
IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DA PROPAGAÇÃO DE ERROS EM UM EXPERIMENTO DE ATRITO ESTÁTICO⁺*

Celso Yuji Matuo

J. R. Marinelli

Departamento de Física – UFSC

Florianópolis - SC

Resumo

Mostra-se que, mesmo em um experimento simples de atrito estático, deve ser efetuada uma cuidadosa análise das incertezas experimentais, incluindo erros estatísticos e de escala (instrumental), bem como a propagação de erros, antes de uma conclusão final a respeito das hipóteses adotadas sobre o atrito entre duas superfícies secas. Utilizando uma montagem simples e de fácil reprodutibilidade, apresenta-se uma série de resultados e análises para o coeficiente de atrito estático.

Palavras-chave: *Atrito estático, propagação de erros.*

Abstract

It is shown that, even in a simple experiment of static friction, a careful analysis of the experimental uncertainties, including statistical and instrumental errors as well as the propagation of errors, should be taken in to account before a final conclusion regarding the usual hypothesis about friction between two dry sur-

⁺ The importance of measurement of the propagation of errors on a friction static experiment

^{*} *Recebido: maio de 2006.
Aceito: março de 2007.*

faces. Using a simple and easily reproducible set up, we show a series of results and analysis for the coefficient of static friction.

Keywords: *Static friction, propagation of errors.*

I. Introdução

Experimentos de medida (ou medição) do coeficiente de atrito estático são bastante utilizados tanto nos cursos de nível médio como nos cursos universitários da área de Ciências Exatas. A maioria dos experimentos utiliza o plano inclinado para medir o coeficiente de atrito estático entre dois materiais secos. Neste caso coloca-se um objeto de um determinado material sobre um plano de inclinação variável. O coeficiente de atrito estático será numericamente igual à tangente do ângulo do plano inclinado, no exato momento em que o objeto começa a se mover em relação ao plano. Outros experimentos utilizam dinamômetros para medirem a força aplicada necessária para fazer um corpo iniciar o movimento sobre outro. No experimento aqui proposto, utiliza-se o dinamômetro para se obter as medidas de força de atrito estático.

O diferencial do experimento proposto é que, além da obtenção do coeficiente de atrito estático, se pode verificar experimentalmente as propriedades da força e do coeficiente de atrito estático, observando-se a dependência com a área de contato e com a massa dos objetos em estudo.

Nos livros didáticos (TIPLER, 2000; HALLIDAY et al, 2002; NUSSENZWEIG, 2002) encontram-se as seguintes propriedades da força de atrito, considerando um bloco em repouso sobre uma superfície plana, e quando se aplica uma força horizontal sobre o bloco:

1) A força de atrito máxima $F_{atr-max}$ para a qual o bloco começa a se mover é proporcional ao módulo da força normal de contato (F_n) entre as duas superfícies:

$$F_{atr-max} = \mu_e F_n ;$$

2) O coeficiente de atrito estático μ_e depende da natureza das superfícies em contato;

3) O coeficiente μ_e não depende da área macroscópica de contato entre as duas superfícies;

4) Quando o objeto começa a se mover, a força necessária para continuar o movimento com velocidade constante é menor que a força necessária

para iniciar o movimento. Portanto o coeficiente de atrito dinâmico μ_d é menor que μ_e .

No experimento proposto, uma das principais características a ser abordada é que o coeficiente de atrito estático não depende da área macroscópica de contato entre os dois materiais. Mas para fazer a comprovação experimental é importante levar-se em consideração os erros envolvidos, pois para comprovar que μ_e não depende da área, os valores obtidos para duas (ou mais) diferentes áreas de contato devem recair numa faixa de valores, considerando os erros associados ao processo de medida (VUOLO, 1999). Este experimento simples é importante para que o estudante possa aplicar os conceitos da teoria de erros, tais como cálculo de erros aleatórios e propagação de erros (PIACENTINI et al, 2001; HELENE; VANIN, 1991; VUOLO, 1996), bem como aplicar os conceitos de confecção de gráficos (PIACENTINI et al, 2001) e sua análise através do método dos mínimos quadrados para a obtenção dos parâmetros físicos desejados.

II. Montagem experimental

O experimento consiste basicamente de um bloco de madeira em forma de paralelepípedo apoiado sobre uma superfície plana. Um dinamômetro é ligado ao bloco através de um fio de nylon e ainda a um motor que puxa o mesmo com velocidade baixa e constante. O motor possui um eixo de $(2,50 \pm 0,05)$ mm que gira a uma velocidade angular aproximada de 9,5 voltas/min. Um esquema da montagem é mostrado na Fig. 1.

Para realizar o experimento, posiciona-se o bloco na mesa, mantendo o fio que liga o bloco ao dinamômetro paralelo à mesa, para que somente a componente horizontal da força seja medida pelo dinamômetro. Liga-se o motor e mede-se a força máxima necessária para fazer o bloco se deslocar sobre a mesa. Mantendo as mesmas condições iniciais, repete-se este procedimento várias vezes para se obter uma força média. Em seguida muda-se a área de contato do bloco com a mesa e repete-se o procedimento para obtenção das forças. É possível também fazer medidas da força máxima necessária para deslocar o bloco em função da massa do mesmo, adicionando diversas massas em cima do bloco de madeira.

Neste experimento, como é importante fazer o estudo em função da área de contato entre os dois objetos, é necessário que as diferentes áreas possuam a mesma textura. Dificilmente um bloco de madeira em forma de paralelepípedo possuirá a mesma textura em todas as suas faces, a menos que este bloco seja recoberto com um material de mesma textura, como por exemplo um

folheado de madeira ou um laminado. Para baratear os custos utilizou-se um simples artifício de cobrir o bloco com uma folha de papel, uniformizando assim a textura das diferentes faces do bloco. Portanto o que se mede nesta experiência é o atrito entre o papel e a superfície da mesa.

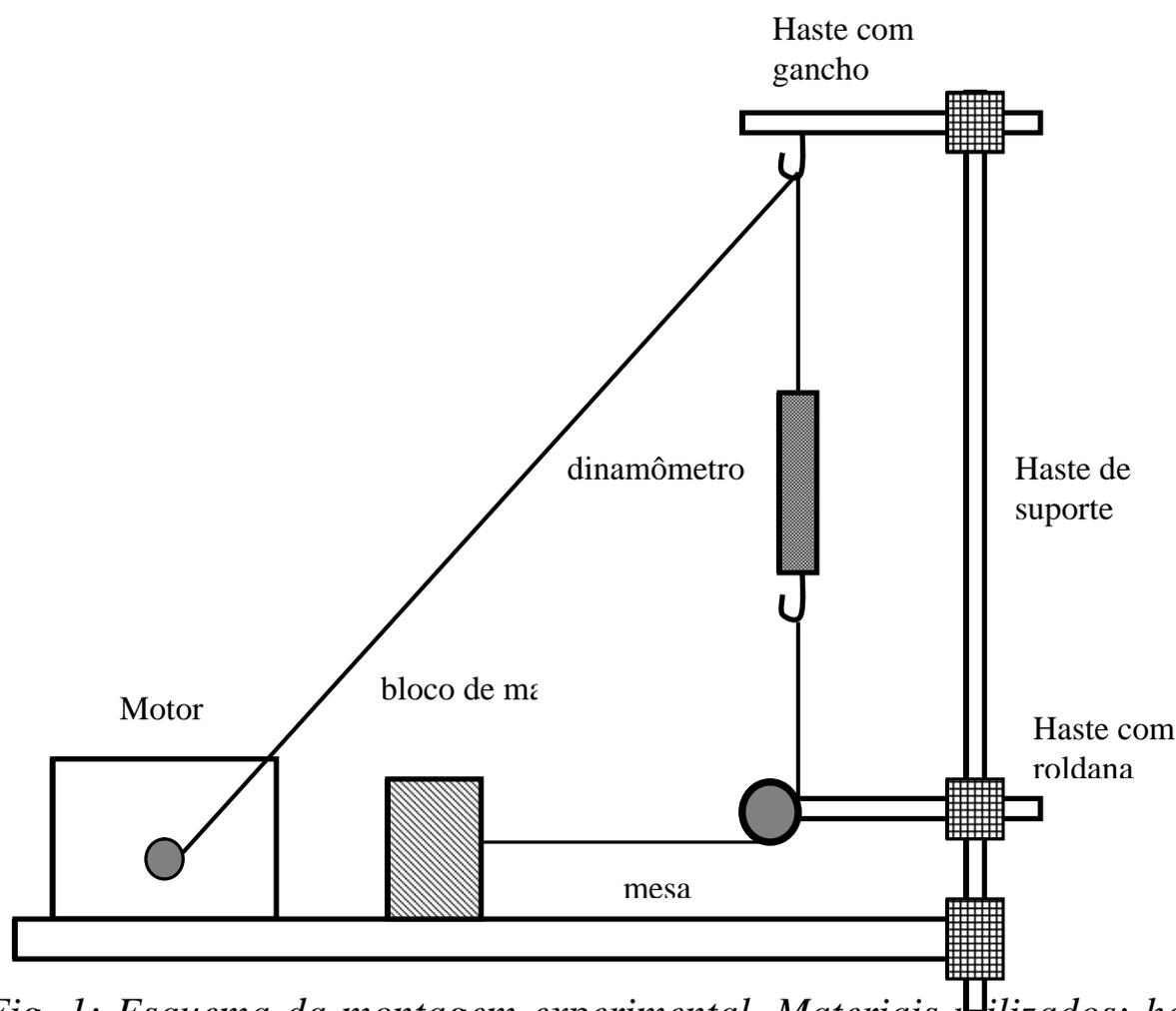


Fig. 1: Esquema da montagem experimental. Materiais utilizados: hastes diversas, suportes, roldana, dinamômetro de 2 N (menor divisão de escala: 0,05 N), bloco de madeira, motor para enrolar o fio, fio de nylon, e massas diversas.

III. Resultados experimentais

O bloco utilizado possui as seguintes dimensões: comprimento de $(14,970 \pm 0,005)$ cm, largura de $(7,445 \pm 0,005)$ cm e espessura de $(3,770 \pm 0,005)$ cm. Considerando estas dimensões, o bloco possui três áreas distintas, sendo que as estudadas foram as duas maiores (comprimento x largura e comprimento x espessura), resultando nos seguintes valores:

$$\text{área } A_1 = (11,14 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

e

$$\text{área } A_2 = (2,807 \pm 0,006) \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Observa-se que as duas áreas são bem diferentes, sendo que a área A_1 é quase quatro vezes maior que a área A_2 .

Na Tabela 1, mostrada a seguir, são indicados os valores encontrados da força máxima média (F_m), lidos no dinamômetro, junto com as respectivas áreas e massas estudadas. As forças médias foram obtidas através da média aritmética de seis valores para cada situação estudada. Estas médias poderiam ter sido feitas com um número maior de medidas, mas aqui estamos apresentando o mesmo procedimento aplicado aos alunos. Uma maior quantidade de medidas inviabilizaria a realização das mesmas em uma única aula experimental. Para o cálculo do peso do bloco foi considerada a aceleração da gravidade local: $9,7915 \text{ m/s}^2$, e o módulo da força peso é igual ao módulo da força normal (F_n).

Tabela 1: Valores das massas e peso dos blocos, valores médios da força máxima de atrito estático e valores da área estudada.

| | | | | | | |
|------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| massa (g) ($\pm 0,01$) | 193,82 | 193,82 | 243,31 | 292,68 | 342,07 | 391,46 |
| Peso (N) ($\pm 0,0001$) | 1,8978 | 1,8978 | 2,3824 | 2,8658 | 3,3494 | 3,8330 |
| Área | A_1 | A_2 | A_1 | A_1 | A_1 | A_1 |
| Força máxima média (N) | ($0,76 \pm 0,05$) | ($0,75 \pm 0,04$) | ($0,97 \pm 0,03$) | ($1,16 \pm 0,03$) | ($1,31 \pm 0,03$) | ($1,58 \pm 0,04$) |

Para a determinação do erro da Força máxima média, foi considerado o erro de escala do dinamômetro (menor divisão de escala dividido por dois) somado com o erro aleatório provável, considerado aqui como numericamente igual ao desvio padrão da média. A equação utilizada para o cálculo do desvio padrão da média (σ_m) é dada abaixo (PIACENTINI et al, 2001):

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum (\Delta F_i)^2}{n(n-1)}} ;$$

sendo n o número de medidas (no nosso caso, $n = 6$) e ΔF_i o desvio de uma medida, ou seja, a diferença entre o valor de uma medida individual F_i e a sua média F_m , representado por: $\Delta F_i = F_i - F_m$. Além disso, o erro de escala da balança usada para se medir as diferentes massas acima foi também levando em conta. Desta forma, em nossa análise, apenas os erros (ou incertezas) de escala dos instrumentos utilizados, assim como os erros aleatórios são considerados.

Estes últimos surgem por termos efetuado a medida da força máxima várias vezes e por não termos controle total sobre o processo de medida, o qual fica sujeito a incertezas incontrolláveis em cada uma das medidas.

IV. Análise dos resultados experimentais

Observando as duas primeiras colunas de dados, verificamos que foram obtidos, para a mesma massa do bloco e diferentes áreas, valores próximos da força máxima de atrito estático, resultando nos seguintes valores do coeficiente de atrito: $\mu_e = (0,40 \pm 0,03)$, para a área A_1 e $\mu_e = (0,40 \pm 0,02)$ para a área A_2 . Neste caso, observamos que ao levarmos em consideração todos os erros, podemos considerar que o coeficiente de atrito estático não depende da área macroscópica de contato entre os dois objetos em estudo. Os erros considerados no cálculo do coeficiente de atrito estático são obtidos pelo cálculo da propagação de erros, considerando os erros de escala dos instrumentos utilizados (paquímetro, balança e dinamômetro), e os erros aleatórios (igual ao desvio padrão da média) devido ao cálculo da força máxima média. Para o cálculo do erro do coeficiente de atrito estático foi utilizada a seguinte equação de cálculo de propagação de erros (PIACENTINI et al):

$$\Delta\mu_e = \left| \frac{1}{F_n} \right| \cdot \Delta F_m + \left| -\frac{1}{F_n^2} \right| \cdot \Delta F_n ;$$

na qual ΔF_m e ΔF_n são, respectivamente, os erros totais (erro de escala + erro aleatório) da força máxima média e da força normal.

Especificamente neste conjunto de dados, os valores encontrados para o coeficiente de atrito estático são iguais mesmo sem considerar os erros. Isso ocorreu, pois os valores médios encontrados para as forças máximas eram bem próximos (0,76 N e 0,75 N), resultando em valores numericamente iguais considerando o arredondamento que foi feito no último algarismo significativo para o cálculo do coeficiente de atrito estático. Se os valores fossem diferentes, deveríamos analisar os erros para verificar se existe uma faixa de valores para os quais os coeficientes de atrito para as duas áreas sejam iguais. Exemplo: um grupo de alunos encontrou $\mu_e = (0,43 \pm 0,01)$ para a área A_1 e $\mu_e = (0,41 \pm 0,01)$ para a área A_2 . Coincidência em $\mu_e = 0,42$. Assim, se os alunos não forem bem orientados a levarem em consideração todos os erros associados ao experimento, os mesmos podem chegar a conclusões incorretas.

Pode-se continuar a análise, verificando como o coeficiente de atrito estático depende da massa do objeto em estudo. Observando os dados da Tabela 1, nota-se que a força máxima de atrito aumenta com o peso (força normal) do

objeto, e os estudantes possuem uma intuição que isto deve ocorrer. Mas o importante é verificar se a força de atrito é diretamente proporcional ao aumento do peso, ou seja, se o coeficiente é constante. Analisando a expressão que relaciona as duas forças: $F_{atr-max} = \mu_e F_n$, verifica-se que ao construirmos um gráfico da força de atrito em função da força normal, o coeficiente de atrito estático é igual ao coeficiente angular da reta ajustada aos pontos experimentais. No gráfico mostrado a seguir na Figura 2, os valores experimentais com os seus respectivos erros, possuem um comportamento linear, indicando que o valor de μ_e é constante. Os pontos experimentais foram ajustados por uma reta através do método dos mínimos quadrados (PIACENTINI et al, 2001, HELENE; VANIN, 1991). Neste caso foi encontrado pelo ajuste: $\mu_e = (0,40 \pm 0,02)$, que é igual ao valor obtido de μ_e na análise da dependência da área.

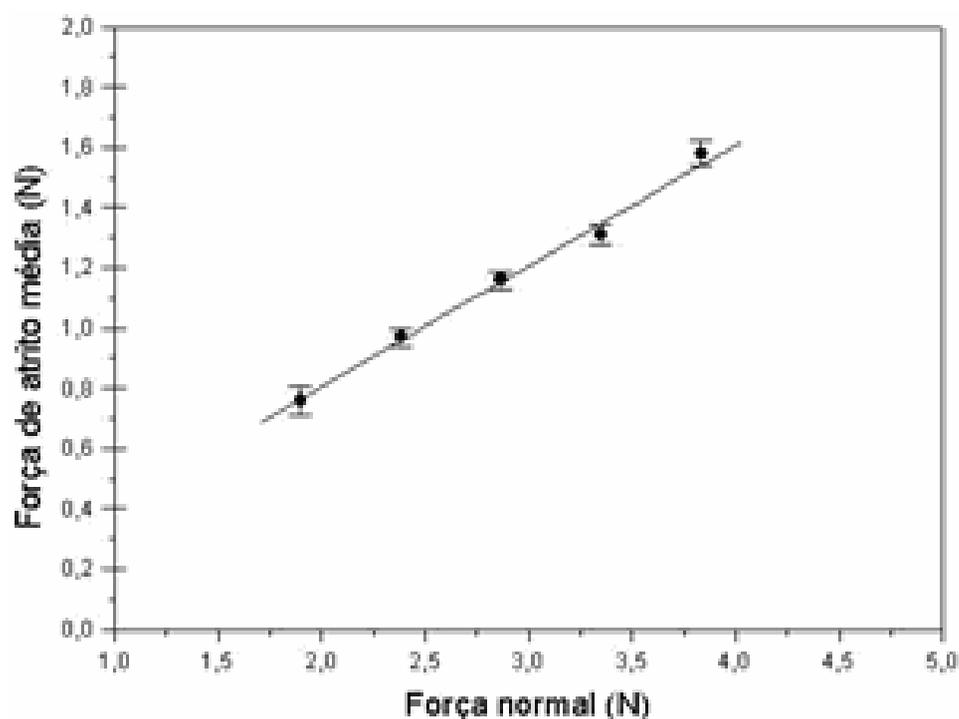


Fig. 2 – Valor médio da Força de atrito ($F_{atr-max}$) em função da força normal. Melhor reta ajustada pelo método dos mínimos quadrados. O coeficiente angular é igual ao coeficiente de atrito estático do experimento. $\mu_e = (0,40 \pm 0,02)$ e o coeficiente de correlação do ajuste $R = 0,9944$.

V. Conclusões

Um experimento simples pode ser utilizado para comprovar as propriedades do coeficiente de atrito estático. Mas deve-se tomar extremo cuidado na análise dos dados experimentais, levando-se em consideração os erros (ou incertezas) de medida, erros aleatórios e os erros propagados, para obtermos resultados coerentes com os propostos nos livros didáticos. Deve-se tomar

cuidado com as condições iniciais do experimento e também com a reprodutibilidade dos dados experimentais.

Como os conceitos de Física não são muito elaborados neste experimento, os estudantes podem realizá-lo na fase inicial (1º ou 2º semestre, dependendo da instituição) de uma disciplina experimental, empregando os conhecimentos adquiridos da teoria de erros (PIACENTINI et al, 2001, HELENE; VANIN, 1991; VUOLO, 1996) e da análise gráfica de dados experimentais (PIACENTINI et al, 2001). Finalmente, uma vez que as propriedades da força de atrito são em geral apresentadas aos estudantes do nível médio ou iniciantes de cursos universitários da área de ciências exatas, como sendo propriedades obtidas empiricamente, um experimento que dê ao estudante a oportunidade de obter tais propriedades, deve ser incentivado.

Referências bibliográficas

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física - mecânica**. 6 ed. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

HELENE, O. A. M.; VANIN, V. R. **Tratamento estatístico de dados em Física experimental**. 2 ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 1991.

NUSSENZWEIG, H. M. **Curso de Física básica - mecânica**. 4 ed. v.1. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 2002.

PIACENTINI, J. J.; GRANDI, B. C. S.; HOFMANN, M. P.; LIMA, F. R. R.; ZIMMERMANN, E. **Introdução ao laboratório de Física**. 2 ed. rev. Florianópolis: Ed. da UFSC. 2001.

TIPLER, P. A. **Física para cientistas e engenheiros**. 4 ed. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

VUOLO, J. H. Avaliação e expressão de incerteza em medição. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 3, setembro 1999.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. 2 ed. São Paulo: Ed. Edgar Blücher, 1996.