (a) sem o problema da irracionalidade a transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva não se daria, mesmo na sociedade grega; e (b) num outro contexto social, mesmo se confrontados com o mesmo problema, a Matemática não teria se transformado como ocorreu na Grécia.

Concordando com a tese de Arsac, voltamos, então, a esclarecer o que entendemos por concepção platônica da Matemática, posto que o programa euclideano, pelo qual se sistematizou definitivamente a matemática em seu modelo hipotético-dedutivo, recupera e potencializa a concepção de que os objetos – e no caso os objetos matemáticos – sejam vistos fundados no Realismo, existentes no mundo perfeito das perfeitas formas. Importante sobre o tema, na

---

[8] ARSAC, G. “L’origine de la démontration: essai d’épistemologie didactique” In ***Récherches en Didactique des Mathématiques***, 8(3), 1987.

literatura nacional, é o trabalho de Luís Márcio Pereira Imenes[9], no qual os fundantes da concepção platônica são explicitados e analisados tanto em livros didáticos quanto no discurso de professores, esclarecendo, por fim, o porquê desse modelo platônico poder ser considerado elemento essencial para a compreensão do fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Ainda não temos caracterizado, de modo preciso, o que se chama, hoje em dia, de Matemática Platônica, ou a Matemática feita sob uma ótica realista. Davis[10] nos dá alguns indicativos:

> "*O século XX ainda não delineou o que, de modo genérico, chamamos de 'Matemática Platônica'. Alguns de seus princípios são os que seguem:*
> - *a crença na existência de certas entidades matemáticas ideais /…/;*
> - *a crença em certos modos de dedução;*
> - *a crença de que se uma afirmação matemática faz sentido, então ela pode ser provada como verdadeira ou falsa;*
> - *a crença de que, fundamentalmente, a Matemática existe separada dos seres que a fazem /…/*
>
> *Embora tais crenças tenham sido questionadas por matemáticos do porte de Krönecker, Gödel, Borel, Brower, Weyl e, mais recentemente, Bishop, as crenças platônicas continuam a reger o dia-a-dia da Matemática. /…/ Numa série de conferências sobre Matemática não-platônica, um comentário típico era: 'Bem apresentado…mas irrelevante. Voltemos ao nosso (platônico) quadro negro…'. Como a prática é realizada por uma comunidade, mesmo que o rei esteja nu, tudo estará bem se toda a corte assim também estiver…*" (p. 252)

À Matemática, aqui vista como um conjunto de práticas sociais e seus agentes, caberá legislar sobre o processo de validar (ou não) afirmativas sobre os objetos matemáticos. Os matemáticos dizem pautar-se, para isso, num cânone extremamente rigoroso que engloba definições e normas de ação consistentes e coerentes, pois ditadas pela Lógica Matemática. Esse parâmetro de rigor, porém, pode ser contestado. Temos em Hanna[11] uma dessas contestações:

---

[9] IMENES, L.M.P. ***Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem em Matemática***. Dissertação de Mestrado. UNESP: Rio Claro, 1989.
[10] DAVIS, P. "Fidelity in Mathematical discourse: is one plus one really two?" In ***The American Mathematical Montly***, 79(3), 1972.
[11] HANNA, G. "More than Formal Proofs" In ***For the learning of Mathematics***. 9(1), 1989.

> "*O desenvolvimento da Matemática e os comentários dos matemáticos praticantes sugerem que se aceita um novo teorema quando alguma combinação dos seguintes fatores está presente:*
>
> - *eles compreendem o teorema, os conceitos nele incorporados, seus antecedentes lógicos e suas implicações, e nada existe que sugira que ele não seja verdadeiro;*
> - *o teorema é significativo o suficiente para ter implicações em um ou mais ramos da Matemática (e, então, é importante e útil o suficiente para garantir estudo e análise detalhados);*
> - *o teorema é consistente com o corpo dos resultados matemáticos aceitos;*
> - *o autor tem uma reputação impecável como expert na área à qual se refere o teorema;*
> - *existe um argumento matemático convincente (rigoroso ou não) para ele, de um tipo que já tenha sido encontrado antes;*
>
> *O papel da prova no processo de aceitação é similar ao seu processo de descoberta, as idéias matemáticas são descobertas por um ato de criação no qual a Lógica Formal não está diretamente envolvida. Elas não são derivadas ou deduzidas, mas desenvolvidas num processo cuja significância para o corpo existente da Matemática e seu futuro potencial são reconhecidos pela intuição informal. Embora a prova seja um pré-requisito essencial para a publicação, ela não precisa ser nem rigorosa nem completa. /…/ os matemáticos, mesmo os matemáticos ideais, são hábeis para fazer e conhecer Matemática somente por participarem de uma comunidade matemática*." (p. 21-22)

O processo de validação do conhecimento matemático é, portanto, a se aceitar as argumentações dos autores citados, nitidamente social, não envolvendo, na prática, a rigorosa exatidão do modelo lógico-formal. É um trabalho interno, ideológico, da comunidade de profissionais historicamente encarregada da produção desse conhecimento.

Esse *modus operandi* da comunidade matemática foi estudado por Silva[12], que investiga as intrincadas relações existentes na esfera da prática científica, esclarecendo como se dá a criação, aceitação, homologação e divulgação dos resultados em Matemática. Quando trata do "círculo" *pensamento⇔individualidade⇔tutela*, a autora mostra como a certeza matemática é preservada. Desse trabalho, a seguinte afirmação, que complementa as disposições de Hanna, foi extraída:

> "*O trabalho com Matemática é um ato de verificação interna no sentido em que a validação de uma determinada afirmativa, ou o encadeamento/interconexão de elementos das ou para as afirmativas, dispensam, em última instância, referências outras, de natureza material (pessoas, bibliografia, experimentos etc). Ultrapassados os desenvolvimentos iniciais para o desenrolar da tarefa, a continuidade do trabalho depende do aluno [orientando] ter adquirido ou não o esquema de verificação na situação determinada pela especificidade do trabalho (estudo), passando, 'aluno-orientador-grupo de especialistas' a um nível de cumplicidade que se constituirá como um grupo em si na medida em que exercerem um esforço para impedir o deslize dos significantes matemáticos.*" (p. 219)

Interessante notar que essa cumplicidade desenvolvida na comunidade matemática – na qual, na verdade, centramos nosso olhar por sua especificidade, que aqui é nosso tema, mas que se observa em todas as esferas o chamado "meio científico"- permite até que o formalismo, que deveria caracterizar essa produção, seja negligenciado. Em seu artigo de 1972, já citado, Davis[13] afirma, com o aval de muitos revisores e consultores conceituados, que muitos dos teoremas divulgados em periódicos científicos são falsos por se apoiarem em resultados (falsos) não provados ou provados, com lacunas suficientemente grandes para comportar incorreções. O tão defendido formalismo parece ser, portanto, algo meramente retórico, ou algo cuja materialização, na verdade, é a própria comunidade científica que, paradoxalmente, encontra norteadores outros, sociais e informais, para balizar sua produção.

---

[12] O trabalho de Maria Regina Gomes da Silva, já citado, tanto quanto os outros referenciados nesse texto, merecem leitura completa. Certamente nossos excertos não são suficientes como sumário dessas obras.

[13] Estamos nos referindo, aqui, novamente ao texto publicado no ***The American Mathematical Montly***.

Um estudo mais aprofundado sobre a linguagem matemática e a prova rigorosa, apoiado num maior número de referências bibliográficas, nos tiraria do eixo central da proposta para este texto. Os textos já indicados nas notas de rodapé poderão suprir essa lacuna para que, com o que até aqui foi desenvolvido, possamos focar mais diretamente a Matemática em situações de ensino e aprendizagem e certas formas de argumentação desenvolvidas. Uma síntese de compreensões que vem de um estudo bastante panorâmico do que até agora foi publicado sobre a prova rigorosa em Matemática e Educação Matemática, pode ser esboçado em sete itens[14]:

> - A prova rigorosa é elemento fundamental se pretendemos compreender como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de Matemática sendo, por isso, tema importante à Educação Matemática;
>
> - no que se refere à questão do chamado “rigor matemático” os estudos publicados parecem não conceber a possibilidade de um rigor alheio à Matemática dita “formal”, desenvolvida na esfera acadêmica, mesmo criticando e tomando tais possibilidades em suas limitações. Ou, de outro modo, não são vistas como "rigorosas" argumentações informais ou etno-argumentações[15];
>
> - o surgimento da prova, à época dos gregos, e mesmo sua formalização amplamente divulgada no mundo contemporâneo, carecem de estudos históricos mais apurados[16]. É necessária uma arqueologia da transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva;
>
> - a utilização da Informática para desenvolver provas ainda é questão altamente polêmica, cercada de paradoxos que focam validade, teoria e prática;
>
> - várias são as referências bibliográficas que tratam de metodologias para a utilização das provas em salas de aula, embora elas possam ser vistas como estudos compartimentados, sem um elo de ligação forte ou claro o suficiente para amalgamá-

[14] Seguimos aqui GARNICA (1995 e 1996), já citados.
[15] Mais adiante trataremos dessas "etno-argumentações".
[16] Mais do que a dificuldade inerente aos levantamentos históricos, deve-se ressaltar uma certa aversão que a ciência contemporânea – mais notadamente as ditas “ciências exatas” – tem manifestado em relação a estudos dessa natureza.

> las num projeto comum, com uma teoria consistente que lhes sirva de fundamentação;
>
> - a prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por critérios nitidamente sociais, afirmação esta que rompe com os aspectos do formalismo que deveriam caracterizá-la;
>
> - quase inexistem trabalhos que tratam especificamente da questão da prova rigorosa no contexto da formação de professores de Matemática.

Argumentação e formação de professores de Matemática: um novo projeto

Falta-nos, agora, situar essas considerações no contexto da formação de professores. Nossas primeiras investigações sobre o assunto nos levaram a compreender que a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica de Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da ideologia do conhecimento absoluto para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas de tratamento alternativas às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais. Consideramos, então, a partir da análise de discursos de professores atuantes em cursos de Licenciatura, que a afirmação sobre a importância da prova rigorosa para formar professores de Matemática era, de certo modo, relativa, pois possível de ser interpretada segundo dois olhares divergentes. A esses olhares chamamos de “leitura técnica” e “leitura crítica”.

Cada uma dessas leituras indica uma concepção própria, um panorama particular. Mesmo a noção de verdade, nessas duas perspectivas, é distinta. Na proposta técnica, a verdade é concebida como “adequação”, ou seja, a verdade ***da sentença*** “espelhando” a ***realidade*** do mundo, uma verdade absoluta e inquestionável, herdeira dos modelos platônicos aos quais já fizemos referência. Por outro lado, na vertente crítica, a verdade aproxima-se muito da verdade enquanto “des-velamento” do mundo, um procurar eterno, uma “verdade” que se constrói no caminho da procura pela verdade: trajetória, não chegada. Procura, não adequação.

Os distintos olhares ligam-se, também, a distintas áreas do chamado conhecimento científico. Pareceu-nos que a proposta técnica[17] ligava-se diretamente à prática científica da Matemática enquanto a leitura crítica estava mais vinculada aos esforços que a Educação Matemática, como área de conhecimento científico emergente, vem desenvolvendo.

Disso tudo, uma proposta mais diretamente perceptível foi a de que algumas disciplinas dos cursos de graduação seriam adequadas para um estudo crítico sobre a prova rigorosa e o fazer do professor. Os cursos de Lógica Matemática, por exemplo, poderiam cotejar abordagens formais e não formais sobre os conceitos matemáticos e procurar, a partir disso, traçar propostas alternativas para argumentar sobre Matemática em sala de aula[18]. Colocou-se, então, ênfase bastante forte nas pesquisas de iniciação científica com alunos de cursos de graduação e em materiais didáticos alternativos.

Essa trama de compreensões nos pareceu suficiente no momento em que terminamos o trabalho de doutorado. Como compreensões nunca são definitivas, sempre podendo ser reabertas, reelaboradas e aprofundadas à luz de nossas vivências, nos voltamos àquelas diretrizes e, num campo de perspectivas novas, retomamos a questão sobre a argumentação matemática em salas de aula reais. Confessamos que, mesmo à época da apresentação formal do trabalho, ficamos apreensivos acerca de algumas considerações feitas pelo Professor Ubiratan D'Ambrósio, nas quais afirmava que deveria haver um cuidado muito grande para que, mesmo um trabalho de natureza crítica como pretendia ser o nosso, não caísse numa defesa do eurocentrismo. Hoje compreendemos melhor as preocupações de D'Ambrósio. Certamente elas nos indicavam a necessidade de maior ousadia

---

[17] Nosso trabalho cuidou de esboçar um tratamento filosófico detalhado acerca dos termos "técnica" e "crítica" na tentativa de evitar os significados estereotipados, do senso comum, que tendem a atribuir valores positivos à crítica em relação à técnica (esta última quase que invariavelmente concebida do ponto de vista da repetição enfadonha, da reprodução em série, num roteiro de ausência de criatividade). Não se pretendeu estabeler um critério valorativo de um olhar em detrimento do outro mas, sim, caracterizar diferentes formas de ação e, obviamente, campos conceituais distintos.

[18] Na verdade, tal proposta poderia ser caracterizada como uma intervenção emergencial no atual quadro das Licenciaturas brasileiras. No Brasil (Cf. BERNARDO, M.V.C. (org.). ***Formação do professor: atualizando o debate***. São Paulo: EDUC, 1989) as Licenciaturas, seguem mais de perto o modelo – equivocado – das Escolas Normais (do século XIX) do que aquele sugerido com a criação da USP, nossa primeira universidade, em 1934. Temos defendido que, atualmente, os cursos universitários para formação do professor têm se guiado por propostas "*frankensteinianas*": currículos são concebidos como programas, e mudanças curriculares, como conseqüência, são montagens e desmontagens no quadro de disciplinas, que são inseridas ou retiradas, em colagens mal acabadas, segundo necessidades imediatas e particulares, com o objetivo de "repensar" os cursos. Não se concebe, ainda, a necessidade fundamental de uma guinada no panorama global dessa formação, instituindo, por exemplo, projetos pedagógicos consistentes, a partir do qual as disciplinas – e sua condução – seriam definidas.

quanto ao tratamento da linguagem matemática em sala de aula. Até então, mesmo que para uma proposta crítica, focávamos a questão "como, a partir da prova rigorosa, engendrar uma análise à prática da Matemática e sugerir abordagens alternativas?" como ponto de partida para a ação. Na verdade, a crítica possível era a prova rigorosa como ponto de partida de um processo. Retomando essas considerações, pensamos em perseguir uma proposta mais ousada do ponto de vista da ação: como compreender as formas de argumentação relativas aos conteúdos matemáticos que, efetivamente, ocorrem em sala de aula? Certamente a prova rigorosa é – ou pode ser – uma dessas formas, mas há outras que, certamente, temos negligenciado e, agora, pretendemos retomar como projeto de pesquisa.

Assim, o que segue nesse capítulo são os contornos iniciais de uma nova etapa de pesquisa que deverá, por sua própria natureza e pela natureza da área de conhecimento na qual se insere – a Educação Matemática –, estar visceralmente ligada à prática desenvolvida em centros de formação de professores de Matemática, no dia-a-dia das salas de aula.

Aqui se faz necessário um parênteses para delinearmos qual é, atualmente, o contexto no qual estamos imersos e do qual recolhemos nossos primeiros dados.

O "novo" contexto

Como professor visitante, na Indiana University Purdue University Indianapolis (IUPUI) temos acompanhado as aulas do curso de formação de professores para a escola elementar (*elementary teachers*). Nos Estados Unidos, ao contrário do que ocorre no Brasil, mesmo a formação para os professores do início da vida escolar é feita nas universidades. A disciplina em questão – "*Math for future elementary teachers*" – é oferecida pela Escola de Educação e trabalha os conteúdos de Matemática básica seguindo a vertente da resolução de problemas[19] a partir das indicações da documentação oficial para a formação de professores[20]. Os alunos

---

[19] MASSINGILA, J.O e LESTER, F.K. ***Mathematics for Elementary Teachers via problem solving***. New Jersey: Prentice Hall, 1998, é o texto adotado em sala de aula.

[20] Há, nos Estados Unidos, documentação similar (mas anterior) aos nossos ***Parâmetros Curriculares Nacionais***. Os chamados ***Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*** (publicados em 1989) e os ***Assessment Standards for School Mathematics*** (publicados em 1995), para a área de Matemática, muito conhecidos no meio internacional da Educação Matemática, são elaborados pelo NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) e serviram como um dos fundantes para a elaboração de nossos PCNs. Seguindo os primeiros *standards*, o NCTM publica, em 1991, documentos que, naturalmente, tornam-se norteadores para cursos de formação de professores de Matemática (***Professional Standards for Teaching Mathematics***).

trabalham em grupos, em três sessões semanais de duas horas. Ao final de cada uma dessas sessões uma tarefa e um *journal*[21] são exigidos para a aula seguinte.

Parece-nos pertinente esboçar, numa visada panorâmica, os norteadores básicos dos documentos que regem o ensino e a aprendizagem de Matemática nos Estados Unidos, visto que nossas observações provêm de salas de aula imersas nesse contexto educacional.

Os ***Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*** – documento básico para o ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas – foram gerados a partir das questões propostas por um outro documento (***A Nation at Risk: the imperative for educational reform***), publicado, em 1983, pela *National Commission on Excellence in Education*. Esses "*standards*" da educação escolar americana são divididos em quatro grandes categorias, sendo a "Resolução de Problemas" a primeira delas, seguida por "comunicação", "raciocínio" e "conexões". Massingila e Lester[22] sintetizam essas disposições:

> "*Atenção especial é dada aos quatro norteadores principais que perpassam todos os níveis de ensino. O primeiro deles é a 'resolução de problemas'. Especificamente, os alunos devem estar envolvidos com a solução de problemas desafiadores e ligados ao mundo real. Os alunos não devem somente aprender a resolver problemas mas, além disso, devem aprender Matemática via resolução de problemas /…/. O segundo desses norteadores principais é 'comunicação', pois 'saber Matemática' será de pouco valor se não soubermos comunicar suas idéias. O terceiro norteador indicado pelo NCTM é 'raciocínio'. Entre outras coisas, 'raciocínio' refere-se à habilidade de pensar em determinado problema e, a partir disso, cuidadosamente avaliar toda e qualquer solução a ele proposta. O quarto norteador trata da 'elaboração de conexões'. Compreender Matemática está diretamente vinculado à habilidade de perceber conexões entre as várias idéias matemáticas, e entre as matemáticas 'escolar' e 'cotidiana'.*"

---

[21] Há grande quantidade de literatura recente, nacional e internacional, de boa qualidade, sobre os *journals* no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Sinteticamente, *journals* são diários nos quais, de forma dissertativa, os alunos argumentam sobre a resolução de um problema ou um determinado tema geral. Os diários devem ser lidos pelo professor e devolvidos ao autor. Acompanha-se, assim, o desenvolvimento cognitivo dos alunos, posto que, nas argumentações dissertativas, obstáculos e facilidades de aprendizagem, ao resolver determinada tarefa, ficam registrados.

[22] Obra já citada.

Os ***Assessment Standards for School Mathematics***, último dos documentos publicados, retoma algumas disposições já presentes no documento de 1989, focando, de modo específico e mais abrangente, a avaliação. Nele, seis parâmetros principais são propostos: "Matemática", "aprendizagem", "eqüidade", "abertura", "coerência" e "variedade[23]". Muitas discussões ainda são feitas para se definir, com mais clareza, os conteúdos "importantes" de Matemática a serem avaliados. Talvez o *standard* "Matemática" queira referir-se a estruturas fundamentais da disciplina, ao instrumental mais diretamente ligado à solução de problemas "reais". O segundo norteador estabelece a avaliação como parte integral da aprendizagem, ao invés de ser uma instância dela apartada, chamando-nos a atenção para a continuidade e globalidade do processo educativo. Segundo Masingila e Lester,

> *"Idealmente, a avaliação deveria proporcionar a todos os alunos a oportunidade de mostrar do que são capazes. Na prática, entretanto, os testes padronizados tradicionais têm sido uma barreira para alunos de determinadas origens, classes econômico-sociais, grupos étnicos ou gênero. A 'eqüidade' torna-se uma questão ainda mais séria quando sabemos que as avaliações têm servido para rotular alunos ou negar-lhes acesso a disciplinas, programas ou empregos".*

A "abertura" do processo avaliativo refere-se ao modo secreto que têm caracterizado as formas de avaliação, rígida e unicamente controladas pelo professor. Exige-se, também, "coerência" da avaliação com as práticas e métodos desenvolvidos no processo de ensino e aprendizagem. O sexto e último norteador, "variedade", indica a necessidade de serem considerados múltiplos e distintos instrumentos e momentos para a elaboração de uma avaliação global que, reunindo aspectos advindos dessas "avaliações parciais", possibilite uma melhor compreensão e interpretação do processo de aprendizagem do aluno.

Os ***Teaching Standards*** foram elaborados dado que somente um bom currículo, como proposto pelos *standards* anteriores, não seria suficiente para a reversão do quadro. Uma das indicações centrais nesse documento de 1991 parece ser a mudança de ênfase quanto ao trabalho do professor: de "portador do conhecimento" ele deve tornar-se "facilitador da aprendizagem". Há, ainda, outras propostas de alteração, tanto no ambiente físico das salas de aula, quanto em relação a posturas a serem desenvolvidas. Propõe-se o trabalho cooperativo, o uso do raciocínio e da verificação para determinar (colaborativamente) o que é ou não

[23] O termo "*inference*" utilizado nos *Standards* parece ser melhor traduzido, nessa situação, como "variedade" ou "multiplicidade".

correto – mudando a natureza de uma função que clássica e equivocadamente tem estado nas mãos do professor. A testagem de procedimentos e hipóteses geradas pelos alunos e a intensificação na utilização de conjecturas e explorações na resolução de problemas deve ocupar o espaço dos algoritmos mecanizados e das memorizações. Seis são, especificamente, os indicativos do ***Professional Standards for Teaching Mathematics***. Seguindo ainda a síntese de Masingila & Lester[24], podemos resumí-los como segue: **Atividades fundamentais** (o professor deve propor atividades baseadas nos interesses e experiências dos alunos, partindo do conhecimento prévio disponível; atividades que mostrem a Matemática como produção humana, que comprometam e motivem os alunos, promovam a comunicação, desenvolvam a compreensão e o raciocínio e auxiliem os alunos a fazer conexões e a desenvolverem um pano-de-fundo coerente para as idéias matemáticas apresentadas); **o papel do professor em relação ao discurso** (o professor deve propor questões que elucidem, engagem e desafiem os alunos, deve ouvir cuidadosamente suas idéias e questioná-los (oralmente e por escrito) para promover a clareza do pensamento e das justificativas dadas, deve trazer à cena o que for julgado essencial nas argumentações dos alunos, escolher o momento oportuno para ater-se à linguagem e à notação específica e, cuidadosamente, decidir quando e como deve dar informações, esclarecer questões e apresentar modelos); **o papel do aluno em relação ao discurso** (o professor deve motivar os alunos a ouvir, responder e questionar, a iniciar questões e problemas, fazer conjecturas e apresentar soluções explorando exemplos e contra-exemplos, tentar convencer a si-próprios e aos outros da validade de suas propostas, representações, soluções ou conjecturas); **instrumentos para a valorização do discurso** (para promover e valorizar o discurso em sala de aula, o professor deve aceitar e encorajar o uso de calculadoras, computadores, materiais concretos, figuras, diagramas, tabelas e gráficos, termos e símbolos – convencionais ou inventados –, metáforas, analogias, histórias, hipóteses escritas, explicações e argumentações, apresentações orais e dramatizações); **ambiente de aprendizagem** (para criar um ambiente que permita ao aluno desenvolver e potencializar seu conhecimento matemático, o professor deve gerenciar o tempo das atividades, prover as salas com materiais didáticos adequados, ousar correr riscos intelectuais ao levantar questões ou formular conjecturas, firmar sua competência matemática validando e apoiando idéias argumentativamente); **análise do ensino e da aprendizagem** (o professor de Matemática deve engajar-se em atividades que avaliem sua prática, observando, ouvindo e coletando informações sobre os estudantes, para avaliar seu aprendizado, examinando os efeitos das atividades propostas, o discurso dos alunos e o ambiente de aprendizagem, fazendo planos de curto e longo prazos, descrevendo e comentando o aprendizado de seus alunos para eles próprios, para seus pais e autoridades escolares).

[24] Obra já citada

Uma coleta (inicial) de dados e (sugestões de) análise

Observamos as aulas quando estavam sendo discutidos os tópicos "Frações" e "Geometria". O exemplo com que aqui começamos é referente ao primeiro tópico. O problema é o da "Padaria do Benny"[25]. Deve-se encontrar modos alternativos para a divisão de um bolo retangular em oitavos. Os alunos apresentam a solução de seus grupos, desenhadas em transparência, para toda a sala, com o que se discutem as estratégias e sua validade. Em seguida, acrescenta-se um complicador: é possível dividir o bolo retangular em oitavos, tendo também a cobertura do bolo igualmente distribuída?

As ferramentas formais, como seria de se esperar pela própria natureza do problema – e em geral dos conteúdos trabalhados nas disciplinas para a formação do professor para a escola elementar –, restringem-se aos cálculos aritméticos básicos com números inteiros e racionais. Além disso, faz parte das intenções do curso implementar formas alternativas de tratamento ao conteúdo matemático, desenvolvendo, criticando e aplicando materiais didáticos diversificados.

Voltemos nosso olhar, agora, para as soluções dadas pelos grupos de alunos e as argumentações a elas referentes[26]. Os esquemas gráficos apresentados pelos

---

[25] *Benny's Bakery problem*: "*Each day Benny makes several rectangular sheet cakes which he cuts into eighths. He sells 1/8 of a sheet cake for $ 1.59. As part of a promotional campaign for his store, he wants to cut his sheet cakes into eighths in a different way each day. Customers who suggest a new way to cut the cakes into eighths win a free piece of cake each day for a week.*" E a situação-problema complementar: "*Would it be possible for Benny to cut his sheet cake so that customers would be guaranteed to receive the same amount of cake* <u>*AND*</u> *the same amount of icing?*". A primeira parte do problema está proposta no ***Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics*** (A*ddenda Series*, grades 5-8), de 1994. Questões complementares bastante interessantes estão propostas nesses volumes especiais dos ***Standards***..

[26] Muitas podem ser as formas de análise de argumentações. No atual panorama, os trabalhos de Erna Yackel podem servir como referência. Em seu artigo "*Explanation as as Interactive Accomplishment: a case study of one second-grade mathematics classroom",* apresentado durante o *Annual Meeting of the American Research Association*, Chicago, em 1997, a autora estuda explicações de crianças segundo um viés sócio-psicológico, fundamentando-se, para as análises, nos trabalhos de Krummheuer ("*The ethnography of argumentation*" In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.) ***The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures***. Hilsdale, NJ: Erlbaum, 1995) e Yackel e Cobb ("*Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics*". ***Journal for Research in Mathematics Education***, 27. pp. 458-77, 1996). Krummheuer, por sua vez, apóia-se nos trabalhos do filósofo Stephen Toulmin. Uma síntese da obra de Toulmin referente à argumentação pode ser encontrada em "*Toulmin's model of argumentation*" (van Eemeren, F. H., Grootendorst, R., Henkemans, F. S. et allii. ***Fundamentals of Argumentation Theory: a handbook of historical backgrounds and contemporary developments***. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1996). Esse nosso artigo, de natureza assumidamente exploratória, parte de um pressuposto diferenciado, valendo-se de nossa experiência com análises

grupos foram rearranjados para nossa análise, não sendo essa, portanto, a seqüência em que ocorreram durante a aula em que o problema foi discutido.

Pudemos observar que as primeiras soluções, de todos os grupos, foram as que poderíamos chamar de "esperadas", ou "comuns". São mais "contidas" do ponto de vista da criatividade, mais "racionais" ou, pelo menos, mais facilmente justificáveis do ponto de vista formal, por vezes tão diretas que prescindiam mesmo de justificativa.

Ressaltamos, entretanto, que em nenhum momento uma argumentação formal foi elaborada. Em alguns dos esboços (por exemplo as figuras de números 4, 17 e 11) pode-se notar que a divisão de formas planas "ao meio" é puramente intuitiva, deixada mais a cargo das mãos habilidosas do confeiteiro do que às mãos precisas do matemático. O mesmo pode ser percebido em cortes mais ousados (figura 2, p.e.). Já nos esboços de número 7, 10 e 16, por exemplo, embora a habilidade prática talvez proveniente de uma técnica manual apurada seja o argumento para a validade da solução, podemos perceber claramente uma "lei de formação": a dos excessos e perdas equilibrando-se. Notemos que o mesmo recurso é ponto de partida para argumentações formais extremamente mais "sofisticadas" do ponto de vista matemático do que o problema em questão. Ou seja, também na abordagem geométrica clássica que fará surgir o conceito de integral definida, a área sobre a curva é obtida a partir de um equilíbrio entre excessos e perdas de áreas retangulares (cujas bases tenderão a zero, quando a norma da partição for a menor possível, isto é, quando o número de subdivisões "tender" ao infinito ...).

Outra lei de formação utilizada (nem sempre com a devida correção) é a das divisões e subdivisões sucessivas. Exemplos disso são as figuras de número 3, 8, 14, 15, 17, 19, 23 e 24. A exatidão das divisões fica prejudicada quando se trata de dividir triângulos (4 e 17, por exemplo) ou outras figuras, quando se busca apoio em paralelogramos ou mesmo triângulos (exemplos 6 e 12).

Nada foi elaborado, nas argumentações dadas, sobre a comparação de áreas de diferentes figuras. No esboço 12, por exemplo, qual afirmação sustentaria que a área dos triângulos é equivalente às áreas das metades do paralelogramo?

O processo de divisão e subdivisões ocorre claramente, também, nos exemplos 15 e 24, dados pelo mesmo grupo. Algo porém os diferencia dos demais. Inclue-se, nas argumentações, a "realidade"da proposta. Bolos são tridimensionais e, portanto, admitem outros cortes... Essa solução "vinculada à materialidade do bolo" não havia aparecido até então. E, como é natural, questões surgem: não é o

---

segundo referenciais fenomenológicos, ainda que esses referenciais, nesse trabalho, não se concretizem em sua plenitude.

problema, segundo as diretrizes educacionais, um problema “relacionado à realidade”? Partindo disso, soluções dessa natureza (e aquelas ancoradas na habilidade do confeiteiro, por exemplo) devem ser aceitas como válidas. Situação desse mesmo teor ocorre quando, na parte complementar do problema, envolvidos em tentar dividir o bolo em oitavos, de modo tal a que cada fatia coubesse a mesma quantidade de cobertura, um aluno afirma: “Mesmo que todos os cálculos estejam certos, nunca teremos certeza de que, realmente, o confeiteiro distribuiu de modo perfeitamente homogêneo a cobertura sobre o bolo”.

Mais tarde, quando trabalhando nos exercícios iniciais do tópico “Geometria”, as imposições materiais – que indicam conflitos – também surgem de forma explícita. Solicitados a construírem triângulos, dadas as medidas dos três lados, detecta-se que: (1) segue-se unicamente a estratégia da “tentativa e erro”; (2) o compasso não é utilizado e, também por conta disso, (3) são construídos triângulos impossíveis. Seria necessária uma pesquisa mais detalhada para compreender certas situações referentes a essa atividade, o que não é nosso objetivo nesse artigo. Mas pode-se perceber que, aparentemente, o critério de legitimidade de um esboço (correto) em relação a outros (incorretos) ficou com a autoridade da professora. Afinal, o que faz o compasso (que também se utiliza do grafite, da mão humana e, portanto, está também sujeito a imprecisões) ser mais “adequado”do que a régua? Na verdade, não são compasso e régua que justificam a veracidade da afirmativa a que se pretendia chegar[27], mas uma elaboração mental, de natureza aritmético-geométrica. O dado material, portanto, instala uma crise – proposital – que ele próprio não pode resolver (por que não pode existir um triângulo com ângulos quase inexistentes, mas “satisfazendo” a medida dos lados, como solicitado?) e a argumentação correta acaba sendo feita num outro domínio, o das idéias, onde estão, já em princípio, abstraídas as propriedades palpáveis, visíveis, do objeto.

Curioso lembrar, aqui, a conhecida história de Kasper Hauser, o adolescente criado distante da chamada “vida civilizada”. Levado aos cientistas que pretendiam estudar criatura tão interessante, um dos testes a ele proposto foi o conhecido problema que, em uma de suas inúmeras formas de apresentação, fala da estrada bifurcada. Na bifurcação, dois guardiões. Um deles, ao contrário do outro, só dizia verdades, e guardava a estrada que deveria ser seguida. Podendo fazer somente uma pergunta a um dos dois informantes, deve-se descobrir a estrada que leva ao caminho desejado. A solução, do ponto de vista lógico, é que se deve perguntar a qualquer um dos dois o que o outro diria se lhe fosse

[27] Tentando construir triângulos de lados (3,5,2), (6,2,3), (3,10,4) e (7,4,6) pretendia-se estabelecer a proposição “Num triângulo qualquer, a soma da medida de dois dos seus lados é sempre estritamente maior que a medida do outro lado”. O conflito em sala de aula ocorre exatamente durante a discussão do caso em que a igualdade se verifica.

perguntado qual o caminho correto. Obtida a resposta, deve-se tomar o caminho contrário. Confrontado com tal enigma, Kasper Hauser dá uma solução ao mesmo tempo interessante e engraçada. Diz ele: “Eu perguntaria a qualquer um dos dois: você é um sapo?” Ao contrário do que esperavam os cientistas, o adolescente não participa do jogo do qual, segundo o olhar dos qualificados juízes, deveria participar. Ele não se insere no contexto da lógica sistematizada, matemática, rígida e dá a resposta segundo sua lógica natural. Supondo que o problema seja um problema real, Kasper Hauser dá a ele uma resposta real, não codificada por padrões científicos.

Muitos dos encaminhamentos que vemos surgir na sala de aula são de mesma natureza, embora confundam-se com as argumentações “esperadas”, as argumentações "desejáveis" para uma sala de aula de Matemática. O aluno, via de regra, tem respondido segundo os cânones que pensa ser aqueles que o professor segue. Ele responde o que o professor quer ouvir. Isto porque a escola cuida de desenvolver uma forma de pensamento “correto”, hegemômico, mesmo que esse pensamento não seja aquele de que, naturalmente, o aluno se utiliza. Pensa-se em Matemática nas aulas de Matemática, sendo dispensados quaisquer justificativas que não participem desse jogo. Quando muito, essas justificativas são dialogicamente encaminhadas (pelo professor) para a via da resposta que se deve dar: a resposta aceita. Somente se percebermos nossos Kaspers Hausers poderemos elaborar atividades para nossas salas de aula, de modo a desenvolver a tão clamada “habilidade de resolver problemas diretamente ligados à realidade”, sugerida por todos os documentos de que se tem notícia sobre ensino de Matemática[28].

Uma outra consideração refere-se à solução de número 1, dada por um dos grupos. Durante sua argumentação, a aluna vê seus vinte e quatro avos como

[28] Uma outra situação, disparada por um problema sugerido em sala de aula, pode contribuir para esclarecer essa relação entre “realidade” e atividades de ensino. O problema em questão trata de uma das grandes paixões americanas: o basquete. A derrota do Pacers num dos jogos da NBA serviu como tema de uma atividade para um curso de verão do programa de formação para professores da escola elementar: “Em seu último jogo o *Pacers* conseguiu o placar de 95 pontos. De quantas maneiras diferentes esse total de pontos poderia ter sido obtido?”. A questão, cujo objetivo é discutir conceitos iniciais de probabilidade, permite uma variada gama de abordagens, em diferentes níveis de ensino, desde a construção de tabelas e outros recursos gráficos, até a percepção de leis de formação de seqüências numéricas (chegando à solução da soma finita dos termos de uma progressão aritmética) e de critérios de paridade para números inteiros. Fora da sala de aula, informalmente, o problema foi apresentado a Sam, garoto de 12 anos, filho de uma das professoras. Percebeu-se o interesse na questão mas algumas das situações, matematicamente corretas, que faziam parte da solução (95 cestas de um ponto cada, por exemplo) não foram aceitas como possibilidade pois não encontravam suporte em referenciais reais e, portanto, não eram julgadas válidas.

oitavos. Certamente há, nisso, um equívoco conceitual[29], mas nos deteremos, aqui, na natureza da argumentação por ela desenvolvida. A professora interfere: “Se alguém compra um pedaço desse bolo (e aponta para um oitavo apresentado por outro grupo) e, num outro dia, compra um pedaço do seu, pelo mesmo preço, certamente ficará um pouco aborrecida, você não acha?”. E a resposta: “Pode até ser mas, <u>com os “meus” oitavos</u>, o confeiteiro terá um lucro muito maior”.

Nisso, parece imperar mais a força do lucro do que, propriamente, a coerência do tamanho das partes de um bolo dividido em oitavos. Há, é claro, nesse exemplo, uma ligação com aqueles sobre os quais falávamos anteriormente: aqueles em que alguma determinação material, real, forte, sobressai na solução do problema. A diferença é que, aqui, a natureza dessa determinação é claramente perceptível: os jogos do mundo capitalista. O maior preço pelo menor pedaço, a maximização – injusta – do lucro, a potencialização do valor pelo menor esforço.

Novas possibilidades de abordagem, sempre mais variadas, à questão das formas de argumentação, ocorrem quando é trabalhada a complementação do problema: continuamos a querer o bolo cortado em partes iguais mas, agora, procuramos também dividir igualmente a cobertura. Logo de início, os alunos percebem que com um bolo que tivesse a forma quadrada seria fácil. Surge, então, a questão: se o bolo de Benny é retangular, por que não pode ser quadrado? Há questionamentos. Os retângulos são quadrados? Os quadrados são retângulos?

Parece ser o momento adequado para uma nova iniciativa: a discussão das definições em Matemática. Primeiramente, de modo informal, a professora discute com os alunos o que seria uma definição e solicita deles um *journal* com a questão: “Defina uma melancia”. O exercício serve como um motivador para que, na próxima aula, comecem a ser discutidos conteúdos de Geometria, num estudo sobre as definições matemáticas.

Reproduzir todas as definições e todos os diálogos seria, aqui, desnecessário e um tanto quanto enfadonho, mas algumas considerações gerais podem ser esboçadas.

---

[29] A aluna, que aqui chamaremos α, tem um enorme obstáculo a enfrentar para ultrapassar essa falha conceitual. Esse enfrentamento é dialogicamente tentado pela professora:
Professora: Quais são seus oitavos? Aluna α (apontando para "seus" vinte e quatro avos): “esses!” Uma outra aluna, β, interfere: “Não, para ter o bolo dividido em oito partes você deve pegar três desses pedaços de cada vez”… β levanta-se e pinta um oitavo do bolo, mostrando o processo. A professora, voltando-se para α : “Então, quais são seus oitavos?”, ao que α, novamente apontando para os vinte e quatro avos, responde: “esses!” Duas são as constatações evidentemente imediatas: β**,** ao tentar ensinar, mostra e fala. E α, mesmo tendo “visto” e “ouvido”, não entende e, portanto, não aprende. É sobre isso a máxima de que “Ensina-se ouvindo, aprende-se falando”. O diálogo citado no *corpus* do texto ocorre depois desse da nota de rodapé.

É interessante notar que os alunos têm mais dificuldade em definir uma melancia do que uma circunferência. Poucas são as tentativas frustradas para se definir a circunferência como “o conjunto de todos os pontos equidistantes de um dado ponto”. É interessante, portanto, perceber, na prática, como a Matemática impede o deslizamento dos significantes: a melancia depende do olhar que a vê, do paladar de quem a sente, das preferências de quem a descreve. Não existe “A” melancia, mas “melancias”, em concretudes de diferentes formas, melancias-matéria, melancias disponíveis no mundo. As formas matemáticas são, em princípio, idealizações – “idealidades” é o termo que Husserl utiliza para caracterizar as formas geométricas[30]. Existe “O” triângulo, “A” circunferência.

Objetos ideais – ou idealidades matemáticas – podem ser lidos distintamente. Por um lado a visão platônica, a partir da qual se afirma que os objetos matemáticos, independentemente da elaboração humana, pré-existem no mundo das formas perfeitas, disponíveis imperfeitamente em materialidades variáveis. Por um outro lado, segundo nossa compreensão, a husserliana: as idealidades são formadas a partir de um processo cultural, histórico, humano, de depuração de fatores não essenciais, não “operacionalizáveis”, uma trajetória de “idealização”.

Como entendemos, há nisso a formação de dois mundos distintos, irreconciliáveis, num dos quais está o fazer humano, em suas múltiplas perspectivas, lutando por estabelecer significados claros (mas não unívocos) aos objetos. As idealidades, como resultantes de um processo de depuração, estão em formação, em processo iniciado a partir do mundo e são possibilidades de se compreender o próprio mundo de forma mais sistemática, orgânica. Do outro, o mundo platônico: a forma pré-existente ao humano conhecimento da forma, a perfeição à qual se adaptam as mundanas imperfeições.

Essa “higienização” das formas ideais serve bem ao propósito da prática matemática. Desconsiderando as nuanças de naturezas histórica e filosófica, as definições tratam de domesticar o existente, servem como jaulas para o significado-presa. Orbitamos, portanto, num "entre". A teoria filosoficamente estabelecida, fundada, e a prática que dispensa a fundamentação ou funda-se em si própria. Por conta dessa inter-região, talvez fosse mais sensato nos referirmos a “Matemáticas” no tratamento das argumentações em sala de aula.

[30] Confira-se, por exemplo, ‘The origin of Geometry’ In HUSSERL, E.. ***Crisis in European Science***. Nortwestern University Press: Evanston, 1970 e BICUDO, M.A.V.. “Sobre ‘*A origem da Geometria*’” In ***Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos (Caderno I)***. São Paulo: A Sociedade, 1990.

Dificilmente se encontrarão, no trabalho cotidiano do professor da escola elementar, formalizações sofisticadas do ponto de vista matemático. Haverá sempre, obviamente, em qualquer nível de trabalho com Matemática, uma formalização naturalmente exigida pela disciplina: alguns símbolos específicos, algumas regras de formação, uma gramática que – mesmo quando não rigorosa – depende de uma alfabetização específica: a alfabetização matemática. Mas, nesse viés – e reforçamos que essa diferenciação tem como objetivo o trabalho com formas de justificação e não um truncamento ideológico de níveis de ensino ou conteúdos matemáticos – parece necessário estabelecer duas formas distintas de argumentação freqüentemente empregadas nas salas de aula: as justificações semi-formais e as formais. O termo "formal" participa, aí, obviamente, por ser o trabalho com a Matemática escolar naturalmente envolto com sistematizações outras que aquelas dadas unicamente pelo cotidiano e pela linguagem natural. Há uma forma própria de ser da Matemática. Esse trabalho tem, porém, instâncias diferenciadas e poderá ser mais ou menos "elaborado" do ponto de vista da linguagem formal. A distinção dar-se-á pautada em critérios semelhantes aos que distinguem um discurso pedagógico e um discurso científico da Matemática, do que já tratamos. Para as matemáticas que ocorrem fora do sistema escolar, as etnomatemáticas, uma outra categorização, ainda, precisa ser pensada. Se não há um trabalho com a linguagem artificial da Matemática, o termo "formal", como o aplicamos aqui, perde seu sentido. Poderíamos, nesse caso, chamar a essas justificações de etno-argumentações ou argumentações não-formais. Caberá à pesquisa em Etnomatemática elaborar essa idéia aqui apenas esboçada.

Argumentações semi-formais são, por exemplo, sob nossa concepção, as que ocorreram na sala de aula à qual fazemos referência nesse texto. Há uma participação orgânica, essencial, da linguagem natural e de elementos do dia-a-dia dos argumentadores. Também das argumentações formais a linguagem natural participa. Negar isso seria negar todo um trabalho anterior quando afirmávamos, junto com muitos autores, sobre uma interconexão vital entre linguagem materna e linguagem matemática e que, nessa interconexão, deveriam ser buscados elementos para a revitalização semântica de uma linguagem que se pretende puramente sintática: um projeto de vinculação essencial ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Mas na prática usual, a linguagem formal tem servido para a mera tradução dos códigos matemáticos, fortalecendo a formalização ao invés de dar a ela uma referência mais significativa, mais próxima às vivências do aluno.

É no estudo das argumentações formais sobre conteúdos de uma Matemática também altamente formalizada que devem ser investigados os limitantes e potencialidades das provas rigorosas, por exemplo. No caso dos contextos semi-formais ou não-formais encontraremos suporte mais viável para análise no contexto sócio-cultural-econômico-lingüístico de quem argumenta e não em estudos sobre a aplicação de regras lógicas ou raciocínios dedutivos. Talvez seja isso, também, um possível indicador da necessidade de demarcação: por um lado, os raciocínios indutivos como formas mais freqüentes de ação em certos modos de produção de justificativas e, por outro, a exigência de deduções em outras.

Por tratar-se de uma "investigação sobre a possibilidade de investigação", esse texto não pode – nem deve – ser demasiadamente fechado. Podemos, porém, indicar algumas compreensões que parecem decorrer de nossas análises até aqui desenvolvidas:

> O estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas. Para tanto, torna-se necessário falarmos em diferentes formas de argumentação, ou de modos diferenciados – mas coexistentes nas salas de aula – para o estabelecimento de justificações
>
> Numa Matemática formalizada que, na prática, segundo a literatura disponível, caracteriza-se como uma Matemática Platônica, o modo de argumentação, por excelência, é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações matemáticas. Dirige-se mais à prática profissional e científica de geração de conhecimento matemático, devendo ser relativizada e mais estudada quanto a sua forma de utilização em salas de aula.
>
> As argumentações semi-formais que ocorrem em salas de aula pautam-se, indiscutivelmente, no contexto sócio-cultural-político e no domínio da linguagem natural. Confundem-se as facetas do operacionalizável e do não operacionalizável nos objetos "matemáticos". Na verdade, os chamados objetos matemáticos, no caso do domínio semi-formal, são, também eles, intuitivos, ligados à concretude das experiências cotidinas e, portanto, desligados da des-materialização que, classicamente, caracterizaria tais objetos.
>
> Qualquer projeto ou estudo que se pretenda um motivador de aprendizagem matemática operando pela ligação com a vida cotidiana[31] deve ter em seu panorama essa "incompatibilidade" de uma liguagem estilizada, artificial, matemática com os aspectos da

[31] E, segundo pensamos, esse parece ser um dos principais norteadores dos ***Parâmetros Curriculares*** brasileiros tanto quanto o é dos ***Standards*** americanos.

cotidianidade: há um limite para a formalização se a proposta tiver o princípio da "realidade" como fundante, sendo que essa fronteira coincide com os elementos desenvolvidos pela Alfabetização Matemática. Isso, portanto, parece apontar para a possibilidade de haver um conflito estrutural entre "matematização" e "realidade" que necessita ser investigado. Ultrapassar essa 'incompatibilidade" deve ser, no fundo, o projeto fundante dessas iniciativas[32].

As argumentações não-formais e semi-formais, por estarem mais próximas do modo como cotiadianamente nos relacionamos com as

[32] Na verdade, há uma questão de fundo, há muito debatida, sobre a realidade das teorias matemáticas. Algo deve haver para que teorias, formal e abstratamente elaboradas, comportem aplicações como, por exemplo, as que são tematizadas na Matemática Aplicada (também essa nomenclatura, como já pudemos observar em trabalhos anteriores, bastante artifical, mais de natureza política que relativa aos objetos matemáticos). Em nosso contexto, porém, algo desponta de modo muito claro: se concebermos a Matemática meramente como uma linguagem (numa abordagem herdeira do Nominalismo, mas ainda muito presente), "Ensino de Matemática" e "'realidade' cotidiana" são, certamente, conflitantes.
É óbvio que a Matemática necessita de uma linguagem. Com alguma concessão poderíamos até mesmo afirmar que a Matemática **É** uma linguagem, mas **NÃO SÓ** uma linguagem. Essa diferença é fundamental para nossa argumentação. Naturalmente, uma alfabetização específica quanto à linguagem matemática é fundamental para compreendermos o mundo em que vivemos (e seguem aqui os exemplos comuns dos gráficos, tabelas, sistemas de numeração, geometria básica, porcentagens, medidas etc) e, portanto, para compreendermos a Matemática em situações reais. Ocorre que nessas "situações reais" a Matemática desenvolve-se mais como instrumento, do ponto de vista prático, do que como linguagem especificamente. E isso só será percebido se distinguirmos, de um lado, uma Matemática concebida como linguagem, do ponto de vista formal, sistematizado, artificial, própria da prática científica e, do outro lado, um discurso pedagógico de Matemática, o que tentamos caracterizar no início desse artigo. É insuficiente pensar a linguagem sem definir os "espaços" de uma prática científica (no qual a linguagem prescinde de ligações com a realidade) e de uma prática pedagógica (no qual as aproximações com o cotidiano têm sido temática fundamental) e, portanto, conceber Matemática como linguagem é, no mínimo, lacunar e insuficiente para a Educação Matemática. Na verdade, segundo pensamos, embora sejam fundamentais para as salas de aula as questões que tratam de aspectos da realidade (pois é necessário organizar uma forma de ação para a prática pedagógica), essas mesmas questões são uma caricatura da realidade, uma pseudo-ligação com o cotidiano: são pretensamente reais e, portanto, configuram-se num "sistema de motivação". E a motivação, bem sabemos, é externa: alguém (no caso, o professor) deliberadamente decide motivar alguém (no caso, o aluno) para alguma coisa (no caso, aprender matemática fazendo conexões com a realidade). É necessário reforçar, portanto, a necessidade das iniciativas comuns à Modelagem Matemática, onde a problematização da realidade parte dos alunos. Seriam esses, então, problemas "reais", cotidianos, parte do "sistema de desejos" ao contrário daquele "sistema de motivação". Roberto Ribeiro Baldino e Tânia Cabral, valendo-se de fundantes emprestados da Psicanálise, discutem isso com profundidade em alguns de seus trabalhos. Assim, segundo percebemos, o conflito "linguagem matemática-aplicação à realidade" poderá ser ultrapassado, possivelmente, com as iniciativas próprias da Modelagem (ou Modelação) Matemática. Isso nos parece análogo à necessidade de se ter a pesquisa-ação, em suas várias vertentes, como essencial para a investigação em Educação Matemática como área de conhecimento teórico-prática.

> coisas - tecendo comentários, elaborando justificativas, procurando fundantes - devem estar presentes nos cursos de formação de professores de modo privilegiado. Tanto quanto a presença da prova rigorosa é necessária para uma análise do modo de produção do conhecimento matemático, as argumentações não-formais o são por participarem efetivamente do dia-a-dia das sessões escolares e de ensino e aprendizagem informais. A prova rigorosa, discutida criticamente, inclusive, auxiliará no estabelecimento da importância da presença sistemática de justificativas de outras naturezas na formação do professor de Matemática.

Há, nessas considerações um elemento especial, para o qual a pesquisa em Educação Matemática tem, quando muito, timidamente apontado: os comumente chamados “modos de raciocínio”.

Parece natural que argumentações semi-formais sejam essencialmente indutivas, pois pautadas no conhecimento cotidiano dos objetos e suas relações: o início pela particularidade procura a sistematização mais abrangente, um contexto mais geral. "Oposto" a isso, o raciocínio dedutivo é o que caracteriza a produção científica de Matemática, ciência hipotético-“dedutiva”: nos enunciados globais as particularidades são fatalmente explicadas. A criação matemática, entretanto, parece orbitar num espaço intermediário, entre indução e dedução. Tanto quanto os artigos mais recentes, anteriormente referenciados, quanto o texto clássico de Hadamard[33] nos indicam isso. Parece haver uma região indefinível, intuitiva – e, portanto, não discursiva – na qual se dá a gênese do pensamento matemático. Nesse espaço intermediário ocorre como que uma espécie de contínuo trafegar de idéias, ora gerais, adequadas à especificidades, ora particulares, adequando-se a generalidades. Essas formas de raciocínio, ou modos de argumentação ou, ainda, formas válidas de inferência – a dedução e a indução – são conhecidas desde os gregos e estão presentes em todos os processos de matematização. Há, porém, uma terceira forma, pouco auscultada, pouco comentada, sobre a qual a literatura disponível nos indica um autor chave: Charles Sanders Peirce[34].

---

[33] HADAMARD, J.. ***Psicologia de la invención en el campo matematico***. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1947.

[34] Neste texto, nossa referência básica sobre o trabalho de Peirce é ECO, H. e SEBEOK, T.A.(org.). ***The sign of three***.Indiana University Press: Bloomington/Indianapolis, 1988.

A importância do impreciso e a potencialidade de algumas incertezas

"How often is imagination the mother of truth?"
(Sherlock Holmes in ***The Valley of Fear***)

Nosso contato com o mundo, em grande parte das vezes, é feito probabilisticamente. A exatidão não coordena nossas ações cotidianas e é recente, na história da humanidade, essa frenética procura pela precisão, motivada pelos avanços científicos. "A medida é algo bom" passou, ideologicamente, a significar "Só é bom o que pode ser medido". Mas na cotidianidade comportamo-nos probabilisticamente, imprecisamente, por aproximação. E externamos idéias, damos palpites, fazemos previsões, mais freqüentemente baseados no conhecimento que temos do mundo do que, propriamente, no conhecimento "científico" disponível. Essa instância da descoberta de modo incerto, não planejado, "adivinhado", está intimamente relacionada com o que Peirce chama de "abdução", ou a terceira – e principal, segundo ele – forma de inferência, de argumentação, a reger nosso processo cognitivo.

Mas é necessária certa cautela: não são meras adivinhações, que vêm do nada, os pontos de partida para conhecermos o mundo e para podermos, sobre ele, tecer afirmações e projeções. Nossa mente forjou-se num processo gradual e lento, segundo as leis da natureza, e a vivência que temos do e no mundo nos possibilita conjecturar e, um pouco mais, conjecturar com uma boa dose de certeza: diagnosticamos e prognosticamos.

Segundo Peirce, "a deducão depende da confiança que temos em nossa habilidade de analisar o significado dos signos nos quais ou pelos quais pensamos; enquanto a indução depende da confiança no fato de que uma seqüência de um dado tipo de experiência não mudará ou cessará sem indicação alguma antes de seu final. Já a abdução depende de nossa esperança em, mais cedo ou mais tarde, adivinhar as condições sob as quais um dado fenomêno apresentar-se-á." Para o autor, é mesmo impossível ao humano qualquer forma de ação mental, seja ela válida ou não, sem que se utilize a dedução, a indução e a abdução.

Certamente a abdução, na concepção de Peirce, envolve o impreciso, o inseguro, o incerto na enunciação de normas gerais, embora a abdução não nos dê garantia de sucesso quanto aos resultados dessa predição. A abdução inicia-se pautada em fatos sem qualquer teoria prévia como fundante, embora esteja sempre presente um sentimento de que alguma teoria é necessária para explicar determinados fenômenos que nos são surpreendentes.

Por conta dessa teoria, vários são os trabalhos que tecem compararções entre as teorias de Peirce e os métodos empregados por Sherlock Holmes, o célebre detetive de Arthur Conan Doyle. Há uma instância imprecisa – mas segura até certo ponto, pois fundada na experiência, nas vivências e no bom senso – que permite ao investigador, juntados os indícios disponíveis no panorama do crime, prever o culpado e, checadas as possibilidades e verificados os detalhes, tornar público seu nome e seu motivo. E mesmo no momento da coleta de indícios, alguma forma de inferência – também ela não clara, possivelmente não discursiva, imprecisa – indica quais são e quais não são bons elementos para a explicação do crime. Em Truzzi[35], por exemplo, vemos que "pela abordagem de Holmes, as considerações lógicas (mais dedutivas) e as empíricas (mais indutivas) estão em constante interrelação. /…/ Embora Holmes freqüentemente refira-se a 'deduções', elas raramente aparecem em seu método. As inferências comuns de Holmes não são também induções. Mais exatamente, Holmes consistentemente desenvolve o que C.S. Peirce chama 'Abdução'. /…/ As abduções, como as induções, não são auto-suficientes como as deduções e, por isso, precisam ser externamente validadas. Peirce, algumas vezes, chama as abduções de 'hipóteses' e, no sentido contemporâneo, isso é o que a conclusão representa na abdução: uma conjetura sobre a realidade que necessita de alguma testagem para validação."

O processo de argumentação sobre os objetos matemáticos, sendo argumentação, não escapam às teorias de Peirce. Não escapam, então, aos "momentos abdutivos" cuja concepção, convenhamos, está muito próxima às considerações de Hadamard sobre a gênese do conhecimento matemático. O conceito de 'abdução' tendo enorme sincronia com a necessidade de uma "ciência do impreciso", da qual já nos alertava Moles[36], ou a necessidade de se atribuir maior importância aos fenômenos não exatos do mundo, exige, cada vez mais, investigação em Educação Matemática.

Esqueçamos o positivismo do método de Holmes, relativizemos a importância do rigor matemático em determinadas formas (válidas) de justificação e nos detenhamos no que parece ser uma abordagem frutífera ao estudo das argumentações em Matemática: a teoria de Peirce.

Da seguinte afirmação de Peirce, extraída de um diálogo fictício entre ele e Holmes[37], temos indícios de boas possibilidades para essa nossa proposta de investigação:

---

[35] TRUZZI, M. '*Sherlock Holmes: applied social psychologist*' In ECO e SEBEOK, já citado.
[36] MOLES, A.. ***As ciências do impreciso***. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995.
[37] Cf. BONFANTINI, M.A. e PRONI, G. '*To guess or not to guess?*' In ECO e SEBEOK, já citado.

> ”*To discover that we know through the combination of three fundamental forms of inference is to take a necessary but not fully sufficient step toward the development of a scientific method. The three kinds of argument have been known and explained since the times of the Greeks. /…/ above all, I stress the importance of the function of abduction, of hypothesis. By emphasizing against the Cartesian tradition, that all our knowledge has a hypothetical basis, on the other hand I highlight its intrinsic fallibility but on the other I proclaim the need resolutely to put abduction on the control room of cognitive process in general and above all in the scientific process, for its only by means of hypotheses new and bolder abductions, that we can discover new truth, however approximate and provisional; its only by means of new hypotheses that we can widen our vision of the real and discover new avenues of experience, propose new material for the test bench of experimentation.*”

Fica sugerida, então, a possibilidade de uma investigação que, até certo ponto, já julgamos encaminhada. Com isso, deve-se constituir um programa de pesquisa. As conseqüências disso, certamente, ficarão para possíveis próximos capítulos.

Finalmente, devemos agradecer o apoio de Beatriz D’Ambrósio, Vicki Walker, Sue Mau e Dorival Rodrigues, sem o qual esse estudo não teria sido possível. Vicki Walker, além do suporte intelectual e afetivo, colaborou trazendo os discos de *Rhythm’n Blues* que foram nossa trilha sonora.

Indianapolis
Primavera de 1999

Anexo: quadro