

Raquel Sofia Rebelo Nunes

Geometria Fractal e Aplicações



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro / 2006

Raquel Sofia Rebelo Nunes

Geometria Fractal e Aplicações



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Janeiro / 2006

Para os meus pais e para o Ricardo.

Gostaria de agradecer a todos os professores do mestrado em *Ensino da Matemática* pelos seus ensinamentos, à colega e amiga Jenny Campos pelo seu companheirismo e incentivo durante o curso, ao Ricardo Mortágua pelo seu apoio incondicional, permanente disponibilidade e colaborações decisivas e por fim, um agradecimento especial ao Prof. Dr. José Ferreira Alves pela sua orientação científica, cooperação e compreensão ao longo da realização deste trabalho.

Conteúdo

Referências	1
1 Generalidades	9
1.1 Números complexos	9
1.2 Percepção de infinito	12
2 Fractais clássicos	15
2.1 O conjunto de Cantor	16
2.2 O triângulo de Sierpinski	17
2.3 A curva de Koch	19
2.4 Curvas que preenchem o quadrado	23
2.4.1 Curva de Peano	24
2.4.2 Curva de Hilbert	25
3 Características de um fractal	29
3.1 Auto-semelhança, escala e complexidade	29
3.2 Dimensão	34
3.2.1 Dimensão euclidiana	36
3.2.2 Dimensão topológica	37
3.2.3 Dimensão fractal	41
4 Fractais em sistemas dinâmicos	47
4.1 Conjuntos de Julia	48

4.2	Conjunto de Mandelbrot	50
4.3	Conjunto de Cantor dinamicamente definido	52
4.4	O jogo do caos	54
5	Aplicações	57
5.1	Meio-tom digital	57
5.2	Fractais gotejados de Pollock	65
5.3	A lei do crescimento	67
6	Conclusão	73
7	Bibliografia	75

Introdução

A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às económico-sociais e à tecnologia. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objectos não tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar os estudos dos fenómenos naturais.

José Sebastião e Silva em [17] (1966), afirma que a modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. E refere:

“Ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam.”

Com o presente trabalho, pretendemos contribuir para o processo de ensino/aprendizagem da geometria e do cálculo que são objectos de estudos no ensino secundário e cujo programa [11] descreve como uma das suas finalidades:

“Estabelecer conexões entre a Geometria, a Matemática discreta e a Análise Infinitesimal, envolvendo padrões geométricos e numéricos, os conceitos de medida, sucessões, iteração e limites, ao mesmo tempo que se adicionam novas ideias como a auto-semelhança e a dimensão fractal”.

Apresentamos a geometria fractal através dos fractais clássicos de Cantor, Koch, Sierpinski, Peano e Hilbert, descrevendo as características de auto-semelhança, escala e dimensão. Em seguida descrevemos alguns exemplos de fractais em sistemas dinâmicos como os conjunto de Julia, Mandelbrot e Cantor. É também descrito o jogo do caos como um processo dinâmico que gera um fractal. Por fim, apresentamos algumas aplicações noutras áreas, nomeadamente na computação, na arte e na medicina.

A aplicação *Meio-tom digital* refere-se a um método de meio-tom digital que utiliza curvas que preenchem o quadrado, nomeadamente, a curva de Hilbert, para reproduzir imagens monocromáticas. O método consiste na subdivisão da imagem original em pequenas regiões baseadas no traço da curva que preenche o quadrado, em seguida são calculadas as intensidades médias de cada região e por fim determina-se os padrões de pontos da imagem. Esse método é aplicável a diversos sectores da técnica tais como Indústria Gráfica, Impressão de Imagens monocromáticas e/ou a cores, Reprodução de meio-tom, Computação Gráfica, e Ilustração digital.

Na aplicação *Fractais gotejados de Pollock* apresentamos uma forma de arte moderna que despertou interesse ao autor R. Taylor. Este, desenvolveu um estudo em torno das pinturas de Pollock e demonstrou que estas tinham características fractais, nomeadamente, dimensão fractal.

A aplicação *A lei do crescimento* baseia-se na constatação do facto do crescimento do corpo de um ser humano não ser proporcional. De facto, o crescimento do corpo de um ser humano segue uma lei de potência que está directamente relacionada com a dimensão fractal.

As figuras contidas neste trabalho foram adaptadas e construídas utilizando diversos programas, nomeadamente GSP- Geometer SketchPad, Graph, Ultrafractal, Fractree e Jasc Paint Shop Pro.

Capítulo 1

Generalidades

1.1 Números complexos

Os números complexos surgiram para dar resposta a questões tais como: *Se a equação $x^2 - 1 = 0$ é solúvel, por que razão não o será também a equação $x^2 + 1 = 0$? Ou seja, não terá -1 uma raiz quadrada?*[15]

Quando resolvemos esta equação obtemos $x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, mas não conhecendo raízes quadradas de números negativos, a equação seria impossível. Foi, então, criado um símbolo i designado por **unidade imaginária** que satisfaz a condição, $i = \sqrt{-1}$ e que obedece às regras que já conhecemos para os números reais, nomeadamente, as leis operatórias habituais. Assim, a equação $x^2 = -1$ passa a ser resolúvel e as suas raízes ou soluções são: i ou $-i$. Desta forma, faz sentido criar um novo conjunto de números, o **conjunto dos números complexos**.

Podemos fazer dois tipos de representação destes números frequentemente designados pela letra z : A representação algébrica e a trigonométrica.

Representação algébrica do número complexo z :

Na representação algébrica, um número complexo representa-se por $z = a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ em que a é a parte real de z : $a = \text{Re}(z)$ e b , o coeficiente da parte imaginária de z : $b = \text{Im}(z)$.

Os números na forma $z = bi$, isto é, quando $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$, são designados de **imaginários puros** e definidos por $I = \{a + bi \in \mathbb{C} : a = 0\}$. Quando $\text{Im}(z) = 0$ e $\text{Re}(z) \neq 0$, os números complexos reduzem-se à parte real sendo $z = a$, um número real definido por $R = \{a + bi \in \mathbb{C} : b = 0\}$. O conjunto de todos os números complexos tem estrutura de corpo que designamos de **corpo complexo**. Assim, o corpo real \mathbb{R} é um subconjunto do corpo complexo \mathbb{C} , pois qualquer número real pode ser escrito na forma $z = a + bi$ com $b = 0$.

Os números complexos podem ser representados num referencial cartesiano Oxy , em que se fixa o eixo das abcissas para representar o conjunto dos números reais e o eixo das ordenadas para representar o conjunto dos números imaginários. Assim, a cada número complexo, $z = a + bi$, podemos associar um e um só ponto P do plano de coordenadas (a, b) e reciprocamente, a cada ponto $P' = (a', b')$ podemos associar um e um só complexo $z = a' + b'i$. Deste modo, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano cartesiano e dizemos que, no plano complexo, $P = (a, b)$ é o afixo ou imagem do número complexo $a + bi$.

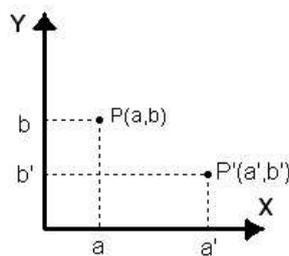


Figura 1.1: Correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano cartesiano.

Representação trigonométrica do número complexo z :

Consideremos o triângulo rectângulo OPR da figura 1.2 em que: $\overline{OR} = a = r \cdot \cos \theta$ e $\overline{RP} = b = r \cdot \sin \theta$. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{OP} = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Reparemos que $r = |z| = |a + bi|$. Assim, todo o complexo não nulo pode-se escrever na forma $z = r \cdot \cos \theta + r \cdot \sin \theta i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ou mais simplesmente $z = r \cdot cis \theta$, em que r representa a distância de z a 0, designado por módulo de z , $r = |z|$ e o ângulo θ designado por argumento, $\theta = arg(z)$.

Em particular, todo o número real é representado sobre o eixo Ox e é um complexo com argumento 0 ou π , consoante seja positivo ou negativo, respectivamente. E todo o número imaginário puro é representado sobre o eixo Oy sendo um complexo com argumento $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, consoante o seu coeficiente seja positivo ou negativo respectivamente.

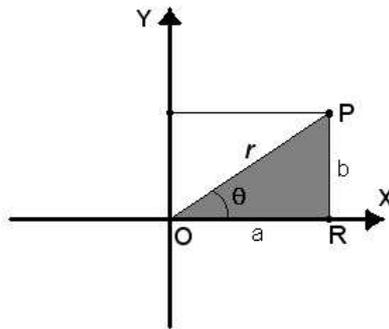


Figura 1.2: Representação geométrica de um número complexo

Igualdade de números complexos

Dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, definimos a igualdade entre z e w , escrevendo $z = w \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Simétrico de um número complexo

O simétrico do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $-z = -(a + bi)$, ou seja, $-z = (-a) + (-b)i$, que corresponde a uma rotação de 180° de z em torno da origem.

Conjugado de um número complexo

O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é o número complexo denotado por $\bar{z} = a - bi$, que corresponde a uma reflexão de z na recta das abcissas.

Inverso de um número complexo

O inverso do número $z = a + bi (\neq 0)$, é o número complexo $z^{-1} = \frac{(a-bi)}{a^2+b^2}$

Operações com complexos

- Adição: $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
- Produto: $(a + bi) \cdot (c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- Potenciação (se o expoente for inteiro e positivo): $(a+bi)^n = \overbrace{(a + bi) \cdot (a + bi) \dots (a + bi)}^n$
- Potenciação (se o expoente for inteiro e negativo): $(a + bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}$
- Radiciação (*fórmula de Moivre*): $\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta+2k\pi}{n})$, onde k é um inteiro qualquer.

Esta fórmula permite verificar que cada número complexo tem n raízes de índice n que se obtêm dando a k , n valores inteiros consecutivos, por exemplo os valores $0, 1, 2, \dots, n - 1$

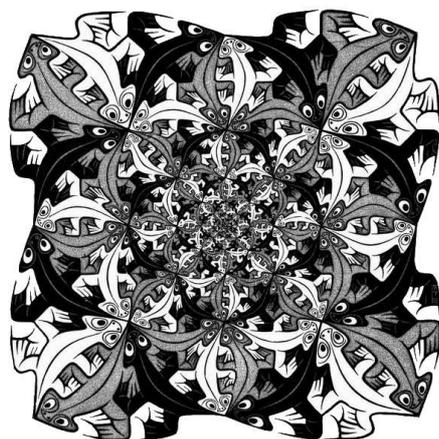
Iremos ver mais à frente a aplicabilidade dos números complexos na geometria fractal.

1.2 Percepção de infinito

A percepção de infinito está subjacente aos objectos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indefinidamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite ao nosso campo de visão. James Gleick [6] afirma que *Para os olhos da mente, um fractal é uma maneira de entrever o infinito.*

Um exemplo muito conhecido no mundo da geometria são as gravuras de *M. C. Escher*, em que este preenche o plano com figuras sucessivamente mais pequenas, seguindo uma progressão geométrica. Com estas figuras, Escher tenta alcançar o limite do infinitamente

pequeno de modo a simbolizar o infinito. *Quem quiser representar um número infinito, tem de reduzir gradualmente o tamanho das figuras até que alcance, pelo menos teoricamente, o limite do formato infinitamente pequeno.* [7]



(a) *Smaller and smaller*, 1956



(b) *Circle limit III*, 1959

Figura 1.3: Gravuras de *M. C. Escher*

Na figura 1.3 (a) a área de cada elemento, em forma de réptil dirigindo-se para o centro, é continuamente reduzida a metade, sendo que em teoria se pode alcançar não só o formato infinitamente pequeno, como também o número infinitamente grande. Na prática, Escher chega ao fim das suas possibilidades pois existem factores que o condicionam tais como: a qualidade da tela; a agudeza do instrumento que usa; a segurança da sua mão e a capacidade visual. Nesta gravura podemos ver a existência do limite no centro, mas em direcção ao exterior, o padrão tem um limite arbitrário. Já na figura 1.3 (b), a redução dos motivos é de dentro para fora, anulando o limite imposto pela fronteira física do papel, ou seja, criando a ideia de uma fronteira inatingível. Segundo o matemático Coxeter¹,

¹Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), matemático inglês, distinguiu-se pelo modo como explorou a relação entre a teoria de grupos e a geometria. Os seus trabalhos em espaços hiperbólicos, nomeadamente, uma pavimentação do plano de Poincaré com triângulos congruentes, tiveram influência sobre Escher, na representação do infinito.

Escher utilizou nesta gravura um modelo aproximado ao de Poincaré², na medida em que as fileiras de peixes que nadam ao longo dos arcos brancos, desde os infinitamente pequenos, passando por um tamanho máximo, até infinitamente pequenos, cortam a circunferência periférica não segundo um ângulo de 90°, mas sim de 80°.

Esta descrição leva-nos a uma noção de infinito de uma forma intuitiva que poderá servir de um ponto de partida para a compreensão do conceito de limite matemático cuja descrição se encontra fora do âmbito desta dissertação.

²Jules-Henri Poincaré (1854-1912), matemático e físico francês, contribuiu para a clarificação da geometria hiperbólica inventando um modelo conhecido por *Modelo de Poincaré*.

Capítulo 2

Fractais clássicos

Muitos foram os matemáticos que ao longo dos tempos se dedicaram ao estudo de comportamentos naturais, como por exemplo o movimento dos planetas. Com o objectivo de tornar a natureza simples e compreensível, foram surgindo novas teorias que formavam bases matemáticas sólidas e que descreviam e formalizavam os fenómenos. No final do séc. XIX e início do séc. XX, alguns matemáticos como, Cantor¹, Koch², Sierpinski³, Peano⁴ e Hilbert⁵ investigavam objectos que punham em causa algumas das bases matemáticas da época relacionadas com a análise, álgebra e geometria. Estes objectos foram considerados “casos patológicos” ou “monstros matemáticos”.

Os conjuntos de Cantor e de Sierpinski são gerados através de um processo de remoção de alguma parte da figura inicial enquanto que os conjuntos de Koch, Peano e de Hilbert são gerados através de um processo de alteração da figura inicial.

¹Geog Cantor (1845-1918), matemático Russo cujos seus trabalhos ligados à Teoria dos Conjuntos estão na base do aparecimento do famoso fractal *Conjunto de Cantor*.

²Helge von Koch (1870-1924), matemático Sueco que introduziu em 1904 o fractal conhecido como *A Curva de Koch*.

³Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático Polaco que criou em 1916 o fractal que recebeu o seu nome *Triângulo de Sierpinski*.

⁴Giuseppe Peano (1858-1932) matemático Italiano, descreveu a primeira curva em 1890. Desde então, foram descobertas, por outros matemáticos, curvas que por possuírem características comuns à primeira, foram denominadas *Curvas de Peano*.

⁵David Hilbert (1862-1943), matemático alemão que criou o fractal *A Curva de Hilbert*.

2.1 O conjunto de Cantor

O *Conjunto de Cantor* também conhecido como *Poeira de Cantor* desenvolvido por Cantor é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário $[0,1]$. A sua construção numérica permite-nos obter a ideia de um subconjunto fechado de números reais. A construção geométrica permite-nos ter uma melhor percepção deste conceito e leva-nos à estruturação de um fractal.

Consideremos como figura inicial, o intervalo fechado $I_0 = [0, 1]$, dividimo-lo em 3 partes congruentes e desprezamos o terço médio (ver figura 2.1). Ficamos, desta forma, com a união disjunta de dois intervalos fechados, $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ de comprimento $\frac{1}{3}$ cada. Aplicando este processo aos intervalos de extremos 0 e $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ e 1, ou seja, dividindo cada um deles em três partes iguais e desprezando o terço médio, obtemos $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ com 4 intervalos congruentes de comprimento $\frac{1}{9}$ cada. Continuando o processo para os quatro intervalos obtidos no passo anterior, obtemos 8 intervalos de comprimento $\frac{1}{27}$ cada. Repetindo indefinidamente o processo, iremos obter I_N que será constituído pela união disjunta de 2^N intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^N}$ cada.

Desta forma, o conjunto de Cantor, designemos por K , é definido por $K = \bigcap_{N=0}^{\infty} I_N$. E portanto, é o conjunto de pontos que restam quando repetimos os passos onde se removem os intervalos até ao infinito. Em particular, K tem comprimento menor do que qualquer I_N cujo comprimento é $2^N \times (\frac{1}{3})^N = (\frac{2}{3})^N$. Como $(\frac{2}{3})^N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, então o comprimento do conjunto de Cantor é zero, o que implica que K não contenha intervalos.

Iremos ver na secção 3.2 que o conjunto de Cantor tem dimensão topológica zero e dimensão fractal aproximadamente 0,63.

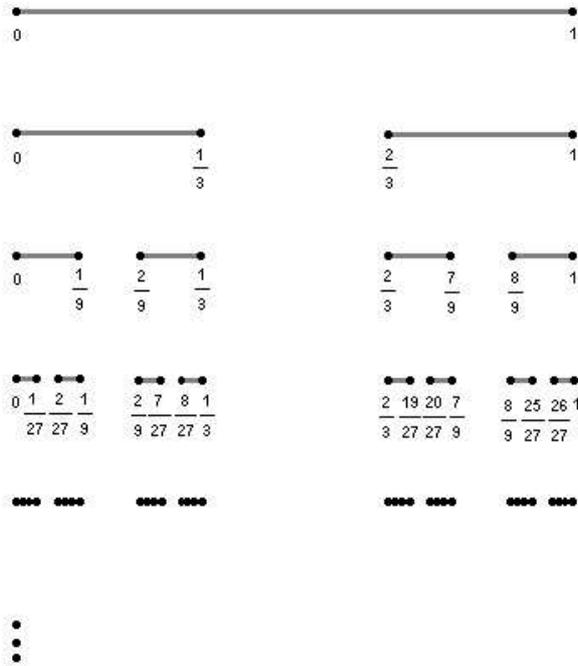


Figura 2.1: Conjunto de Cantor.

2.2 O triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica que foi objecto de estudo do matemático polaco Waclav Sierpinski. Existem diferentes formas de construção deste fractal, desde alguns processos geradores completamente distintos até um que utiliza o Jogo do Caos que está descrito no capítulo 4.

Esta figura é obtida como limite de um processo recursivo que está descrito, geometricamente, na figura 2.2. Partimos de um triângulo equilátero, depois, removemos o triângulo equilátero definido pelos pontos médios dos lados e obtemos a figura geradora. Repetimos continuamente o processo, ou seja, aplicamos a figura geradora em todos os triângulos equiláteros que não foram removidos e obtemos, no limite, o triângulo de Sierpinski.

Através da figura anterior, podemos verificar, em cada iteração, que a área do triângulo de Sierpinski, é igual à área do triângulo inicial multiplicada pelo factor $3/4$ e que o seu perímetro é igual ao perímetro do triângulo inicial multiplicado pelo factor $3/2$.

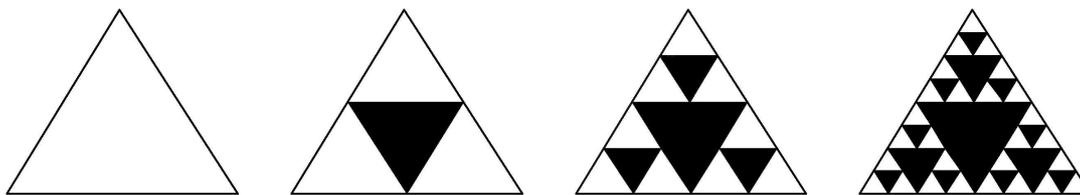


Figura 2.2: Figura inicial e primeiras três iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.

Passos	Área	Perímetro
0	A	P
1	$A_1 = A \times \frac{3}{4}$	$P_1 = P \times \frac{3}{2}$
2	$A_2 = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$P_2 = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$
3	$A_3 = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$	$P_3 = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Tabela 2.1: Área e perímetro do triângulo de Sierpinski até ao 3º passo da sua construção.

Analisando a tabela 2.1, podemos verificar que no n -ésimo passo a figura terá área $A_n = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ e perímetro $P_n = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Estamos perante duas progressões geométricas de razão $\frac{3}{4} (< 1)$ e $\frac{3}{2} (> 1)$ respectivamente, o que significa que quando $n \rightarrow +\infty$ a área do triângulo de Sierpinski tende para zero e o perímetro tende para infinito.

Outras figuras como o “Tapete de Sierpinski” e a “Esponja de Menger”⁶ assemelham-se, pela sua construção, ao triângulo de Sierpinski. Podemos ver o processo de construção do tapete de Sierpinski no capítulo 3. A esponja de Menger é um fractal tridimensional obtido a partir de um cubo, onde são retirados sistematicamente outros cubos de modo semelhante ao que é feito na construção do triângulo de Sierpinski: divide-se o cubo em 27 cubos iguais removendo-se o cubo central e os seis cubos centrais de cada face. Repete-se o processo em cada um dos cubos restantes e continuando-o indefinidamente, obtemos uma figura de área infinita e volume zero.

⁶Karl Menger (1902-1985), matemático americano com origem austríaca, apresentou uma versão tridimensional da carpete de Sierpinski”

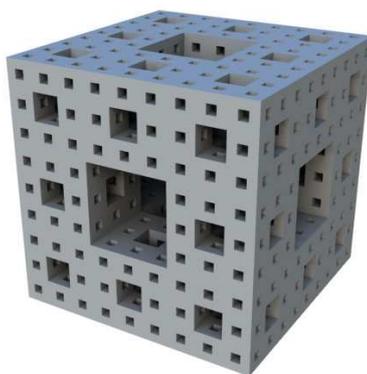


Figura 2.3: Esponja de Menger.

Em [12] podemos ver um exemplo interessante da aplicabilidade do triângulo de Sierpinski na área das probabilidades onde estão apresentados os números que constituem o triângulo de Pascal⁷, dispostos graficamente de forma a distinguir os números pares e os números ímpares com cores diferentes, obtendo como resultado uma figura muito semelhante ao triângulo de Sierpinski.

Iremos ver na seção 3.2 que o triângulo de Sierpinski tem dimensão fractal aproximadamente 1,59.

2.3 A curva de Koch

O matemático sueco Helge von Kock foi o criador da curva de Koch que mais tarde originou a “Ilha de Kock” ou “Floco de Neve de Kock”. Ambas as figuras baseiam-se no mesmo processo de construção, com a diferença de que a curva de Koch tem como figura inicial um segmento de recta, e a ilha de Koch, um triângulo equilátero que é composto por três desses segmentos de recta.

Iniciamos então o processo, com um triângulo equilátero. No primeiro passo de construção, dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada um

⁷Blaise Pascal (1623-1662) publicou o “Tratado do Triângulo Aritmético” onde demonstrou diversas propriedades do triângulo que ficou conhecido com o seu nome.

dos segmentos médios, um novo triângulo equilátero, tal como podemos observar na figura 2.4. Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção. Em seguida, repetimos o mesmo processo a cada um dos 12 segmentos obtidos na figura anterior. Repetindo indefinidamente o processo, obtemos a curva de Koch no limite deste processo recursivo.

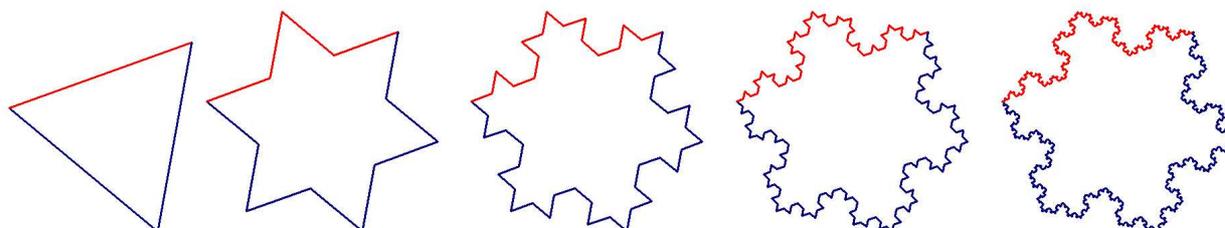


Figura 2.4: Figura inicial e primeiros quatro passos da construção da curva de Koch.

Ao vermos a representação geométrica deste fractal podemos perceber facilmente que temos uma figura regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez mais pequenos (os lados de cada nova figura são três vezes mais pequenos que os da figura anterior).

Analisemos este facto através da tabela 2.2, considerando o comprimento do lado do triângulo inicial igual a uma unidade.

Passos	Número de lados	Comprimento do lado
0	$3 \times 4^0 = 3$	$1 = 3^0$
1	$3 \times 4^1 = 12$	$1/3 = 3^{-1}$
2	$3 \times 4^2 = 48$	$1/9 = 3^{-2}$
3	$3 \times 4^3 = 192$	$1/27 = 3^{-3}$
4	$3 \times 4^4 = 768$	$1/81 = 3^{-4}$

Tabela 2.2: Número de lados e comprimento de cada lado da curva de Koch até ao 4º passo da sua construção.

- O número de lados de cada figura em função do número de passos é dado pela expressão $M_n = 3 \times 4^n$ que é uma sucessão monótona crescente e quando $n \rightarrow +\infty$

a sucessão $M_n \rightarrow +\infty$. O que significa que “a curva vai ter um número infinito de lados.”

- O comprimento dos lados de cada figura em função do número de passos é dado pela expressão $N_n = 3^{-n}$ que é uma sucessão monótona decrescente e quando $n \rightarrow +\infty$ a sucessão $N_n \rightarrow 0$. O que significa que o “comprimento de cada lado da curva” tende para zero.

Desta forma, podemos fazer uma análise de como vai variar o comprimento da fronteira, ou seja, o perímetro da curva de Koch.

Seja $P_n = M_n \times N_n$ a sucessão dos perímetros definida à custa das duas sucessões anteriores.

$$P_n = (3 \times 4^n) \times (3^{-n}) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Ora, $P_n \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$ (P_n é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é positivo e a razão é superior a 1), logo o perímetro da curva de Koch é infinito.

Será que a área é também infinita?

Antes de respondermos a esta questão, verifiquemos que o comprimento do lado de cada nova figura triangular é reduzida por um factor de razão $1/3$. Assim, e como podemos verificar na figura 2.5, a área de cada triângulo da curva de Koch formado nos sucessivos passos de construção, sofre uma redução de $1/9$, uma vez que pode ser dividido em nove triângulos geometricamente iguais.

Consideremos novamente a figura 2.4 em que o comprimento do lado do triângulo inicial é igual a uma unidade. Assim, designando a sua área por A_0 , vem que $A_0 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. A área da figura seguinte, obtém-se adicionando à área da figura anterior, o número de triângulos que se acrescentam nesse passo multiplicado pela área de um triângulo equilátero, cujo valor sofre uma redução por num factor de $1/9$ do valor da figura inicial.

- No 1º passo, temos 3 novos triângulos cuja área é $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}$. Logo, o valor da área da figura é:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

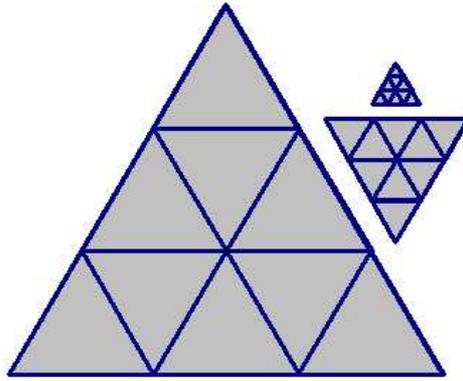


Figura 2.5: Divisão de um triângulo equilátero em nove triângulos equiláteros geometricamente iguais.

- No 2º passo, temos 3×4 novos triângulos cuja área é $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2$. Logo, o valor da área da figura é:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9}$$

- No 3º passo, temos 3×4^2 novos triângulos cuja área é $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3$. Logo, o valor da área da figura é:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + 3 \times 4^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

- No n-ésimo passo, temos $3 \times 4^{n-1}$ novos triângulos cuja área é $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$. Logo, o valor da área da figura é:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Assim, podemos escrever A_n como uma soma entre $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e os termos de uma progressão geométrica, B_{n-1} , de razão $\frac{4}{9}$, com o primeiro termo igual a $\frac{\sqrt{3}}{12}$ e cuja soma dos n primeiros termos é:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, $S_n \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{20}$ e portanto, a área da curva de Koch é

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,7$$

Concluimos então que a área da curva de Koch é finita.

Além das características citadas acima, a curva de Koch, apesar de ser contínua em todos os pontos, não é diferenciável (ou derivável) em nenhum dos seus pontos, isto por ser composta por infinitos “cantos”.

Iremos ver na secção 3.2 que a curva de Koch tem dimensão fractal aproximadamente 1,26, maior que a de uma linha recta (dimensão 1), mas menor que a de uma curva (dimensão 2).

2.4 Curvas que preenchem o quadrado

O aparecimento das curvas que preenchem o quadrado foi muito importante para o desenvolvimento do conceito de dimensão. Em meados do ano 1891, Peano e Hilbert discutiram estas curvas questionando a sua percepção intuitiva, ou seja, dada uma parte de um plano (bidimensional) há uma curva (unidimensional) que encontra, pelo menos uma vez, todos os pontos desse plano durante o seu percurso.

Mais formalmente, podemos dizer que uma curva plana é uma aplicação contínua

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

do intervalo unitário $I = [0,1]$ da recta real no plano euclidiano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. A imagem $c(I)$ é chamada de traço da curva c .

Uma curva que preenche o quadrado é uma curva contínua tal que o seu traço preenche todo o quadrado unitário $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ do plano. Portanto, para cada ponto P de I^2 existe um número real t , do intervalo I , tal que $c(t)=P$. Isto significa que a curva nos oferece uma maneira ordenada de visitar todos os pontos do quadrado apenas fazendo variar o parâmetro t entre 0 e 1.

2.4.1 Curva de Peano

Para construção da curva de Peano também usamos um processo iterativo. Começamos com um pequeno segmento de recta, por exemplo com uma unidade de comprimento. Depois de dividirmos o segmento de recta em três sub-segmentos iguais, construímos um rectângulo sobre o sub-segmento intermédio ficando com dois quadrados de lado igual a cada um dos sub-segmentos. Obtemos, portanto, uma curva geradora com 9 sub-segmentos, tal como apresentamos na figura 2.6.

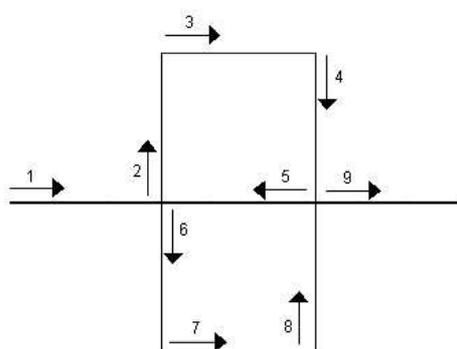


Figura 2.6: Figura geradora da curva de Peano.

Agora, cada segmento de recta é substituído por vários segmentos de recta com tamanho inferior e proporcional por um factor de escala 3. Observando a tabela 2.3, verificamos que no k -ésimo passo, cada sub-segmento mede $\frac{1}{3^k}$ e o comprimento da curva é de $9^k \times \frac{1}{3^k} = 3^k$.

Repetindo sucessivamente os passos de construção da curva de Peano, observamos no objecto final da sua construção, um quadrado completamente preenchido. Ver figura 2.7. Iremos ver na secção 3.2 que a curva de Peano tem dimensão fractal igual a 2.

Passos	Nº de sub-segmentos	Comprimento de cada sub-segmento	Comprimento da curva
1	9	$\frac{1}{3}$	$9 \times \frac{1}{3} = 3$
2	$9 \times 9 = 9^2$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$	$9^2 \times \frac{1}{3^2} = 3^2$
3	$9 \times 9 \times 9 = 9^3$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$	$9^3 \times \frac{1}{3^3} = 3^3$
4	$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^4}$	$9^4 \times \frac{1}{3^4} = 3^4$

Tabela 2.3: Número de sub-segmentos, comprimento de cada sub-segmento e comprimento da curva de Peano até ao 4º passo da sua construção.

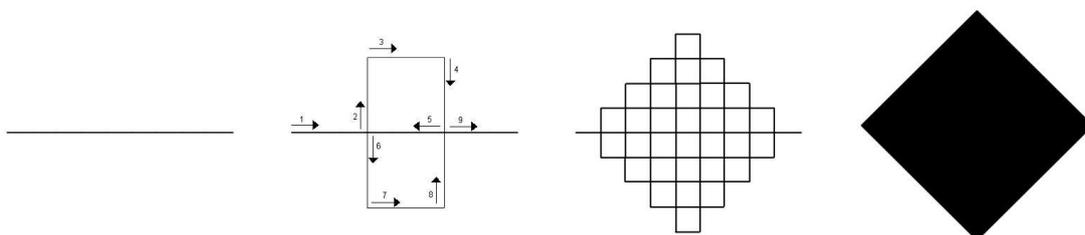


Figura 2.7: Processo recursivo da construção da curva de Peano. No limite “enchemos” o quadrado.

2.4.2 Curva de Hilbert

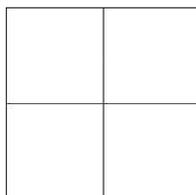


Figura 2.8: Figura inicial da curva de Hilbert.

A curva de Hilbert foi apresentada por David Hilbert e tal como a curva de Peano é construída através de um processo recursivo mas com algumas particularidades. A figura inicial é um quadrado unitário, como podemos ver na figura 2.8 e a figura geradora consiste em dividi-lo em quatro quadrados iguais, unindo os pontos centrais de cada um desses

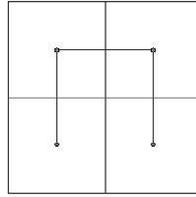


Figura 2.9: Figura geradora da curva de Hilbert.

quadrados, tal como podemos ver na figura 2.9. A curva é formada, não pelos quadrados mas sim pelos segmentos de recta formados pela ligação desses pontos centrais. Os sucessivos passos, são construídos utilizando o processo anterior, como está descrito na figura 2.10. Observando a tabela 2.4, verificamos que no k -ésimo passo temos 4^k quadrados com comprimento de lado $\frac{1}{2^{k-1}}$.

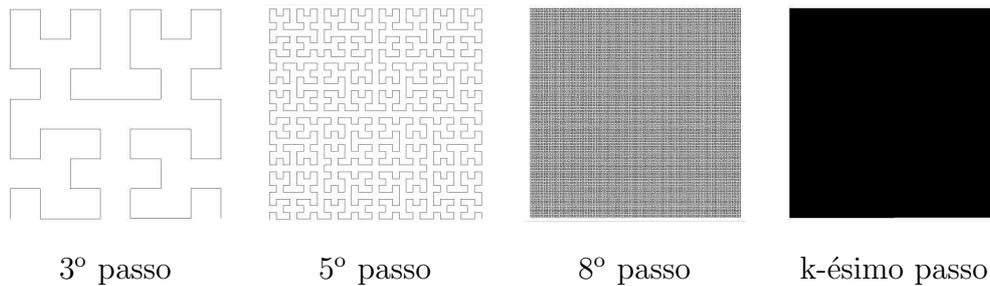


Figura 2.10: Processo recursivo da construção da Curva de Hilbert.

Passos	Nº quadrados	Comprimento do lado do quadrado
1	4	$\frac{1}{2^0}$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{2^1}$
3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{2^2}$
4	$256 = 4^4$	$\frac{1}{2^3}$

Tabela 2.4: Número de quadrados e comprimento de cada lado do quadrado.

A curva de Hilbert, tal como a de Peano, tem comprimento infinito limitado à área de

um quadrado e dimensão fractal igual a 2 (ver na secção 3.2). A curva passa progressivamente através dos pontos de uma grelha quadrada sempre mais refinada em cada passo de construção. Veremos mais à frente, na secção 5.3 uma aplicação desta curva ao *Meio-tom digital*.

Capítulo 3

Características de um fractal

Fractais são objectos que podem ser obtidos geometricamente (tal como vimos no capítulo anterior) ou aleatoriamente (como iremos ver no capítulo 4), através de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em formas da natureza. Essas características são: auto-semelhança, escala, complexidade e dimensão.

3.1 Auto-semelhança, escala e complexidade

Uma figura é auto-semelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo.

No entanto, quando falamos de figuras ou objectos auto-semelhantes, temos de considerar dois tipos de auto-semelhança: a exacta e a aproximada (ou estatística). A auto-semelhança exacta só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que, o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja é formado através de um processo iterativo como é o caso, por exemplo, do triângulo e do tapete de Sierpinski e da curva de Koch. Vejamos, o exemplo do tapete de Sierpinski descrito na figura 3.1.

Esta característica (auto-semelhança) resulta do facto das figuras serem construídas

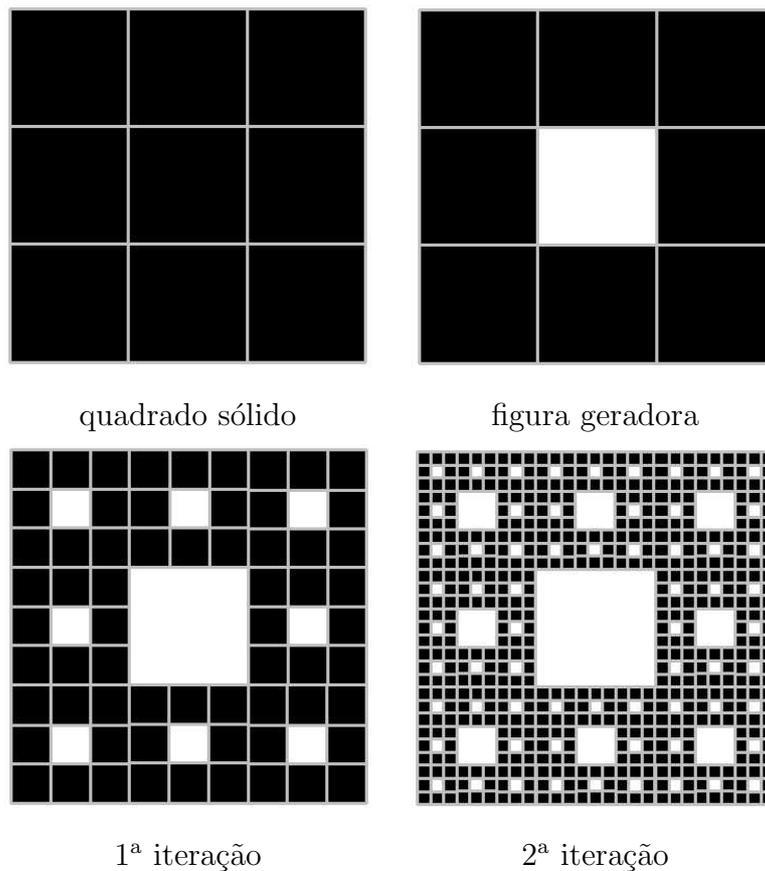


Figura 3.1: Sequência do processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski.

pela iteração da mesma regra de construção, indefinidamente.

A **iteração** é a repetição de um procedimento consecutivamente. Vejamos o procedimento de construção da sequência iterativa do Tapete de Sierpinski. Partimos de um quadrado preenchido que é dividido em 9 quadrados iguais e retiramos o quadrado do meio. Ficamos, portanto, com a figura geradora. A 1ª iteração é obtida através de uma aplicação da figura geradora a cada um dos quadrados preenchidos que a constituem. A figura final deste passo de construção é o elemento de construção da figura seguinte (2ª iteração), por aplicação da figura geradora. O processo iterativo consiste em aplicar a mesma regra a cada um dos quadrados preenchidos que resultam da iterada anterior, como está ilustrado na figura 3.1. O processo é repetido (iterado) indefinidamente obtendo-se a figura limite a que chamamos de Tapete de Sierpinski.

A auto-semelhança é um elemento integrante do processo de construção. Cada quadrado preenchido contido na iterada k , está reduzido por um factor de 3 em relação aos quadrados preenchidos que compõem a iterada anterior, e cada um dos nove quadrados que compõem a iterada k , é uma cópia reduzida por um factor 3 de toda a estrutura da iterada imediatamente anterior.

Assim, o objecto que resulta da passagem ao limite deste processo recursivo é exactamente auto-semelhante, ou seja, é igual a uma cópia ampliada dos elementos que o constituem.

Os fractais são formados por um processo recursivo aplicado indefinidamente. Quanto maior for o número de iterações deste processo, mais detalhes serão apresentados e assim, nunca obteremos uma “imagem final”. Daí a expressão *complexidade infinita*. Dizemos, por isso que a carpete de Sierpinski e cada um dos exemplos descritos na figura 3.2 são os limites do processo iterativo.

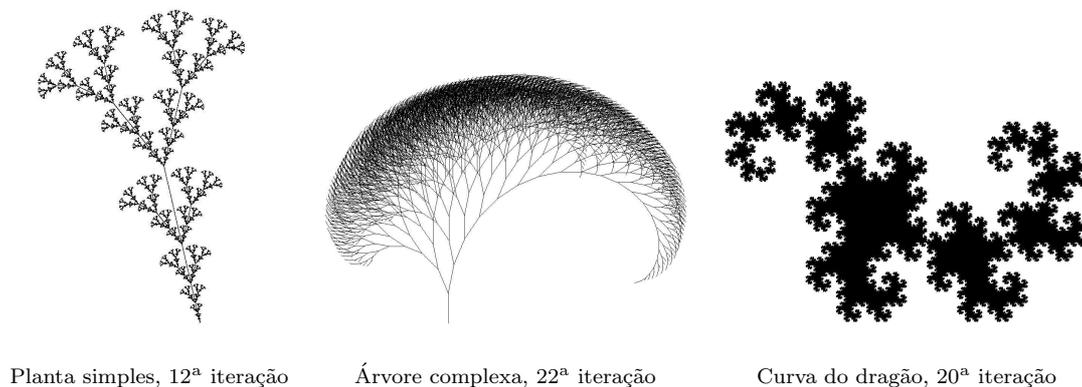


Figura 3.2: Exemplos de fractais gerados por computador, usando o programa *Fractree*.

No entanto, nem todo o processo iterativo origina um fractal. Por exemplo, se a um segmento de recta, retirarmos um pedaço final e repetirmos esta operação consecutivamente, obteremos apenas um segmento mais pequeno, que obviamente não é um fractal. Porém, já vimos no capítulo 2 que podemos construir fractais a partir de segmentos (Conjunto de Cantor).

Outra forma de iteração é através de funções matemáticas gerando sequências de

números. Vejamos o exemplo da função logística $F(x) = kx(1 - x)$ que associa a cada número x um novo número $F(x)$. Iterar esta função, significa gerar uma sequência de números através da mesma regra, ou seja, fazendo repetir o processo de converter cada número x num novo valor da seguinte forma:

$$F(x) = kx(1 - x)$$

$$F(F(x)) = F(kx(1 - x)) = k[kx(1 - x)][1 - kx(1 - x)]$$

$$F(F(F(x))) = F(k[kx(1 - x)][1 - kx(1 - x)])$$

Representemos estas sequências da seguinte forma:

$$F^1(x) = F(x)$$

$$F^2(x) = F(F(x))$$

$$F^3(x) = F(F(F(x)))$$

onde $F^n(x)$ significa a n -ésima iteração de F .

A sequência de valores obtidos através desta iteração diz-se **órbita** do ponto x .

A função logística já é conhecida e utilizada por cientistas há mais de cem anos para descrever matematicamente fenómenos progressivos. Exemplos destes fenómenos são a disseminação de doenças, a evolução de processos químicos, a evolução de uma população ao longo do tempo, entre outros. Iremos ver uma aplicação da função logística em fenómenos ecológicos no capítulo 4.

Existem muitas formas da natureza, como é o caso das figuras 3.3, 3.4 e 3.5 que apresentam estruturas de auto-semelhança e que apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, devem ser discutidas sob o ponto de vista da geometria fractal. Para estas formas da natureza, a noção de auto-semelhança deve ser vista cuidadosamente e deve ser encarada como auto-semelhança aproximada (ou estatística), uma vez que, partes destas figuras têm a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica mas não são réplicas exactas destas.

No caso, por exemplo, de uma árvore vista como um todo, podemos descreve-la como sendo um tronco principal e os ramos que partem dele. Mas se olharmos para um desses ramos, podemos descreve-lo da mesma forma, ou seja, ramos ainda mais pequenos que partem do anterior. Neste caso, não é possível prosseguir indefinidamente, como foi descrito, no exemplo da carpete de Sierpinski. Assim, os fractais podem ser usados como modelos para formas da natureza mas temos que estar sempre conscientes das suas limitações.



Figura 3.3: Feto e respectivas réplicas observadas numa determinada folha.

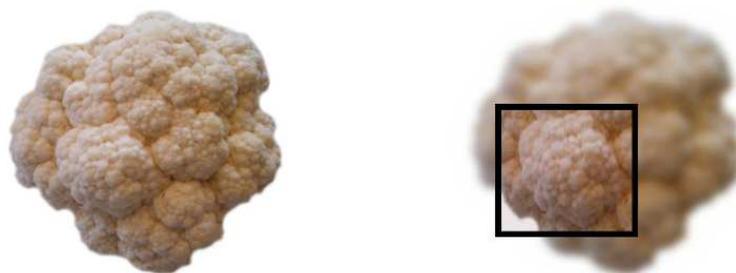


Figura 3.4: Couve-flor e réplica observada numa porção da mesma.



Figura 3.5: Árvores, linhas de costa e nuvens, são também exemplos de fractais na natureza

3.2 Dimensão

No dia-a-dia, somos confrontados por vezes com a necessidade de localizarmos lugares na superfície terrestre. Para o fazermos utilizamos como referência determinados lugares conhecidos e por vezes servimo-nos dos pontos cardiais e colaterais da rosa-dos-ventos.

Por exemplo, se pretendermos localizar o arquipélago da Madeira relativamente a Portugal continental imaginamos a rosa-dos-ventos centrada em Portugal continental e observamos qual a direcção do arquipélago da Madeira (Sudoeste de Portugal Continental).

Num sentido mais amplo, para localizarmos a Europa relativamente aos outros continentes, imaginamos a rosa-dos-ventos centrada em cada um dos continentes e observamos para cada caso a direcção desta (Norte do Continente Africano; Oeste do Continente Asiático; Este da América do Norte e Noroeste da Oceânia). No entanto, a posição relativa varia consoante o lugar que tomamos como referência. Assim, podemos dizer que este método não é suficiente para permitir determinar com rigor a posição dos lugares à superfície da Terra. Se não, vejamos: como encontraríamos uma pessoa com apenas a indicação de que se encontrava a norte de Itália?

Para ultrapassar este tipo de ambiguidades que também emergiram de modo natural em problemas de navegação recorreu-se à localização absoluta (posição exacta de um lugar na superfície da Terra) descrita pelas coordenadas geográficas. Cada ponto da superfície terrestre fica determinado por um par de números designados de latitude e longitude. Estas

coordenadas ficam estabelecidas medindo a distância angular entre os diferentes lugares e as duas principais linhas de referência: o equador e o semimeridiano de Greenwich. Dizemos então que a superfície da Terra tem duas dimensões pois é possível com duas coordenadas (latitude e longitude) localizar com exactidão qualquer lugar.

E se quisermos localizar um satélite no espaço?

Uma vez que o satélite não se encontra sobre a superfície terrestre, o recurso às duas dimensões da superfície terrestre não é suficiente. É necessário recorrer a uma terceira coordenada (altitude) para quantificar a altura do satélite em relação à superfície terrestre. Assim, para localizarmos um ponto específico na órbita de um satélite precisamos de três quantidades: a latitude e longitude de um ponto da Terra acrescidas da altitude em que o satélite se encontra acima desse ponto.

O próximo passo é a quarta dimensão. Algumas pessoas podem pensar no tempo e não estão erradas. De facto a Terra existe no tempo, fazendo da sua superfície algo tridimensional (se quisermos encontrar um navio devemos saber a sua latitude, longitude e a que horas foram calculadas). Assim como o Espaço passa a ser quadri-dimensional (precisamos saber a que horas o satélite passará num ponto com determinadas latitude, longitude e altitude).

Matematicamente, não há problema em definir o espaço quadri-dimensional. Na verdade, Riemann¹, defendeu a existência de outras geometrias referentes a espaços conceptuais que denominou "variedades", com dimensões a variar desde zero a infinito.

Durante várias gerações após Euclides², o comprimento, a largura e a altura determinaram o conceito de dimensão cujo valor é um número inteiro positivo. Desde então, a definição matemática de dimensão, variou ao longo dos tempos, sendo descrita por vários matemáticos à medida que surgiam "obstáculos" como por exemplo o aparecimento das curvas que preenchem o quadrado. É neste sentido que descrevemos, em seguida, o conceito

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão que fez contribuições importantes para a análise e para a geometria diferencial.

²Euclides (330 a.C.-260 a.C), foi um dos primeiros géometras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes.

de dimensão matemática.

3.2.1 Dimensão euclidiana

A dimensão euclidiana tem origem na geometria euclideana plana que se encontra descrita nas famosas obras de Euclides e que foram objecto de estudo de muitos matemáticos. Encontra-se em [4] as seguintes definições:

1. **Ponto** é o, que não tem partes, ou o, que não tem grandeza alguma.
2. **Linha** é o, que tem comprimento sem largura. As extremidades da linha são pontos.
3. **Linha recta** é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
4. **Superfície** é o, que tem comprimento e largura.
5. As extremidades da superfície são linhas.
6. Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha recta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

Mais tarde, surgiu a definição de sólido que levou à generalização do conceito de terceira dimensão: “Um **sólido** é o que tem comprimento, largura e profundidade.”

A dimensão euclideana pode ser encarado como sendo uma dimensão na qual os objectos são relacionados ao espaço no qual estão inseridos. Assim, pontos têm dimensão 0; rectas e curvas, dimensão 1; plano, dimensão 2; sólido, dimensão 3 e, por indução, pode ampliar-se sucessivamente até n dimensões.

Para Euclides, todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples como quadrados, circunferências, etc. No entanto, a geometria euclideana era insuficiente para explicar e descrever fenómenos ditos como monstros matemáticos, como é o caso, por exemplo, das curvas que preenchem o espaço. Como é que uma curva, de dimensão 1, podia preencher o espaço de um quadrado, de dimensão 2? Este dilema

preocupou grandes matemáticos da época, como Poincaré, Lebesgue³, Brouwer⁴, Cantor, Peano, etc. que estavam envolvidos com o desenvolvimento da topologia.

3.2.2 Dimensão topológica

O conceito de dimensão topológica está relacionada com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em topologia, linhas direitas podem ser manipuladas em curvas, círculos em triângulos ou quadrados e uma folha de papel plana é equivalente a outra folha infinitamente amarrotada. Quando estes objectos são devidamente transformados, através de um homeomorfismo⁵, as suas dimensões topológicas são preservadas. Ora, uma linha direita, de dimensão 1 e a curva de Koch são topologicamente o mesmo.

A noção intuitiva de dimensão consistia no número de parâmetros (coordenadas) necessários para a descrição única dos pontos de um objecto. Em 1878, Cantor encontrou uma transformação f do intervalo unitário $[0,1]$ para o quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$ numa correspondência de um para um, isto é, a cada elemento do intervalo unitário, por exemplo, x corresponde um elemento do quadrado unitário y , tal que $f(x) = y$. Assim, Cantor apenas precisava de um parâmetro para descrever os pontos de um quadrado. Mas como a transformação de Cantor não era contínua, consequentemente, não era um homeomorfismo. As dificuldades continuavam, portanto, a existir.

Mais tarde, as construções das curvas preenchedoras do espaço de Peano e de Hilbert que também aplicavam uma transformação g do intervalo unitário $[0,1]$ para o quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$ já eram contínuas mas não estavam numa correspondência de um para um. Existiam pontos distintos, por exemplo, x_1, x_2 no intervalo unitário que correspondiam ao mesmo ponto y do quadrado: $y = g(x_1) = g(x_2)$, consequentemente, não era um homeomorfismo.

Foram surgindo várias noções de dimensão mas sempre com a ideia de que para objectos

³Henri Lebesgue (1875-1941), matemático frances que iniciou as suas investigações em superfícies não alinhadas aplicáveis sobre o plano.

⁴Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), contribuiu bastante para o desenvolvimento da topologia.

⁵Homeomorfismo é uma aplicação contínua, biunívoca e cuja inversa é contínua.

equivalentes topologicamente, o seu valor mantém-se e é sempre um número natural ou zero, se forem pontos.

Vejamos a **Dimensão topológica de cobertura**, atribuída a Lebesgue, como exemplo destas noções.

A ideia consiste em encontrar o menor número de intersecções de bolas⁶, com raio suficientemente pequeno, necessárias para cobrir todas as partes dos objectos (refinamento de uma cobertura). Mas antes, precisamos de definir cobertura e refinamento da cobertura.

Por definição, **cobertura** de um conjunto X no plano ou no espaço é uma colecção $A = \{D_1, \dots, D_r\}$ de bolas abertas de raio positivo tais que a sua união cobre X . Em geral, assumimos que temos um conjunto definido em \mathbb{R}^n e que uma cobertura finita é uma colecção finita de conjuntos abertos, tal que X está contido na união desses conjuntos. Uma cobertura aberta $B = \{E_1, \dots, E_l\}$ com $l \geq r$ é um **refinamento** de $A = \{D_1, \dots, D_r\}$ se para cada E_i existir D_k tal que $E_i \subset D_k$. A **ordem** da cobertura aberta A é o maior inteiro k tal que $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k} \neq \emptyset$, ou seja, é o número máximo de bolas na cobertura que têm intersecções não vazias. Se a intersecção de todos os pares de conjuntos da cobertura é vazia, então a ordem é 1. Se uma cobertura tem ordem n então quaisquer $n + 1$ conjuntos da cobertura tem intersecção vazia.

Definamos, agora dimensão topológica de cobertura:

Seja X um conjunto pertencente a \mathbb{R}^n onde n é um inteiro positivo ou zero. Então definimos $\dim X \leq n$ desde que qualquer cobertura aberta finita tenha um refinamento aberto finito de ordem $\leq n + 1$. Portanto, $\dim X = n$ desde que $\dim X \leq n$, mas não $\dim(X) \leq n - 1$. Por outras palavras, esta condição significa que existe uma cobertura aberta finita de X tal que todos os refinamentos abertos finitos têm ordem $\geq n + 1$.

Vejamos a dimensão topológica de alguns objectos, segundo esta definição.

- . Um conjunto de pontos isolados pode ser coberto com bolas de raio suficientemente pequeno de modo que não haja nenhuma intersecção entre elas (ver figura 3.6). Logo,

⁶Bola aberta de raio ε centrada em x : $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$, Bola fechada de raio ε centrada em x : $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

a sua dimensão topológica é $D = 0$.

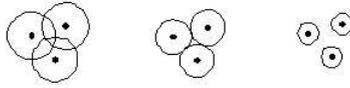


Figura 3.6: Cobertura de um conjunto de pontos.

- . Uma curva pode ser coberta com discos de raio suficientemente pequeno tal que não hajam tripleteos e quadripleteos mas apenas pares de bolas com intersecção não vazia (ver figura 3.7). Dizemos portanto, que existe uma intersecção e que a curva tem dimensão topológica $D = 1$.

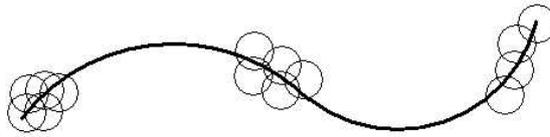


Figura 3.7: Cobertura de uma curva.

- . Uma superfície no espaço pode ser coberta com bolas de raio suficientemente pequeno de tal modo que não hajam quadripleteos mas apenas tripleteos de discos com intersecção não vazia. Também não há forma de cobrir toda a superfície com pares de bolas de raio suficientemente pequeno (ver figura 3.8). Assim, existem duas intersecções e a dimensão topológica da superfície é $D = 2$.

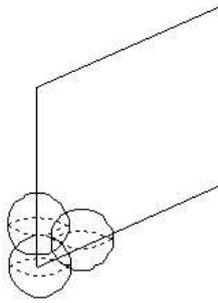


Figura 3.8: Cobertura de uma superfície.

- Vejamos a dimensão topológica do conjunto de Cantor $K = \bigcap_{N=0}^{\infty} I_N$ onde I_N é constituído pela união disjunta de 2^N intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^N}$, como vimos na secção 2.1.

Consideremos um ponto E tal que E não pertence a I_N . Então, E não pertence ao conjunto de Cantor K . Mas se considerarmos que E pertence a I_N , vai existir algum intervalo de I_N onde E é extremo desse intervalo.

No entanto, o comprimento de cada intervalo de I_N é $\frac{1}{3^N}$ e $\frac{1}{3^N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, o que significa que K não contém intervalos mas apenas conjuntos singulares. Assim K pode ser coberto com bolas de raio suficientemente pequeno de modo que não haja nenhuma intersecção entre eles. Portanto a dimensão topológica de K é $D = 0$.

Após a análise de trabalhos de vários matemáticos sobre dimensões, Mandelbrot⁷ mostrou a existência de figuras com dimensão fraccionária cujo termo ficou generalizado por dimensão fractal. O conjunto de Cantor é uma dessas figuras cuja dimensão fractal é aproximadamente 0,63, como iremos verificar na secção seguinte.

⁷Benoît Mandelbrot, nasceu em 1924, conhecido como sendo o matemático responsável pela denominação fractal a objectos cuja dimensão pode ser um número fraccionário.

3.2.3 Dimensão fractal

Se pretendermos medir o comprimento de uma linha costeira com todas as imperfeições que apresenta, podemos fazê-lo através de uma fotografia de satélite e, considerando um determinada escala, obtemos um determinado valor. Mas se a fotografia fosse tirada de um helicóptero, as irregularidades seriam mais visíveis e, considerando uma escala inferior, obteríamos um outro valor para o comprimento da costa. Se esta fosse percorrida a pé, tomando cada passo como uma nova escala, ainda mais pequena, o comprimento seria ainda maior. Se quisermos considerar cada vez mais pormenores como por exemplo, os contornos das rochas, poderíamos usar este processo indefinidamente com escalas sempre cada vez menores e obtendo comprimentos sempre cada vez maiores.

Podemos fazer uma analogia entre uma linha de costa e a curva de Koch que está ilustrada na figura 2.4. No entanto, esta, tem que ser considerada como um modelo simplificado da linha de costa, pela sua regularidade sistemática. A noção de dimensão fractal permite traduzir a rugosidade e a irregularidade de um objecto.

Para definir fractal, Mandelbrot retomou a ideia de Hausdorff⁸ e desenvolvida por Besicovitch⁹, o qual avançou o conceito de dimensões fraccionárias, tornando possível a existência de objectos com dimensões desde zero a infinito. Mandelbrot, definiu fractal como sendo um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Esta definição é formalmente complicada e transcende o âmbito desta dissertação.

Iremos determinar a dimensão fractal em objectos com auto-semelhança exacta e em objectos com auto-semelhança aproximada. Ambas têm a particularidade de não serem necessariamente uma dimensão inteira, o que as diferencia da dimensão topológica. Começemos por analisar o conceito de dimensão fractal através da auto-semelhança.

⁸Felix Hausdorff (1868-1942), matemático alemão cujos trabalhos em topologia contribuíram para os estudos de Mandelbrot.

⁹Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970), matemático russo cujos trabalhos em conjuntos de dimensão não inteira, contribuíram para os estudos de Mandelbrot.

Conjuntos auto-semelhantes

Dimensão 1: Considere-se um segmento de recta. Divida-se cada um dos seus lados em quatro partes geometricamente iguais, isto é, cada parte que nós obtemos na divisão é igual ao segmento original multiplicado por um factor de $\frac{1}{4}$. Ficamos então com 4 partes iguais.



Figura 3.9: Segmento

Dimensão 2: Efectuando o mesmo processo para um quadrado, divida-se cada um dos lados em quatro partes iguais. Ficamos então com 4^2 partes iguais.

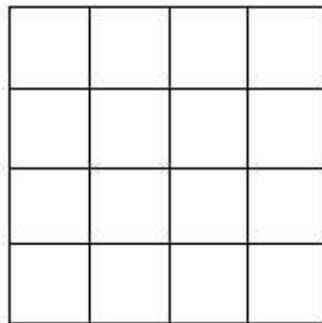


Figura 3.10: Quadrado

Dimensão 3: Procedendo de igual forma para um cubo, obtemos 4^3 partes iguais.

Poderíamos ter escolhido qualquer outro coeficiente de redução, variando o número de partes em que o objecto inicial é dividido. Assim, designando por \mathbf{N} o número de partes e por \mathbf{r} o coeficiente de redução, obtém-se as seguintes igualdades em que a dimensão é o expoente que aparece no denominador da fracção: $N = \frac{1}{r^d}$, no caso do segmento de

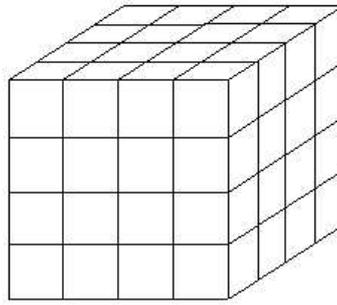


Figura 3.11: Cubo

recta (dimensão 1), $N = \frac{1}{r^2}$, no caso do quadrado (dimensão 2), $N = \frac{1}{r^3}$, no caso do cubo (dimensão 3). Assim, sendo \mathbf{D} a dimensão do objecto, \mathbf{N} o número de partes iguais obtidas e \mathbf{r} o coeficiente de redução, tem-se:

$$N = \frac{1}{r^D}$$

O que é equivalente a ter:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

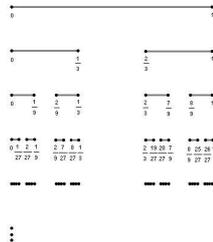
Aplicando logaritmo a ambos os membros vem:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \quad (3.1)$$

Concluimos então que: A dimensão \mathbf{D} de objectos auto-semelhantes, fractais ou não fractais é dada pela fórmula (3.1) com \mathbf{N} e \mathbf{r} definidos como anteriormente.

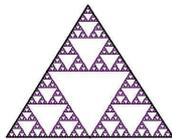
Vejamos agora a dimensão de alguns conjuntos fractais. É de realçar que cada um destes objectos são geometricamente auto-semelhantes, ou seja, cada uma das suas partes são uma cópia reduzida exacta do objecto inicial. Este conceito de dimensão apenas pode ser considerado na análise de objectos que têm auto-semelhança exacta.

Conjunto de Cantor



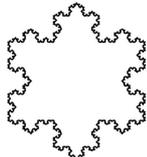
Sabendo que, em cada iteração, ficamos com 2 segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais, e que o coeficiente de redução é $\frac{1}{3}$ então a dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada por: $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$

Triângulo de Sierpinski



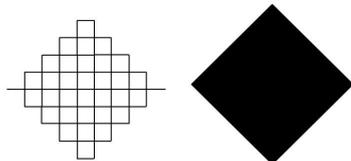
Sabendo que o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{2}$ e que o número de partes obtidas em cada segmento de recta é $N = 3$, temos, $D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,59$

Curva de Koch



Sabendo que o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$ e que o número de partes obtidas em cada segmento de recta é $N = 4$, temos, $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$

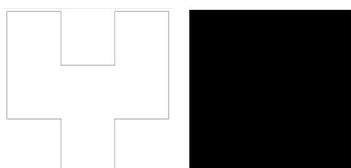
Curva de Peano



Sabendo que o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$ e que o número de partes obtidas em cada segmento de recta é $N = 9$, temos,

$$D = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.$$

Curva de Hilbert



Sabendo que o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{2}$ e que o número de partes obtidas em cada segmento de recta é $N = 4$, temos,

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Capacidade limite

A capacidade limite é utilizada para estruturas fractais que não são totalmente auto-semelhantes, embora esteja relacionada com a auto-semelhança pois em muitos casos encontram-se os mesmos valores.

Colocamos a estrutura numa grelha com uma determinada escala s e contamos o número de caixas N que contêm as partes da estrutura. Como N depende de s , escrevemos $N(s)$. Agora, mudamos s progressivamente para escalas inferiores e contamos os correspondentes números $N(s)$. Frequentemente, são utilizadas grelhas onde o factor de redução é $1/2$ e portanto $N(s) = N(1/2^k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ver figura 3.12. Em seguida traçamos um gráfico que relaciona $\log N(s)$ com $\log(1/s)$ onde marcamos os pontos $(|\log(1/s)|, |\log N(s)|)$ correspondentes a cada grelha. Por fim, traçamos uma linha recta pelos pontos do gráfico e calculamos a sua inclinação que será uma estimativa para o valor da dimensão, de capacidade limite, D_c da estrutura fractal.

$$D_c = \frac{\log N(1/2^{k+1}) - \log N(1/2^k)}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} = \frac{\log \frac{N(\frac{1}{2^{k+1}})}{N(\frac{1}{2^k})}}{\log 2} = \log_2 \frac{N(\frac{1}{2^{k+1}})}{N(\frac{1}{2^k})},$$

ou seja

$$2^{D_c} = \frac{N(\frac{1}{2^{k+1}})}{N(\frac{1}{2^k})}$$

Podemos então dizer que, se o número de caixas aumenta segundo um factor de 2^{D_c} quando o tamanho das caixas é dividido em partes iguais, então a dimensão fractal é igual a D_c .

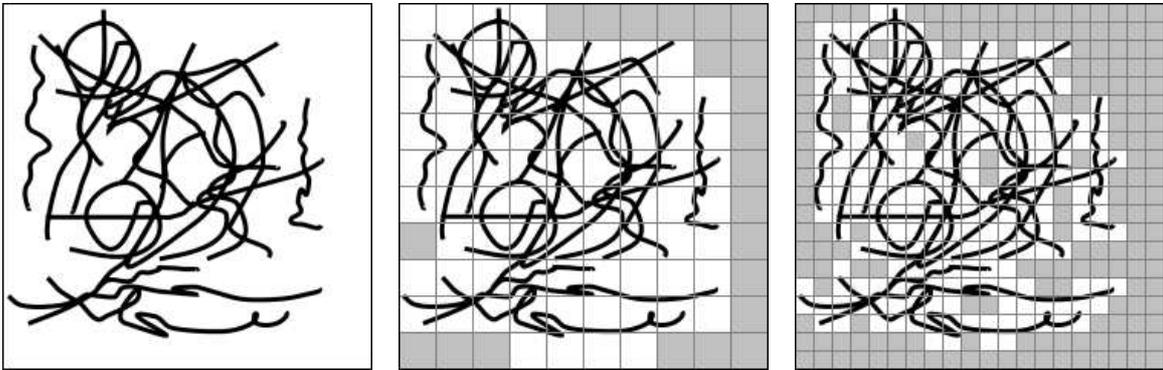


Figura 3.12: Estrutura com grelha em escalas diferentes

O valor da capacidade limite D_C de qualquer estrutura fractal, no plano, nunca excede 2. Já o valor da dimensão de auto-semelhança, D pode exceder 2 no caso, de certas curvas do plano. Por exemplo, para uma curva onde o factor de redução seja $r = 1/3$ e o número de partes iguais obtidas na figura geradora seja $N = 13$, temos uma dimensão de auto-semelhança, $D = \frac{\log 13}{\log 3} \approx 2,34$, usando (3.1). A razão para esta diferença é que esta curva é constituída por partes onde a auto-semelhança é evidente mas também é constituída por partes terminais onde normalmente se aplica o método de capacidade limite.

Capítulo 4

Fractais em sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um sistema que evolui ao longo do tempo e pode surgir em qualquer ramo da ciência como por exemplo na meteorologia, na economia ou mesmo na astronomia. No caso da economia, a subida e descida do índice de Dow Jones ilustra a forma de como o sistema flutua no tempo. A teoria dos sistemas dinâmicos trabalha com estes processos com o objectivo de prever a evolução dos mesmos. Aparentemente, sistemas dinâmicos que envolvem processos complicados com um grande número de variáveis são imprevisíveis e sistemas dinâmicos com poucas variáveis são previsíveis. No entanto, existem processos simples e determinísticos que resultam em comportamentos aparentemente imprevisíveis e aleatórios. O estudo destes casos faz parte de um “novo” campo de investigação denominado **Teoria dos Sistemas Dinâmicos**, que se baseia em teorias matemáticas para descrever processos em movimento. Esta teoria procura, no aparente acaso, uma ordem inerente determinada por leis bem definidas. O estudo pode ser realizado com a ajuda de computadores pela sua grande capacidade de cálculo e de representação gráfica. E é aqui que vemos a geometria fractal de muitos sistemas dinâmicos.

Vejamos um exemplo de aplicação da função logística em fenómenos ecológicos. Suponhamos que existe uma única espécie isolada, cuja população cresce ao longo do tempo num ambiente controlado. O crescimento dessa população a longo prazo pode ser previsto por um modelo matemático simples (função logística), fazendo contagem da população no final

de cada geração.

Matematicamente, escrevamos P_n para a percentagem de população da geração n , onde $0 \leq P_n \leq 1$. E consideremos a função,

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

onde k é uma constante relacionada com as condições ecológicas impostas, tais como a quantidade de comida presente.

Assim, mantendo as condições definidas por k constantes e conhecendo o valor P_n da população anterior é possível prever o valor P_{n+1} da população na geração seguinte.

O processo iterativo para gerar os conjuntos de Julia e de Mandelbrot, que apresentaremos em seguida, baseia-se na aplicação da recorrência $z_{n+1} = z_n^2 + c$ onde z e c são números complexos. Para construir o conjunto de Mandelbrot iteramos a função para cada ponto c do plano complexo começando com $z_0 = 0$. Em relação ao conjunto de Julia, a constante c mantém-se fixa ao longo de todo o processo de iteração variando o valor z_0 .

Outro tipo de fractais em sistemas dinâmicos são os baseados em sequências de números reais determinadas por sistemas de funções em \mathbb{R}^2 e que geram pares ordenados. Um processo que gera estes fractais é popularmente conhecido por “Jogo do Caos”, que apresentaremos mais adiante.

4.1 Conjuntos de Julia

Os conjuntos de Julia surgiram após vários estudos acerca de processos iterativos envolvendo números complexos. Estes estudos foram apresentados no ano de 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou sem o recurso do computador que nos dias de hoje é de grande utilidade para reproduzir detalhadamente o comportamento de funções iterativas.

Consideremos a função $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ em que c é um ponto fixo no plano complexo.

Para cada ponto Z_0 iteremos a função gerando a seguinte sequência de números complexos (órbita de Z_0).

$$Z_0 \longrightarrow Z_1 = Z_0^2 + c \longrightarrow Z_2 = Z_1^2 + c \longrightarrow \dots$$

Se a órbita de Z_0 é atraída para infinito (Z_0 é ponto escape), então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos formam o conjunto escape de c .

Se a órbita de Z_0 é atraída para um círculo em torno da origem (Z_0 é ponto prisioneiro), então Z_0 pertence a algum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos formam o conjunto prisioneiro de c .

Ambos os conjuntos complementam-se e preenchem alguma parte do plano complexo. Assim, a fronteira do conjunto escape é simultaneamente a fronteira do conjunto prisioneiro e nesta fronteira temos o conjunto de Julia associado ao parâmetro c .

O valor do ponto c determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo associado com um conjunto de Julia em particular. Podemos ver alguns exemplos na figura 4.1, em que por exemplo, para $c = 0$ obtemos o círculo unitário. Se c pertencer ao interior do conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia obtido será conexo. Se, pelo contrário, o ponto c não pertencer ao conjunto de mandelbrot, o conjunto de Julia correspondente é desconexo.

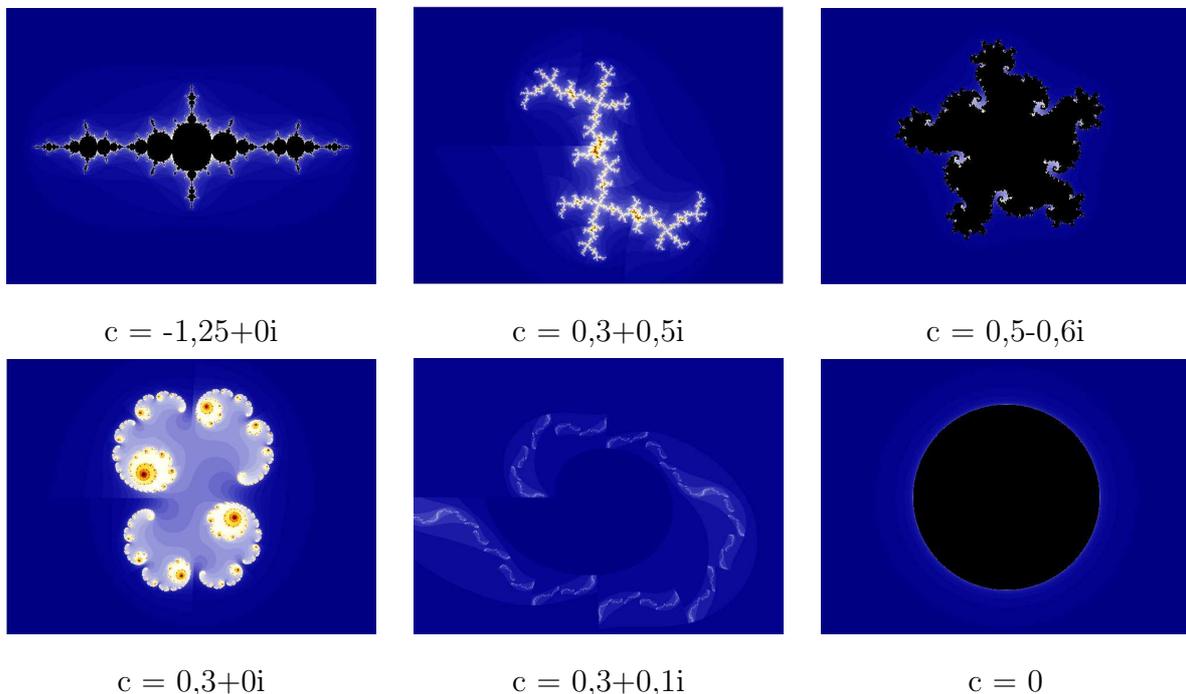


Figura 4.1: Alguns conjuntos de Julia obtidos por computador com o programa *UltraFractal*.

Qualquer conjunto de Julia pode ser visto como um conjunto que se repete em diferentes escalas de ampliação, no entanto a auto-semelhança existente nestes conjuntos é apenas aproximada.

4.2 Conjunto de Mandelbrot

Em 1979, Mandelbrot, ao tentar encontrar uma forma de generalizar os conjuntos de Julia, descobriu que podia criar uma imagem no plano complexo que catalogava os conjuntos de Julia.

A sua construção baseia-se na função $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ onde $Z_n (n \in \mathbb{N}_0)$ e c são números complexos e $Z_0 = 0$. O conjunto de Mandelbrot é então definido como sendo o conjunto de todos os números complexos c tais que após um certo número de iterações de $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, z não tende para infinito. Iterando a função para cada ponto c do plano complexo, temos a sequência de iterações:

$$c \longrightarrow c^2 + c \longrightarrow (c^2 + c)^2 + c \longrightarrow \dots$$

Tomando alguns valores para c , vem:

para $c = 0$:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

para $c = -1$:

$$0 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

para $c = i$:

$$0 \longrightarrow i \longrightarrow i - 1 \longrightarrow -i \longrightarrow i - 1 \longrightarrow -i \longrightarrow i - 1 \longrightarrow \dots$$

Verificamos dois tipos de sequências (para $c = 0$ temos um ponto de convergência e para $c = -1$ e $c = i$, temos sequências periódicas) que são limitadas pois permanecem dentro de um círculo em que a distância à origem mantém-se finita. No entanto, para certos valores de c , a função é ilimitada afastando-se cada vez mais da origem. Vejamos alguns exemplos:

para $c = -3$:

$$0 \longrightarrow -3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 33 \longrightarrow 1086 \longrightarrow \dots$$

para $c = 1$:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 26 \longrightarrow 677 \longrightarrow 458330 \longrightarrow \dots$$

Os conjuntos formados pelas sequências limitadas e pelas sequências ilimitadas preenchem todo o plano complexo e delimitam o conjunto de Mandelbrot atribuindo-se uma cor, por exemplo, preto para o primeiro conjunto, isto é, se a sucessão de cada valor c permanece limitada e, outras cores, consoante o número de iterações dos pontos para o segundo conjunto, isto é, se a sucessão de cada valor c é ilimitada.

Tal como dissemos anteriormente, podemos encontrar no conjunto de Mandelbrot, os conjuntos de Julia fazendo variar os valores do ponto c , como apresentamos na figura 4.2.

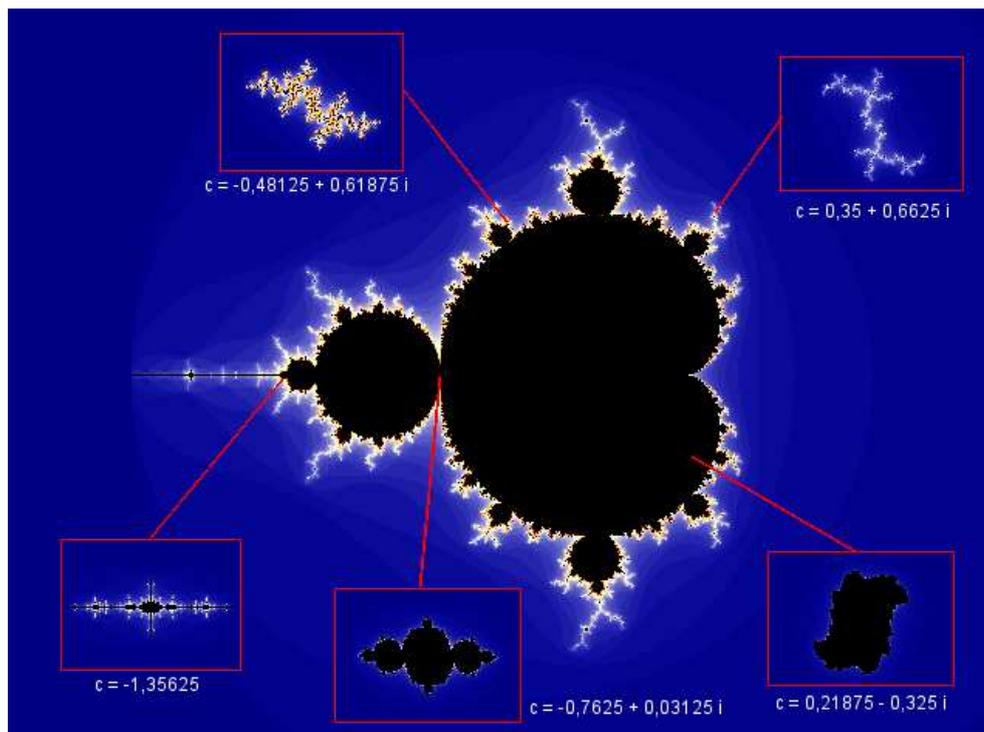


Figura 4.2: Conjunto de Mandelbrot como um catálogo de conjuntos de Julia

Podemos também verificar a auto-semelhança aproximada, fazendo algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot, apresentadas na figura 4.3 e verificando as várias formas que

se lhe aproximam. É interessante referir que o bordo do conjunto de Mandelbrot tem dimensão 2.

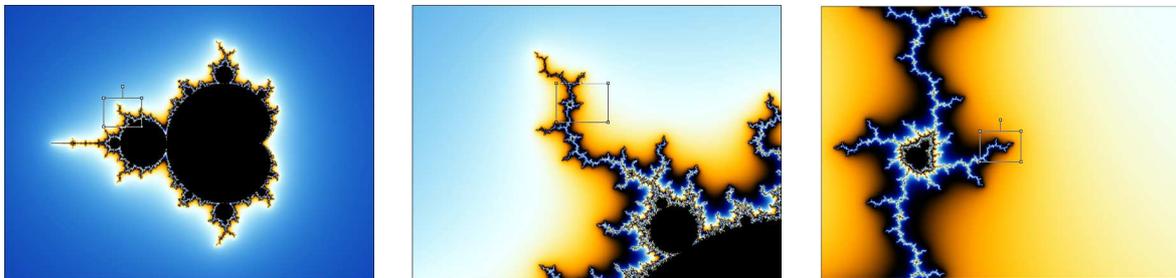


Figura 4.3: Algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot, obtidas por computador com o programa *UltraFractal*

4.3 Conjunto de Cantor dinamicamente definido

O conjunto de Cantor tem uma propriedade interessante que revela uma importante interpretação dinâmica e uma ligação surpreendente com o caos.

Consideremos a função cujo gráfico se encontra na figura 4.4.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1/2 \\ -3x + 3 & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$

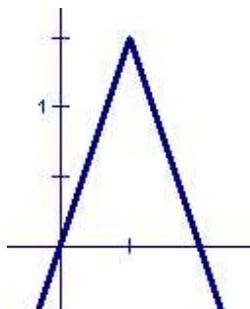


Figura 4.4: Gráfico da função dada por $f(x) = 3x$ se $x \leq 1/2$ e $-3x + x$ se $x > 1/2$.

Começemos com o ponto inicial x_0 e com a sequência $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ de pontos descrita por um processo da forma $f(x_n) = x_{n+1}$, ou seja, $f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots$. Verifiquemos como se comportam estes pontos da sequência:

Se $x_0 < 0$, então $x_1 = f(x_0) = 3x_0 < 0$ e por indução, todos os números x_k desta sequência são da forma $x_k = 3^k x_0$ e portanto negativos. Esta sequência é decrescente e tende para $-\infty$. Este tipo de sequências são designadas por sequências escapatórias e o ponto x_0 é o ponto de escape.

Se $x_0 > 1$, então $x_1 = f(x_0) = -3x_0 + 3 < 0$, portanto temos novamente uma sequência que escapa para $-\infty$.

Se $x_0 = 0$, então $x_1 = f(x_0) = 3x_0 = 0$ e todos os pontos da sequência são zeros. Qualquer ponto x_0 que vá para zero, em algum passo, então permanecerá sempre em zero e portanto x_0 é prisioneiro. $x_0 = 0$ diz-se ponto fixo pois $f(x_0) = x_0$.

Todos os pontos próximos de $1/2$ iteram fora do quadrado unitário e escapam para $-\infty$, todos os pontos que iteram para o centro, escapam para $-\infty$ e todos os pontos que não escapam do intervalo unitário $[0,1]$, formam o conjunto de Cantor.

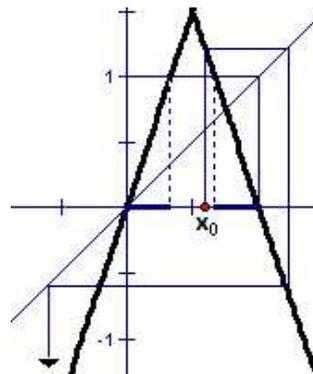


Figura 4.5: Ilustração da dinâmica de um ponto no intervalo unitário $[0,1]$

4.4 O jogo do caos

O processo conhecido como jogo do caos foi criado por Michael Barnsley e é descrito através de um processo aleatório em que cada função iterada do sistema¹ é aplicada aleatoriamente. A técnica é utilizada para criar modelos de formas naturais tais como plantas, nuvens, galáxias, etc.

Um exemplo do jogo do caos é utilizar um dado cujas faces estão numeradas de 1 a 6 e um tabuleiro onde figura um triângulo $[ABC]$. Este dado funciona como gerador aleatório, fazendo corresponder as faces 1, 2 do dado ao vértice A do triângulo, 3, 4 a B e 5, 6 a C.

Iniciamos o jogo escolhendo arbitrariamente um ponto z_0 no tabuleiro (ver figura 4.6). De seguida, lançamos o dado. Assumindo que o valor gerado é 2 verificamos pela correspondência descrita, que corresponde ao vértice A. Define-se então z_1 como o ponto médio entre z_0 e A. Lança-se novamente o dado e suponhamos que é gerado o número 5 que corresponde ao vértice C. Define-se então z_2 como o ponto médio entre z_1 e C. Este processo repete-se indefinidamente.

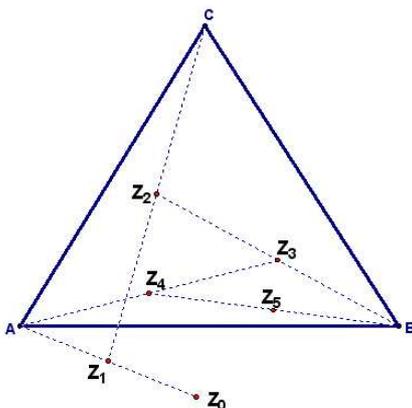


Figura 4.6: Cinco primeiras iterações do Jogo do caos

Generalizando, dados os pontos coordenados $P_1 = (a_1, b_1)$; $P_2 = (a_2, b_2)$; $P_3 = (a_3, b_3)$ e o ponto $Z_k = (x_k, y_k)$ com $k \in \mathbb{N}_0$ encontramos o ponto $Z_{k+1} = \frac{Z_k + P_n}{2}$ onde n é escolhido

¹Vemos frequentemente o uso da sigla IFS - "Iterated Function System".

aleatoriamente no conjunto $\{1, 2, 3\}$. As coordenadas de Z_{k+1} são (x_{k+1}, y_{k+1}) em que

$$x_{k+1} = \frac{x_k + a_n}{2} \Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}a_n$$
$$y_{k+1} = \frac{y_k + b_n}{2} \Leftrightarrow y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}b_n$$

Em forma de matriz, obtemos a transformação linear:

$$W_n = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}a_n \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_n \end{array} \right)$$

Desta forma, o jogo do caos pode ser definido pelo seguinte algoritmo:

1. Escolhemos aleatoriamente um ponto z_0 no plano;
2. Para $k = 0, 1, 2, \dots$ tomemos $Z_{k+1} = W_{s_k}(Z_k)$ onde s_k é escolhido aleatoriamente, com igual probabilidade em $\{1, 2, 3\}$.

Seguindo este processo, obtemos as figuras 4.7, 4.8 e 4.9 e observamos que após sucessivas iterações aproximamo-nos do conhecido fractal, triângulo de Sierpinski (apesar de existirem pontos que não pertencem a este).

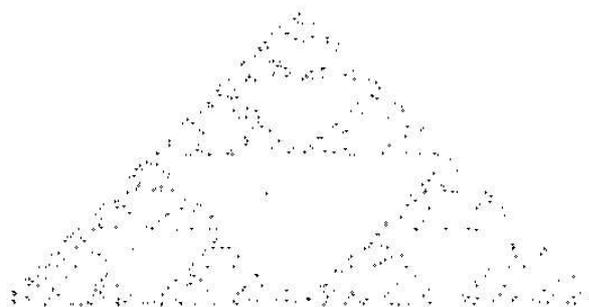


Figura 4.7: 500 iterações do Jogo do caos

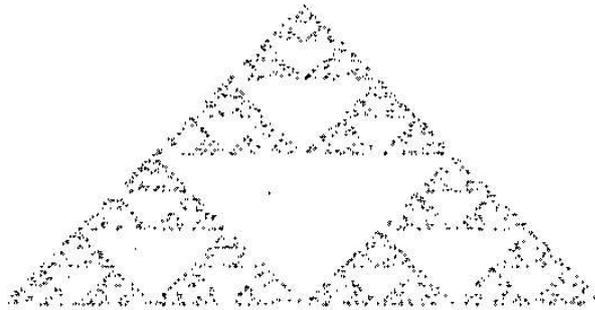


Figura 4.8: 5000 iterações do Jogo do caos

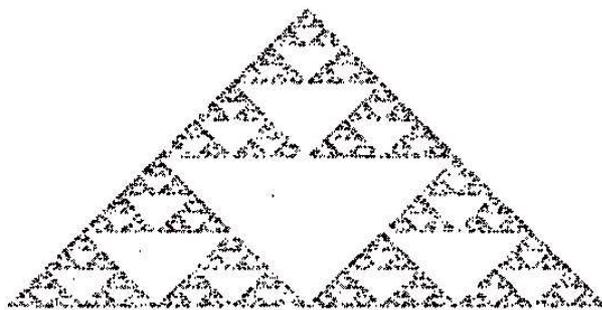


Figura 4.9: 50000 iterações do Jogo do caos

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Meio-tom digital

A técnica de meio-tom digital é uma técnica utilizada na simulação de imagens com mais que um tom, recorrendo a um número limitado de cores. Desempenha um papel especialmente importante na indústria tipográfica, devido ao factor económico, uma vez que reduz o número de cores a utilizar.

Algumas técnicas clássicas de meio-tom, como meio-tom ordenado, difusão de erro, e difusão de ponto introduzem “artefactos” nas imagens geradas, tais como a formação de padrões periódicos. Estes padrões para além de inestéticos, podem ser de tal modo evidentes que induzem em erro quem visualiza a imagem. Outro aspecto relevante é a grande diferença de intensidade entre a imagem original e a correspondente em meio-tom, quando as imagens são impressas. Este problema toma maior significado, quando se recorre a dispositivos de impressão de alta resolução. Tendo em vista minimizar estes efeitos secundários, desenvolveram-se várias técnicas de meio-tom, tendo todas elas uma abordagem diferente ao meio-tom, mas partilhando o mesmo objectivo: minimizar os artefactos inseridos nas imagens finais, melhorando assim a qualidade da imagem obtida. Surgem assim as técnicas de varrimento ordenado, onde o varrimento da imagem é efectuado por uma curva preenchedora do quadrado com pontos agregados [21]. Esta técnica torna-se atractiva por

ser a única capaz de minimizar a formação de padrões periódicos (artefactos), bem como refinar a imagem final, devido à formação de agregados de pontos, conferindo uma maior credibilidade relativamente à intensidade da imagem final.

Em seguida, descrevemos as técnicas de meio-tom que partilham o mesmo fundamento de formação de agregados:

Varrimento ordenado

O varrimento ordenado é provavelmente o algoritmo mais utilizado baseando-se na divisão da imagem através de uma grelha e dividindo a imagem em células. Cada célula pode ser representada por uma matriz D onde para cada ponto da célula se estabelece um valor de referência T .

Quando a intensidade do pixel na imagem original é superior à definida para o mesmo pixel na matriz D , o algoritmo coloca na imagem final um ponto preto, caso contrário coloca um ponto branco. Este procedimento executa-se para todos os valores da matriz e respectivos pontos, seguindo-se para a matriz seguinte, até a grelha estar completamente preenchida. Este algoritmo é bastante popular devido à sua simplicidade e flexibilidade. Outra vantagem deste método é a sua capacidade de formar agregados com os pontos pretos, de tal modo que o efeito de “borrão” seja minimizado, quando a imagem é impressa.

Descrevemos, em seguida, um exemplo de aplicação da técnica através de uma imagem que foi convertida em tons de cinzento, numa escala de 8 bit, gerando assim 256 tons de cinzento diferentes. A imagem é dividida em várias regiões (matrizes), formando assim um agregado de pixeis em cada matriz.

A matriz utilizada como referência foi uma matriz D de 4×4 cujo valor médio dos seus elementos é aproximadamente 0,5.

$$D = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,48 & 0,47 & 0,50 \\ 0,51 & 0,48 & 0,49 & 0,50 \\ 0,49 & 0,48 & 0,49 & 0,51 \\ 0,50 & 0,48 & 0,50 & 0,51 \end{pmatrix}$$

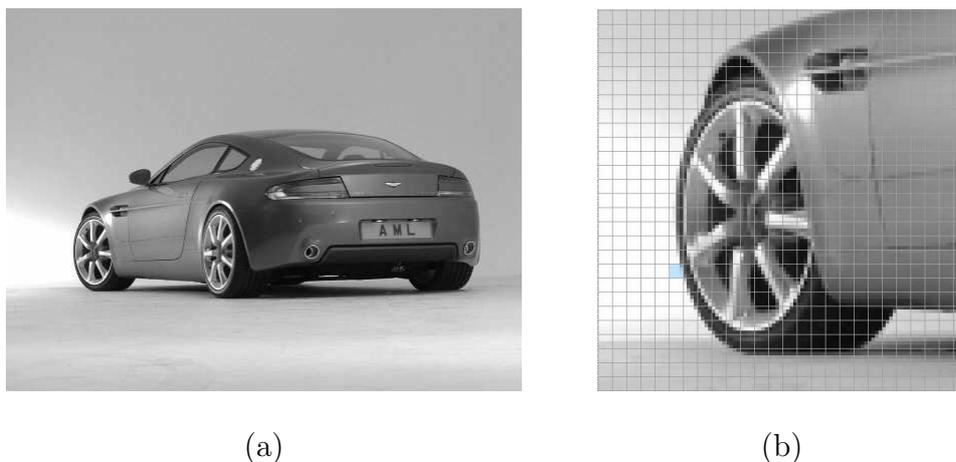


Figura 5.1: (a) Imagem original (b) Secção da imagem original dividida numa grelha com uma região seleccionada a azul.

Seleccionamos uma região da imagem 5.1(b) e obtivemos a figura 5.2 cuja matriz que traduz as intensidades de cada pixel é $I(P)$. Esta matriz é então avaliada por comparação com a matriz D , gerando-se a matriz $I(P')$ cujos elementos assumem valores 0 ou 1, consoante a sua intensidade seja menor ou maior que o valor de referência respectivo na matriz D . Por exemplo, $6/256 < 0,49$, logo o valor correspondente na matriz $I(P')$ é 0; $168/256 > 0,51$, logo o valor correspondente na matriz $I(P')$ é 1. Assim, é gerada a figura 5.3 a partir dos valores de $I(P')$.

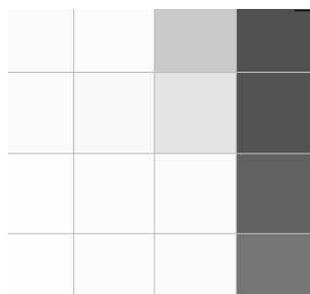


Figura 5.2: Ampliação de uma região da imagem 5.1(b).

$$I(P) = \begin{pmatrix} 6/256 & 4/256 & 50/256 & 175/256 \\ 5/256 & 5/256 & 29/256 & 173/256 \\ 4/256 & 4/256 & 5/256 & 168/256 \\ 4/256 & 4/256 & 4/256 & 134/256 \end{pmatrix} \quad I(P') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

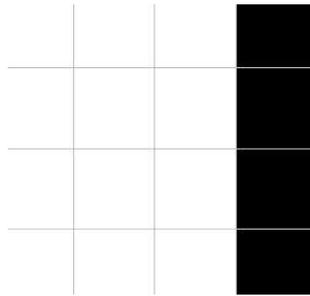


Figura 5.3: Imagem final obtida por comparação das matrizes $I(P)$ e $I(P')$.

Podemos obter resultados diferentes variando o valor médio dos elementos da matriz de referência D . A sequência de imagens seguinte ilustra estes resultados para 0,5 (figura 5.4(b)) e para 0,3 (figura 5.4(c)), numa matriz 4×4 . Como podemos verificar, esta técnica não permite a diferenciação de pequenos detalhes presentes na imagem original, bem como verificamos uma enorme diferença em termos de tonalidade entre as imagens.



(a)

(b)

(c)

Figura 5.4: (a) Imagem original (b) imagem com valores da matriz de referência aproximadamente 0,5 (c) imagem com valores da matriz de referência aproximadamente 0,3.

Difusão do erro

A difusão de erro é um esquema cuidadosamente elaborado para preservar a tonalidade da imagem original quando é gerada a imagem em meio-tom. O método distribui a quantização do erro presente num pixel, pelos 4 pixels vizinhos de modo a “suavizar” as diferenças visíveis em termos de intensidade entre a imagem original e a gerada.

O algoritmo resume-se aos seguintes passos:

- . Avaliar intensidade do pixel original;
- . Mediante o parâmetro de referência, gerar 1 ou 0;
- . Calcular a diferença das intensidades $I(P) - I(P') = \text{Erro}$;
- . Distribuir o erro pelos pixels vizinhos, incrementando às suas tonalidades originais as seguintes proporções:

7/16 x Erro ao pixel à direita

3/16 x Erro ao pixel à direita e acima

5/16 x Erro ao pixel abaixo

1/16 x Erro ao pixel à direita e abaixo

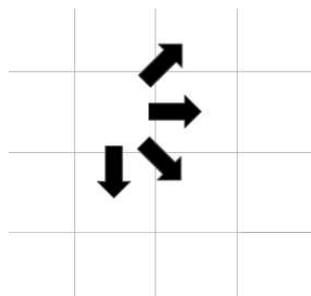


Figura 5.5: Distribuição do erro pelos pixels vizinhos.

O arrastamento do erro ao longo do procedimento, leva a que este método consiga gerar imagens muito semelhantes às originais em termos de tonalidade média, mas peca pela formação de superfícies de tonalidade uniformizada.

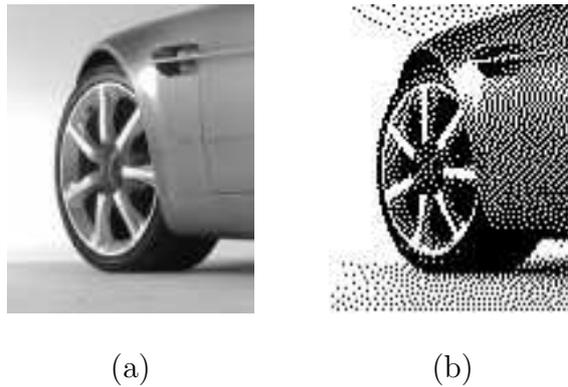


Figura 5.6: (a) Imagem original, (b) Imagem obtida por aplicação de um algoritmo de difusão do erro.

Meio-tom através de uma curva que preenche do quadrado

Como referimos no capítulo 2, uma curva que preenche um quadrado, é uma curva que visita pelo menos uma vez todos os pontos de uma área. Transpondo este conceito para as técnicas de meio-tom, temos uma “ferramenta” muito útil, que permite a recolha da informação de cada pixel inserido numa determinada região. De entre as curvas que preenchem o quadrado, a curva de Hilbert é das que melhor se adequa a este processo, devido à sua elevada coerência espacial.

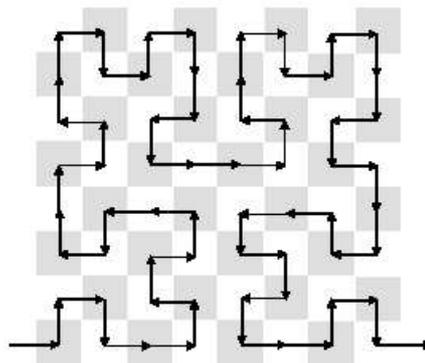


Figura 5.7: Curva de Hilbert a percorrer uma região de 64 pixels.

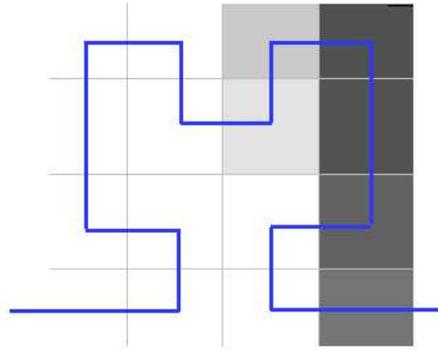


Figura 5.8: Curva de Hilbert a percorrer um agregado de 16 pixels.

A difusão do erro ao longo do percurso da curva, é efectuada para a região seguinte e não como a técnica da difusão do erro, anteriormente referida, que o propaga para os 4 pixels vizinhos.

Velho e Gomes [21] propuseram uma versão deste método onde são considerados agregados de pixels.

Consideremos uma certa imagem subdividida em pequenos agregados de pixels (ver figura 5.2). À medida que a curva avança ao longo dessa imagem (ver figura 5.8), são retidos os valores das intensidades dos pixels visitados e é formada a matriz $I(P)$ com esses valores.

$$I(P) = \begin{pmatrix} 6/256 & 4/256 & 50/256 & 175/256 \\ 5/256 & 5/256 & 29/256 & 173/256 \\ 4/256 & 4/256 & 5/256 & 168/256 \\ 4/256 & 4/256 & 4/256 & 134/256 \end{pmatrix}$$

Quando é visitado um número pré-estabelecido de pixels, os quais formam um agregado, é gerado um número N de pixels pretos, cuja intensidade é equivalente à intensidade do conjunto de pixels na imagem original (ver figura 5.9) e é formada a matriz $I(P')$ cujos valores são 0 ou 1.

Calculemos a intensidade média dos elementos de $I(P)$:

$$\frac{6 \times \frac{4}{256} + 3 \times \frac{5}{256} + \frac{6}{256} + \frac{29}{256} + \frac{50}{256} + \frac{134}{256} + \frac{168}{256} + \frac{173}{256} + \frac{175}{256}}{16} \approx 0,18896$$

Sabendo que a unidade básica de construção para este agregado de 16 pixels é um pixel preto que equivale a $\frac{1}{16} = 0,0625$, então o número de pixels pretos necessários para equivaler a $I(P)$ é $N = \frac{0,18896}{0,0625} = 3,02336$. Temos, portanto, um agregado com 3 pixels pretos correspondentes aos 3 primeiros pixels do percurso da curva de Hilbert.

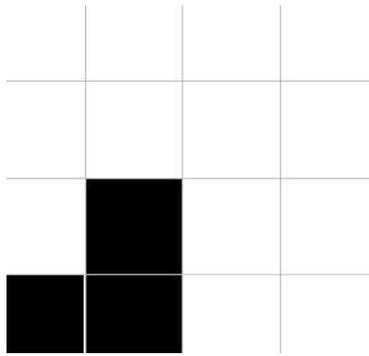


Figura 5.9: Agregado com 3 pixels pretos correspondentes aos 3 primeiros pixels do percurso da curva de Hilbert.

$$I(P') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256/256 & 0 & 0 \\ 256/256 & 256/256 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os 3 pontos pretos são incrementados no início do percurso da curva na próxima região e o erro entre o valor real do cinzento acumulado e a intensidade de pixels pretos gerados ($3,023363 - 3 = 0,2336$) é propagado para a região seguinte.

Esta técnica cria pontos dispersos que são mais evidenciados se tivermos regiões de pontos agregados de grande dimensão. Assim, para agregados de menor dimensão, consegue-se uma maior definição.

5.2 Fractais gotejados de Pollock

O mundo da arte “tremeu” em 1945, ano em que Jackson Pollock (1912-1956) se mudou da baixa de Manhattan para Springs, uma cidade calma no campo. Aqui ele ocupava grande parte do seu tempo, na observação do meio campestre, buscando inspiração nas formas naturais que o rodeavam.

Pollock ficou conhecido pela sua técnica radical de pintura que consistia em traçar manchas, fios e gotas de tinta sobre uma tela colocada horizontalmente sobre o chão. A tinta era gotejada sobre a tela, com a ajuda de vários instrumentos (facas, colheres,...) em substituição do tradicional pincel, nunca sendo estabelecido o contacto físico entre a tela e o instrumento.

Esta técnica irreverente de expressão plástica, levou a que todo o seu trabalho fosse discutido, no seio da comunidade artística, tendo tanto de apoiantes como críticos.

A comunicação social da época, também não ficou alheia a este fenómeno, uma revista de culto da época atribuiu-lhe a alcunha de “Jack the dripper”¹

Os quadros de Pollock, devido às suas características peculiares em termos de expressão, foram alvo de estudos matemáticos liderados por Richard Taylor, onde se confirmou a presença de padrões fractais em algumas das obras de Pollock. Esta característica invulgar, permite em termos artísticos proceder à avaliação de autenticidade e datação de uma obra de Pollock.

A expressão artística de Pollock, reflecte toda a complexidade captada nos longos períodos de observação de motivos naturais, como o emaranhado de ramos numa árvore ou a rugosidade de um tronco.

A complexidade visual dos padrões fractais de Pollock, é possível de quantificar através do conceito de dimensão fractal D . Neste caso específico, este conceito descreve de uma forma numérica, o preenchimento de uma superfície. (Ver cap. 2.4) A analogia entre uma imagem da natureza, em termos de dimensão e um quadro de Pollock, é bastante aceitável e plausível. Na figura 5.11, de cima para baixo, verifica-se um aumento da dimensão,

¹Jack o gotejador, referência a “Jack the ripper” (Jack o estripador) e a “drip” (gotejar).



Figura 5.10: Árvores e revestimentos de troncos são um exemplos de objectos fractais na natureza

começando com $D = 1$ e variando crescentemente D , até um valor muito próximo de 2.

Nas obras de Pollock, é possível estabelecer uma associação entre a dimensão D do padrão fractal de um quadro e o ano em que foi pintado.

Como demonstra a figura 5.12, Pollock aperfeiçoou esta técnica ao longo de 10 anos. Numa fase preliminar 1943-1945 as suas telas eram caracterizadas por baixos valores de D . Durante a fase de transição 1945-1947, a experimentação de novas técnicas de gotejamento, levou a um aumento brusco da dimensão fractal das obras produzidas nesse período. No período designado por alguns de “clássico” 1948-1952, a técnica foi aperfeiçoada e a dimensão fractal das suas obras foi crescendo mais gradualmente.

Todos estes estudos, em torno da dimensão fractal das várias obras de Pollock, foram efectuados aplicando o método de capacidade limite, no qual, imagens digitalizadas de pinturas de Pollock foram cobertas com uma grelha de quadrados idênticos gerada por computador. O número de quadrados $N(L)$ que continham parte do padrão pintado foram contados e este processo foi repetido à medida que o tamanho L dos quadrados foi reduzido. O maior quadrado foi escolhido para coincidir com o tamanho da tela ($L \sim 2,5m$) e o mais pequeno foi escolhido de modo a coincidir com o mais fino detalhe ($L \sim 1mm$). Para comportamento fractal, $N(L)$ é escalado de acordo com $N(L) \sim L^D$, onde os valores de $1 < D < 2$ foram extraídos do gradiente de um gráfico que relaciona $\log N(L)$ com $\log(L)$.

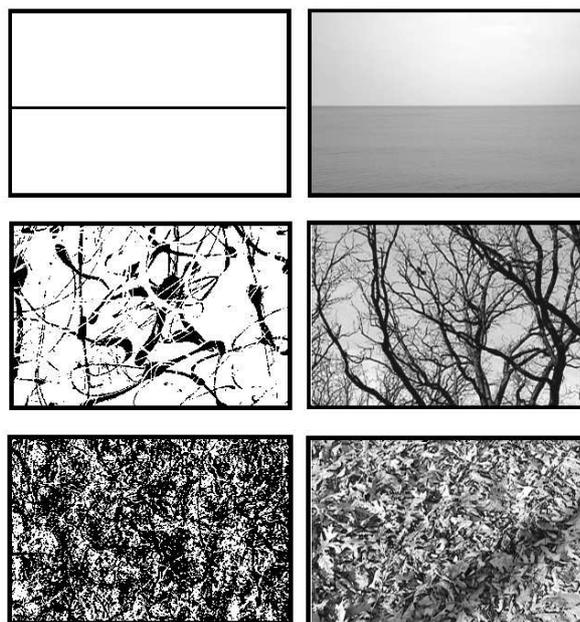


Figura 5.11: Analogia gráfica entre alguns excertos de quadros de Pollock (coluna esquerda) e imagens da natureza (coluna direita). Em cima: A linha do horizonte forma uma linha com $D = 1$. No centro: ramos de árvores e quadro *Número 23* (1948) são padrões fractais com $D = 1,3$. Em baixo: folhas sobre o chão e quadro *Número 31* (1950) são padrões fractais com $D = 1,9$.

5.3 A lei do crescimento

A lei de crescimento humano é completamente distinta da lei de semelhança geométrica. Em todas as fases de crescimento de um humano, desde recém-nascido até adulto, diferentes partes do corpo crescem, cada uma com um factor de escala diferente. Por exemplo, se medirmos o comprimento de um braço ou o tamanho da cabeça de indivíduos de diferentes idades e compararmos com a altura do corpo, observamos que os humanos não crescem preservando a semelhança geométrica. A figura 5.13 ilustra a mudança na forma à medida que a altura se vai normalizando.

Concentremo-nos agora, na relação, tamanho da cabeça (designemos de t) versus altura do corpo (designemos por a). Uma das formas de encontrar um critério para a lei do crescimento é através da delineação de uma razão destas duas quantidades (designemos

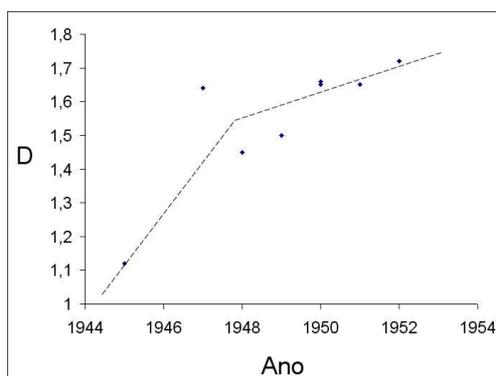


Figura 5.12: A dimensão fractal D das obras de Pollock em função do ano em que foram pintadas

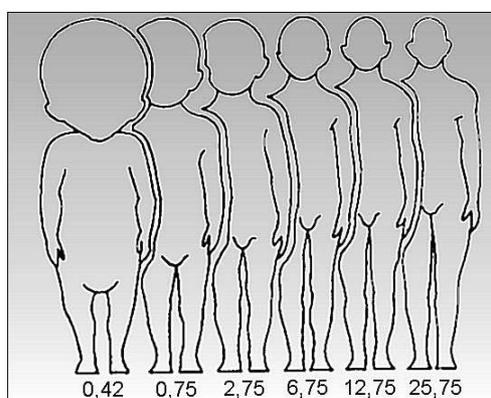


Figura 5.13: Evolução da forma do corpo entre as idades 0,5 e 25

de $r = \frac{t}{a}$) versus idade como apresentamos no gráfico da figura 5.14. Os dados que foram recolhidos pertencem a uma determinada pessoa desde os 0 aos 40 anos como podemos ver na tabela 5.1. Podemos concluir que se o crescimento total fosse proporcional, ou seja, em conformidade com a semelhança geométrica, então r deveria ser constante ao longo dos anos, pertencendo todos os pontos do gráfico a uma linha horizontal. No entanto, verificamos que numa fase inicial (0-3 anos) temos um crescimento proporcional chamado de crescimento isométrico². Depois, numa segunda fase a razão desce significativamente indicando que a cresce relativamente rápido em relação a t . Este crescimento é chamado

²Crescimento proporcional.

de alométrico³. Por volta dos 30 anos de idade, o processo de crescimento fica completo e r é novamente constante.

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da cabeça (t) (cm)	razão(r)
0	50	11	0.22
1	70	15	0.21
2	79	17	0.22
3	86	18	0.21
5	99	19	0.19
10	127	21	0.17
20	151	22	0.15
25	167	23	0.14
30	166	23	0.14
40	169	23	0.14

Tabela 5.1: Altura do corpo (a) e o tamanho da cabeça (t) de uma pessoa. A última coluna corresponde à razão entre t e a

Este fenómeno de crescimento não proporcional (crescimento alométrico), é comparável com a geometria fractal, nomeadamente com a lei de potência.

Vejamos em que consiste a lei de potência através da seguinte conjectura: se considerarmos, numa certa experiência, os dados em largas escalas numéricas x e y , então é possível que exista uma lei de potência que exprima y em termos de x . Para testar esta conjectura, colocamos os dados num gráfico log/log e verificamos se é ou não possível traçar uma recta pelos pontos do gráfico. Se assim ocorrer podemos continuar com a nossa conjectura e escrever $\log y = m \log x + b$ onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem. Estamos

³Um padrão de crescimento em que uma característica cresce numa razão proporcional a uma potência de uma outra característica.

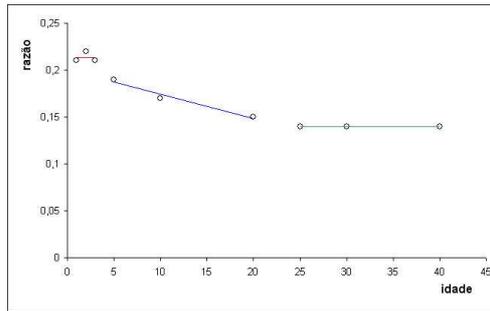


Figura 5.14: Gráfico que relaciona o crescimento ao longo dos anos do tamanho da cabeça em relação à altura

a considerar 10 como base do logaritmo mas poderia ser qualquer outra.

$$\begin{aligned} \log_{10} y = m \log_{10} x + b &\Leftrightarrow 10^{\log_{10} y} = 10^{\log_{10} x^m} \times 10^b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = x^m \times 10^b \Leftrightarrow y = cx^m, c = 10^b \end{aligned}$$

Esta equação descreve a lei de potência: y em função de x , em que x é uma potência cujo expoente é o declive da recta.

É de realçar que se $m = 1$, então $y = cx$ é uma equação linear que descreve o crescimento isométrico.

Vamos agora, reformular a tabela 5.1 extendendo-a a logaritmos, ou seja, tomando os logaritmos dos valores obtidos para o tamanho da cabeça (t) e para o altura do corpo (a), como apresentamos na tabela 5.2. Seguidamente, construímos um gráfico log/log, figura 5.15 e usando uma aproximação da lei de potência, verificamos que se confirmam as fases de crescimento do indivíduo. A primeira linha corresponde à fase dos 0 aos 3 anos de idade e tem declive aproximadamente 1, o que significa que as quantidades t e a são proporcionais. A segunda linha corresponde aos restantes anos de idade e tem declive de aproximadamente $1/3$ o que significa que, segundo uma lei de potência, $t = a^{1/3}$, ou seja, a altura do corpo é proporcional ao tamanho da cabeça elevado ao cubo, $c \propto t^3$.

Convém realçar o facto de que estas medidas foram tiradas a uma única pessoa (nascida no século 19) e num único e largo intervalo de tempo. Portanto, a lei do crescimento cúbica acima descrita é provavelmente uma aproximação não representativa.

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da cabeça (t) (cm)	$\log c$ (logaritmo)	$\log t$ (logaritmo)
0	50	11	1.70	1.04
1	70	15	1.85	1.18
2	79	17	1.90	1.23
3	86	18	1.93	1.26
5	99	19	2.00	1.28
10	127	21	2.10	1.32
20	151	22	2.18	1.34
25	167	23	2.22	1.36
30	16	23	2.23	1.36
40	169	23	2.23	1.36

Tabela 5.2: Altura do corpo e o tamanho da cabeça de uma pessoa com os valores dos logaritmos dos mesmos dados

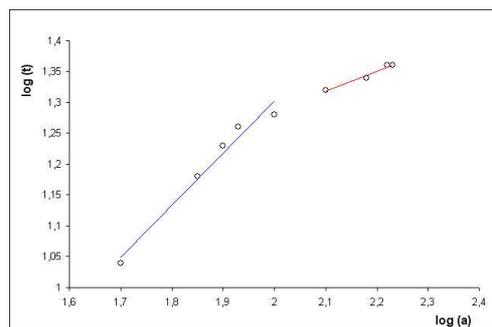


Figura 5.15: Gráfico log/log que relaciona o tamanho da cabeça com a altura do corpo

Capítulo 6

Conclusão

Citando Marjorie Sénechal¹, *o Estudo da forma tem estado historicamente esmagado de baixo da geometria, a qual durante muitos anos foi dominada pelos postulados, axiomas e teoremas de Euclides. Tal como Shakespeare não é suficiente para a literatura e Copérnico não é suficiente para a astronomia, também Euclides não é suficiente para a geometria.*

A geometria fractal, quando inserida na área curricular da matemática no ensino básico e secundário, é um tema motivador e integrador de vários tópicos matemáticos. A aplicabilidade do estudo dos fractais em áreas como a arte, a ciência e a tecnologia poderá impulsionar o interesse pelo tema. Também, o facto das noções de forma e dimensão estarem muito presentes na natureza, permite uma abordagem simples a esta geometria, em que as propriedades da recursividade e auto-semelhança são facilmente entendidas.

O uso de actividades que envolvam o tema da geometria fractal, permitem ao professor promover as capacidades de investigação matemática do aluno, abordando conceitos de uma forma mais ou menos complexa, de acordo com o nível de escolaridade e de desenvolvimento deste.

Auto-semelhança, forma, dimensão, área, perímetro, volume, números complexos, semelhança de figuras, sucessões e iteração de funções, são alguns exemplos de conteúdos matemáticos que podem ser explorados através deste tema.

¹“On the Shoulder os Giants”, [22]

A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Outras atitudes, valores e competências poderão ser desenvolvidas com este tema, dependendo do dinamismo do professor e do aluno na exploração das diferenciadas actividades.

Capítulo 7

Bibliografía

Bibliografia

- [1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1998.
- [2] B. J. Caraça, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Coleção Ciência Aberta, Gradiva, 4ª Edição 2002.
- [3] F. Commandino, *Elementos de Euclides*, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1855.
- [4] L. Emmerling, *Pollock*, Taschen, 2003.
- [5] A. Fernandes, *Educação e Matemática*, APM 75, 2003: 16-20.
- [6] J. Gleick, *Caos - A construção de uma nova ciência*, Coleção Ciência Aberta, Gradiva, 1987.
- [7] U. GmbH, *M. C. Escher - Gravura e Desenhos*, Koninklijke Erven J.J. Tjil N. V., Zwolle 1959.
- [8] J. Gomes, L. Velho, *Image Processing for Computer Graphics*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] L.S. Liebovitch, *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences*, Oxford University Press, 1998.
- [10] B. Mandelbrot, *Objectos Fractais*, Coleção Ciência Aberta, Gradiva, 2ª Edição 1998.
- [11] Ministério-da-Educação, *Matemática - Programas: 10º, 11º e 12º anos* Porto: Departamento do Ensino Secundário, 1997.

- [12] H. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Fractals for the Classroom: Part One: Introduction to Fractals and Chaos*, Springer-Verlag, 1991.
- [13] H. Peitgen, D. Saupe, *The Science of Fractals Images*, Springer-Verlag, 1988.
- [14] C. Pereira, E. Ferreira, I. Aguiar, M. Pires, S. Sabugueiro, *Educação e Matemática*, APM 55, 1999: 22-23.
- [15] N. B. Providência, *Matemática ou Mesas, Cadeiras e Canecas de Cerveja*, Coleção O Prazer da Matemática, Gradiva, 1ª Edição 2000.
- [16] A. Rodrigues, A. Barret, G. Ferraz, S. Martins, S. Diego, V. Silva, *M. C. Escher - Arte e matemática*, APM- Associação de Professores de Matemática, 1998.
- [17] J. S. Silva, *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1º vol)*, Lisboa: Min.Educação/OCDE, 1965-66.
- [18] R. Taylor, *Fractal Expressionism-Where Art Meets Science*, Santa Fe Institute, 2002: 1-28.
- [19] R. P. Taylor, R. Guzman, T. P. martin, G. D. R. Hall, A. P. micolich, C. A. Marlow, *Authenticating Pollock Paintings Fractal Geometry*, accepted for Publication in Pattern Recognition Letters.
- [20] R.P. Taylor, B. Spehar, C. W. G. Clifford, B. R. Newell, *The Visual Complexity of Pollock's Dripped Fractals*, Proceedings of the International Conference of Complex Systems, 2002.
- [21] L. Velho, J. Gomes, *Digital Halftoning with Space Filling Curves*, SIGGRAPH, Computer Graphics 25(4), 1991: 81-90.
- [22] E. Veloso, *Geometria-temas actuais: materiais para os professores*, Instituto de Inovação Educacional, 1998.