

**Isva Maria Almeida Barreto**

**PROBLEMAS VERBAIS MULTIPLICATIVOS DE  
QUARTA - PROPORCIONAL:  
A DIVERSIDADE DE PROCEDIMENTOS DE  
RESOLUÇÃO**

**Mestrado em Educação Matemática**

**PUC - SP**

**2001**

Isva Maria Almeida Barreto

PROBLEMAS VERBAIS MULTIPLICATIVOS DE  
QUARTA - PROPORCIONAL:  
A DIVERSIDADE DE PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO

Texto apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação da **Profa. Dra. Anna Franchi**.

Pontifícia Universidade Católica - São Paulo

2001

BANCA EXAMINADORA

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopadoras ou eletrônicos.

Assinatura: \_\_\_\_\_ Local e Data: \_\_\_\_\_

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por todos os dons.

À minha orientadora, Professora Doutora Anna Franchi, pela extrema competência e dedicação na orientação desta pesquisa.

À Professora Doutora Maria Tereza Carneiro Soares e à Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado por terem aceitado participar da banca examinadora e pelas sugestões relevantes de modificações neste trabalho.

Aos alunos e aos professores de matemática, da Escola Estadual onde executei parte desta pesquisa, que me receberam em suas classes e colaboraram para o desenvolvimento desta investigação.

Ao Governo do Estado do Amapá, na pessoa do Senhor João Alberto Capiberibe e, de modo particular, à Professora Halda Maria dos Santos Brandão, chefe da Divisão de Educação de Jovens e Adultos da Secretaria de Estado da Educação do Amapá, pela amizade e pelas condições proporcionadas para concluir este Mestrado.

A minha família, a quem dedico este trabalho, que mesmo no longo período em que estive ausente, não deixou de dispensar sua compreensão, apoio e incentivo.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar os procedimentos de resolução de problemas verbais multiplicativos elementares mobilizados por uma população de alunos de 5ª série, de uma Escola Estadual da cidade de São Paulo. Nessa análise, buscamos ressaltar o modo como esses procedimentos se expressam, bem como as características das situações-problema sob as quais eles emergem. Em particular, focalizamos a reflexão sobre os procedimentos não canônicos em problemas de “quarta- proporcional” com números naturais, tomando como referência a proposta de Gerard Vergnaud sobre Campo Conceitual.

Para essa pesquisa, fizemos um período de observação nas referidas classes; em seguida, aplicamos um instrumento diagnóstico seguido da realização de entrevistas. Constatamos um elevado grau de dificuldade na resolução desses problemas, bem como a mobilização de procedimentos não canônicos diversificados expressando operações cognitivas de diferentes naturezas. Os fenômenos observados revelaram aspectos específicos na evolução de concepções pré-multiplicativas para multiplicativas, com forte incidência de procedimentos aditivos nas situações consideradas.

Essas constatações mostram a importância de se considerar, no ensino, a riqueza das produções individuais possíveis de serem estabelecidas pelos alunos em uma situação multiplicativa, divergindo de uma institucionalização precoce de procedimentos uniformes valorizados no âmbito escolar.

Palavras-chaves: quarta proporcional, problemas verbais, procedimentos pré-multiplicativos.

## ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to analyze the procedures for solving simple multiplicative word problems proposed to fifth grade students in a state school in the city of São Paulo, Brazil. Our intention is to highlight not only the way those procedures are expressed but also the characteristics of the problem-situations in which they emerge. Special attention is given to the consideration of non-canonical procedures in solving simple proportion problems with natural numbers, with reference to Gerard Vergnaud's Conceptual Field theory.

Our research comprised a period of observation in the target classrooms, followed by the application of a diagnosis test and subsequent interviews. We detected a great difficulty in the resolution of these problems as well as a mobilization of diversified non-canonical procedures expressing cognitive operations of different natures. The cases studied revealed specific aspects of the evolution of pre-multiplicative conceptions towards multiplicative ones, with great incidence of additive procedures in the process.

These findings point to the importance of teachers considering the potential of individual productions to be elicited from the students in a multiplicative problem situation, instead of stressing an early enforcement of the uniform procedures praised in school.

Words-Key: simple proportion, word problems, pré-multiplicative procedures.

## SUMÁRIO

<b>Introdução</b> .....	09
<b>Problemática e Objetivo</b> .....	11
<b>Capítulo 1 - Fundamentação Teórica</b> .....	15
<b>Capítulo 2 - Metodologia</b> .....	30
2.1. Procura da escola .....	30
2.2. Descrição da escola .....	31
2.3. Inserção no campo .....	31
2.4. Conteúdo desenvolvido nas classes .....	32
2.5. Os instrumentos .....	33
2.6. Instrumento diagnóstico.....	35
2.6.1. Descrição geral .....	35
2.6.2. Descrição pormenorizada .....	37
2.7. Condições de aplicação .....	47
2.8. Entrevistas .....	48
<b>Capítulo 3 - Análise dos dados</b> .....	50
3.1. Análise quantitativa .....	51
3.1.1. Os erros .....	55
3.2. Análise qualitativa .....	58
3.2.1. Estratégia escalar .....	59
3.2.2. Estratégia valor unitário .....	73
<b>Síntese das Conclusões</b> .....	84
<b>Bibliografia</b> .....	89
<b>Anexos</b> .....	92

## INTRODUÇÃO

No presente estudo, são abordados os procedimentos adotados por uma população de alunos de 5ª série, de uma escola estadual da cidade de São Paulo, no processo de resolução de problemas que requerem um raciocínio multiplicativo, enfocados do ponto de vista da proporcionalidade.

Julgamos importante desenvolver um trabalho que analisa como são tratados pelos alunos problemas dessa natureza porque, embora tendo um certo número de pesquisas nessa área, ainda não há uma quantidade suficiente que aborde todos os aspectos. Além disso, optamos por essa problemática, em virtude de meu interesse em pesquisar sobre um conceito cujas noções se manifestam nas fases iniciais de ensino, pois percebo uma riqueza maior nesse período, devido a espontaneidade nas manifestações da criança e nas conjecturas que ela faz. Assinalo que esse tema de pesquisa foi fortemente motivado após conversas com a orientação, cujas pesquisas têm incidido prioritariamente nessa área.

Ao iniciar esse trabalho, refiro-me à importância do tema do ponto de vista social, matemático e psicológico, delimitando o objetivo do trabalho e propondo-me a investigar algumas questões relevantes para a pesquisa e para o ensino.

Em seguida, no primeiro capítulo, descrevemos o referencial teórico utilizado para a realização da pesquisa, desde a determinação da problemática, passando pelos objetivos, até a análise dos resultados.

O segundo capítulo abrange a metodologia empregada para o desenvolvimento do trabalho: o contato com as escolas, o período de observação, a elaboração e aplicação do instrumento diagnóstico e as entrevistas.

No terceiro capítulo, desenvolvemos a análise dos dados resultantes do instrumento diagnóstico combinados com as contribuições dadas pelas entrevistas.

Em seguida, apresento uma síntese das conclusões pontuadas durante a análise dos dados. Após as referências bibliográficas, estão os anexos: instrumentos diagnóstico e entrevistas.

## Problemática e Objetivo

As relações proporcionais se constituem em um dos conceitos matemáticos mais presentes no cotidiano, pois constantemente nos deparamos com situações para as quais é necessária a mobilização de certos processos cognitivos que colocam em prática as noções relacionadas a esse conceito. De modo que certos problemas do mundo real são facilmente interpretados quando da viabilidade de se raciocinar por meio de proporções.

Além disso, do ponto de vista matemático, esse conceito é muito importante por se constituir em pré-requisito para o entendimento de outros conceitos, mesmo que implicitamente em alguns domínios. Essa forma de raciocinar em matemática, por meio de um pensamento proporcional, é fundamental quando se compara duas razões, sendo bem aplicada a situações de variação entre duas dimensões ou de comparações múltiplas.

*“O raciocínio proporcional desempenha um papel tão importante no desenvolvimento matemático do estudante que foi descrito como um conceito limítrofe, a pedra fundamental dos níveis mais altos da matemática e o arremate dos conceitos elementares” (Lamon, 1994; p. 90).*

De acordo com os trabalhos de Vergnaud (1988; 1991; 1994), as situações de proporcionalidade apóiam a construção das estruturas multiplicativas. Estas, por sua vez, compreendem outros conceitos que não se desenvolvem isoladamente, mas em mútua correlação.

Kieren (1994) reconhece que *“o desenvolvimento das estruturas multiplicativas é decisivo para uma pessoa conceituar ou trazer à luz o mundo no qual ele ou ela vive (p. 387)* e acrescenta que somos privilegiados, pelo fato de o estudo das estruturas multiplicativas estar em andamento nos últimos anos.

Assumimos, com Vergnaud (1983), que os conceitos multiplicativos têm sua própria estrutura e que não são redutíveis às noções aditivas. Esta afirmação, enfatizada há décadas por diferentes autores, Dienes (1984), Davidov (1991), Franchi, A. (1995), foi consolidada por pesquisadores, que se inseriram na perspectiva dos campos conceituais proposta por G. Vergnaud, como, por exemplo, Ricco (1978), Lamon (1994), Steffe (1994).

Esses mesmos estudos têm assinalado que a passagem de procedimentos aditivos para procedimentos multiplicativos se desenvolve em um longo processo e que o emprego de procedimentos não canônicos intermediários ocupa um importante papel. Em particular, Ricco (1978, p. 166), em um estudo abrangendo uma seqüência de dados proporcionais, salienta que *“nas respostas produzidas pelos sujeitos da investigação é freqüente observar que as crianças recorrem a diferentes procedimentos, destacando o fato que (...) as crianças continuam utilizando composições aditivas para exprimir o operador “vezes”, que relaciona duas quantidades referentes à mesma grandeza.*

Considerando que esses métodos são significativos para o aluno, é relevante que sejam analisados, mesmo que apareçam bem aplicados somente para um número limitado de situações, ou ainda pouco eficientes. Do ponto de vista didático, essas estratégias devem ser discutidas e *“aproveitadas”* como introdutórias para o estudo do conceito.

*“Analisar estratégias é algo complexo, porém, necessário. Elas refletem o modo de pensar da criança e as relações que estabelece acerca dos dados contidos em um problema, aspectos estes fundamentais para um ensino que objetive mais do que o uso mecânico de algoritmos por parte dos alunos. Analisar estratégias auxilia a compreender as noções que as crianças apresentam e as dificuldades que experimentam na aquisição do conceito de proporção, tanto do ponto de vista psicológico como educacional”* (Spinillo; 1995).

Com um olhar no estudo pioneiro sobre a formação das estruturas multiplicativas de Vergnaud (1983) e, a exemplo de outras pesquisas que analisam os meios adotados pelas crianças para solucionar problemas que colocam em jogo a proporcionalidade, é que o objetivo desse trabalho foi se configurando: analisar os procedimentos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas que envolvem raciocínio multiplicativo, ou seja, investigar como se comporta uma população de alunos frente a situações interpretáveis por meio de relações quaternárias envolvendo quantidades de naturezas diferentes e que podem ser tomadas como termos de uma relação de proporcionalidade.

Pesquisas recentes, como Franchi, A. (1995), Canoas (1997), Cunha (1997) e estudos exploratórios por nós realizados, têm apontado dificuldades dos alunos na resolução de problemas multiplicativos triviais, no final do segundo e no início do terceiro ciclo do ensino fundamental.

Pesquisar as estratégias adotadas pelas crianças para resolver problemas nos ajuda a conhecer, pelo menos parcialmente, seus modos de pensamento. *“O conhecimento da interação do conteúdo e padrões de pensamento podem influenciar o processo de tomada de decisão do professor em sua atuação educacional, fornecendo assim uma conexão entre o pensamento da criança e a pesquisa no que diz respeito ao ensino”* (Lamon, p. 89).

O presente trabalho centra-se no estudo de resolução de problemas que se constitui como de proporção simples de medidas<sup>1</sup>. Dentre os problemas dessa natureza, serão examinados somente aqueles que apresentam uma relação de proporcionalidade que se estabelece entre os termos  $n_1$  e  $n_2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n_1$  e  $n_2$  diferentes de 1. Nessa perspectiva, essa

---

<sup>1</sup> Essa classe de problemas é nomeada, por Vergnaud (1988), de Isomorfismo de medidas.

pesquisa tem como foco principal, primeiramente, verificar os procedimentos utilizados pelos alunos da população selecionada, na resolução de problemas multiplicativos, e, em particular, a ocorrência de procedimentos não canônicos. Em termos mais específicos, tendo em vista as considerações acerca da mobilização de procedimentos não canônicos nos problemas cujos dados apresentam uma relação proporcional de 1 para  $n$ , desejamos observar, e sob que condições, se esse tipo de tratamento se estende aos problemas cuja relação proporcional se estabelece de  $n_1$  para  $n_2$ , com  $n_1 \neq 1$  e  $n_2 \neq 1$ . Com esse propósito serão verificados os aspectos particulares dessa problemática

- Há uma coerência no tratamento dos dados nas duas classes de situações acima apresentadas?

- Qual a influência do contexto na mobilização desses diferentes procedimentos? Há ocorrência de procedimentos não canônicos ou maiores dificuldades, em um contexto mais que em outro? Quais?

- Existe diferença de estratégias ao tratar problemas que apresentam-se com  $n_1 < n_2$ , para os casos em que  $n_1 > n_2$ ?

- Os alunos que operam com o escalar nos problemas em que os termos da mesma variável são múltiplos entre si, que tratamento adotam nos problemas que não têm essa característica?

## CAPÍTULO 1

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento desta pesquisa, nos embasamos teoricamente nas propostas do psicólogo Gerard Vergnaud sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Ao mesmo tempo, consideramos as interpretações atribuídas por alguns pesquisadores que assumiram, total ou parcialmente, tal proposta.

Conforme Vergnaud, a teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, ou seja, faz apelo à noção de situação e às ações dos sujeitos nessas situações. Esse processo de elaboração pragmática *não prejudica a natureza dos problemas a serem resolvidos, estes podem ser tanto de natureza teórica como de natureza prática. Isso não prejudica igualmente o papel da linguagem e do simbolismo da conceitualização* (Vergnaud, 1990; p. 135).

Mesmo para as crianças, problemas são, ao mesmo tempo, práticos e teóricos e não somente empíricos. *“Quando uma classe de problema é resolvida por um indivíduo (...) o caráter problemático dessa classe específica acaba. Esse novo poder capacita o indivíduo a enfrentar novas situações e objetos e tentar entender*

*novas propriedades e relações e, portanto, propor e reconhecer ou considerar por si mesmo novos problemas” (Vergnaud, 1994; p. 42).*

A teoria dos campos conceituais visa a construção de princípios que permitam articular competências e concepções constituídas em situação, e elencar os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem (in Franchi, A. 1999; p.164).

As concepções são conhecimentos *“em geral expressos por seqüências de enunciados”* e as competências são, igualmente, conhecimentos que se constituem em um *“saber fazer”* e se manifestam *“em geral pelas ações julgadas adequadas para tratar as situações”* (Vergnaud, 1995; p. 175).

Conhecer os processos cognitivos mobilizados pelos alunos na resolução de situações multiplicativas pressupõe conhecê-los, de modo articulado, em diferentes dimensões: o significado que atribuem às situações multiplicativas, os procedimentos que mobilizam na resolução dessas situações, os modos simbólicos em que se expressam. Esses processos cognitivos são definidos por Vergnaud (1995) *como sendo os que organizam a conduta, a representação e a percepção bem como o desenvolvimento das competências e das concepções de um sujeito no decorrer de sua experiência.*

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações (Vergnaud, 1991; p. 147). Envolve, igualmente, o conjunto das representações simbólicas em que esses conceitos e teoremas se representam.

Um aspecto importante para toda investigação sobre as estruturas aditivas e multiplicativas na perspectiva acima, e em particular para a nossa investigação, é o que se refere às chamadas situações interpretativas das

operações ou situações de base (Vergnaud, 1988, 1991, 1994). Baseando-me nos aspectos ressaltados em Franchi (1995, 1999), pode-se afirmar que :

Vergnaud considera que em toda "situação" se pode estabelecer com os dados pertinentes (conhecidos e desconhecidos) uma combinação de "relações de base", o que permite desenvolver um trabalho científico de classificação. Assim, são constituídas diferentes relações multiplicativas de base.

A classificação de situações resulta de considerações de ordem tanto psicológica como matemática; uma classificação feita exclusivamente por critérios matemáticos negligenciaria distinções importantes para a didática. Entretanto, um dos desafios colocados para a psicologia da aprendizagem em matemática é, para Vergnaud, "o de estabelecer classificações, descrever conhecimentos em ação, analisar a estrutura e a função das enunciações e representações simbólicas em termos que tenham um sentido matemático" (Vergnaud, 1990; p. 156).

As relações de base mais simples são quaternárias, visto que os mais elementares problemas de multiplicação e divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra (Vergnaud, 1991). Essas relações de base podem gerar quatro tipos de problemas elementares:

Multiplicação simples:

$$\begin{array}{cc} 1 & a \\ b & ? \end{array}$$

Divisão Quota:

$$\begin{array}{cc} 1 & a \\ ? & c \end{array}$$

Divisão Repartição:

$$\begin{array}{cc} 1 & ? \\ b & c \end{array}$$

Quarta Proporcional:

$$\begin{array}{cc} n_1 & f(n_1) \\ n_2 & f(n_2) \end{array}$$

Nesses problemas, três termos são conhecidos e um termo é desconhecido, de onde a denominação de problemas de "Quarta Proporcional". Os problemas ditos de multiplicação ou de divisão são os

casos mais simples em que o numeral 1 aparece explicitamente. Devido a referência explícita do valor unitário no texto, esse valor é sempre utilizado na mobilização dos procedimentos de resolução desse tipo de problema. Os problemas classicamente chamados de “Quarta Proporcional” (porque os precedentes também o são) demonstram o caso mais amplo da proporção em que nenhum dos termos é igual a 1 (ERMEL, 1997).

Essas situações de base ou situações interpretativas são variáveis importantes na mobilização dos procedimentos de resolução, porém, existem outras variáveis que podem interferir na forma desses procedimentos. A diferença no desempenho dos alunos nessas situações depende do domínio de experiências<sup>1</sup>, das variáveis numéricas, das variáveis textuais, como evidenciado em diferentes pesquisas.

Carraher, T. (1988) ressalta que as crianças desenvolvem estratégias próprias, para resolver problemas de aritmética envolvendo as quatro operações, e que essas estratégias são altamente eficientes porque lidam com os números, conservando em todos os momentos o seu significado.

Nessa mesma perspectiva e discutindo esses aspectos *na compreensão de problemas verbais multiplicativos rotineiros*, Franchi, A. (1995) ressalta a ocorrência de inferências pragmáticas em situações familiares, como as envolvendo compra e venda de mercadorias: *inclusão de desejos, de possibilidades, de condicionantes próprios dessas situações*. A autora assume que as experiências informais prévias constroem representações de situações e rotinas para lidar com elas, influenciando o significado das operações envolvidas e os procedimentos de resolução dessas situações. Assim, na resolução de problemas verbais pedindo o cálculo de “preço unitário” de objetos, os alunos mobilizaram procedimentos informais de resolução em

---

<sup>1</sup> Esse domínio de experiências é trivialmente chamado de “contexto”.

número significativamente maior que em problemas propondo situações de empacotamento de objetos.

A autora ressalta, igualmente, a importância do texto do problema como fonte de dificuldades para os alunos, na medida em que pode apresentar ambigüidades ou ser interpretado sob diferentes pontos de vista: por um lado, é tomado como uma peça da linguagem corrente e interpretado fora das condições próprias ao texto de um problema escolar rotineiro, por outro lado, é lido sob a influência das normas rígidas de uma rotina sob a qual se instaura o seu ensino.

Schiliemann (1997; p. 19) aponta uma dificuldade que pode surgir na resolução de problemas de proporcionalidade envolvendo preços e números de itens, diz respeito ao tamanho relativo dos números que indicam os itens a comprar e o preço de cada item. Sugere, como ponto de partida para a compreensão do conceito em foco, os diversos conceitos ou situações da vida em que várias quantidades físicas estão em proporção direta com outras quantidades.

A respeito da constituição progressiva do pensamento multiplicativo, consideramos que, na fase inicial de compreensão das estruturas multiplicativas, é desenvolvido um processo de formação de grupos com base em uma nova unidade. Essa nova unidade, de ordem superior, é chamada de unidade composta e a situação multiplicativa é, então, reinterpretada em função dessa nova unidade. Quando a criança, em um processo de contagem, faz corresponder a um dedo em umas das mãos, cinco dedos na outra, significa que ela estabeleceu uma estratégia mais complexa de contagem. Franchi, A. (1995) ilustra esse processo com a afirmação da aluna que, para saber quantos pacotes poderá montar com 52 balas, sabendo que cada pacote comporta quatro balas, exclama: *“Eu acho que se somasse de 4 em 4 e desse 52 balas, estava certo”*. Essa soma provém de

uma dupla contagem em que “bala” é considerada como unidade e “pacote” como unidade composta. São variáveis de natureza diferentes.

Como o ensino da adição precede o da multiplicação, um primeiro contato com esse conceito ocorre por meio da “adição repetida”, sendo o processo de construção de uma escrita multiplicativa freqüentemente antecedido por uma seqüência aditiva. Durante ou ao final desse processo de contagem, não há garantia de que o aluno tenha clareza quanto ao significado de cada parcela e do número de parcelas. Tomando a adição de parcelas reiteradas como um suporte para o desenvolvimento do conceito da multiplicação, pode ocorrer que nas fases iniciais não haja compreensão efetiva quanto à constituição, pelo aluno, das unidades em jogo, bem como quanto à natureza dessas unidades. Portanto, a “compreensão de uma fórmula multiplicativa como expressando unidades de grandezas diferentes se faz em um processo gradativo evoluindo de procedimentos pré-multiplicativos para procedimentos multiplicativos em um processo não linear” (Franchi, A. 1995).

Decorrente dessas constatações, a referida autora enfatiza as limitações do modelo proposto por Vergnaud, que não abrange completamente as etapas mencionadas. Mas ressalta a pertinência dessa proposta em níveis posteriores, tendo em vista enfatizar um aspecto relevante do pensamento multiplicativo, a proporcionalidade. Enfatiza, igualmente, a abrangência dessa proposta.

Da mesma maneira, Davidov (1991) ressalta que o estudo da estrutura de uma operação pressupõe a análise dos níveis iniciais de sua execução como também as transformações que se constituem em fonte de mudanças subseqüentes.

Entretanto, para a análise de etapas mais avançadas, a idéia de Campo Conceitual é relevante, conforme mencionado anteriormente, considerando que se trata de um espaço de conceitos abrangente e em

estreita relação uns com os outros. Além disso, esse espaço de conceitos nos permite estender a análise para outros domínios da matemática.

Parafraseando Vergnaud, para uma análise eficiente das concepções e procedimentos dos alunos mobilizados na resolução de problemas multiplicativos, faz-se necessária a utilização das propriedades de linearidade, pois *“é completamente impossível analisar os procedimentos utilizados pelos estudantes nessas situações, sem a estrutura de função linear e a clara identificação das magnitudes envolvidas (...)”*. (Vergnaud,1994, p. 49).

Sendo, a presente pesquisa, desenvolvida no ensino fundamental, fazemos com Vergnaud,1994; p. 42-43, as seguintes considerações:

As operações são introduzidas por meio de situações-problema tendo como referentes domínios de experiências relativos ao mundo físico e cultural: as experiências iniciais da criança de repartir um certo número de objetos, de comprar mercadorias, de lidar com dinheiro e sua primeira compreensão de velocidade, densidade, ou probabilidade são essenciais. São situações e problemas dessa natureza, ou seja, não estritamente matemáticos, que oferecem uma referência segura para o Campo Conceitual Multiplicativo. As conseqüências didáticas disso são importantes.

Deve-se considerar ainda a diversidade e a complexidade dos procedimentos utilizados pelos alunos para lidar com a heterogeneidade e o grande número das situações multiplicativas.

Para ilustrar esses aspectos, apresentamos uma breve discussão de um problema multiplicativo envolvendo 4 litros de combustível ao preço de R\$10,00.

$$4 \text{ _____ } 10$$

$$8 \text{ _____ } y$$

A solução pode ser encontrada mediante a multiplicação de 8 litros pelo coeficiente de proporcionalidade. Esse coeficiente permite calcular o preço para qualquer quantidade de litros.

O preço de 8 litros também pode ser determinado multiplicando-se por 2 o preço de 4 litros. Para calcular o preço de 2 litros basta multiplicar o preço de 4 litros por  $\frac{1}{2}$ . O preço de 10 litros também pode ser determinado somando-se o preço de 8 litros com o preço de 2 litros.

O preço de 3,5 litros pode ser encontrado, multiplicando-se por 7, o preço de  $\frac{1}{2}$  litro, ou seja:  $1,25 \times 7$ . Da mesma maneira, pode-se saber o preço de 6 litros através da soma entre os preços de 3,5 litros e 2,5 litros, ou seja:  $8,75 + 6,25$  (este último determinado pelo produto  $1,25 \times 5$ ).

Em uma abordagem cognitiva, esses procedimentos, qualificados como sendo em grande parte “intuitivos” e largamente implícitos, requerem, conforme a teoria dos campos conceituais, uma descrição precisa em termos de conceitos e teoremas matemáticos, ou seja, em termos de diferentes “teoremas em ação”. É nessa perspectiva, como conhecimento em ação, que Vergnaud toma a expressão “propriedades da função linear”.

$$\text{I) } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{II) } f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tendo em vista essa complexidade dos procedimentos multiplicativos, a necessidade de analisar as tarefas cognitivas e os procedimentos mobilizados pelos estudantes nas situações multiplicativas, é que procedemos a análise dos procedimentos dos alunos, fazendo-se uma analogia com as propriedades evidenciadas na estrutura da função linear<sup>1</sup>.

Nesse processo consideraremos as limitações decorrentes das situações multiplicativas selecionadas, as restrições sobre os valores

---

<sup>1</sup> Referindo-se a relação de representação entre dois conjuntos, M.Bunge (1974) considera a pertinência de utilizar, no processo de construção do conhecimento, representações analógicas mais frouxas (algum-algum, todo-algum) que a bijeção e o isomorfismo, constantemente exemplificados na matemática. A percepção de analogias é considerada como o primeiro passo para a generalização e a classificação.

numéricos e os aspectos conceituais matemáticos mobilizados, na resolução dos problemas multiplicativos, sob essas restrições e limitações.

Lembrando que os valores numéricos dos problemas multiplicativos têm, como referentes, quantidades de natureza diferente, pois as variáveis utilizadas tomam seus valores em categorias distintas de universo (Franchi, A. 1995), é oportuno descrever a natureza dessas quantidades.

De acordo com Schwartz (1998), as operações geram novas quantidades que podem ou não ter novas referências. *“A composição de duas quantidades para produzir uma terceira quantidade que não é, em geral, semelhante a nenhuma das duas quantidades originais, é denominada referent transforming composition”* (p. 46). A multiplicação é um exemplo desse tipo de composição. Essas composições levam a distinguir dois tipos de quantidades: a intensiva e a extensiva. A quantidade intensiva determina-se por meio de uma relação entre quantidades extensivas. Nesse trabalho, especificamente, os números que apresentam as variáveis do problema, são, isoladamente, quantidades extensivas e a determinação da quantidade intensiva consiste no estabelecimento de uma relação entre essas variáveis.

Passamos a exemplificar os procedimentos a partir de um dos problemas propostos no instrumento diagnóstico da pesquisa em foco neste texto.

*Marca Tanque – preço de 6 carrinhos: 78 reais. Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?* Trata-se de um problema de quarta proporcional, representado pelo esquema:

$$\begin{array}{r} 6 \quad \text{_____} \quad 78 \\ 18 \quad \text{_____} \quad y \end{array}$$

em que podem ser mobilizados diferentes procedimentos. Estes procedimentos, que tomam como referência as proposições de G. Vergnaud,

são parcialmente inspirados em ERMEL(1997) e nas reflexões conjuntas - sobre os fenômenos observados - com os pesquisadores participantes da pesquisa .

a) Os procedimentos que utilizam **o coeficiente de proporcionalidade** consideram as relações entre duas grandezas, ou seja, utilizam o coeficiente constante que permite passar dos números associados a uma grandeza para os números associados na outra grandeza. Estes procedimentos são, usualmente, chamados de procedimentos *do tipo funcional*, na medida em que trazem, subjacente, uma relação funcional.

$$\begin{array}{ccc}
 & \times 13 & \\
 & \text{-----} & \\
 6 & & 78 \\
 & \text{-----} & \\
 18 & & x \\
 & \text{-----} & \\
 & \times 13 & 
 \end{array}$$

O conceito de função está envolvido no problema, tendo em vista a relação constante que existe entre as duas variáveis: “quantidade de carrinhos” e “custo (R\$)”. A relação funcional se verifica a partir da existência do coeficiente constante entre as duas variáveis, onde a cada “ $x$ ” do domínio corresponde um e somente um “ $y$ ” do contradomínio, ou seja, genericamente, temos uma função definida em  $\mathbb{N}$ :  $f(x) = 13x$ .

De acordo com Vergnaud, o procedimento funcional é traduzido por  $13 \times 18$ , que pode ser expresso como 13 parcelas de 18. Ressalte-se, entretanto, que dificilmente o aluno expressa essa soma, tendo em vista o fato de essa operação não representar a situação concreta.

A adição, no entanto, de 18 parcelas de 13 é significativa por que se trata de pagar 13 reais por cada carrinho, ou seja, 13 reais 18 vezes.

O procedimento funcional pode ser melhor identificado quando se trabalha com uma seqüência de números (valores) assumidos pelas variáveis do domínio.

b) Os procedimentos que utilizam **as propriedades de linearidade** se evidenciam por meio de relações estabelecidas entre os termos da mesma grandeza, privilegiando relações do tipo multiplicativo.

$$\begin{array}{r}
 3 \text{ ----- } \square \\
 \times 3 \left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ ----- } 78 \\ 18 \text{ ----- } \square \end{array} \right. \times 3 \\
 30 \text{ ----- } \square
 \end{array}$$

No exemplo acima, referindo-se aos dados da segunda linha:

18 carros correspondem a três vezes mais (que 6 carros), portanto, eles custam três vezes mais, ou seja:  $3 \times 78$ .

30 carros correspondem a cinco vezes mais (que 6 carros), portanto, eles custam cinco vezes mais, ou seja:  $5 \times 78$ .

Da mesma maneira, 3 carros correspondem a metade (de 6 carros) e a mesma variação ocorre na variável "custo"; eles custam a metade de R\$ 78,00; ou seja:  $\frac{1}{2} \times 78$  ou  $78 \div 2$ .

Observe-se que os termos 3; 5 e  $\frac{1}{2}$ , respectivamente, correspondem aos produtos efetuados entre os números referentes a mesma grandeza. Chamaremos esses termos de escalares e essa relação será chamada de relação escalar.

Apoiando-se nos raciocínios do tipo: "...vezes mais..." ou "...vezes menos...", relações multiplicativas oriundas da combinação de relações aditivas e multiplicativas podem ser utilizadas, como:

O preço de 21 carros é a soma do preço de 18 carros com o preço de 3 carros, ou seja,  $f(3.6 + \frac{1}{2}.6) = f(18) + f(3)$ . Analogamente, o preço de 30 carros pode ser determinado pela soma seguinte: 2 vezes o preço de 6 carros mais o preço de 18 carros. Seria:  $2. f(6) + f(18)$ .

Entre esses procedimentos, podemos isolar os que utilizam a “passagem pela unidade”, em que se determina a imagem de 1 mas o procedimento ainda se configura incidindo na propriedade de linearidade, como no raciocínio seguinte:

6 carros custam 78,00;

1 carro custa 6 vezes menos, portanto: 13,00; resultante do quociente  $78 \div 6$ ;

18 carros, portanto, custam 18 vezes mais, ou seja,  $18 \times 13$ .

Dentre inúmeras pesquisas desenvolvidas na mesma direção do presente trabalho, decidiu-se por atribuir um estatuto teórico às duas pesquisas seguintes.

Ricco, G. (1978) em sua tese de doutorado, “O desenvolvimento da noção de função linear na criança de 7 a 12 anos”, faz um estudo sobre resolução de problemas, envolvendo a manipulação de noção de função linear. Dessa maneira, sua investigação situa-se no quadro geral do desenvolvimento das principais noções de natureza multiplicativa, pois *tenta determinar a capacidade das crianças em tratar, utilizar e compreender as diferentes propriedades da noção de função linear que estão à base da compreensão dos problemas de “regras de três”* (p. 6). Seu trabalho concerne unicamente à classe de problemas que faz intervir o isomorfismo de medidas.

No que concerne a escolha das variáveis, o material selecionado consiste na representação, sob formas de tabelas numéricas, de

correspondências, nas quais os elementos do conjunto de partida e do conjunto de chegada são elementos em  $N$ . Como exemplo típico de função linear, apresentou às crianças, sob forma de tabela, a aplicação: números de objetos/preço pagos por esses objetos. A princípio, fornecendo os valores de alguns pares e pedindo às crianças para completar a tabela. As provas foram administradas em diferentes escolas de Paris, totalizando uma clientela de 85 crianças que se encontravam no final da escola elementar, sendo que cada uma delas fez uma única prova. Foram aplicados nove instrumentos - cada um com uma tabela - que variavam, principalmente, quanto às posições dos pares de números dados nas tabelas, quanto à presença ou não do valor unitário, quanto à disposição dos dados na tabela (conjunto de partida à esquerda/conjunto de chegada à direita). A última prova apresentava o modelo tradicional da regra de três, tendo para a metade dos problemas  $n > p(n)$  e nos demais  $n < p(n)$ .

Os diferentes procedimentos utilizados pelas crianças foram hierarquizados por níveis definidos de acordo com as propriedades, relações e operadores evidenciados pela noção de função linear. Foi observado que, nas seqüências de respostas produzidas, as crianças recorriam a diferentes procedimentos e seu critério de análise foi classificar em função do procedimento mais freqüente. Os primeiros níveis caracterizaram-se pelos procedimentos que não respeitam a proporcionalidade. O progresso ocorreu quando da utilização de procedimentos com uso da proporcionalidade, cuja característica maior consiste num tratamento especial à noção da constante. A autora assinala *que o fato de se tratar de uma divisão ou uma multiplicação não é suficiente para classificar entre operador função e operador escalar (Ricco, p. 30)*. Além disso, examina como o tipo de informações fornecidas às crianças pode facilitar ou dificultar o estabelecimento de relações entre os dados para descobrir a constante. E observa que: *não podemos discernir nos cursos médios uma*

*hierarquia clara entre os operadores função e escalar no estabelecimento da constante (Ricco, p. 165).*

Schiliemann e Carraher, no artigo: “Razões e proporções na vida diária e na escola”, mostram, com base em muitas pesquisas, que a compreensão de razões e proporções pode ter início fora da escola; no entanto, chamam a atenção para o fato de que é por meio da instrução escolar que mecanismos mais eficientes e gerais se consolidam. Os autores observam que *quando se trata de problemas de compra ou em situações que fazem parte do cotidiano, adultos e crianças com pouca ou nenhuma escolarização demonstram compreensão no estabelecimento de relações proporcionais, resolvendo corretamente problemas de proporcionalidade (p. 21).*

Quanto às implicações pedagógicas a respeito da compreensão da proporcionalidade, os autores ressaltam que nas aulas tradicionais não há espaço para interpretar, discutir, representações alternativas para explorar significados (p. 35). Nessa perspectiva, sujeitos que resolvem somente problemas de compra e venda, não têm como avaliar se as variáveis dos problemas que tratam de distância, alimento, objetos pessoais, etc, são de mesma natureza que a relação entre o preço de um item e o preço de vários itens (p. 21). Porém, quando esses mesmos problemas são abordados como semelhantes, porque fazem parte de um contexto que abrange os conceitos de razão e proporção, destacam-se as relações que são verdadeiramente relevantes desse domínio. Com essa abordagem não só os problemas de compra e venda serão facilmente resolvidos, como também os que se referem a outros conteúdos como tempo, distância, número de tijolos, litros, etc.

Em um estudo para comparar as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade entre crianças escolarizadas e crianças vendedoras, os autores examinam três grupos totalizando 90 crianças com

idades entre 11 e 14 anos. Os oito problemas apresentados aparecem inseridos em situações de compra e venda, variando da seguinte maneira:

- quatro “problemas escalares”, porque apresentam múltiplos na mesma variável, e quatro “problemas funcionais”, por apresentar múltiplos entre os valores de variáveis distintas.

- cada um desses conjuntos de problemas fornecem, nos dois primeiros problemas, a relação entre as duas variáveis para dois valores menores e pede para encontrar o termo que falta para um par de números maiores, e o inverso, nos dois problemas seguintes.

- para a metade dos problemas, o número indicando o preço de um par era maior que o que indicava o número de itens. Relação invertida para a outra metade dos problemas.

Os vários estudos realizados mostram que o mecanismo preferido para resolver problemas de proporcionalidade fora da escola é a estratégia escalar. Nessa perspectiva, as crianças vendedoras e sem escolarização apresentavam acentuado sucesso no uso desse procedimento. Já a estratégia funcional foi claramente preferida pelos sujeitos escolarizados.

## CAPÍTULO 2

### METODOLOGIA

Esta pesquisa estuda os procedimentos de resolução de problemas multiplicativos utilizados pelos alunos da 5ª série de uma Escola Estadual da cidade de São Paulo. Esse estudo foi realizado mediante um período de observação no locus da pesquisa, aplicação de um instrumento diagnóstico e entrevistas. Neste capítulo, especifico cada uma dessas etapas e, sinteticamente, o percurso percorrido. Além disso, caracterizo a escola e o ensino desenvolvido nas classes.

#### **2.1. Procura da escola:**

Ao escolher a escola para o desenvolvimento do trabalho, optamos por uma escola pública da região Oeste da cidade de São Paulo.

Fizemos um contato inicial com uma primeira escola (Escola A), durante aproximadamente dois meses, onde desenvolvemos um período de observação e aplicação experimental de uma avaliação, em duas classes de 5ª série, totalizando 59 alunos.

As dificuldades manifestadas pelos alunos em resolver problemas multiplicativos e a grande diversidade de procedimentos observados apontaram para uma necessidade de aplicação do instrumento em uma

população maior de alunos, bem como a reformulação do próprio instrumento.

No contato com a segunda escola (Escola B), na mesma região, encontramos ambiente bastante favorável para desenvolvimento do trabalho, não só pelo ambiente acolhedor, como também pelo grande número de alunos.

## **2.2. Descrição da escola:**

A escola escolhida é uma escola estadual da Diretoria Centro, que atende alunos do Ensino Fundamental, Supletivo e Ensino Médio, funcionando em três períodos. As classes de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries funcionam no segundo período, com seis turmas de cada série.

Ao localizar essa escola, fui recebida por uma das vice-diretoras, que me autorizou a desenvolver o trabalho para o qual me propunha. Antes da autorização, consultou a direção da escola e os professores de matemática.

## **2.3. Inserção no campo:**

Assumo a importância da presente investigação e entendo que é de extrema necessidade o estabelecimento de uma relação de confiança entre pesquisador e alunos, mesmo em pesquisa que vise prioritariamente uma análise das produções dos alunos no ambiente natural da sala de aula.

Estive em contato com a escola durante aproximadamente quatro meses, sendo que durante os dois primeiros meses visitava a escola duas vezes por semana, a fim de conhecer os alunos, tomar nota dos conteúdos desenvolvidos em classe, conhecendo um pouco o trabalho dos professores.

O tempo restante foi utilizado para aplicação de instrumentos e entrevistas.

## 2.4. Conteúdo desenvolvido nas classes:

Os professores de matemática das seis classes de 5ª série, envolvidas no trabalho, não desenvolveram os mesmos conteúdos.

Da 5ª série B, 19 alunos participaram do estudo. A professora dessa classe utiliza, em suas aulas, a técnica expositiva dos conteúdos. Começou o ano letivo trabalhando: relações de pertinência, relações de ordem, união e intersecção no conjunto dos números naturais, através de exercícios escritos para “completar” com o sucessor ou antecessor de um número, com os sinais  $>$  ou  $<$ ,  $\in$  ou  $\notin$ . Em seguida, trabalhou as técnicas operatórias da adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como suas respectivas propriedades. As atividades aplicadas concomitantemente a cada operação trabalhada eram: resolução de problemas, expressões numéricas e equações. Na seqüência, decorreu o estudo sobre perímetro e área do triângulo e do quadrado, potenciação e radiciação em  $\mathbb{N}$ , unidades de comprimento, divisibilidade, operações com as frações, simplificação e mínimo múltiplo comum. Todos esses conceitos foram desenvolvidos por meio de situações-problema, expressões numéricas e técnicas de resolução das operações.

Um outro professor desempenha seu trabalho em duas classes: 5ª série D e E, totalizando 50 alunos. Ele iniciou o ano letivo fazendo revisão das técnicas operatórias da multiplicação e divisão por um ou dois algarismos, respectivamente, no multiplicador e divisor. Depois dessa revisão, através de atividades escritas, fez o estudo dos algarismos romanos. A partir daí, os conteúdos desenvolvidos e sua prática docente assemelha-se ao trabalho da professora da 5ª B, já descrito, acrescentando-se somente a prática constante de construção dos fatos fundamentais.

O terceiro professor ministra suas aulas para 59 alunos, distribuídos nas classes de 5ª série A, F e G. Esse professor segue fielmente o livro didático dos autores Imenes e Lellis. Portanto, segue um roteiro bastante diferente dos outros dois professores. Nessas classes, todos os alunos têm

seus livros e fazem as atividades do livro, ora individualmente ora em duplas. O professor discute as dúvidas individualmente, sempre que solicitado. Eventualmente, desenvolve algum trabalho complementar extra classe, em que é necessário que os alunos (em equipes) confeccionem algum material para apresentação.

## **2.5. Os instrumentos:**

A elaboração do instrumento diagnóstico foi um processo bastante demorado, tendo em vista a determinação das características das variáveis didáticas envolvidas, ou seja, os três grandes fatores da complexidade cognitiva: as situações interpretativas, os valores numéricos e o domínio de experiência. Dada essa complexidade e a necessidade de elaboração de um instrumento eficiente que viesse a dar condições de entendimento e resolução, é que esse processo de elaboração comportou algumas aplicações pilotos em diferentes momentos.

A primeira aplicação ocorreu na Escola A, como já mencionado, com as duas classes de 5ª série (59 alunos). Esse instrumento (anexo I) foi composto por 12 problemas multiplicativos referentes a dois contextos e envolvendo uma relação de  $n_1$  para  $n_2$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$  com  $n_1$  e  $n_2 \neq 1$ , ou seja, problemas em que se procura a quarta proporcional<sup>1</sup>.

Considerando que, por ocasião desse trabalho, já tínhamos entrado em contato com a Escola B, essa aplicação teve por objetivo avaliar o instrumento quanto ao nível de dificuldade das questões e da compreensão dos enunciados.

Em conseqüência das inúmeras indagações dos alunos para interpretar o texto dos problemas e para a escolha das operações, além do

---

<sup>1</sup> Nomenclatura explicada no referencial teórico deste trabalho, de acordo com ERMEL (1997).

alto índice de erros, o instrumento não ofereceu material suficiente e adequado para análise das questões que nos propusemos a avaliar. Na escola B, nossa já mencionada segunda opção, procuramos obter dados sobre a pertinência do estudo nas 5<sup>a</sup> séries, por meio das observações em classe. Durante esse período, fizemos uma avaliação (anexo II) do desempenho dos alunos na resolução de problemas multiplicativos simples, ou seja, em que as relações se estabelecem de 1 para  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

A decisão de verificar o desempenho dos alunos, primeiramente nessa classe de problemas, deu-se em decorrência de uma primeira hipótese em que se assumia: *se os alunos não conseguem resolver os problemas mais elementares do raciocínio multiplicativo, não conseguirão resolver os problemas cuja relação de proporcionalidade se estabelece de  $n_1$  para  $n_2$ .*

Além disso, na 5<sup>a</sup> série B (19 alunos), foram acrescentados 6 problemas do segundo grupo, referentes a um só contexto.

Uma análise “por aluno”, nas respostas dadas a esse “teste” e aos anteriores, revelou indicações de que os problemas do segundo grupo – relação de proporcionalidade de  $n_1$  para  $n_2$  – não apresentavam dificuldades maiores que os do primeiro grupo, sob o controle de certas condições. Observou-se igualmente que a representação decimal dos valores em dinheiro se constituiu em um fator de dificuldade; e, parte dos enunciados, apresentados com o auxílio de uma ilustração, tornaram-se mais compreensíveis quanto ao texto dos problemas.

Após a re-elaboração do instrumento definitivo, decidimos aplicar o instrumento completo (anexo III), primeiro e segundo grupos de problemas, para 166 alunos da 6<sup>a</sup> série, distribuídos em 6 classes.

Os alunos da 6<sup>a</sup> série não demonstraram interesse em participar da investigação, questionaram bastante o fato de o resultado não implicar em nota e, em algumas turmas, foram quase que “forçados” a fazer os testes. O

professor havia faltado e eles queriam, naturalmente, o horário livre, mas foram impedidos pela inspetora da escola e obrigados a retornar à classe.

Entendo que o encaminhamento dado no processo de aplicação desse instrumento ratificou a grande importância do período de observação que desenvolvi com os alunos. Pois nas classes de 6<sup>a</sup> série, em que não ocorreu esse período de “convivência”, não houve credibilidade quanto ao papel do pesquisador e, pude notar nítido descaso dos alunos, das classes indicadas, com relação ao trabalho desenvolvido. Além desses inconvenientes, os resultados dos trabalhos assumidos pelos alunos da 6<sup>a</sup> série não apresentaram diversidade de procedimentos e, principalmente, não tivemos ocorrência de procedimentos não-canônicos. As estratégias utilizadas pelos alunos demonstraram a estratégia *valor unitário* como o procedimento padrão para resolver tais problemas.

Com esses estudos exploratórios e diante dos resultados apresentados pelos alunos da 6<sup>a</sup> série, foi possível uma avaliação da adequação do instrumento diagnóstico quanto à clareza dos enunciados e reconsideramos, assim, as 5<sup>a</sup> séries (A, B, D, E, F, G) como locus da investigação. Nestas classes, aplicamos o instrumento diagnóstico definitivo (anexo III) e realizamos as entrevistas.

## **2.6. Instrumento Diagnóstico**

### **2.6.1. Descrição Geral**

O instrumento final é composto por 16 problemas que se caracterizam por apresentar uma relação de proporcionalidade entre seus termos, ou seja, tratam-se de problemas multiplicativos.

Esses problemas envolvem apenas números naturais e estão inseridos em dois contextos distintos, assim nomeados: *Revenda de Carrinhos* e *Empacotamento*.

Os problemas relativos ao contexto *Revenda de Carrinhos* apresentam, em uma das variáveis, quantidades extensivas que correspondem ao número de carrinhos e, na outra variável, quantidades extensivas que representam valores em dinheiro.

Os problemas inseridos no contexto *Empacotamento* apresentam, em uma das variáveis, quantidades extensivas que representam número de lápis, cadernos, agendas, borrachas e canetas. Na outra variável, os números referem-se à quantidade de pacotes.

Esses 16 problemas foram separados em dois grupos. O primeiro é formado por 6 problemas e a relação de proporcionalidade que se apresenta é de 1 para  $n$ . Significa que a imagem de 1 - valor correspondente à unidade - é um dado do problema ou constitui-se no termo desconhecido. A presença ou não do valor unitário, depende da questão do problema. Se o problema pede o total de elementos - multiplicação - ou a quantidade de grupos - divisão quota, a imagem de 1 está presente no enunciado; se a questão refere-se ao número de elementos por grupo - divisão repartição - a imagem de 1 é a própria incógnita do problema. Dois problemas sobre cada uma dessas situações multiplicativas compuseram esse primeiro grupo.

O segundo grupo é formado de 10 problemas - cinco em cada contexto - e a relação se estabelece de  $n_1$  para  $n_2$ , ou seja, o valor unitário não faz parte dos dados do problema.

O primeiro grupo de problemas difere do segundo no que concerne às variáveis numéricas e quanto à relação entre os termos. Esses problemas referem-se às situações interpretativas: multiplicação, divisão repartição ou divisão quota.

No segundo grupo, dependendo do procedimento desenvolvido, a divisão quota ou a divisão repartição são evidenciadas. A diferenciação entre essas operações, no entanto, tem uma significação menor, nesse grupo de problemas, porque o aluno pode usar o procedimento escalar.

### **2.6.2. Descrição pormenorizada com antecipação dos procedimentos de resolução.**

Passo a descrever com mais detalhes as escolhas para determinação das variáveis, bem como faço algumas considerações acerca dos possíveis resultados. A análise antecipada desses procedimentos de resolução se desenvolve com base no referencial teórico, levando-se em conta as influências das variáveis didáticas – texto dos problemas, natureza dos números – como também, constatações de trabalhos anteriores.

Os problemas que compõem o primeiro grupo são razoavelmente simples, tendo em vista os valores numéricos que os constituem, a presença do valor unitário e, além disso, limitam-se a apresentar somente quantidades discretas. *“Essas situações fornecem o primeiro significado para multiplicação e divisão:  $b$  vezes mais/ $b$  vezes menos. O estudo a respeito da maneira como os alunos enfrentam uma nova classe de situações é, conforme Vergnaud (1994), de fundamental importância para a análise do raciocínio, uma vez que “a classificação hierárquica dos problemas de multiplicação e divisão, que leva em consideração a estrutura conceitual, o domínio da experiência usada, e os valores numéricos, é importante para o estudo do crescimento da complexidade cognitiva”*(p. 50).

De acordo com o autor, os problemas, que apresentaremos a seguir, são comumente aceitos como ponto de partida no Campo Conceitual Multiplicativo.

Os problemas serão nomeados com termos que os identificam de acordo com a situação interpretativa – multiplicação, divisão quota e divisão repartição – e com o contexto. Isso facilita a localização, quando das referências a cada um deles no decorrer do trabalho.

Em todos os problemas desse grupo, objetivamos conhecer os procedimentos adotados pelos alunos para solucioná-los, a fim de, posteriormente, comparar aos procedimentos empregados para a solução dos problemas que compreendem o segundo grupo.

A informação dada junto à ilustração - *preço de cada carrinho* ou *quantidade de objetos por pacote* - seguida das demais componentes do problema, estrutura-se de maneira semelhante aos enunciados, que apresentam-se na ordem usual, em que a pergunta é colocada no final do texto. Por esse motivo, espera-se que os alunos reconheçam facilmente a operação a ser efetuada, ocorrendo, eventualmente, erros de cálculo.

### Problema 1: **Multiplicação/carrinho**

#### **Multiplicação/pacote**

##### Revenda de Carrinhos



Marca PILOTO

Preço de cada carrinho: 15 reais

1) Lucas comprou 14 carrinhos da marca PILOTO. Quanto ele pagou?

##### Empacotamento



Pacote com 32 BORRACHAS

1) Quantas BORRACHAS temos em 18 pacotes?

Os problemas exigem uma multiplicação em que é dado o valor unitário e pede-se o valor correspondente a  $n$ . Exige cálculos mentais ou escritos mais elaborados ou a utilização do algoritmo convencional. As variáveis numéricas dos problemas - na ordem das dezenas - não favorecem

o cálculo pela evocação de uma resposta anteriormente memorizada (tabuada).

**Problema 2: Divisão quota/carrinho**

**Divisão quota/pacote**

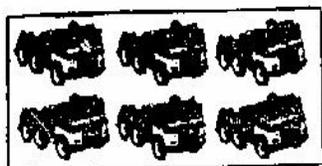
2) João tem 90 reais e quer carrinhos da marca PILOTO. Quantos carrinhos ele pode comprar?

2) Com 128 BARRACHAS, quantos pacotes podemos fazer?

Os problemas referem-se a uma divisão por quota. Podem ser resolvidos pela iteração de parcelas iguais a 15, até completar a soma 90. Observe-se que, nesta situação, a parcela 15 é fornecida, o que não ocorre na divisão por repartição. O tamanho dos números e a divisão por dois algarismos pode se constituir em um fator de dificuldade para os alunos, favorecendo cálculos por estimativas.

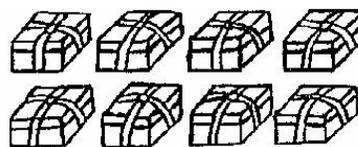
**Problema 3: Divisão repartição/carrinho**

**Divisão repartição/pacote**



Marca TRUCK

Preço de 6 carrinhos: 126 reais



Total de CANETAS em 8 pacotes: 192

3) Carlos comprou apenas um carrinho da marca TRUCK. Quanto ele pagou?

3) Quantas CANETAS há em cada pacote?

Essas situações descrevem problemas que apresentam a divisão com um significado próximo ao da linguagem natural, em que “dividir” significa, trivialmente, repartir objetos, igualmente ou não, por pessoas, por caixas, por pacotes. Nos casos acima, há congruência entre a base textual

(tenho  $x$  objetos para distribuir igualmente entre  $y$  pessoas) e a situação interpretativa (cf. Franchi, A. 1995). Os problemas pedem o cálculo do valor unitário, sendo dado o valor de  $n$  elementos. Espera-se que os alunos não encontrem dificuldades em operar com os dados dos problemas, tendo em vista que o divisor é um número formado por um só algarismo, lembrando que, para efetuar adição reiterada, o aluno deve calcular mentalmente a parcela a ser somada, repetindo o processo até encontrar o total desejado.

Considerando as constatações de inúmeras pesquisas: Ricco (1978); Carraher. T, (1988); Franchi. A, (1995); ERMEL (1997) entre outras, espera-se o uso de procedimentos não-canônicos na busca da solução de todos os problemas.

Da mesma maneira que nas questões anteriores, no segundo grupo de problemas, objetivamos conhecer os procedimentos empregados para a solução desses problemas ditos de quarta proporcional.

Apesar de tratarem-se de proporções simples, da mesma maneira que os problemas anteriores, esses apresentam um outro grau de dificuldade, tendo em vista a necessidade de combinar duas operações.

Para a elaboração dos dez problemas que compuseram esse segundo grupo, agiu-se da seguinte maneira:

Oito problemas - quatro de cada contexto - foram construídos de modo que a solução fosse facilmente encontrada tanto por meio da “estratégia escalar” como pela “estratégia valor unitário”, pois tanto os números correspondentes às grandezas de mesma variável são múltiplos entre si, bem como o seu correspondente na outra variável.

Em itens anteriores do capítulo 1, consideramos que os dados dos problemas multiplicativos têm, como referentes, grandezas diferentes, ou seja, as variáveis utilizadas tomam seus valores em categorias diferentes de universo.

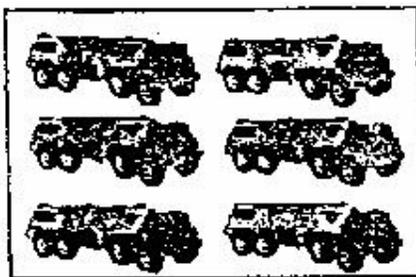
Isso posto e para efeito de análise, a seguir chamaremos esses conjuntos de *conjunto origem* e *conjunto imagem*, conforme eles representem o primeiro ou o segundo elemento do par da relação estabelecida pela constante de proporcionalidade. De modo coerente, chamamos de “problemas origem” aqueles em que os dados no texto referem-se ao conjunto origem; da mesma maneira, “problemas imagem” os que apresentam seus dados no conjunto imagem.

Os enunciados estão sempre em “duplas”, ou seja, um mesmo anúncio aparece em duas versões, diferindo somente quanto ao valor de uma variável numérica. Por esse fato, chama-se versão 1 o problema que pede a imagem de um múltiplo do termo dado no anúncio (aquele que é comum nas duas versões); e versão 2 o problema que pede a imagem de um divisor do termo dado. Isso para os chamados “problemas origem”. Analogamente, para os “problemas imagem”, versão 1, o problema em que a incógnita está no conjunto origem, cuja imagem é múltiplo do termo do anúncio, e versão 2, da mesma maneira, a incógnita encontra-se no conjunto origem, porém a imagem é um divisor do termo do anúncio.

Apenas o 5º problema de cada contexto apresenta-se “independente”, pois o termo, para o qual é pedida a respectiva imagem, não é nem múltiplo, nem divisor, em  $N$ , do termo dado no anúncio.

### Revenda de carrinhos

Problema 1: *Tanque/versão 1*



Marca TANQUE

Preço de 6 carrinhos: 78 reais

1) Carlos comprou 18 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou?

Nesse problema, os procedimentos canônicos podem partir tanto do estabelecimento de uma relação escalar entre os termos 6 e 18, na qual trabalha-se com a variável *quantidade de carrinhos*, como também entre os termos 6 e 78, em que se opera com números de variáveis distintas. Se o aluno optar pela estratégia escalar, com o procedimento canônico, o fator escalar só pode ser determinado por meio de uma divisão entre os números de carrinhos, expressa pela fórmula  $6x = 18$ . No entanto, sabe-se que procedimentos não canônicos, tipo multiplicação com fator desconhecido, fazem parte do rol de estratégias praticadas pelos alunos, sendo possível, então, que esse fator escalar seja encontrado por meio de uma “multiplicação” em que ele é previamente calculado mentalmente.

Problema 2: *Tanque/versão 2*

2) João comprou apenas 3 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou?

Os mesmos métodos canônicos, possíveis de ocorrer no problema anterior, podem ser aplicados no problema Tanque/versão 2. O fato de se pedir a imagem de 3, que é um divisor do termo dado no “anúncio”, pode se constituir num fator de dificuldade, tendo-se em vista que, dependendo do sentido do cálculo, essa fórmula determinada pode ser traduzida tanto como *por qual número eu multiplico 6 para encontrar 3?* como *por qual número multiplico 3 para encontrar 6?* Cada um desses raciocínios mobilizam cálculos diferentes. Se o aluno optar pelo primeiro, o fator escalar  $1/2$ , encontrado por meio de uma divisão, deve multiplicar o preço de 6 carros na outra variável. Se, no entanto, optar pela segunda estratégia, o fator escalar 2 passa a ser o divisor desse preço.

Problema 3: *Flash/versão 1*



Marca FLASH

Preço de 4 carrinhos: 84 reais

3) André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca FLASH, ele pode comprar?

Nesses problemas, ao contrário dos anteriores, os termos dados no problema correspondem a valores da variável: *preço dos carrinhos*. Significa que um raciocínio, que procede num cálculo com o escalar, exige, necessariamente, que o aluno comece operando com as medidas dessas grandezas. Se, no entanto, o aluno optar pela redução ao valor unitário, o procedimento canônico é, primeiramente, o cálculo do preço de um carrinho, dividindo 84 por 4. Depois, uma nova divisão é necessária para a solução do problema: 168 dividido por 21.

Problema 4: *Flash/versão 2*

4) Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca FLASH, ele pode comprar?

Uma vez calculado o valor unitário no problema anterior, ele poderá ser aplicado, da mesma maneira, para a solução do problema Flash/versão 2, tendo em vista que os valores do anúncio são os mesmos. Esse problema tem dificuldade semelhante às colocadas pelo problema Tanque/versão 2.

De maneira análoga à questão anterior, um tratamento que utiliza o fator escalar também pode ser mobilizado. Se assim for, é com os dados da variável *preço dos carrinhos* que se começa a operar.

Problema 5: *Basculante*



Marca BASCULANTE

Preço de 5 carrinhos: 130 reais

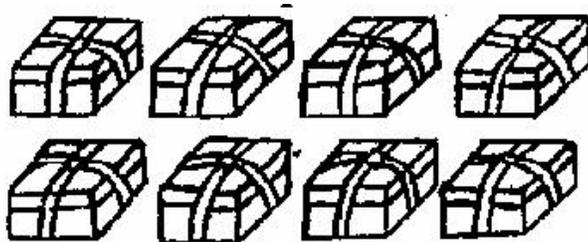
5) Quero comprar 8 carrinhos da marca BASCULANTE. Quanto devo pagar?

Como já foi mencionado, os termos dados na variável *quantidade de carrinhos* não são múltiplos em  $N$ , tornando mais difícil um cálculo que utilize o fator escalar. Devido a essa dificuldade, há viabilidade de um procedimento que pressuponha a necessidade de se reduzir ao valor unitário.

Será possível obter indicadores, por meio do tratamento dado a essa questão, se as prováveis escolhas de se trabalhar com o escalar, nos problemas anteriores, atuam como simples opção de cálculo ou por dificuldade em se trabalhar com a redução à unidade.

Problema 1: *Cadernos/versão 1*

**Empacotamento**



Com 96 CADERNOS faço 8 pacotes

1) João fez 24 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou?

Problema análogo ao *Tanque/versão 1*, diferindo quanto ao aspecto da ordem das informações no texto. A disposição dos dados no anúncio: *com 96 cadernos faço 8 pacotes*, descreve uma divisão repartição favorecendo, dessa maneira, a solução, pelo estabelecimento de relações entre os valores numéricos de grandezas diferentes. Essas informações, no texto do problema, são fornecidas na ordem em que trivialmente aparecem nos problemas verbais rotineiros de divisão; além disso, a proposição “fazer 8 pacotes com 96 cadernos (ao todo)” é ambígua (Franchi, A. 1995).

Uma vez calculado o valor unitário: *12 cadernos por pacote*, basta multiplicar por *8 pacotes*. Se, no entanto, o aluno optar pela estratégia escalar, basta reconhecer a relação de *triplo* que há entre 8 e 24. Daí, então, multiplicar o escalar 3 por 96, que é a quantidade de cadernos em 8 pacotes.

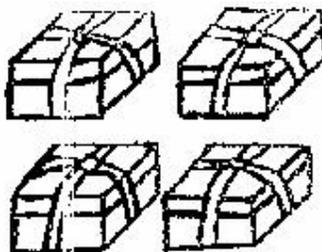
Problema 2: *Caderno/versão 2*

2) Carlos fez apenas 2 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou?

A relação presente entre os valores numéricos da variável: *quantidade de pacotes* é de quatro vezes menos, ou seja, se faz necessário reconhecer o escalar igual a 4, nesta variável, a fim de que este seja o divisor do termo na variável: *quantidade de cadernos* ( $96 \div 4$ ). Comparativamente ao problema *Tanque/versão 2*, esse aspecto pode se constituir num fator de dificuldade.

O produto de *2 pacotes* pelo valor unitário *12 cadernos por pacote* também é uma estratégia que pode ser mobilizado, principalmente se este termo for empregado para a solução do problema anterior.

Problema 3: *Agenda/versão 1*



Com 60 AGENDAS faço 4 pacotes

3) Com 120 agendas, quantos pacotes posso fazer?

Se o aluno optar por calcular a quantidade de agendas por pacote, o procedimento esperado é o quociente entre *120 agendas e 15 agendas por pacote*.

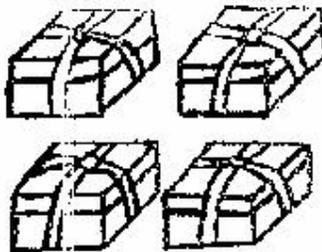
Há também a possibilidade, e é a mais esperada, de se trabalhar na variável *quantidade de agendas*, reconhecendo o fator escalar igual a 2, representando a relação de dobro entre 60 e 120 e, depois, efetuar o produto, com o termo da outra variável: 4 pacotes.

Problema 4: *Agenda/versão 2*

4) Com 30 agendas, quantos pacotes posso fazer?

As possibilidades de resolução, esperadas, são análogas às utilizadas para a solução do problema *Flash/versão 2*.

Problema 5: *Lápis*



Com 132 LÁPIS faço 4 pacotes

5) Danilo fez 7 pacotes de lápis. Quantos lápis usou?

Da mesma maneira que no problema *Basculante*, os termos dados na variável: *quantidade de pacote*, não são múltiplos entre si, o que dificulta o cálculo do valor desconhecido por meio da estratégia escalar. Há viabilidade de cálculo através da redução à unidade. No que tange à técnica operatória, o grau de dificuldade é idêntico nos dois contextos: 130 por 5 em “revenda de carrinhos” (problema: *Basculante*), e 132 por 4 em “empacotamento” (problema: *Lápis*).

## 2.7. Condições de aplicação:

Foram necessárias três aulas para aplicação do instrumento em cada classe (duas tardes). O segundo grupo de problemas - 10 questões - foi aplicado utilizando-se duas aulas consecutivas, e dividido em dois momentos, de acordo com o contexto. Foram distribuídas, primeiramente, cinco questões correspondentes a um dos contextos e à medida que cada aluno entregava as cinco questões resolvidas, recebia as outras cinco.

Para a resolução da outra parte do instrumento, correspondente às seis questões do primeiro grupo de problemas, foi utilizada apenas uma aula em cada classe.

Para a resolução do primeiro grupo de problemas, os alunos utilizaram, em média, trinta minutos e, no segundo grupo, por volta de uma hora.

Antes de entregar o instrumento, expliquei aos alunos a grande importância do trabalho. Reforcei - o que já lhes havia sido informado quando fui apresentada, por ocasião do estágio - que tratava-se de uma pesquisa.

Sabendo-se que parte dos dados dos problemas estão escritos abaixo de uma gravura que ilustra a situação, considere necessário, ao entregar os

testes, chamar a atenção dos alunos para essa ilustração e também para as informações nela contidas. Ressaltei que eles deveriam resolver com bastante atenção e individualmente, que não apagassem as respostas, que fizessem todos os rascunhos no próprio teste e que lessem com atenção as informações dos enunciados. Deixei claro que o resultado do instrumento não implicaria em “nota”, mas que esse trabalho poderia trazer contribuições para o ensino.

Esclareci também que, para que o trabalho tenha validade, eu não poderia responder perguntas tais como afirmar se está certo ou errado um determinado cálculo, nem ler os enunciados e explicá-los. Não poderia ir até a carteira do aluno, nem responder individualmente a nenhuma indagação durante a aplicação do teste. As eventuais dúvidas deveriam ser mencionadas em voz alta.

É importante registrar que, em virtude do processo de aplicação do instrumento compreender dois momentos em dias diferentes, alguns alunos, por terem faltado às aulas, deixaram de fazer um ou outro teste, não sendo considerados para o estudo. Portanto, o número de alunos mencionados por classe não corresponde aos matriculados, mas aos alunos que participaram de todos os trabalhos.

## **2.8. As entrevistas:**

Para as entrevistas foram convidados tanto os alunos que, por ocasião do “teste” escrito, privilegiaram o procedimento escalar como os que privilegiaram o uso do valor unitário. Foram incluídos também alunos que manifestaram procedimentos não canônicos e alguns que apresentaram muitas dificuldades, totalizando 18 alunos.

Nas entrevistas, partimos da solução dada pelo aluno no instrumento escrito, somente com relação às cinco questões no contexto: revenda de

carrinhos, do segundo grupo de problemas. Pretendemos, com essas entrevistas, buscar, na expressão oral dos alunos, uma descrição de seus procedimentos e a explicitação de possíveis justificativas.

As questões da entrevista se desenvolveram de acordo com as respostas dos alunos; sempre confrontando suas explicações com a solução dada. Pedia-se, primeiramente, que o aluno fizesse uma leitura do problema e, em seguida, explicasse como pensou para resolver (em geral houve necessidade de um determinado tempo para que eles pudessem recordar as idéias desenvolvidas). Eventualmente, durante suas explicações, alguns alunos sentiram necessidade de fazer novos cálculos, tentando esclarecer seus raciocínios o máximo possível.

Para 16 alunos, entre os 18 entrevistados, além dos 5 problemas acima especificados para a entrevista, foi solicitado que resolvessem também a seguinte questão: *“Com 18 reais compro 5 cadernos. A professora Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”*. Dois alunos não chegaram a essa questão porque não conseguiram explicitar seus pensamentos nem a respeito dos cinco problemas do “teste” escrito.

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISE DOS DADOS

Para a análise dos resultados, organizamos em categorias e descrevemos os procedimentos de resolução utilizados pelos alunos frente aos problemas que lhes foram propostos. Esclareço que todo o estudo desse capítulo é constituído de um levantamento de reflexões com base nos procedimentos utilizados para a solução das questões que compuseram o segundo grupo de problemas do instrumento descrito no capítulo anterior. É dessas situações que pretendemos retirar os elementos básicos que direcionarão a análise. Para esclarecer pontos específicos, retomaremos, eventualmente, os procedimentos mobilizados no tratamento das questões que compuseram o primeiro grupo de problemas - os que abordam os significados mais elementares do raciocínio multiplicativo.

No roteiro que pretendemos seguir, iremos, primeiramente, fazer algumas referências quantitativas quanto aos procedimentos dos alunos nas questões do instrumento diagnóstico e, em seguida, uma análise mais pormenorizada dos procedimentos.

### 3.1. Análise quantitativa

A fundamentação teórica exposta no capítulo 1 orientou a organização das categorias. Os resultados demonstram um quadro bastante heterogêneo de procedimentos corretos que foram classificados nas duas grandes categorias: a estratégia *valor unitário* e a estratégia *escalar*.

No cômputo geral dos dados organizados nas tabelas I, adicionamos aos procedimentos corretos também aqueles que apresentaram eventuais erros de cálculo. Os procedimentos incorretos, que classificamos como “errados”, foram aqueles que não se restringiram a meros desvios de cálculo, e os categorizamos de acordo com a frequência com que apareceram. Alguns erros, porém, não foram classificados em nenhuma categoria - conjunto de tabelas III - e serão mencionados oportunamente.

Relacionados a cada uma dessas categorias, foram levantados os erros mais significativos, tendo em vista a análise que pretendemos fazer, e desconsiderados alguns erros de difícil classificação.

Entendemos que, por meio da análise dos resultados obtidos com essa população, que se compõe de 119 alunos, podemos tirar algumas informações importantes a respeito de uma escola pública, no que se refere a habilidade dos alunos em resolver problemas multiplicativos.

Nos procedimentos corretos, consideramos tanto os canônicos - presentes na literatura e tomados como referencial para a composição dos problemas, exibidos no capítulo anterior - como os procedimentos não canônicos, os quais serão alvo de uma atenção especial.

O conjunto de tabelas I, a seguir, mostra o desempenho dos alunos em termos de acertos e erros.

## Contexto: Revenda de Carrinhos

Problemas	Acertos			Erros			
	Valor unitário	Escalar	Total	Mais Freqüentes	Sem Classificação	Em Branco	Total
6 — 78,00 18 — x	30	22	52	44	20	3	67
6 — 78,00 3 — x	38	4	42	51	16	10	77
4 — 84,00 x — 168,00	22	45	67	24	23	5	52
4 — 84,00 x — 42,00	36	38	74	16	20	9	45
5 — 130,00 8 — x	45	-	45	40	21	13	74

Flash Tanque

## Contexto: Empacotamento

Problemas	Acertos			Erros			
	Valor unitário	Escalar	Total	Mais Freqüentes	Sem Classificação	Em Branco	Total
8 — 96,00 24 — x	26	18	44	40	29	6	75
8 — 96,00 2 — x	34	-	34	51	23	11	85
4 — 60,00 x — 120,00	15	33	48	40	22	9	71
4 — 60,00 x — 30,00	27	31	58	27	23	12	62
4 — 132,00 7 — x	37	-	37	51	17	14	82

Agenda Caderno

Conjunto de tabelas I: Acertos e erros.

Podemos notar que todos os problemas tiveram um número de erros próximo ou acima de 50%. Somente os problemas *Flash/versão 1 e 2* tiveram o número de acertos superior ao número de erros.

Considerando-se apenas os problemas que facilitaram o uso do procedimento escalar, note-se que houve a ocorrência tanto dessa estratégia como a do valor unitário. De um modo geral, a redução ao valor unitário foi privilegiada. Constatações análogas a essas foram apresentadas por Schliemann (1997, p.32). Entretanto, é interessante notar que nos problemas: *Flash/versão 1 e 2* e *Agenda/versão 1 e 2* houve um maior número de resoluções utilizando-se o fator escalar.

Quanto aos problemas: *Basculante* e *Lápis* em que os valores do conjunto origem não estão na relação “é múltiplo de”, somente

procedimentos que mobilizam o valor unitário foram manifestados, o que era esperado.

Outra ocorrência que deve ser ressaltada é a utilização de procedimentos tanto canônicos como não canônicos em ambas as estratégias: “valor unitário” e “escalar”, como pode ser observado nas tabelas abaixo.

### Revenda de Carrinhos

### Empacotamento

	Problemas	Valor unitário		Escalar	
		Canônicos	Não Canônicos	Canônicos	Não Canônicos
Tanque	6 — 78,00 18 — x	27	3	12	10
	6 — 78,00 3 — x	28	10	4	-
Flash	4 — 84,00 x — 168,00	6	16	6	39
	4 — 84,00 x — 42,00	3	33	11	27
	5 — 130,00 8 — x	31	14	-	-

	Problemas	Valor unitário		Escalar	
		Canônicos	Não Canônicos	Canônicos	Não Canônicos
Caderno	8 — 96,00 24 — x	26	-	10	8
	8 — 96,00 2 — x	23	11	-	-
Agenda	4 — 60,00 x — 120,00	6	9	3	30
	4 — 60,00 x — 30,00	8	19	7	24
	4 — 132,00 7 — x	29	8	-	-

Conjunto de tabelas II: Canônicos e não canônicos.

Os procedimentos não canônicos foram fortemente usados nos problemas *Flash/versão 1 e 2* (4 --- 84, x --- 168; 4 --- 84, x --- 42) e *Agendas versão 1 e 2* (4 --- 60, x --- 120; 4 --- 60, x --- 30), tanto no uso da estratégia escalar como também na estratégia valor unitário, em ambos os contextos, como pode ser observado no conjunto de tabelas II. Esse resultado não foi previsto, uma vez que os valores numéricos das variáveis do conjunto origem<sup>1</sup> também facilitam o uso do escalar. Uma explicação possível para essa ocorrência é o fato de os preços estarem na relação “é dobro de”, enquanto que os relativos ao número de carrinhos e de pacotes (com exceção do *Tanque/versão 2*) a relação que se apresenta é “triplo de” ou “quádruplo de”. Essa exceção e o fato de não haver a ocorrência de

<sup>1</sup> Terminologia especificada no capítulo anterior à pág. 41.

procedimentos não canônicos nos problemas do tipo  $\begin{matrix} 6 \rightarrow 78 & 8 \rightarrow 96 \\ 3 \rightarrow x & 2 \rightarrow x \end{matrix}$  em ambos os contextos, não nos autoriza a fazer a afirmação acima. Nos reportaremos ao problema *Tanque/versão 2* mais adiante.

O considerável número de acertos nos problemas *Flash* e *Agendas*, por meio de métodos não canônicos, demonstra, de fato, que o domínio do raciocínio multiplicativo não é imediato na sua totalidade, mas se desenvolve em longo tempo.

*“(...) estudantes dominam algumas classes de situações antes de dominar outras; deve levar mais de dez anos para um estudante ir da mais simples às mais complexas situações. Durante esse processo, ele ou ela terá de lidar com uma variedade de coisas: situações, palavras, algoritmos e esquemas, símbolos, diagramas e gráficos... e aprenderá algumas vezes descobrindo, algumas vezes repetindo, algumas vezes representando e simbolizando, algumas vezes diferenciando, algumas vezes reduzindo coisas diferentes reciprocamente” (Vergnaud, 1994; p.46).*

De modo geral, os procedimentos não canônicos com o escalar foram mais usados em relação aos não canônicos com o valor unitário, o que é uma indicação da dificuldade de explicitação de procedimentos multiplicativos em sua fórmula canônica  $a \times b = c$ .

Observa-se também que esses procedimentos não canônicos, bem como o uso do escalar de um modo geral, aparecem empregados em número mais elevado no contexto da *Revenda de carrinhos*. Autores como Franchi, A. (1995) e Nunes, T. (1996), supõem que situações de compra e venda, por serem mais familiares, são mais facilmente resolvidas corretamente.

*“Parece ser uma suposição razoável a de que a relação quantidade-preço seja um contexto concebido como envolvendo cálculo e bem entendido na vida quotidiana”* (Nunes, 1996, p. 171).

Além disso, constataram um significativo uso de procedimentos não canônicos na resolução de problemas envolvendo cálculos de preços, o que, de certo modo, colaborou para a obtenção de respostas corretas.

### 3.1.1. Os erros

Tendo em vista a ocorrência de um número elevado de erros, convém fazer uma breve reflexão sobre os erros mais freqüentes. Embora analisar os erros não seja foco principal desse trabalho, é interessante nos referirmos a alguns procedimentos utilizados pelas crianças, *que não conduzem, necessariamente, a solução dos problemas abordados. Essas regras não algorítmicas não são menos importantes para o psicólogo e para o professor que procuram compreender aquilo que a criança faz e onde está.* (Vergnaud, 1981; p.210).

Em virtude dos erros manifestados pelos alunos apresentarem uma relativa uniformidade, tornou-se possível organizá-los em categorias. As estratégias que levaram aos erros mais freqüentes podem ser assim classificadas:

(a) Produto dos termos na mesma variável:  $n_1 \times n_2$  ou  $f(n_1) \times f(n_2)$ .

(b) Quociente entre os termos extremos:  $f(n_1) \div n_2$  ou  $f(n_2) \div n_1$ .

(c) Produto entre os extremos:  $n_2 \times f(n_1)$  ou  $n_1 \times f(n_2)$ .

(d) Quociente entre os termos da mesma variável:

$$n_1 \div n_2 ; n_2 \div n_1 ; f(n_1) \div f(n_2) \text{ ou } f(n_2) \div f(n_1).$$

(e) Cálculo do valor unitário:  $f(n_1) \div n_1$ .

A tabela, a seguir, se refere ao quantitativo dos erros em cada categoria definida acima.

### Revenda de Carrinhos

Problemas	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Outros erros
6 — 78,00 18 — x	13	-	28	-	3	
6 — 78,00 3 — x	7	24	17	-	1	78 x 6 (1 aluno) 78 x 2 (1 aluno)
4 — 84,00 x — 168,00	5	7	4	5	2	168 x 21 (1 aluno)
4 — 84,00 x — 42,00	3	6	4	2	1	
5 — 130,00 8 — x	4	2	26	-	4	130 x 5 (2 alunos) 130 x 3 (2 alunos)

### Empacotamento

Problemas	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Outros erros
8 — 96,00 24 — x	13	5	14	4	4	
8 — 96,00 2 — x	13	10	17	7	4	
4 — 60,00 x — 120,00	5	18	10	2	2	120 x 15 (3 alunos)
4 — 60,00 x — 30,00	7	6	12	-	1	30 x 15 (1 aluno)
4 — 132,00 7 — x	6	7	29	2	4	3 x 132 (3 alunos)

Conjunto de tabelas III: Categorias dos erros.

Observe-se que um número elevado de alunos multiplicou os termos da mesma variável (6 carrinhos x 18 carrinhos para encontrar “preço de carrinhos”; 8 pacotes x 24 pacotes para encontrar “quantidade de cadernos”; etc...). Esse procedimento evidencia que esses alunos têm dificuldades em compreender a noção fundamental do raciocínio multiplicativo, que consiste no reconhecimento em operar com os valores de variáveis diferentes, de acordo com o modelo conceitual de multiplicação assumido à página 23.

O procedimento (b), em que o aluno efetua uma divisão entre os termos extremos, consiste em uma estratégia dirigida por uma “falsa relação” entre os dados. Pois o termo que corresponde a  $f(n_1)$  é  $n_1$  e não  $n_2$ .

Faremos referências aos procedimentos (c), (d) e (e) nos próximos itens, por estarem relacionados com as estratégias valor unitário e escalar.

A respeito do problema *Flash/versão 2*:  $\begin{matrix} 4 \rightarrow 84 \\ x \rightarrow 42 \end{matrix}$ , é necessário registrar

que, pelo fato de o fator escalar determinado na variável “custo” por meio da divisão  $84 \div 42$  coincidir com o resultado do problema, dificultou avaliar se a resposta: *2 carrinhos*, dada por alguns alunos, provém de operações em ambas as variáveis ou se refere unicamente ao quociente da divisão indicada. A resposta foi considerada correta por meio das entrevistas ou pela análise do procedimento utilizado para a solução desse mesmo problema na versão 1.

Outros erros, que não foram classificados nessas cinco categorias indicadas, estão descritos na sétima coluna do conjunto de tabelas III.

Apresento, a seguir, alguns protocolos exemplificando erros de difícil classificação e que, portanto, não se encontram em nenhuma das categorias que foram definidas para classificar os erros.

Com 96 CADERNOS faço 8 pacotes

1) João fez 24 pacotes de cadernos.

Quantos cadernos usou? 32

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \\ + 72 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ - 36 \\ \hline 38 \end{array}$$

Elba - 5ª F

1) João fez 24 pacotes de cadernos.

Quantos cadernos usou? 12

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ \hline 12 \end{array}$$

Vitor - 5ª G

1) João fez 24 pacotes de cadernos.

Quantos cadernos usou? 240

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \\ + 72 \\ \hline 144 \\ + 144 \\ \hline 288 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 10 \\ \hline 240 \end{array}$$

Luis - 5ª G

Marca FLASH  
Preço de 4 cartuchos: 84 reais

3) André tem 168 reais. Quantos cartuchos da marca

FLASH ele pode comprar? 952

$$\begin{array}{r} 168 \\ 168 \\ \hline 336 \\ 336 \\ \hline 672 \\ 672 \\ \hline 1344 \\ 1344 \\ \hline 2688 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ 168 \\ \hline 336 \\ 336 \\ \hline 672 \\ 672 \\ \hline 1344 \\ 1344 \\ \hline 2688 \end{array}$$

Everton - 5ª E

Marca TANQUE  
Preço de 6 cartuchos: 78 reais

2) João começou apenas 3 cartuchos da marca TANQUE.

Quanto ele pagou? 75

$$\begin{array}{r} 48 \\ -3 \\ \hline 45 \\ 45 \\ \hline 90 \\ 90 \\ \hline 180 \end{array}$$

Raphael - 5ª E

### 3.2. Análise qualitativa

Faremos uma análise qualitativa dos procedimentos, visando buscar elementos para compreender os processos cognitivos mobilizados, evidenciando níveis de desenvolvimento com relação ao domínio da operação multiplicação.

O fato de os procedimentos apresentarem uma relativa uniformidade tornou possível classificá-los em categorias, conforme indicação no início deste capítulo. Assim, dedicamos a primeira parte deste bloco para uma especificação da estratégia escalar e, a segunda, para a estratégia valor unitário. Em cada item, definimos o que se entende por cada uma dessas categorias, seguido de uma tabela apresentando as subcategorias, com seus respectivos dados quantitativos. Enfim, a descrição dos procedimentos de resolução de problemas executados pelos alunos, referentes a cada subcategoria<sup>1</sup>, evidenciando as relações estabelecidas e analisando-as, com base nos pronunciamentos dos alunos por ocasião das entrevistas.

<sup>1</sup> Para a estratégia "Escalar" e "Valor Unitário" definimos as subcategorias: *Multiplicação ou Divisão, Multiplicação com Termo Desconhecido e Iteração de Unidades.*

### 3.2.1. Estratégia escalar

Vimos, no capítulo 2, que os problemas do segundo grupo podem ser expressos por uma correspondência entre duas quantidades extensivas, ou seja, por uma relação quaternária que se apresenta na forma: se  $n_1$  corresponde a  $x_1$ , então  $n_2$  corresponde a  $x_2$ .

Como foi mencionado, os valores numéricos dos termos conhecidos nos problemas favorecem tanto a estratégia escalar como a estratégia do valor unitário, pois:

- a) dados  $n_1$  e  $n_2$ , existe  $n \in \mathbb{N}/n_1 = n \times n_2$  ou  $n_2 = n \times n_1$ .
- b)  $f(1)$  é representado por um número natural.

É preciso registrar que o quinto problema de cada contexto – *Basculante* (5-----130, 8----?) e *Lápis* (4 ----136, 7----?) será analisado separadamente, por exigir um tratamento, preferentemente, por redução ao valor unitário, pois a condição a) anterior, não é satisfeita.

A descrição e análise, a seguir, mostra como o emprego do fator escalar se efetua de maneiras distintas, revelando diferentes níveis de desenvolvimento dos alunos no domínio da multiplicação.

Para a determinação do escalar, o aluno deve verificar que relação se estabelece entre os valores da mesma variável, lembrando que os problemas

se apresentam na forma 
$$\begin{matrix} n_1 \rightarrow f(n_1) \\ n_2 \rightarrow f(n_2) \end{matrix}$$
 com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 \neq 1$  e  $n_2 \neq 1$ , em que um dos

termos da proporção é desconhecido. O aluno opera entre os termos de uma mesma variável, determinando o fator que permite transportar a correspondência de um par de números para a correspondência entre outro par de números. Esse fator não tem referente, sendo chamado de fator escalar.

## Revenda de carrinhos

	Problemas	Estratégia Escalar		
		Multiplicação ou Divisão	Multiplicação c/ Termo Desconhecido	Iteração de Unidades
Tanque	6 — 78,00 18 — x	12	-	10
	6 — 78,00 3 — x	4	-	-
Flash	4 — 84,00 x — 168,00	6	17	22
	4 — 84,00 x — 42,00	11	11	16
	5 — 130,00 8 — x	-	-	-

## Empacotamento

	Problemas	Estratégia Escalar		
		Multiplicação ou Divisão	Multiplicação c/ Termo Desconhecido	Iteração de Unidades
Caderno	8 — 96,00 24 — x	10	-	8
	8 — 96,00 2 — x	-	-	-
Agenda	4 — 60,00 x — 120,00	3	12	18
	4 — 60,00 x — 30,00	7	12	12
	4 — 132,00 7 — x	-	-	-

Conjunto de tabelas IV: Subcategorias da estratégia escalar.

Nos problemas origem, o escalar pode ser determinado a partir de uma divisão entre os valores que representam o número de carrinhos comprados (contexto revenda de carrinhos) ou o número de pacotes (contexto empacotamento). Da mesma maneira, nos problemas imagem, operando com os preços dos carrinhos (contexto revenda de carrinhos) ou com a quantidade de objetos empacotados (contexto empacotamento).

Dependendo da situação proposta – se é pedida a relação para um par de números maiores ou menores que daquele par cuja relação é dada no enunciado – o fator escalar determinado é interpretado como o divisor ou o multiplicador do termo conhecido na outra variável.

Nota-se nos protocolos dos alunos que dificilmente as operações com os dados numéricos do problema origem são evidenciadas. Exemplificando, Renata opera com o escalar diretamente no conjunto imagem, não explicitando o modo pelo qual esse escalar foi determinado, pois tanto no problema *Tanque/versão 1* quanto no problema *Tanque/versão 2*, o escalar é expresso operando com os números maiores, adequado à natureza do problema: multiplicador quando  $n_1 < n_2$  ou divisor quando  $n_1 > n_2$ .

Marca TANQUE.  
Preço de 6 carrinhos: 78 reais

1) Carlos comprou 18 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou? 234,00

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 234,00 \end{array}$$

2) João comprou apenas 3 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou? 39,00

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 23 \\ 00 \end{array}$$

Renata - 5ª série D

Poucos alunos explicitaram as operações efetuadas com os termos em ambas as variáveis. Marciel registrou, no problema *Agenda/versão 1*, as operações tanto para determinar o operador escalar fazendo:  $f(n_2)/(n_1)$  como também para encontrar a quantidade de pacotes com 60 agendas. Já no problema *Agenda/versão 2*, operou somente com os números do conjunto imagem.

Com 60 AGENDAS faço 4 pacotes

3) Com 120 agendas quantos pacotes posso fazer? 8 4) Com 30 agendas quantos pacotes posso fazer? 2

$$\begin{array}{r} 120 \\ \div 60 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \div 30 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \div 30 \\ \hline 2 \end{array}$$

Marciel - 5ª série B

Com referência aos problemas imagem, alguns alunos efetuaram a divisão entre os termos da mesma variável, mas não realizaram a transposição do fator escalar para a outra variável. Esse comportamento demonstra que o aluno faz uma leitura superficial do texto e não domina todas as relações presentes no conjunto dos dados.

Vimos, no cálculo de Marciel, a operação formal para determinar o escalar  $60 \times a = 120$ . Entretanto, além dessa forma canônica, definiu-se

também uma outra subcategoria, na qual esse fator aparece inserido numa operação, a "multiplicação". Ao invés de  $a = f(n_2) \div f(n_1)$ , os alunos efetuaram:  $a \times f(n_1) = f(n_2)$  ou  $a \times f(n_2) = f(n_1)$ .

Ou seja, o fator escalar  $\underline{a}$ , que se quer encontrar, é previamente determinado por meio de cálculo mental e aparece como termo de uma "multiplicação". Essa operação tem um caráter especial, pois é do tipo: *multiplicação com termo desconhecido* – multiplicação cujo fator desconhecido está inserido na operação (nesse momento do cálculo, o escalar  $\underline{a}$  é o valor desconhecido).

Esse procedimento não canônico é evidenciado tanto na estratégia *escalar* como na estratégia *valor unitário*, substituindo a divisão por quota.

Nos problemas origem, também é possível notar esse raciocínio. Para determinar o escalar, os termos do problema *Tanque/versão 1* sugerem a fórmula multiplicativa:  $6 \times a = 18$ , exigindo, portanto, uma divisão. Alguns alunos efetuam uma multiplicação para a qual o multiplicador é o próprio termo desconhecido. Isso só se tornou evidente nos discursos dos alunos nas entrevistas, como demonstra Roger que, ao ser indagado sobre como pensou para resolver o problema, responde:

- Como 18 dá 3 vezes 6, não é? Então eu peguei e fiz 3 vezes 6; 78 vezes 3.

Maria Fernanda também explica seu raciocínio:

- Porque 6 carrinhos custam 78. Isso quer dizer que 18 são 3 vezes 6, então eu multipliquei 78 vezes 3.

Hugo resolve e explica sua resolução por meio do valor unitário e, quando solicitado sobre uma outra forma de resolver o problema, responde:

- Eu... é... 78 dividi por 3.

- Por quê? (O aluno não responde). Vamos ver, o que é 78?

- É quanto custam 6 carrinhos.

- E eu quero saber o preço de...

- 18 carrinhos. 3 vezes 6 é igual a 18, 3 vezes o preço de 6 carrinhos dá 234 que é o resultado.

Fernando também resolve aplicando o valor unitário. Para resolver de outra maneira, sugere:

- Faz vezes 3.
- Por quê?
- (O aluno resolve no papel). Eu peguei fiz 78 vezes 3, porque se cada carrinho é 78 reais...).

- Cada carrinho?
- É 6 carrinhos é 78 reais, eu fiz vezes 3 que dava 18 e deu o resultado certo.
- Tá, você multiplicou 78 por 3. Por que 3 e não 4, 5 ou 6?
- Porque 3 vezes 6 é que dá 18.

A elaboração dos alunos deixa claro seu pensamento multiplicativo. Além disso, é importante ressaltar o estabelecimento da correspondência entre os dados de uma variável e outra: "18 dá 3 vezes 6, então 78 vezes 3", evidenciado nas falas dos alunos.

Observe-se que, em alguns casos, a multiplicação com termo desconhecido passa pela adição repetida de onde se origina um dos fatores – o escalar. Os cálculos efetuados por Daniely, em sua entrevista, ilustram essa passagem.

<p>Marca FLASH Preço de 4 carrinhos. 84 reais</p> <p>3) André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca FLASH ele pode comprar?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 84 \text{ R\\$} \\ \times 2 \\ \hline 168 \text{ R\\$} \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 84 \text{ R\\$} \\ + 84 \text{ R\\$} \\ \hline 168 \text{ R\\$} \end{array}</math> </div> </div>	<p>Durante a entrevista</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 84 \\ \times 2 \\ \hline 168 \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 168 \\ \div 4 \\ \hline 42 \end{array}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">\begin{array}{r} 84 \\ + 84 \\ \hline 168 \end{array}</math> </div> </div>
---	--

A aluna lê o problema e explica:

- Coloquei 84 reais vezes 2.
- Tá, mas eu quero saber o que você pensou pra resolver assim. Veja: 4 carrinhos custam 84 reais. O que você quer saber?

- *Quantos dá pra comprar com 168 reais.*
- Isso. Você tem 168 reais e quer saber quantos carrinhos pode comprar. Então, você fez o quê?
- *(Pausa). Primeiro eu dividi 168 por 4. Depois eu coloquei 84 mais 84, depois 84 vezes 2. Aí deu 2 vezes.*
- Daí, o que você concluiu?
- *(Pausa). Porque cada preço de 4 carrinhos é 84, aí 4 carrinhos mais 4 dá 8, e 84 mais 84 dá 168.*

No início da entrevista, a aluna se refere à última operação efetuada: *84 vezes 2*. Em seguida, para responder às minhas indagações, efetua outros cálculos a cada pausa, incluindo alguns desnecessários como:  $168 \div 4$ . Finaliza restringindo-se aos cálculos feitos por ocasião do teste, adição nas duas variáveis, descrevendo com clareza a correspondência entre elas.

Uma categoria importante de respostas, em termos de manifestação dos processos cognitivos do aluno, é o mecanismo de resolução por meio da adição de parcelas reiteradas, que foi empregado pelos alunos para a solução de todos os problemas e, dependendo da situação, foi utilizado para a determinação do escalar (nos problemas origem) e para o cálculo da solução do problema (nos problemas imagem). Ressalte-se que, na estratégia escalar, esse procedimento foi mais freqüente nos problemas imagem, naturalmente porque se faz necessária uma divisão por quota e, por isso, é facilmente transformada em uma adição. É evidente que, quando se trabalha com o escalar, todos os problemas favorecem um raciocínio na configuração de divisão por quota, tendo em vista que se opera com os dados da mesma variável. Mas, é provável que essa freqüência em operar por meio de parcelas reiteradas, tenha ocorrido devido a necessidade de explicitar a operação feita com os dados da variável imagem, pois, tratando-

se de números maiores, a divisão com os termos dessa variável tem um grau de dificuldade maior que a operação com os termos da variável origem.

Classificados na subcategoria *interação de unidades* encontram-se os procedimentos para os quais a estratégia escalar é utilizada com o uso de adições sucessivas, considerando-se um valor em uma das variáveis e fazendo corresponder às transformações dos valores correspondentes aos termos na outra variável, como mostram os protocolos abaixo:

Com 96 CADERNOS faço 8 pacotes

1) João fez 24 pacotes de cadernos.  
Quantos cadernos usou? 288 cadernos

$$\begin{array}{r} +8 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ +96 \\ +96 \\ +96 \\ +96 \\ +96 \\ +96 \\ +96 \\ \hline 288 \end{array}$$

Priscila - 5ª série D

Com 60 AGENDAS faço 4 pacotes

3) Com 120 agendas quantos pacotes posso fazer? 8 pacotes

$$\begin{array}{r} 13 \\ +3 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \times 4 \\ +6 \times 4 \\ \hline 120 \end{array}$$

4) Com 30 agendas quantos pacotes posso fazer? 2

$$\begin{array}{r} 60 \\ -20 \\ \hline 30 \end{array}$$

Diego - 5ª série G

Os alunos utilizaram adição repetida nas duas variáveis, deixando claro a correspondência coordenada por essa operação entre o número de unidades a serem somadas na primeira e na segunda variável. Eles operam com as quantidades compostas e há existência da relação de proporcionalidade entre os termos de cada uma das variáveis. Entretanto, essa relação ainda não é concebida, pelos alunos, como uma relação para a qual um desses termos é *n vezes maior* que o outro. Os alunos não conseguem explicitar o fator correspondente ao número de grupos - o escalar. Entendemos que, nesse estágio, o significado atribuído pelo aluno à expressão:  $a \times b$ , ainda é:  $a + a + \dots + a$ , (b vezes).

A fala de Alex, por ocasião da entrevista, evidencia essa etapa. Início pedindo que explique sua resolução após ler o problema:

- *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais”. Ele comprou 18 carrinhos e queria saber quanto ele pagou. Aí tinha que fazer 78 vezes 18 pra chegar no resultado.*

Intervi, perguntando:

- 78 reais é o preço de quantos carrinhos?
- *78 é ... de 6 carrinhos.*
- Então você multiplicou o preço de 6 carrinhos 18 vezes. Você acha que está correto?

O aluno pensa, corrige e explica-se:

- *Eu somei 78 mais 78, deu 156. Agora, estou perguntando o resultado mais 78.*

- Por que você optou por somar 78 mais 78 mais 78?
- *Porque aqui é 18 carrinhos. É... 6 mais 6, 12 mais 6 é 18. Ai eu somei 78 mais 78, deu 156, aí esse resultado mais 78, deu 234.*

Provoquei:

- O que eu estou querendo saber é por que você somou o 78 três vezes e não quatro ou cinco. Por que 3 vezes?

- *Porque aqui é 18 carrinhos e aqui é 6. É... 6 mais 6 é 12, com mais 6, é 18, aí dá 3.*

Alex organiza elementos para resolver o problema. Ele coordena a variação dos dados nas duas variáveis. Entretanto, não consegue utilizar o escalar como integrante da operação, ou seja, como multiplicador. Entendemos que, para o aluno que encontra-se nesse nível – etapa que antecede a compreensão formal do conceito da multiplicação – não há clareza quanto à função do escalar. Nessa etapa, o escalar não atua como um termo da multiplicação, entretanto, age, da mesma maneira, como uma

entidade que determina a quantidade de “grupos” que devem ser somados em cada variável.

O que diferencia os procedimentos pertencentes à subcategoria *Iteração de unidades* daqueles classificados como *Multiplicação com termo desconhecido* é que, nos primeiros, o escalar não é utilizado explicitamente em nenhuma das operações efetuadas, enquanto que, na segunda subcategoria, ele é evidenciado ocupando sua função, de termo multiplicador na operação.

Como é possível observar nas explicações dos alunos, citadas na página 62 (18 dá 3 vezes 6, então 78 vezes 3), o aluno explicita o escalar como multiplicador nas duas variáveis (sendo que na variável origem, usa multiplicação com termo desconhecido), ou seja, a operação efetivada entre os números de uma variável traduz-se diretamente pela pergunta: por quanto devo multiplicar  $n_1$  para encontrar  $n_2$ .

$$\times 3 \left( \begin{array}{l} 6 \rightarrow 78 \\ 18 \rightarrow x \end{array} \right) \times 3$$

Esse procedimento foi bastante privilegiado, entretanto, ele não se aplica, com sucesso, nos casos em que as relações se estabelecem de um número maior para um menor, ou seja,  $n_1 > n_2$ . Exemplifico a dificuldade no uso dessa estratégia, no problema *Tanque/versão 2*.

$$\times 2 \left( \begin{array}{l} 6 \rightarrow 78 \\ 3 \rightarrow x \end{array} \right) \times 2$$

Nesse tipo de problema é necessário inverter a orientação do escalar multiplicativo em ambas as variáveis. Neste caso, a operação efetivada traduz-se: por quanto devo multiplicar 6 para encontrar 3. O aluno muda a

ordem de  $n_1$  e  $n_2$  na questão, ou muda a operação de multiplicação pela divisão. Os alunos optaram por explicitar o escalar no conjunto origem como multiplicador ( $3 \times 2 = 6$ ), e um raciocínio correspondente no conjunto imagem seria “quantas vezes 2 é igual a 78?”, o que corresponde a uma divisão. Mas, acabam confundidos e alguns alunos operam:  $78 \times 2$  e outros  $78 \div 3$ , como demonstram nas entrevistas:

Marca TANQUE  
Preço de 6 carrinhos: 78 reais

2) João comprou apenas 3 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou? 26 reais

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 3 \\ \hline 18 \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

Tiago Regaz - 5ª série G

2) João comprou apenas 3 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou? 156

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline 156 \end{array}$$

Vanessa - 5ª série E

Tiago lê o problema e explica como resolveu:

- 78 dividido por 3, deu 26. Agora tenho que fazer outra conta?
- Por que você dividiu 78 por 3? Por que 3?
- Porque 78 é os três carrinhos e dá vinte e seis. Porque a metade de 6 é 3.
- A metade de 6 é 3, e daí?
- E daí que 3 é a metade de 6, aí eu fiz 78 vezes 3 pra ver quanto é que dá.
- Tá, você já falou que 3 é a metade de 6. E os 78 reais?
- Eu quero dividir pelos 3, pra ver quanto que vai dá os 3 carrinhos.
- Veja esse esquema. Você tem aqui carrinhos e aqui preços (aponto as duas colunas correspondentes às variáveis). Então, 6 carrinhos custam 78 e 3 vão custar quanto?
- (Pausa). Não sei fazer.

Tiago demonstra compreender a relação que se estabelece no conjunto origem do problema quando menciona: *a metade de 6 é 3*. Porém, não associa o termo *metade* à operação de divisão por 2. Dos alunos que não conseguiram resolver corretamente essa questão, 31% efetuaram a operação:  $78 \div 3$ .

Erro como o de Vanessa, ilustrado no protocolo anterior, não foi comum, mas é muito interessante observar que a aluna expressa o escalar por meio de um procedimento canônico, mas confunde-se, trocando a operação a ser efetuada na outra variável.

Um desvio no tratamento dos dados dos problemas, que se faz resistente para alguns alunos, caracterizado pela utilização de relações aditivas em lugar de relações multiplicativas, consiste na idéia de aumento e diminuição ligada à adição e a subtração respectivamente. Mas esta dificuldade, que está ligada ao uso incorreto do raciocínio aditivo, é prejudicial e difere do procedimento *iteração de unidades*, que também utiliza relações aditivas, conforme mencionado na página 65, que como vimos, é pertinente. Nas entrevistas citadas a seguir, observa-se claramente que os alunos concluem que a operação, a ser efetuada, deverá ser de “menos”, quando pergunto se o preço será maior ou menor, sabendo-se que a quantidade de objetos diminui.

Janaina lê o problema *Tanque/ versão 2 e*, antes de minha intervenção, sugeriu primeiramente multiplicar 3 por 78, em seguida subtraiu 3 de 78, demonstrando nenhum reconhecimento das relações presentes entre os dados.

- Veja o esquema, olha: eu tenho aqui 6 carrinhos, que custam ...
- 78 reais.
- E quero saber o preço de...
- 3

- 3 carrinhos. Vão custar mais ou menos?
- *Menos.*
- Menos. Esse esquema ajuda na resolução?
- *Sim. (Pausa). Pra mim a conta é de menos.*
- Sem falar na conta. Você entende o que está escrito. O que está no esquema. Fale pra mim.

- *(Pausa). 78 é quanto ele deve pagar por 6 carrinhos. Quer saber o preço de 3 carrinhos. (Pausa). Não sei.*

Há outros alunos, em quantidade maior, que, nesse mesmo sentido, fazem uso dessas relações aditivas. Mas, podemos observar nas entrevistas a seguir que, ao contrário do exemplo anterior, esses alunos conseguem perceber que existe uma regularidade na variação dos termos das variáveis envolvidas, tendo dificuldade, no entanto, em operá-las.

Depois de Diego ler o problema *Tanque/versão 2* e tentar, sem sucesso, resolvê-lo por meio de estimativas, apresentei-lhe os dados do problema organizados no esquema de flechas:

-Veja esse esquema: 6 carrinhos (aqui é a coluna de carrinhos, aqui a coluna dos preços). Então 6 carrinhos custam 78 reais, 3 carrinhos vão custar mais ou menos que 78 reais?

- *Menos.*
- Esse esquema facilita a resolução pra você?
- *A conta poderia ser de menos, então?*
- Por que de menos?
- *Porque já que 6 são 78 reais, eu quero só 3, então, eu tenho que achar o que é menos de 78.*

- *Sim, mas de que forma você vai achar esse preço de 3 carrinhos?*

- *(O aluno resolve no papel). Eu fiz assim: 78 menos 30, aí deu o resultado 48 reais.*

- Mas, por que menos 30? Por que você escolheu 30 pra subtrair?

- *Eu estou fazendo tipo um teste. Eu estou tentando achar que dinheiro dá. Aí eu vou fazer outra conta. (Pausa). Posso fazer também outros tipos de contas?*

- *Que contas?*

- *Por exemplo, de "mais"? Pra achar esse resultado aqui? (aponta 78 reais).*

E o aluno continua – como no início da entrevista – tentando somar valores cujo total seja 78.

Raciocínio análogo é possível observar na fala de Tiago Alves, que lê o problema e explica:

- *"João comprou seis carrinhos da marca Tanque, preço dos 6 carrinhos: 78 reais. (Pausa). Eu tinha 6 carrinhos, ia tirar 3. Aí, eu tenho que tirar o resultado de 3 carrinhos, pra responder. (Pausa). Eu fiz 34 mais 34, não deu 78. E se eu colocar 44 mais 44 vai dá mais. Agora pra dá 78, não sei como é que faz.*

- *Por que você escolheu esses números pra somar?*

- *Porque eu pensava que iam dá esses resultados aqui. Só que não deu esse resultado.*

- *O que você quer mesmo?*

- *78. O preço de 6 carrinhos.*

- *Eu não estou entendendo porque você está somando números repetidos, pra chegar no 78.*

- *Eu tô fazendo essas somas porque eu quero a metade de 78, que é 3 carrinhos.*

- *Ah! Agora eu entendi. A metade de 78 é o preço de 3 carrinhos. Muito bem, e qual seria a resposta, então?*

- *34.*

Da mesma maneira, Thales também demonstra conhecer a qualidade da relação que se apresenta – a correspondência entre as duas variáveis – tendo dificuldade, somente, em quantificar os dados em função dessa correspondência corretamente reconhecida.

- "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais". Então, aí tem que fazer... deixa eu ver...

- Esse você vai fazer agora, porque estava em branco.

- (O aluno resolve no papel). Eu estou tentando fazer a conta que eu ainda não consegui.

- Veja o problema aqui.

- João comprou apenas 3 carrinhos.

- O que o problema quer saber?

- O preço de 3 carrinhos.

- E o que o problema está dizendo?

- O preço de 6 carrinhos.

- Então você sabe o preço de 6 carrinhos que é 78 reais e quer o preço de...

- De 3.

- E o que você fez, aqui?

- Eu fiz 17 mais 17, aí é 7 mais 7, é 14.

- Porque você somou 17 mais 17? Por que tentou isso?

- Porque eu tentei, pra ver se dá o resultado de 78.

- Então você está somando números pra chegar no 78. E esses números têm que ser iguais?

- Não.

- E se uma dessas somas der 78, o que você vai concluir?

- O resultado é esse.

- Qual vai ser o resultado?

- Vai ser metade desse daqui (O aluno aponta os 78 reais).

- Como, não entendi, qual será o resultado do problema?

- De... do que, olha: 6 carrinhos são 78, então 3 tem que ser a metade de 78.

- E você não sabe achar essa metade de 78?

- Eu estou tentando achar.

- Através da soma?
- *Sim (E o aluno continua somando valores).*

Nota-se que o maior fator de erros nos problemas para os quais  $n_1 > n_2$ , em relação aos casos anteriores em que  $n_2 > n_1$ , é, especificamente, o reconhecimento do fator escalar e a operação de divisão no conjunto imagem. Se faz necessária, portanto, melhor investigação no fato de os números favorecerem de imediato o cálculo mental em uma das variáveis, dificultando a identificação do próprio escalar ou a operação que deve ser feita para determiná-lo.

### 3.2.2. Estratégia valor unitário

Início a análise dos procedimentos dos alunos que fizeram uso do valor unitário.

#### Revenda de Carrinhos

	Problemas	Estratégia Valor Unitário		
		Multiplicação ou Divisão	Multiplicação c/ Termo Desconhecido	Iteração de Unidades
Tanque	6 — 78,00 18 — x	27	-	3
	6 — 78,00 3 — x	28	-	10
Flash	4 — 84,00 x — 168,00	6	9	7
	4 — 84,00 x — 42,00	3	16	17
	5 — 130,00 8 — x	31	-	14

#### Empacotamento

	Problemas	Estratégia Valor Unitário		
		Multiplicação ou Divisão	Multiplicação c/ Termo Desconhecido	Iteração de Unidades
Caderno	8 — 96,00 24 — x	26	-	-
	8 — 96,00 2 — x	23	-	11
Agenda	4 — 60,00 x — 120,00	6	6	3
	4 — 60,00 x — 30,00	8	11	8
	4 — 132,00 7 — x	29	-	8

Conjunto de tabelas V: Subcategorias da estratégia valor unitário.

Pelo fato de optar, nos testes em foco, por problemas multiplicativos, sem que nenhum dos termos das proporções apresentadas, conhecido ou não, seja igual a 1, a estratégia de cálculo a partir da redução ao valor unitário já era esperada.

A solução dos problemas por meio da estratégia valor unitário constitui-se de duas fases: a primeira fase consiste na determinação do

termo correspondente a unidade, é o cálculo do valor unitário em si, a determinação da quantidade composta.

Depois, uma vez encontrado o valor unitário, a segunda fase consiste na determinação da incógnita do problema.

A fase inicial, de determinação do valor unitário, aparece, nos protocolos dos alunos, determinada por meio de estimativa ou por procedimento canônico.

A determinação do valor unitário por meio de estimativa consiste em tentativas de cálculo através de ensaio e erro. No problema abaixo, o aluno faz adições reiteradas a fim de encontrar o valor unitário que satisfaz:  $6 \cdot x = 78$ , porém, nesse processo, alguns alunos fracassam, como pode-se observar no protocolo de Rodrigo. Além disso, note-se que o aluno não executa a segunda fase de cálculo para a solução do problema, que pede a quantidade de cadernos em dois pacotes, dando como solução o próprio “valor unitário”. Esse tipo de erro será comentado mais adiante.

Com 96 CADERNOS faço 8 pacotes  
 2) Carlos fez apenas 2 pacotes de cadernos.  
 Quantos cadernos usou? 13 cadernos

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 2 \\
 14 \quad 13 \\
 + 14 \quad 13 \\
 \hline
 112 \quad 94
 \end{array}$$

Rodrigo - 5ª série E

Os alunos que não utilizaram cálculos por estimativas, para determinar o valor unitário, o fizeram pela forma usual:  $f(1) = f(n_1)/n_1$ , ou seja, através da divisão entre os termos de variáveis diferentes.

Alguns alunos utilizaram o procedimento canônico nas duas fases de cálculo dos problemas, como é o caso de Natália que, nos problemas *Agenda/versão 1 e 2*, calcula o valor unitário pela forma usual e, uma vez calculado esse valor, pode-se determinar qualquer termo por meio de uma divisão em que  $n_2 = f(n_2)/f(1)$ . Isso ocorre nos problemas imagem. Bruno reduziu ao valor unitário, da mesma maneira, nos problemas origem: *Cadernos/versão 1 e 2*, nos quais determina-se qualquer valor por meio de uma multiplicação, em que  $f(n_2) = f(1) \times n_2$ .

Com 60 AGENDAS faço 4 pacotes

3) Com 120 agendas quantos pacotes posso fazer? 8

$$\begin{array}{r} 60 \overline{)120} \\ \underline{20} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \overline{)1200} \\ \underline{120} \phantom{0} \\ 000 \phantom{0} \end{array}$$

4) Com 30 agendas quantos pacotes posso fazer? 2

$$\begin{array}{r} 60 \overline{)120} \\ \underline{20} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{)120} \\ \underline{60} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

Natália - 5ª série G

Com 96 CADERNOS faço 8 pacotes

1) João fez 24 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou? 24

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)24} \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 16 \phantom{0} \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{)24} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

2) Carlos fez apenas 2 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou? 24

$$\begin{array}{r} 12 \overline{)24} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{)24} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

Bruno - 5ª série A

Observe-se que, ao optar por reduzir ao valor unitário, os procedimentos de cálculos dos alunos recaem em uma multiplicação ou em uma divisão por quotas, dependendo do tipo de problema.

Os problemas: *Tanque/versão 1 e 2* e *Cadernos/versão 1 e 2*, uma vez calculados o valor unitário, passam a ser de multiplicação. Pois, se tratam dos problemas origem. Os problemas imagem: *Flash/versão 1 e 2* e *Agenda/versão 1 e 2* passam a ser de divisão por quota.

A estratégia redução ao valor unitário ocorreu, de um modo geral, com mais freqüência na *versão 2* dos problemas: *Tanque*, *Cadernos*, *Flash* e *Agenda* (considerando os procedimentos canônicos e os não canônicos) que

caracterizam-se por apresentar a relação de proporcionalidade entre números maiores e pede-se para calcular a relação para um par de números menores. Um dos fatores que contribui para essa preferência, se deve, provavelmente, à dificuldade que os alunos têm em utilizar o fator escalar nessa classe de problemas. Em um trabalho com crianças escolarizadas, Schliemann e Carraher (1997) concluíram:

*A dificuldade dos vendedores com os problemas em que dava-se a relação para um par de números relativamente grandes e pede-se para calcular a relação para um par de números menores, é devida, provavelmente, ao fato de que esses problemas os obrigam a inverter a direção do cálculo a que estão habituados. (p.29).*

Além disso, ressalte-se que nos problemas *Tanque/versão 2* e *Caderno/versão 2* não houve grande diversidade de procedimentos e apresentaram um alto índice de erros, se comparados com os demais.

Um dos erros mais freqüentes, que aparece no uso da estratégia valor unitário e encontrado nos protocolos de todos os problemas, é o próprio valor unitário dado como solução do problema, ou seja, a segunda fase de cálculo, que corresponde à determinação da incógnita da questão, é negligenciada. Portanto, o processo de dividir os dados das variáveis de naturezas distintas e dar esse valor como solução dos problemas, reflete uma visão parcial das relações. Procedimento análogo a esse foi constatado, por Ricco (1978, p. 28), como procedimento dito hipotético.

Um outro erro bastante freqüente foi operar com os dados do problema como se fosse o valor unitário, desprezando a relação funcional: 78 reais é o preço de 6 carrinhos, no problema *tanque*; 96 cadernos em 8 pacotes, no problema *cadernos*.

Citei os problemas acima, mas esse tipo de erro ocorreu em todas as questões, inclusive no problema *Basculante* (5 custam 130, 8 custam \_\_) e no problema *lápiz* (4 pacotes com 132 lápis, 7 pacotes com \_\_), que foram sugeridos, propositadamente, como mencionado no capítulo anterior, por serem questões que requerem preferentemente um procedimento que pressupõe a redução ao valor unitário, tendo em vista não existir a relação “múltiplo de” entre os valores numéricos da mesma variável. Nesses problemas, o índice de erros foi bastante elevado. Apenas 37% dos alunos chegaram a resposta no contexto “Revenda de carrinhos” e, no contexto “Empacotamento”, 31 % dos alunos.

As categorias dos procedimentos de resolução, organizadas “por aluno”, são evidência de que o fato de alguns alunos manifestarem compreensão ao resolverem, por meio da redução ao valor unitário os problemas *Flash/versão 1 e 2*, por exemplo, não significa que tenham clareza das relações inseridas no problema. O cálculo proposto por alguns alunos, para a solução desses problemas, restringiu-se a uma divisão por quota, em que o divisor (valor unitário) foi mentalmente calculado, tendo em vista que o aluno não explicita a operação feita. Esse comportamento manifesta uma certa falta de clareza quanto ao raciocínio utilizado.

A comparação, portanto, dos procedimentos utilizados para solução dos problemas indicados acima, com os problemas *Basculante e Lápis*, nos dá maiores indícios para questionar a compreensão efetiva a respeito do cálculo do valor unitário. É o tratamento dado a esses últimos problemas que garante esse entendimento, considerando a variáveis numéricas e, principalmente, a dificuldade no uso do escalar.

Muitos alunos resolveram, com sucesso, os problemas *Flash/versão 1 e 2* e *Agendas/versão 1 e 2*, cujas variáveis numéricas favorecem o cálculo por estimativas. No entanto, não foram capazes de operar com os termos do problema *Basculante e Lápis*, para os quais a determinação do valor unitário

se faz necessária por meio de uma divisão. Um exemplo, para ilustrar esse comportamento, está na entrevista de Maria Fernanda, que reduz ao valor unitário, nos problemas *Agendas/versão 1 e 2*, no contexto do empacotamento, e erra o problema *Basculante*. Durante a entrevista, a aluna lê o problema: “Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais”.

Depois de responder corretamente as perguntas que fiz sobre os dados do problema, resolve multiplicar 8 por 130. Após minha intervenção, chamando a sua atenção para a quantidade de carrinhos que custa 130 reais, justifica-se, pensa e resolve novamente:

- *Fiz errado. 5 carrinhos são 130 reais, então, eu dividi 130 por 3. É porque em 8 dá para tirar 5, não dá? Eu dividi por 3 porque eu queria o preço de 3 carrinhos para somar com os outros 130.*

- Mas não é dessa forma que você vai saber o preço de 3 carrinhos. Você sabe o preço de 1 carrinho?

A aluna não entende e responde:

- *Eu dividi 130 por 3 porque eu queria o preço de 3 carrinhos. E o preço que eu achei foi 49.*

A aluna manifesta uma ligeira tendência a utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, mas demonstra dificuldades na conceituação da divisão, pela incapacidade de identificar, entre os dados do problema, os termos necessários (130 dividido por 5) para o cálculo de cada carrinho. Da mesma maneira, Heber, que calculou o preço de cada carrinho no problema *Tanque/versão 2*, também revela dificuldades na conceituação da divisão. Ele lê o problema e diz:

- *Se 5 é 130; 10 vai dá 290... Se 5 é 130; mais 20 vai dá 150.*

- Por que você somou 130 com 20?

- *Não, está errado. É 130 mais 15 ... Eu acho que cada um é 15.*



- Cada carrinho. Ótimo. E depois que você descobriu isso, o que fez?

- *Eu fiz 13 vezes 18. Cada carrinho não custa 13 reais? Então eu tinha que colocar 13 vezes 18 para achar a resposta.*

Na versão 2 do problema (6 — 78; 3 — ?), a aluna explica:

- *Aí eu fiz assim: Se cada carrinho... é... se 6 carrinhos custava 78 reais, aí eu fiz...é... aqui era pra saber o preço de 3 carrinhos. Como eu já sabia que cada carrinho era 13 reais, eu fiz 13 vezes 3.*

Daniele também leu o problema e se expressou:

- *Peguei o 78 e dividi por 6.*

- *Por que por 6?*

- *Pra ver quanto dava um carrinho. Deu 13 reais.*

- *E depois?*

- *Depois eu coloquei 13 reais vezes 18 carrinhos, que era o que ele queria comprar. Aí eu fiz de vezes, a conta, e deu 234 reais.*

Quanto à versão 2:

- *Aí eu dividi primeiro 78 por 6, deu 13. Aí eu multipliquei os 3 carrinhos e deu 39.*

Nos protocolos acima, que apresentam a relação entre os preços de 6 e 18 objetos com o preço de um, Daniele determina o valor unitário por meio de uma divisão e, tomando esse valor como referência, determina o preço de 18 e 3 objetos. Há uma indicação do uso de 13 como coeficiente de proporcionalidade, na medida em que esse valor é utilizado para determinar o valor de diferentes números de objetos. Entretanto, não há critério seguro para fazer essa afirmação, uma vez que, estando determinado o valor de 1 objeto, o aluno pode determinar o valor de  $n$  objetos  $\forall n \in \mathbb{N}$  pela aplicação da relação escalar “ $n$  vezes mais”. Um indício dessa afirmação pode ser dado pela análise do protocolo de Andreza, que efetuou uma multiplicação, mas que foi precedida por adições reiteradas. É importante ressaltar que não foram encontrados, nos protocolos dos alunos,

a adição:  $18 + 18 + \dots + 18$ , 13 vezes. Encontrou-se sempre a outra adição:  $13 + 13 + \dots + 13$ , 18 vezes, que é significativa, tendo em vista a representação da situação concreta. Isso indica um procedimento escalar conforme as considerações sobre as estratégias, no capítulo I.

De fato, quando o aluno determina primeiramente o valor unitário, recai no esquema análogo à primeira classe de problemas: 1 carro custa 13 reais; 18 carros custam \_\_\_\_.

A adição repetida, cuja parcela é 13 reais, tem significado, pois trata-se de pagar 13 reais por cada carrinho, ou seja, 13 reais 18 vezes. Como dar sentido, porém, a 13 repetições de 18 carrinhos, sabendo-se que foram comprados somente 18 carrinhos e não  $18 + 18 + \dots$ , 13 vezes? O problema pede o custo de 18 carrinhos e não há sentido em somar “carrinhos” e encontrar “reais”. A adição  $18 + 18 + \dots$ , 13 vezes, teria sentido, como vimos no capítulo 1, se a relação fosse funcional, porém essa adição não foi encontrada. Note-se que, na construção do algoritmo, os registros  $x \begin{smallmatrix} 13 \\ 18 \end{smallmatrix}$  ou

$x \begin{smallmatrix} 18 \\ 13 \end{smallmatrix}$  foram usados indiferentemente.

O protocolo de Otávio, ao determinar o valor unitário por meio de estimativa, evidencia que essa opção não garante o reconhecimento, a respeito desse termo, como coeficiente de proporcionalidade. Ele faz adições reiteradas até encontrar o valor unitário que satisfaz:  $6.x = 78$ . Observa-se que, na segunda fase de cálculo para a solução do problema, em que se quer saber o preço de 18 carrinhos, o aluno continua fazendo adições sucessivas até encontrar o total de 234 e, apesar de operar a multiplicação  $13 \times 18$ , ele dá, como solução do problema, o resultado determinado por meio da adição de parcelas reiteradas, tendo em vista que os valores encontrados, nas duas operações, não coincidem.



Os alunos, que tiveram seus procedimentos classificados na categoria redução ao valor unitário, são aqueles que procederam da maneira usual na resolução dos problemas do primeiro grupo. Operaram com os dados dos enunciados, principalmente nos problemas de multiplicação simples e de divisão repartição. Mas nos problemas de divisão por quota, alguns desses alunos fizeram uso de um tratamento não canônico, como adição repetida ou a procura do termo desconhecido por meio de multiplicações sucessivas.

## SÍNTESE DAS CONCLUSÕES

Nesta pesquisa, estudei os procedimentos de resolução de problemas multiplicativos, utilizados por uma população de alunos de 5ª série, de uma Escola Estadual da cidade de São Paulo.

Os resultados desta investigação mostram uma heterogeneidade de procedimentos mobilizados para a resolução desses problemas, o que evidencia a complexidade desse conceito e a necessidade de uma diversidade de situações em longo processo. Ressalte-se que a fundamentação teórica, que sustentou todo o desenvolvimento desta pesquisa, permitiu abranger essa complexidade e a diversidade dos procedimentos encaminhados.

Quanto aos procedimentos, de um modo geral, mobilizados, os concentramos prioritariamente na estratégia escalar, pois não obtivemos indicações seguras para incluir procedimentos na estratégia do tipo funcional. Seria necessário haver maiores estudos para identificar e descrever esses critérios.

Dentre os procedimentos utilizados pelos alunos, foram observados um grande número de procedimentos não canônicos, como a adição repetida, “multiplicação com termo desconhecido”, multiplicações sucessivas, entre outros que foram mobilizados para resolver os problemas mais elementares e, da mesma maneira, aplicados para a solução dos problemas em que  $n_1$  e  $n_2 \neq 1$ . O uso de procedimentos não canônicos, de modo geral, foi mais empregado na determinação do escalar, talvez pelo fato de que o uso desse fator preserva as relações numéricas do problema

até o final do cálculo. Portanto, esse procedimento me parece mais intuitivo, embora a redução ao valor unitário seja o método mais ensinado.

Sabendo-se que os alunos apresentam diferentes maneiras de compreender o texto de um problema e, conseqüentemente, seus mecanismos de resolução também são distintos, é que procuramos conhecer e analisar os procedimentos mobilizados pelos alunos para a resolução dos problemas enfocados nesta pesquisa, sendo esta a nossa principal preocupação no decorrer desta investigação. Neste sentido, acreditamos que as reflexões decorrentes deste estudo apontam para uma necessidade de mudança na rotina do professor, que ao trabalhar com problemas, de acordo com uma metodologia segundo os moldes tradicionais, não tem interesse em compreender os processos envolvidos na solução de um problema, pois toda a sua preocupação repousa no resultado final. De acordo com essa metodologia, o professor primeiramente trabalha a técnica operatória do algoritmo e, em seguida, apresenta os clássicos problemas de aplicação, a fim de que o aluno venha a usar o algoritmo previamente “assimilado”. Ao se deparar com erros, o que em geral ocorre, o professor eleva a quantidade de exercícios para que, por meio da repetição, o aluno chegue a aplicação correta da técnica.

Com base nas considerações acima e nas constatações da presente pesquisa referentes à diversidade de procedimentos, entendemos que as contribuições desta investigação para o ensino consistem em oferecer subsídios para:

- orientar uma aprendizagem que não tolha a criatividade dos alunos e respeite o ritmo dos que apresentam dificuldades ou que se encontram, ainda, em uma etapa anterior.

- uma proposta de ensino que, contrapondo-se a uma prática em que o professor institucionaliza apressadamente o procedimento valor unitário, valorize a riqueza das produções individuais possíveis de serem

estabelecidas pelos alunos em uma situação multiplicativa. Assim, relações escalares podem ser mobilizadas tanto para solução de problemas como para controle dos resultados.

Uma constatação importante, tendo em vista a contribuição dessa pesquisa para o currículo escolar, é o grande número de erros encontrados na resolução dos problemas verbais multiplicativos, mesmo nos que envolvem uma única operação de multiplicação ou divisão.

Alguns desses erros revelam total incompreensão da multiplicação e, conseqüentemente, da divisão, o que pode levar a afetar a aprendizagem, do aluno, de outros conhecimentos matemáticos escolares correlacionados a conceitos que sugerem um pensamento proporcional, como já mencionado na problemática desta pesquisa. Outros erros, mais específicos, se referem:

- a evidência de uma maior dificuldade em resolver problemas em que  $n_1 < n_2$ , no que concerne à necessidade de inversão na orientação dos cálculos.

- a efetuar uma única operação (nos problemas que requerem duas), tanto no uso da estratégia escalar como no da estratégia valor unitário, revelando uma compreensão parcial das relações em jogo.

Com referência a esta pesquisa, é importante apontar para algumas de suas limitações, especialmente quanto à seleção das variáveis numéricas. Na seleção dessas variáveis, deve-se atentar para que o número, que representa o fator escalar ou o coeficiente de proporcionalidade, não coincida com a resposta do problema, conforme já discutido no capítulo III. Considero oportuno estender essa problemática para outras investigações, propondo problemas com números maiores, com o fator escalar, por exemplo, na ordem das dezenas, dificultando o cálculo mental. A expressão escrita desse cálculo pode garantir a efetiva clareza quanto a função dos termos envolvidos, descartando, assim, o risco de o aluno determinar

intuitivamente esse fator, sem a continuidade do cálculo devido ao não entendimento de todas as relações envolvidas no problema.

O fato de se obter uma diversidade de procedimentos na resolução dos problemas propostos, entre os quais um elevado número de procedimentos incorretos, revela a complexidade da estrutura dos problemas multiplicativos. Essa complexidade torna-se mais evidente com a mobilização de procedimentos não canônicos, nas diferentes categorias de problemas.

Vimos que os procedimentos não canônicos, bem como o uso do escalar de um modo geral, manifestados nos resultados desta pesquisa, foram mais freqüentes no contexto *revenda de carrinhos*. Além disso, observamos que o número de acertos foi superior nesse contexto, o que ressalta a importância de priorizar, no ensino, as situações mais significativas. Essas constatações indicam, portanto, que esses procedimentos informais ocorrem, a priori, nas situações mais familiares. Daí a necessidade de uma reflexão sobre etapas intermediárias à compreensão dos procedimentos de constituição de relações de proporcionalidade, expressas em problemas verbais multiplicativos e, conseqüentemente, para o ensino dessas relações.

Nessa perspectiva, acreditamos que as considerações decorrentes deste estudo justificam a necessidade e eficiência de se trabalhar com problemas verbais, pois, como sugere Vergnaud (1990), o conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas. Em outras palavras: *resolver problemas é a fonte e o critério do conhecimento operacional*. E acrescenta que uma das prioridades para a pesquisa é, entre outras, analisar e classificar, tanto quanto possível, situações-problema, que tornem um conceito matemático funcional e significativo, a fim de se poder usar uma maior variedade de situações no ensino, e levar os alunos a

encontrarem outras relações e questões além daquelas a que estão acostumados.

**BIBLIOGRAFIA**

- BUNGE, M. Analogia, Simulação, Representação. In: *Teoria e Realidade*, p. 185-203, São Paulo: Editora Perspectiva, 1974.
- CADERNO DO CEM. Psicologia cognitiva e do desenvolvimento e pesquisas em educação matemática: algumas questões teóricas e metodológicas. In: *Caderno do Centro de Educação Matemática*, Ano II, nº 2, p. 19-39, São Paulo, 1990.
- CANÔAS, S. *O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª séries)*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 1997.
- CARRAHER, T. Passando da planta para a construção: um trabalho de mestres. In: *Na vida dez na escola zero*, p. 101-125, São Paulo: Editora Cortez, 1988.
- CUNHA, M. *As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª a 7ª séries*. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 1997.
- DAVIDOV, V. V. A psychological analysis of the operation of multiplication. In: *Soviet Studies in Mathematics Education*, p. 09-85, Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.
- DIENES, Z e GOLDING, E. *Conjuntos, números e potências*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1969.
- E.R.M.E.L. *Apprentissages Numériques et résolution de problèmes. CM1*. Paris: Hatier, 1997.
- FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares*. Tese de Doutorado. PUC-SP, 1995.
- FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In *Educação Matemática: uma introdução*, p. 155-195, São Paulo: Editora da PUC, 1999.

- KIEREN, T. Múltiple Views of multiplicative. In: G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, p. 387-397, 1994.
- KOLEZA, E. A. Aspects sémantiques des traitements linéaires. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, p. 125-148, Strasbourg: Institut de Recherche de Education Mathématique. 1993.
- LAMON, S. J. Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming In: G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative reasoning. In the learning of mathematics*. p. 89-117, 1994.
- NUNES, T. e BRYANT, P. O progresso para a multiplicação e a divisão. In: *Crianças fazendo matemática*, p. 141-190, Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.
- RICCO, G. *Le developpement de la notion de fonction lineaire chez l'enfant de 7 a 12 ans*. Tese de Doutorado, 1978.
- SCHLIEMANN, D. A. e CARRAHER, D. D. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: *Estudos em psicologia da educação matemática*, p. 13-39, Recife: Editora Universitária da UFPE. 2ª edição ampliada, 1997.
- SCHWARTZ, J. L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: M. Behr and J. Hiebert. *Number concepts and operations in the grades*, p. 41-52, Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- SPINILLO, A. G. Estratégias na resolução de tarefas de proporção por crianças. In: *Livro de Resumos-Semana de estudos em psicologia da educação matemática*, p. 14-18, Recife, 1995.
- STEFFE, L. Children's multiplying schemes. In: G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative reasoning. In: the learning of mathematics*, p. 03-40, 1994.

- VERGNAUD, V. *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne. Ed. Peter Lang SA, 1981.
- VERGNAUD, V. Multiplicative Structures. In: M. Behr and J. Hiebert. *Number concepts and operations in the grades*, p. 141-160. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- VERGNAUD, V. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), p. 133-169, 1991.
- VERGNAUD, V. Multiplicative Conceptual Field What and Why? In: G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative reasoning*. In: *the learning of mathematics*, p. 61-41, 1994.
- VERGNAUD, V. Au fond de l'apprendissage, la conceptualisation. *Actes de la VIII Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*. p. 174-185, 1995.

**Anexo I**

Aluno(a): \_\_\_\_\_

1ª) A escola Nazareth e a escola Madalena receberam pacotes de cadernos com a mesma quantidade de cadernos em cada pacote.

A escola Nazareth recebeu 8 pacotes de cadernos, num total de 96 cadernos.  
A escola Madalena recebeu 24 pacotes de cadernos, num total de \_\_\_\_\_ cadernos.

2ª) As escolas receberam, também, pacotes de agendas, com a mesma quantidade em cada pacote.

A escola Nazareth recebeu 8 pacotes, num total de 96 agendas.

A escola Madalena recebeu apenas 2 pacotes, num total de \_\_\_\_\_ agendas.

3ª) As escolas receberam pacotes com lápis e pacotes com pastas, com a mesma quantidade em cada pacote.

a) A escola Nazareth recebeu 4 pacotes com 128 lápis e a escola Madalena recebeu somente 64 lápis.

A escola Madalena recebeu \_\_\_\_\_ pacotes de lápis.

b) A escola Nazareth recebeu 4 pacotes com 96 pastas e a escola Madalena recebeu 192 pastas. A escola Madalena recebeu \_\_\_\_\_ pacotes de pastas.

4ª) O Jardim de Infância Tia Teca recebeu brinquedos em pacotes, com a mesma quantidade de brinquedos em cada pacote.

a) O primeiro turno recebeu 4 pacotes com bolas, num total de 132 bolas.

O segundo recebeu 7 pacotes, num total de \_\_\_\_\_ bolas.

b) O primeiro turno recebeu 8 pacotes com bonecas, num total de 168.

O segundo turno recebeu 5 pacotes, num total de \_\_\_\_\_ bonecas.

**Anexo II**

Aluno(a): \_\_\_\_\_ 5ª série: \_\_\_\_\_

1) Lucas comprou 14 carrinhos de R\$ 16,00 cada. Ele gastou \_\_\_\_\_.

2) A loja Ferrari está vendendo um pacote com 6 carrinhos por R\$ 156,00, cada pacote. Carlos quer comprar apenas um carrinho. Ele deve pagar \_\_\_\_\_.

3) Cada carrinho da marca Piloto custa R\$ 25,00. João tem R\$ 150,00 e quer comprar carrinhos dessa marca. Ele pode comprar \_\_\_\_\_ carrinhos.

4) A escola Nazareth e a escola Madalena receberam canetas e borrachas para serem distribuídas para suas classes.

a) A escola Madalena tem 8 classes e recebeu 192 canetas. Cada classe recebeu \_\_\_\_\_ canetas.

b) A escola Nazareth recebeu também 128 canetas em pacotes. Cada pacote com 32 canetas. A escola recebeu \_\_\_\_\_ pacotes de canetas.

c) A escola Nazareth tem 18 classes. Cada classe recebeu um pacote de borrachas com 32 borrachas em cada pacote. A escola Nazareth recebeu \_\_\_\_\_ borrachas.

### Anexo III

Aluno(a): \_\_\_\_\_ 5ª série: \_\_\_\_\_

#### REVENDA DE CARRINHOS

1) Lucas comprou 14 carrinhos da marca PILOTO. Quanto ele pagou? \_\_\_\_\_.



Marca PILOTO

Preço de cada carrinho: 15 reais

2) João tem 90 reais e quer carrinhos da marca PILOTO. Quantos carrinhos ele pode comprar? \_\_\_\_\_.



Marca TRUCK

Preço de 6 carrinhos: 126 reais

3) Carlos comprou apenas um carrinho da marca TRUCK. Quanto ele pagou? \_\_\_\_\_.

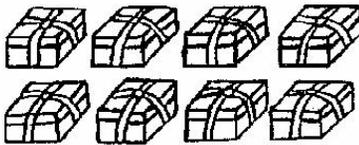
## Empacotamento



Pacote com 32 BORRACHAS

1) Quantas BORRACHAS temos em 18 pacotes? \_\_\_\_\_.

2) Com 128 BORRACHAS. Quantos pacotes podemos fazer? \_\_\_\_\_.



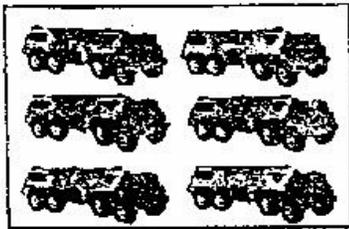
Total de CANETAS em 8 pacotes: 192

3) Quantas CANETAS há em cada pacote? \_\_\_\_\_.

Aluno(a): \_\_\_\_\_ 5ª série: \_\_\_\_\_

Observe os preços dos carrinhos e ajude os vendedores a fazer os cálculos.

1) Carlos comprou 18 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou? \_\_\_\_\_.



Marca TANQUE

Preço de 6 carrinhos: 78 reais

2) João comprou apenas 3 carrinhos da marca TANQUE. Quanto ele pagou?  
\_\_\_\_\_.

3) André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca FLASH ele pode comprar?  
\_\_\_\_\_.



Marca FLASH

Preço de 4 carrinhos: 84 reais

4) Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca FLASH ele pode comprar?  
\_\_\_\_\_.



Marca BASCULANTE

Preço de 5 carrinhos: 130 reais

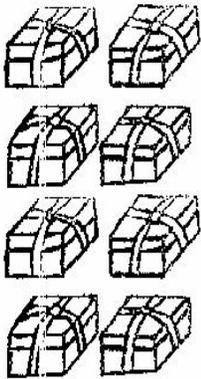
5) Quero comprar 8 carrinhos da marca BASCULANTE. Quanto devo pagar?  
\_\_\_\_\_.

Aluno(a): \_\_\_\_\_ 5ª série: \_\_\_\_\_

Vamos fazer pacotes com a mesma quantidade de cadernos em cada pacote.

1) João fez 24 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou? \_\_\_\_\_.

Com 96 CADERNOS faço 8  
pacotes

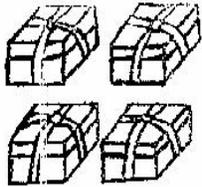


2) Carlos fez apenas 2 pacotes de cadernos. Quantos cadernos usou? \_\_\_\_\_.

Vamos fazer pacotes com a mesma quantidade de agendas em cada pacote.

3) Com 120 agendas quantos pacotes posso fazer? \_\_\_\_\_.

Com 60 AGENDAS faço 4 pacotes

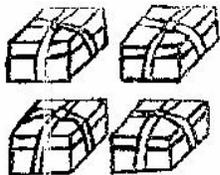


4) Com 30 agendas quantos pacotes posso fazer? \_\_\_\_\_.

Vamos fazer pacotes com a mesma quantidade de lápis em cada pacote.

5) Danilo fez 7 pacotes de lápis. Quantos lápis usou? \_\_\_\_\_.

Com 132 LÁPIS faço 4 pacotes



## ANEXO IV – ENTREVISTAS

### Ivan/5ª série B

PROFESSORA: Ivan, eu queria que você lesse esse 1º problema.

IVAN: “Carlos comprou 18 carrinhos da marca Flash. Quanto ele pagou?” Cada carrinho é... o preço de 6 carrinhos custou 78 reais.

P: Ta, onde você leu? Aqui na gravura? Ta bom. Eu queria que você explicasse pra mim, como você fez, como você resolveu?

I: É... aqui 6 carrinhos custam 78 reais, aqui são 18. É... 6 vezes 3 são 18, se 6 carrinhos custam 78 pra eu saber quanto custam 18 carrinhos faço 78 vezes 3.

P: Aí você achou o preço de ...

I: 234 reais.

P: Você tem uma outra forma de resolver esse problema?

I: Bom eu poderia dividir 78 por 6 e multiplicar por 18.

P: Por que dividir 78 por 6?

I: Pra saber o valor unitário.

P: Muito bem. E depois de dividir?

I: Eu multiplicaria por 18 para saber o preço de 18 carrinhos.

P: Agora leia a 2ª questão para mim.

I: “João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”. Bom, aqui os mesmos carrinhos 78 reais são 6 carrinhos. Aqui eu dividi 78 por 6 para saber o preço unitário e depois eu multipliquei por 3 e achei o preço de 39 reais.

P: Agora você teria uma outra forma de resolver?

I: Bom, eu poderia dividir 6 por 2 e ... dividir 78 ...

P: Ta, pode pensar e resolver aqui nesse espaço pra mim (aponte o espaço no papel).

I: Eu poderia, ah!... se 6 carrinhos são 78, eu poderia dividir 78 por 2 pra saber quanto custaria 3.

P: Ta, você vai dividir 78 por 2 pra saber o preço de ...

I: 3. Porque 6 é 78 e 3 são 78 dividido por 2.

P: Isso, porque 3 é a ...

I: É ... a ... é divisor de 6. Múltiplo de 6

P: 6 é múltiplo de 3!

I: É, 6 é múltiplo de 3!

P: Sim, então faça aí para mim por favor.

I: (O aluno resolveu no papel)

P: Dividiu 78 por 2, achou 39. 39 é o quê?

I: É o preço dos 3 carrinhos.

P: Ótimo. Agora você lê para mim a 3ª questão.

I: “André tem 168 reais, quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? 4 carrinhos são 84 reais”.

P: Sim, como você fez para resolver aqui?

I: Bom, aqui eu dividi 84 por 4 pra saber o preço unitário e deu 21. Esse 21 ... o André tinha 168 reais aí dividi 168 por 21 pra saber a quantidade de carrinhos que ele poderia comprar e o resultado deu 8 carrinhos.

P: Ta, e teria alguma outra forma de resolver?

I: Eu poderia dividir 168 por 84 pra saber quanto dava. Daria 2 e depois eu multiplicava 84 por 2 e dá 168, se 4

carrinhos são 84, então se 168 é o dobro, então são 8 carrinhos.

P: Ótimo, mais alguma outra coisa?

I: Não só isso.

P: Ta bom, então leia a 4ª questão.

I: Paulo tem apenas 42 reais, quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Bom aqui eu dividi 84 por ...

P: Sim, mas só com essa informação, ah! com a informação da gravura.

I: ... e 84 dividido por 4 eu vi o preço unitário, aí eu dividi

48 por 21, a mesma coisa que eu fiz na letra 3 (3ª questão).

P: Sim, mas teve uma outra forma também?

I: A outra forma também é que 84 dividido por 42, que dariam 2, ou seja, 84 é o dobro de 42, então se 4 carrinhos são 84, 2 carrinhos seriam 42.

P: Ótimo, e a 5ª questão?

I: Bom, quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante, quando devo pagar? Bom, 5 carrinhos da marca Basculante são 130 reais, aqui eu quis dividir 130 por 5 pra saber o preço unitário deu 26 reais, depois eu multipliquei 26 por 8 que é a quantidade de carrinhos que eu quero comprar.

P: Tem alguma outra forma?

I: Bom, é ... (pausa) não sei, acho que não, não sei, acho que daria 130 ... 130 dividido por 8 e multiplicado por 5, não sei.

P: 130 dividido por 8 e multiplicado por 5 não, não daria.

I: Acho que só essa maneira mesmo.

P: Só essa maneira não é? Ta ótimo. Agora eu gostaria que você lesse este outro problema, por favor.

I: “Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”

P: Então, você entendeu?

I: Bem, tem que dividir 18 por 5 pra saber o preço de cada caderno e depois eu dividiria 234 pelo preço do caderno.

P: É dessa forma que você vai resolver?

I: Sim. (O aluno resolve no papel).

P: E então?

I: Aqui... é... como são 18 reais para cada 5 cadernos, eu dividi o preço dos 5 cadernos pelo número de cadernos, para saber o preço de cada caderno. Depois eu dividi o quanto a professora tinha pelo preço de cada caderno e deu 65 cadernos.

P: Ta bom. Agora, tem uma outra forma de resolver esse problema? Você conhece outra forma?

I: Bom, eu poderia tentar multiplicar esse número... esse número. Tentar multiplicar ele até achar...

P: Que número?

I: O 18. Até achar 234, depois multiplicando por 5.

P: Faça dessa maneira também.

I: (O aluno resolve no papel). É... o preço total que a gente tem é 234 reais. Se 5 cadernos custam 18; 50 custam 180, então 180 ainda não chega em 234. Aí a gente teria que ir somando mais 18... a gente teria que ver quanto falta de 234 menos 180. Daria... (ele faz a subtração no papel) é o 54. A gente faria 54 dividido

por 18, quantas vezes dava. (ele faz o cálculo no papel) deu 3. *Aí a gente soma, se 180 são 50, a gente tem mais 3 vezes de 18, são mais 15, então são 50 mais 15 que ficou 65.*

P: Ta ótimo, muito obrigada.

### Hugo/5ª série B

PROFESSORA: Hugo, eu gostaria que você lesse pra mim, o 1º problema.

HUGO: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou?”*

P: Só isso? Foi só isso que você usou para resolver? Não viu a gravura?

H: *“Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Ta, agora você me conta como você fez para chegar ao resultado.

H: *Eu... o 78 dividi por 6 e o resultado eu multipliquei por 18.*

P: *Aí você achou o preço de ...*

H: *18 carrinhos.*

P: Você teria alguma outra forma de resolver esse problema?

H: *(O aluno resolve no papel). Eu... é... 78 dividido por 3.*

P: Por que?

H: *(Pausa)*

P: Vamos ver, quem é 78?

H: *É quanto custa 6 carrinhos.*

P: E eu quero saber o preço de...

H: *18 carrinhos, 3 vezes 6 é igual a 18, 3 vezes o preço de 6 carrinhos dá 234 que é o resultado.*

P: Muito bem, vamos para a 2ª questão. Leia pra mim, por favor.

H: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou. Marca tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais.”*

P: E aqui, como você fez?

H: *78 dividi por 6 e o resultado eu multipliquei por 3*

P: Esse resultado é o que? (aponto o 13)

H: *É o... o preço de cada carrinho.*

P: Aqui também você teria uma outra maneira de resolver?

H: *Vou pensar. (O aluno resolve no papel).*

P: Então, você concluiu?

H: *Não sei.*

P: O que você pensou? O que você fez aqui?

H: *Eu tentei multiplicar por três...*

P: Multiplicar o que por três?

H: *78 por 3. Tentei dividir.*

P: Mas, por que você tentou, acha que é por aí?

H: *Não.*

P: Por que você acha que não?

H: *Porque o resultado é diferente. Os resultados não batem.*

P: Ta certo. Olha esse esquema que eu fiz. Ta vendo aqui: seis carrinhos custam 78 reais e 3 eu não sei. Veja: 6 carrinhos/3 carrinhos. Onde eu vou gastar mais, para comprar 6 carrinhos ou 3 carrinhos?

H: *Pra comprar 6.*

P: Então veja bem o esquema. Quanto vai custar 3 carrinhos?

H: *(Pausa). 39*

P: Você respondeu porque já tinha esse valor. Mas, tem outra maneira de resolver, H: *Não.*

P: Tudo bem, vamos para a 3ª questão.

H: *“André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar. Marca flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais.*

P: Ta, você fez como?

H: *É... eu multipliquei 2 por 84 e ... 2por 4.*

P: Por que você multiplicou 2 por 84?

H: *Pra ver se dava a quantia que ele tem de 168.*

P: E daí?

H: *Dividi 168 por 4, deu 42, eu peguei e...*

P: Você não precisou desse dado.

H: *Não, aí eu multipliquei por 4. Aí aqui 4 carrinhos custam 84, então eu fiz 2 vezes 4. 84 é a metade de 168.*

*Quando eu multipliquei 2 vezes 84 eu tentei fazer essa conta: 2 vezes 4 que são quantos carrinhos... que é o preço de 4 carrinhos: 84. 4 carrinhos eu multipliquei por 2 pra ver se dava.*

P: Ta bom. E a 4ª questão, leia por favor.

H: *“Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar? Marca flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais”. Eu fiz 84 dividido por 4, 21...*

P: O que é 21?

H: *21 reais, eu acho que é o preço de cada carrinho. Aí eu fiz 2 vezes 21 que é igual a 42.*

P: Por que você multiplicou 2 por 21?

H: *Eu faço de cabeça, depois eu faço no papel pra conferir.*

P: E você resolve de outra maneira esse problema?

H: *Posso tentar. (O aluno resolve no papel).*

P: Terminou? Como você fez?

H: *Eu fiz ao contrário. Invés de multiplicar eu dividi 42, que é quanto ele tinha, por 2 pra ver se chegava, e o resultado deu 21, é o preço de cada carrinho. Então, com 42 ele pode comprar 2 carrinhos, porque 21 é metade de 42.*

P: Vamos a 5ª questão, então?

H: *“Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante, quanto devo pagar. Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais”. Aí eu pequei 130 dividi por 5.*

P: Por que? Por que dividiu por 5?

H: *Pra saber quanto custa cada carrinho. Aí o resultado eu... de 8 carrinhos que ele quer comprar... 8 multipliquei pelo resultado que foi 26. Deu 208.*

P: Agora eu gostaria que você lesse esse outro problema.

H: *“Com 18 reais compro 5 cadernos. A professora Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”.*

P: Você entendeu?

H: *Entendi.*

P: Então me diga o que o problema pede.

H: *Ele quer saber... é...*

P: O que o problema diz?

H: *Que com 18 reais dá pra comprar 5 cadernos e a profª Cleide tem 234 reais.*

P: E o que o problema quer saber?

H: *Quantos cadernos a profª Cleide pode comprar com 234 reais.*

P: E o que você já pensou? Me conta.

H: *(pausa). Eu tentei dividir 234 por 5.*

P: Por que? Onde você queria chegar?  
 H: *Pra tentar chegar em algum número, eu sempre faço isso.*  
 P: Então você faz uma conta qualquer, é isso?  
 H: *É, e deu 46, então eu multipliquei por 23, por 18...*  
 P: Mas, o que é o 23? De onde veio?  
 H: *Eu queria saber... eu fico fazendo pra achar um número.*  
 P: Um número. Qual?  
 H: *O número... assim... não sei como explicar.*  
 P: E o que mais você fez?  
 H: *234 dividi por 5. Depois eu fiz 234 vezes 5.*  
 P: E esse outro cálculo aqui?  
 H: *13 vezes 18. Eu já tinha tentado com 23, agora eu to tentando com 13 pra achar 234.*  
 P: E daí? O que quer dizer isso?  
 H: *Bem, como eu achei o 234, podia ser que... fosse 13 cadernos. É ... podia ser.*  
 P: Vamos voltar ao problema novamente? E eu vou fazer um esquema aqui pra você. Olha: 5 cadernos custam 18 reais, quantos cadernos irão custar 234 reais? Veja se esse esquema ajuda no seu raciocínio.  
 H: *É, acho que deu 46.*  
 P: Mas, o que você fez? Me conta.  
 H: *Eu dividi de novo 234 por 5 e multipliquei o resultado por 5.*  
 P: Você dividiu 234 reais por 5 cadernos, achou 46 e depois multiplicou 46 por 5 voltando ao 234.  
 H: *É. Acho que o resultado é 46.*  
 P: Ta bom, então, obrigada.

### Diego/5ª série G

PROFESSORA: Diego, leia o 1º problema, por favor.  
 DIEGO: *"Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou?"*  
 P: O 1º problema não é só isso.  
 D: *Sim, é só.*  
 P: E esses dizeres aqui da gravura? Achou? Então leia agora todo o problema.  
 D: *"Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".*  
 P: Relembrou o problema? Você entendeu?  
 D: *Mais ou menos.*  
 P: Então lembre e depois me explique.  
 D: *(Pausa). Aqui eu fiz assim: eu fiz 78 como ta aqui vezes 18. 78 reais seis carrinhos. Aí eu fiz 18 vezes 78 reais aí deu 576 reais.*  
 P: Veja bem, 78 reais é o que?  
 D: *É seis carrinhos.*  
 P: É o preço de 6 carrinhos. E o problema, o que quer saber?  
 D: *Eu quero comprar 18 carrinhos.*  
 P: Você quer saber o preço de 18 carrinhos.  
 (Pausa). Quando você multiplicou aqui 18 vezes 78 reais, achou 576 reais. Será que isso tudo é o preço de 18 carrinhos? Você acha que está correto?  
 D: *Não.*

P: Não está, não é? Então pense olhando para esse esquema: 6 carrinhos custam 78 reais e você quer saber o preço de 18 carrinhos. (aponto os valores).  
 D: *Se 78 é 6, então 6 é 78... 3 vezes 78... (O aluno resolve no papel).*  
 P: E então? O que você fez?  
 D: *Fiz 78 vezes 3.*  
 P: Por que?  
 D: *Porque o preço de 6 carrinhos é 78 reais mais 6 carrinhos dá 12, mais 6 dá 18, aí deu 214 reais. Deu assim: 78 reais vezes 3.*  
 P: Vezes 3 por quê?  
 D: *Porque é 18 a quantidade de carrinhos.*  
 P: Entendi. Agora vejamos a 2ª questão. Pode ler.  
 D: *"João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou?" Aí eu fiz...*  
 P: Leia todo o problema, Diego.  
 D: *"João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque, quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".*  
 P: Agora aqui a mesma situação, 6 carrinhos custam...  
 D: *78 reais.*  
 P: E o que você quer no problema?  
 D: *Quero o preço de 3 carrinhos.*  
 P: Como você fez essa?  
 D: *Eu não estou lembrando.*  
 P: Então lembre.  
 D: *(Pausa). Eu fiz assim: que 4 mais 4 dá 8, aí aqui 4 mais 3 dá 7, aí deu 78, aí eu abaixei aqui 44 reais.*  
 P: Ta, vamos ver. 44 é o preço de quê?  
 D: *3 carrinhos.*  
 P: Mas veja bem, de onde você trouxe esse 44 e o 34, que valores são esses?  
 D: *(Pausa). Eu fiz tipo assim, eu tava pesquisando... eu tava por exemplo... eu queria achar 78 reais o valor de 6 carrinhos, aí 78... aí eu tava vendo os preços que dava o resultado. Aí eu coloquei o 44 só que ...*  
 P: Você pegou dois valores aleatórios para que a soma desse 78?  
 D: *Sim.*  
 P: Mas só que... Então vamos refazer isso. Veja esse esquema: 6 carrinhos (aqui é a coluna dos carrinhos, aqui dos preços). Então 6 carrinhos custam 78 reais, 3 carrinhos vão custar mais ou menos que 78 reais?  
 D: *Menos.*  
 P: Esse esquema facilita a resolução pra você ?  
 D: *A conta poderia ser de menos, então?*  
 P: Por que de menos?  
 D: *Porque já que 6 são 78 reais eu quero só 3, então eu tenho que achar o que é menos de 78.*  
 P: Sim, mas de que forma você vai achar esse preço de 3 carrinhos?  
 D: *(O aluno resolve no papel). Eu fiz assim: 78 menos 30 aí deu o resultado 48 reais.*  
 P: Mas, por que menos 30? Por que você escolheu 30 pra subtrair?  
 D: *Eu estou fazendo tipo um teste. Eu estou tentando achar que dinheiro dá. Aí eu vou fazer outra conta. (Pausa). Posso fazer também outros tipos de contas?*  
 P: Que contas?

D: Por exemplo, de mais? Pra achar esse resultado aqui? (aponta 78 reais)

P: Você pode fazer as operações que você quiser, desde que saiba o que está fazendo. Pense bem. Qual é a conta que você está fazendo agora?

D: De mais.

P: Mas qual?

D: Pra achar 78 reais, só um exemplo eu posso fazer tipo assim 48 mais 48 pra ver se dá 78 reais. É só um exemplo.

P: Por que você procura o 78?

D: Pra poder achar o preço de 3 carrinhos.

P: Ta, eu já entendi. Você vai ficar somando números. Agora leia o 3º problema.

D: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar? Marca flash - Preço de 4 carrinhos é 84 reais".

P: Então, o que você fez?

D: 84 reais mais 84 reais deu 168 reais. Dá 8 carrinhos.

P: Por que você concluiu que é o preço de 8 carrinhos?

D: Não, de dois carrinhos, quero dizer.

P: Não, você respondeu 8, está certo. A minha pergunta é a seguinte: como você concluiu, a partir dessa soma, que ele pode comprar 8 carrinhos?

D: Por que aqui são 84 reais, já é 4 carrinhos, mais 84 reais que é de 4, somando os dois dá 8 carrinhos.

P: Ótimo. Então vamos à 4ª questão agora.

D: "Paulo tem apenas 42 reais, quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar? Marca flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais".

P: Essa você não havia resolvido. Resolva agora.

D: (O aluno resolve no papel).

P: Você somou 42 mais 42. Por que essa soma?

D: Pra ver se dá esse resultado (aponta 84 reais).

P: E se não der 84?

D: Se não der 84 eu vou fazer outra conta. Mas deu 84. Dá 2 carrinhos.

P: Por que 2 carrinhos.

D: Porque 84 é 4. Ai eu somei 42 mais 42, deu 84.

P: Tudo bem. Leia o 5º problema completo pra mim.

D: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante, quanto devo pagar? Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais".

P: Como você fez?

D: Fiz assim: 130 é... dividido por 5.

P: Por quê?

D: (Pausa - O aluno não responde).

P: Volte ao problema. 130 reais é o preço de...

D: 5 carrinhos.

P: Você dividiu 130 por 5. Por que você fez essa divisão?

D: (Pausa - O aluno não responde).

P: Você queria saber o quê?

D: Gostaria de saber... assim... quanto.. aqui 5 carrinhos é 130 reais. Pelo que eu estou tentando o que eu fiz... eu queria saber o preço de um carrinho.

P: Ótimo.

D: Ai deu 26 reais, o preço de um carrinho.

P: Só que, o que é que você quer no problema?

D: Quero comprar 8 carrinhos da marca Tanque.

P: Você quer saber o preço de 8 carrinhos.

D: Ai aqui... eu acho que... (O aluno resolve no papel).

P: Então, você achou o quê?

D: Eu achei o preço de 208 reais.

P: Como você fez?

D: Eu fiz 26 reais vezes 8.

P: Ta ótimo. Agora eu queria que você lesse e resolvesse esse outro problema pra mim.

D: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais, quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Você entendeu?

D: (O aluno resolve no papel).

P: Então, o que você fez?

D: Eu estou procurando saber o resultado que dá 234, aí eu fiz vezes.

P: O que você está multiplicando?

D: Multiplicando 18 reais.

P: Vezes quem? Você está multiplicando por 19?

D: Não. Eu já multipliquei por 9, por 5, por 10 e...

P: Você multiplicou por 10 e deu quanto?

D: Deu 180.

P: Então você conclui o quê?

D: Ai eu fiz vezes 8 aí deu... aí não deu o resultado, daí eu vou fazer outra conta (Pausa).

P: Você vai multiplicar agora por quanto?

D: Por 4 pra ver quanto vai dá..

P: Veja, você multiplicou 18 por 10 deu 180. 180 é um número menor que 234.

D: É, aí eu vou fazer 180 vezes 4.

P: Será que é por aí?

D: (O aluno resolve no papel).

P: Agora você multiplicou 14 por 18.

D: Sim. Deu 252. Agora eu vou pegar... Vou diminuir é... agora eu vou fazer é... é 18 vezes 12. (Pausa). Deu 216.

P: E daí? O que você concluiu?

D: (Pausa).

P: O que você vai fazer agora?

D: Multiplicar por 13. (O aluno resolve no papel). Deu 234.

P: E daí o que você conclui?

D: Aqui, é que ele pode comprar é... 13 cadernos.

P: Com 18 reais compra 5 cadernos. E agora, com 234 ele pode comprar 13? Você tem certeza?

D: (Pausa). Eu estou pensando, 18 reais vezes... não. Agora eu já achei o ideal que é o 234. Agora eu estou pensando, por exemplo: se 18 reais é 5 cadernos, agora eu estou pegando 18 reais... 10 cadernos... 18...

P: Ah! Ta. 5 cadernos são 18 reais. Ai você já está pensando em 10 cadernos...

D: Quanto vai dá.

P: Sim.

D: (O aluno resolve no papel). Aqui 13 vezes 18 deu 234. Ai eu peguei aí eu ia com esse raciocínio, assim até...

P: Sim, você foi somando 18 mais 18 mais 18... só que você já viu que quando você faz 13 vezes 18 acha 234. O que é esse 13?

D: No meu pensamento, o 13 era o valor dos...

P: Eu vou mostrar um esquema aqui rapidamente pra você. Veja: 5 cadernos custam 18 reais, quantos cadernos irão custar 234 reais?

D: *É eu tenho que fazer 13 vezes 5. (O aluno resolve no papel). Deu 65 cadernos.*

P: Então, agora você consegue me dizer quem é o 13?

D: *13 é o que eu...é pra mim achar o 234 eu usei o 13, então, pra mim é o 13 vezes 5, pra mim poder achar o valor 65.*

P: Ótimo. Muito obrigada.

### Roger/5ª série G

PROFESSORA: Roger, leia pra mim, o 1º problema.

ROGER: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”*

P: Você já leu todo o problema?

R: Já.

P: E essa gravura aqui?

R: *“Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Então, você relembrou o problema? 6 carrinhos custam...

R: 78 reais.

P: E o que o problema está pedindo?

R: *O problema pede pra gente dizer quanto dá 18 carrinhos.*

P: E como você fez?

R: *Eu fiz 78... Como 18 dá 3 vezes 6 não é? Então eu peguei e fiz 3 vezes 6. 78 vezes 3.*

P: Você escolheu o 3 por quê?

R: *Porque fica mais fácil fazer com 3. Como são 6 carrinhos 78, pegando 3 dá 18.*

P: Ta ótimo. Deu pra entender. Agora o 2º problema.

R: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Então eu dividi..*

P: Você não leu todo o problema.

R: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos 78 reais.*

P: Então, você quer o quê no problema?

R: *É... 3.*

P: O preço de 3 carrinhos. Como você fez?

R: *Eu pequei, dividi 78... É... eu dividi por 3... Era pra eu ter dividido por 3, mas eu dividi por 2.*

P: Não, pense bem. Está certo.

R: *Ah tá! Da pra fazer, tá certo.*

P: E então, por que você escolheu o 2 pra dividir?

R: *Porque assim fica mais fácil fazer com 2 que com o 3.*

P: Como? Não entendi.

R: *Porque 3 não dividi por 6.*

P: Não, pense bem. Fique calmo e vamos lembrar. 78 reais é o preço de 6 carrinhos. Você dividiu 78 reais por 2 e achou 39. 39 é o quê?

R: *É o preço de 3 carrinhos.*

P: Agora, por que você dividiu por 2?

R: *Porque 2 é a metade.*

P: De quê?

R: *De 6. É a metade de 6.*

P: Ta, o 3 é que é a metade de 6, não é? Ótimo, então vamos para a 3ª questão?

R: *“André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.*

P: Como você fez essa?

R: *Eu... como... cada 4 são 84 reais. Ele tem 168 reais, então eu somei 84 com 84, deu 168, o dinheiro que ele tinha. Então dá pra 8 carrinhos.*

P: Ta ótimo. E a 4ª questão?

R: *“Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais”. Aqui eu dividi por 4. 84 eu dividi por 4.*

P: Por que você dividiu?

R: *Para encontrar a metade... é... de...*

P: Veja bem: 4 carrinhos custam 84 reais. Você dividiu 84 reais por 4 carrinhos e achou 21. O que é o 21?

R: *21 são dois carrinhos.*

P: 2? Você tem certeza?

R: *São dois carrinhos. Não... deixa eu ver... (Pausa). Não. Deu 1 carrinho.*

P: E depois? Como você concluiu daqui que ele pode comprar 2 carrinhos?

R: *Eu somei 21 com 21 que deu 42.*

P: Ta, tudo bem, ta ótimo. E a 5ª questão?

R: *“Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais”.*

P: Veja: 130 reais é o preço de quantos carrinhos?

R: 5.

P: E o que você fez lá? (aponto a resolução do aluno).

R: *(Pausa).*

P: O que o problema está pedindo?

R: *8 carrinhos.*

P: O preço de 8 carrinhos. Como você fez?

R: *(Pausa). Eu somei 130 por 8. Multipliquei 130 por 8.*

P: Por que?

R: *Porque se 5 carrinhos são 130... (O aluno resolve no papel).*

P: O que você achou aí?

R: *(Pausa).*

P: Ta correto multiplicar 130 por 8?

R: *Não.*

P: Por que não está correto?

R: *Porque está pedindo 8 carrinhos. Porque eu tinha que... Se eu quisesse fazer por 8, eu tinha que fazer 5 por 130.*

P: 130 por 5.

R: *E depois somar... Multiplicar o preço de um vezes 8.*

P: Ah! Ta ótimo. Então você já conseguiu. Agora eu vou pedir que você faça aqui (aponto o papel).

R: *(O aluno resolve no papel).*

P: Leia esse problema agora.

R: *“Com 18 reais compro 5 cadernos. A professora Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”.*

P: Entendeu?

R: *Sim. (O aluno resolve no papel).*

P: Então. O que você fez?

R: *Eu não consegui resolver.*

P: Mas, o que você fez?

R: *Eu dividi pra ver quanto custa cada carrinho.*

P: Dividiu o quê?

R: *Primeiro eu tentei dividir 18 por 5 pra saber quanto custa cada caderno.*

P: Não consegui. Errou nos cálculos aqui. E agora?

R: *Aí, depois eu tentei fazer 5 dividido por 18.*

P: Não consegui também. Deixa eu fazer um esquema

aqui. Veja bem: 5 cadernos custam 18 reais. Quantos cadernos custam 234 reais? Veja se esse esquema ajuda você.

R: *(Pausa).*

P: Com 234 eu compro mais que 5 cadernos ou menos?

R: *Mais (pausa). (O aluno resolve no papel).*

P: Então. O que você fez agora?

R: *Eu fiz 18 vezes 234 é igual a 4202 cadernos.*

P: Você acha que dá pra comprar 4202 cadernos com os 234 reais?

R: *Não. Não tenho nenhuma outra idéia.*

P: Então está bom. Muito obrigada.

### Tiago Regaz/5ª série B

PROFESSORA: Tiago, eu gostaria que você lesse o 1º problema pra mim.

TIAGO: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”*

P: Você não leu todo o problema. Não leu o que está na gravura.

T: *Não.*

P: Então, agora leia todo o problema pra mim.

T: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Você lembrou o problema?

T: *Não.*

P: Então relembre.

T: *6 carrinhos custam 78 reais.*

P: E o que o problema pede?

T: *Pra você poder... Pra ver quanto ele pagou.*

P: Pagou por quantos carrinhos?

T: *Por 18.*

P: Ta, então, o problema quer saber quanto custam 18 carrinhos. Então como você vai fazer pra resolver isso?

T: *Faz 6 vezes 3, aí deu 18. Aí eu fiz 18 vezes 78 reais.*

P: Veja bem, 6 carrinhos já custam 78 reais. Essa resposta que você deu não está correta. Pense melhor e resolva corretamente.

T: *(O aluno resolve no papel). Fiz 78 vezes 3.*

P: Por que?

T: *Porque 6 vezes 3 é 18 e cada 6 carrinhos é 78. Aí eu fiz 78 vezes 3.*

P: Ta ótimo. Leia agora o 2º problema.

T: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Aqui é a mesma situação, 6 carrinhos custam...

T: *78 reais.*

P: E o problema quer saber o quê?

T: *(Pausa). Quanto ele pagou.*

P: Por quantos carrinhos?

T: *Por 3.*

P: Então, ele quer saber quanto custam 3 carrinhos. Você tem o preço de 6 carrinhos e quer saber o preço de...

T: *3 carrinhos.*

P: Como você faz?

T: *78 dividido por 3, deu 26. Agora tenho que fazer outra conta?*

P: Por que você dividiu 78 por 3? Por que 3?

T: *Porque 78 é o ... 3 carrinhos ia dá vinte e... seis. Porque a metade de 6 é 3.*

P: A metade de 6 é 3, e daí?

T: *E daí que 3 é a metade de 6, aí eu fiz 78 vezes 3 pra ver quanto é que dá.*

P: Ta, você já falou que 3 é a metade de 6. E os 78 reais?

T: *Eu quero dividir pelos 3 pra ver quanto que vai dá os 3 carrinhos.*

P: Veja esse esquema. Você tem aqui carrinhos e aqui os preços (aponto as duas colunas correspondentes às dimensões). Então 6 carrinhos custam 78 e 3 vão custar quanto?

T: *(Pausa). Não sei fazer.*

P: Então, vamos para a 3ª questão. Leia por favor.

T: *“André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos é 84 reais”.*

P: Ótimo. O que você fez?

T: *(Pausa). Se 4 carrinhos custam 84 reais, então eu tirei a metade.*

P: Não é a metade. Você multiplicou 2 vezes 84.

T: *Isso daqui eu fiz de cabeça. Eu pensei entendeu? Quanto seria o dobro de 168. Aí eu peguei e fiz 2 vezes 84 aí deu 168.*

P: Ta certa essa conta. Agora, como você concluiu, a partir desse cálculo que dava pra comprar 8 carrinhos?

T: *Eu fiz de cabeça.*

P: Mas, o quê? Dá pra contar pra mim?

T: *Não sei contar. Eu não lembro.*

P: Tudo bem. Leia o 4º problema.

T: *“Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 78 reais”.*

P: E você fez o quê?

T: *Eu fiz de cabeça porque eu sabia. Aí eu pensei 4 e 84, então dividido por 2 é 42.*

P: E daí, como você concluiu que dá pra comprar 2 carrinhos?

T: *(Pausa). Porque eu dividi. Porque eu fiz vezes. Não sei.*

P: Ta bom, e o 5º problema?

T: *“Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais”. Aí eu fiz 8... Não...*

P: Ta. O que o problema está pedindo?

T: *O preço de 8. Aí eu fiz 130 dividido por 5.*

P: O que você queria quando fez 130 dividido por 5?

T: *Ver o preço de um.*

P: E depois?

T: *Aí eu fiz a de vezes de cabeça.*

P: É mesmo? Você fez 26 vezes 8 de cabeça?

T: *Sim. Aí eu achei o preço de 8 carrinhos.*

P: Tudo bem. Leia e resolva esse outro problema.  
 T: *"Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"*  
 P: Você entendeu?  
 T: *Mais ou menos.*  
 P: Veja: 5 cadernos custam...  
 T: *18 reais.*  
 P: A professora tem quanto?  
 T: *234 reais.*  
 P: E ela quer saber quantos cadernos dá pra comprar. Se com 18 reais eu compro 5 cadernos, com 234 eu posso comprar mais ou menos cadernos?  
 T: *Mais.*  
 P: Dá pra resolver agora?  
 T: *Eu vou tentar. (O aluno resolve no papel). Eu dividi 18 por 5 e eu queria saber quanto era cada caderno. Ai depois eu faria 234, mas não dá a conta.*  
 P: E não tem uma outra maneira de você resolver, já que você não conseguiu fazer aquela divisão?  
 T: *(Pausa). Não consegui.*  
 P: Veja, eu vou fazer um esquema pra você: 5 cadernos custam 18 reais. Quantos cadernos custam 234 reais?  
 T: *(O aluno resolve no papel). Eu fiz uma continha 18 vezes 234.*  
 P: Por que?  
 T: *Porque eu queria saber... Não sei, dá branco. (Pausa). Não consigo.*  
 P: Ta bom, obrigada.

#### Andreza/5ª série B

PROFESSORA: Andreza, leia o 1º problema, por favor.  
 ANDREZA: *"Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"*  
 P: Você não leu a parte da gravura. Eu quero que você leia todo o problema.  
 A: *"Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais"*  
 P: Você entendeu o problema? Já lembrou?  
 A: *(Pausa).*  
 P: 78 reais é o preço de quê?  
 A: *6 carrinhos.*  
 P: E o problema quer o quê?  
 A: *Ele quer saber quanto é o preço de 18 carrinhos.*  
 P: Ótimo. Como você fez?  
 A: *Eu dividi 78 por 6.*  
 P: Por que? O que você queria saber com isso?  
 A: *Eu queria saber quanto custa cada um.*  
 P: Cada carrinho. Ótimo. E depois que descobriu isso, você fez o quê?  
 A: *Eu fiz 13 vezes 18. Cada carrinho não custa 13 reais? Então eu tinha que colocar 13 vezes 18 pra mim achar a resposta.*  
 P: A resposta é o preço de quanto?  
 A: *O preço dos carrinhos. Dos 18 carrinhos.*  
 P: Ta ótimo. Só que antes de multiplicar você somou, não é isso? 13 reais mais 13 reais mais... , 18 vezes.  
 A: *É.*

P: Você tem outra maneira de resolver esse problema?  
 A: *Eu não sei.*  
 P: Eu vou mostrar pra você um esquema aqui. Veja: 6 carrinhos custam 78 reais e você quer saber o preço de 18 carrinhos. Olha o esquema, não ajuda a fazer de outra maneira?  
 A: *Eu não tenho idéia.*  
 P: Não. Então leia o 2º problema.  
 A: *"João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais". Ai eu fiz assim: Se cada carrinho... é... se 6 carrinhos custava 78 reais, ai eu fiz... é... aqui era pra saber o preço de 3 carrinhos. Como eu já sabia que cada carrinho era 13 reais, eu fiz 13 vezes 3.*  
 P: Você conhece outra maneira de resolver?  
 A: *Juntando... fazendo assim 13 mais 13 mais 13. Só assim.*  
 P: Ta bom. Leia agora o 3º problema.  
 A: *"André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais"*  
 P: Veja bem: 84 reais é o preço de quê?  
 A: *De 4 carrinhos.*  
 P: O que André tem?  
 A: *168 reais.*  
 P: O que o problema quer saber?  
 A: *Se ele pode comprar?*  
 P: Quantos carrinhos ele pode comprar?  
 A: *4 carrinhos.*  
 P: Você respondeu que dava pra comprar 168 carrinhos.  
 A: *Não.*  
 P: Então corrija e me conta como deve ser esse cálculo.  
 A: *(Pausa). Não, eu não sei.*  
 P: De onde veio esse 21, o que é o 21?  
 A: *O 84 eu dividi por 4.*  
 P: E achou o quê?  
 A: *21.*  
 P: E o que é 21, então?  
 A: *21 reais (Pausa). Como eu tenho 168 reais e cada carrinho custa 21 reais. (Pausa). Ah! Então eu tinha que fazer assim não é... 21 mais 21,... até encontrar não é?*  
 P: Então faça isso e dê a resposta.  
 A: *(A aluna resolve no papel). Então ele pode comprar 8 carrinhos.*  
 P: Por que?  
 A: *Porque eu fiz aqui, 84: 4, 5, 6, 7, 8. (ela foi contando os 21).*  
 P: Ta ótimo. E a 4ª questão, leia por favor.  
 A: *"Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais"*  
 P: Sim, então agora ele tem somente 42 reais. Como você fez?  
 A: *(Pausa).*  
 P: Você tinha dado como resposta: 42 carrinhos. Imagina: se com 168 reais ele pode comprar 8 carrinhos, com 42 reais ele poderá comprar mais carrinhos ou menos carrinhos?

A: Eu respondi 42 carrinhos, mas não é. Ele poderia comprar 2 carrinhos. Porque eu somei 21 mais 21.

P: Ta ótimo. Leia o 5º problema.

A: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais". Ta errada a minha resposta?

P: Não. Acho que não. Bem, apareceu esse 26, que eu não sei o que ele significa.

A: Ah! Não, aqui eu dividi 130 por 5.

P: Pra saber o quê?

A: O preço dos carrinhos.

P: Quantos carrinhos?

A: Dos 8 carrinhos.

P: 8 carrinhos custam 26 reais?

A: Não, quero dizer. Pra saber o preço de um carrinho.

P: E depois?

A: Ai eu fiz vezes 8.

P: Ta ótimo. Não está aqui a divisão, mas eu já sei que você dividiu. Agora eu quero que você leia esse problema.

A: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A professora Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Você entendeu?

A: Não.

P: Então leia mais vezes e entenda.

A: (Pausa). Eu tenho que dividir 18 por 5, não é?

P: Você quer saber o quê?

A: O preço de um carrinho.

P: E depois, o que você vai fazer?

A: Pra eu descobrir eu vou ter que somar junto com esse (aponta o 234)... não, multiplicar. (A aluna resolve no papel). Olha, um caderno deu 3 reais.

P: 3 reais? Você tem certeza?

A: Sim.

P: Mas, você não terminou de dividir.

A: É... aí eu tenho que colocar um zero (Pausa). Ficou difícil.

P: Você conhece outra maneira de resolver?

A: (A aluna resolve no papel).

P: O que você está tentando fazer?

A: Eu estou fazendo 3...3...3... somando até 18 pra ver quanto dá, pra ver se eu descubro.

P: Descobre o quê? O que você está procurando?

A: (Pausa). Ah! Eu me enrolei toda.

P: O que você está procurando?

A: O preço de um caderno que eu vou somando pra ver quantos tem no 18.

P: Veja esse esquema: 5 cadernos custam 18 reais, quantos cadernos vão custar 234 reais? (Pausa). Esse esquema ajuda você?

A: Ajuda. (Pausa). Ajuda, mas eu não sei como que eu posso descobrir, não é?

P: Tudo bem. Muito obrigada.

### Daniele

PROFESSORA: Daniele, leia o 1º problema pra mim. DANIELE: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"

P: Você já leu o problema todo?

D: Sim.

P: Tem certeza?

D: Ah! "Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ta, agora leia todo o problema, completo.

D: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - 6 carrinhos: 78 reais".

P: Agora observe como você resolveu esse problema. Você já lembrou?

D: Sim.

P: Então, explica pra mim.

D: Peguei o 78 e dividi por 6.

P: Por que por 6?

D: Pra ver quanto dava um carrinho. Deu 13 reais.

P: E depois?

D: Depois eu coloquei 13 reais vezes 18 carrinhos, que era o que ele queria comprar. Ai eu fiz de vezes a conta e deu 234 reais.

P: Ta, então o que é 234 reais?

D: O preço de 18 carrinhos.

P: Agora eu queria saber se você tem uma outra maneira de resolver esse problema?

D: (A aluna resolve no papel). Peguei 6 carrinhos... é... eu peguei coloquei 18 reais, 18 carrinhos, aí eu peguei...

P: Não entendi. Fique calma, tranqüila. Vamos começar.

O que você quer saber no problema?

D: Quanto custa 18 carrinhos?

P: Quanto custa 18 carrinhos. E você faz o quê?

D: Ai eu fiz 6 mais 6 dá 12 e mais 6; 18. Ai eu coloquei 3 vezes 78, deu 234.

P: Ta. Então faça aqui o 3 vezes 6.

D: (A aluna resolve no papel).

P: Então, na verdade você fez essa multiplicação: 3 vezes 6 e depois 3 vezes 78. Por que você multiplicou por 3 o 78?

D: Porque 6 é 78 e eu fui ver quanto que era 18 carrinhos e aí eu coloquei 3 vezes é 18.

P: Leia agora o 2º problema completo.

D: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? 6 carrinhos custam 78 reais".

P: Como você fez?

D: Ai eu dividi primeiro 78 dividido por 6 aí deu 13. Ai eu multipliquei os 3 carrinhos e deu 39.

P: Ta ótimo. Agora, você teria outra forma de resolver?

D: (A aluna resolve no papel). Deu 26 reais.

P: A primeira resolução está correta. E a segunda, deu o mesmo resultado, 39 reais?

D: Não.

P: Então significa...

D: Que está errado.

P: Veja esse esquema: 6 carrinhos custam 78 reais. 3 carrinhos custam... Vai custar mais ou menos?

D: Menos.

P: É, você já sabe que dá 39, não é?

D: (Pausa). Fazer conta de menos.

P: Conta de menos?

D: 78 - 39?

P: Sim, mas agora você já tem esse resultado. O que eu estou perguntando é uma forma de resolver esse problema substituindo essa

resolução. É como se você não soubesse que o resultado é 31.

D: (Pausa). Não sei.

P: Tudo bem. Vamos para a 3ª questão. Leia o problema todo.

D: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? 4 carrinhos: 84 reais". Coloquei 84 reais vezes 2.

P: Ta, mas eu quero saber o que você pensou pra resolver assim. Veja: 4 carrinhos custam 84 reais. O que você quer saber?

D: Quantos dá pra comprar com 168 reais,

P: Isso. Então, você tem 168 reais e quer saber quantos carrinhos pode comprar. Então, você fez o quê?

D: (Pausa). Primeiro, eu dividi 168 por 4. Depois eu coloquei 84 mais 84, depois 84 vezes 2. Aí deu 2 vezes.

P: Daí, o que você concluiu?

D: (Pausa). Porque cada preço de 4 carrinhos é 84 aí 4 carrinhos mais 4 dá 8, e 84 mais 84 dá 168.

P: Ta bom. Agora leia a 4ª questão completa.

D: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Eu peguei 84 que é o preço de 4 carrinhos e dividi por 4, aí de 21.

P: Por que você dividiu?

D: Porque eu queria saber o preço de um carro. Aí deu 21. Aí eu peguei 42 e dividi... e... deu 2 vezes.

P: Você pegou 42 e dividiu por quanto?

D: Por... 42 eu dividi por... por 4 (Pausa). Peguei 84 e dividi por 2 aí deu 42.

P: E daí. Como você concluiu que dá pra comprar 2 carros?

D: Porque eu coloquei 21 vezes 2 aí deu 42. Eu estava pensando um número que dividido desse 42.

P: Como? Dividido?

D: Não, multiplicado que desse 42.

P: E que número foi esse?

D: O 2.

P: E o que ele significa?

D: Que deu pra comprar 2 carrinhos.

P: Ta bom. Leia 5ª questão agora.

D: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais".

P: Como você fez?

D: 5 carrinhos dividido por 130 aí deu 26 cada carrinho.

P: 130 você dividiu por 5.

D: Aí eu peguei o 26 que é o preço de cada carrinho, vezes 8, os carrinhos que queria comprar aí deu 208.

P: Muito bem, ótimo. Agora veja esse problema, eu gostaria que você lesse com bastante atenção e resolvesse pra mim.

D: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Entendeu?

D: Não.

P: Vamos entender o problema. Vamos ler novamente?

D: (A aluna lê o problema novamente).

P: Então, 5 cadernos custam...

D: 18 reais.

P: E o que ela quer saber?

D: Quanto... a professora Cleide tem 234 reais, quantos cadernos ela pode comprar?

P: Sim, e o que você tentou fazer?

D: 18 dividido por 5. Aí eu vejo o preço de um caderno.

P: Ta, só que você não concluiu a divisão.

D: É, não é exata.

P: Então, você vai tentar resolver de outra maneira?

D: (A aluna resolve no papel).

P: E então?

D: Não consegui.

P: Vamos ver. Olha esse esquema: 5 cadernos custam 18 reais. Quantos cadernos custam 234 reais?

D: (Pausa).

P: E então? Conseguiu?

D: Não.

P: Tudo bem. Obrigada.

### Fernanda/5ª série F

PROFESSORA: Fernanda, leia o 1º problema completo pra mim.

FERNANDA: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"

P: Esse é o 1º problema? Só isso?

F: Sim.

P: E essa parte da ilustração?

F: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque: 6 carrinhos: 78 reais".

P: Relembre agora e explique pra mim, de que forma você resolveu.

F: (Pausa). Porque 6 carrinhos custam 78. Isso quer dizer que 18 são 3 vezes 6, então eu multipliquei 8 vezes 3.

P: Ótimo. Você tem uma outra forma de resolver esse problema?

D: (Pausa). Não.

P: Não. Então leia o 2º problema completo.

D: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?" Então eu dividi 78...

P: Mas, você já leu todo o problema?

D: "A marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Agora leia todo o problema pra mim.

D: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ótimo. Você fez como?

D: (Pausa). Eu dividi 78 por 3.

P: Por que você dividiu por 3?

D: Porque é a metade dos carrinhos. Se são... 6 carrinhos são 78 reais, eu dividi por 3.

P: Mas, quando você dividi por 3, você está dividindo pela metade?

D: (Pausa).

P: Esse 26 que você achou corresponde a metade dos carrinhos?

D: (Pausa).

P: Qual é o preço de 6 carrinhos?

D: 78.

P: 78 reais. E você achou aqui...

D: 26

P: Será que 26 corresponde ao preço de 3 carrinhos?

D: Não. (A aluna resolve no papel). Digamos que eu dividi 78 por 2.

P: Por que 2?

D: Porque é metade. Pra fazer a metade.

P: Você dividiu 78 por 2. O que é o 2?

D: É o divisor. Ele dividiu o preço. São os carrinhos.

P: São os carrinhos? Você quer o preço de quantos carrinhos?

D: (Pausa). 3 carrinhos. (Pausa). Porque 2 é a metade. Pra mim saber a metade dos carrinhos eu dividi por 2. Aí, depois, o resultado que deu eu multipliquei por 2 pra ver se dava o 78.

P: Ta, é a prova real. Então, o que é o 39 que você achou?

D: Preço de 3 carrinhos.

P: Ótimo. Leia o 3º problema.

D: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais".

P: Então, vamos recapitular. 4 carrinhos custam...

D: 84 reais.

P: E o que o problema diz?

D: Que André tem 168 reais e quantos carrinhos ele pode comprar?

P: Como você resolveu?

D: Dividi 168 por 84.

P: O que é 168?

D: É o dinheiro que André tem.

P: Ótimo. E o 84?

D: É o preço de 4 carrinhos.

P: Nessa divisão, o cálculo não está correto. Não é 22.

D: (A aluna resolve no papel). Eu fiz a conta errada. Na revisão é...

P: Tudo bem. Esqueça essa que você fez errada. Me conta só o que você fez agora.

D: O que eu fiz agora? Eu multipliquei 84 por 2.

P: Por que?

D: Pra dá... Eu queria que desse o número exato, como 168.

P: E daí?

D: Então deu 168 o resultado. E o 2 vezes 84 quer dizer 8 carrinhos, porque cada 4 carrinhos são 84.

P: Ótimo. Então, leia agora o 4º problema completo.

D: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? 4 carrinhos: 84 reais".

P: Então, o que o problema quer saber mesmo?

D: Quantos carrinhos ele pode comprar com 42 reais.

P: Com 42 reais. E você fez o quê?

D: Divisão. Eu dividi 84 por 42.

P: Por que você dividiu 84 reais por 42 reais?

D: Ah, eu fiz errado.

P: Está correto seu cálculo. Está correta a resposta também. Eu só quero saber porque você optou por esse procedimento.

D: (Pausa). É que na hora de saber... Não... Na hora de fazer a conta a gente pensa e faz, só que a gente não sabe como que a gente fez.

P: (Risos!) Então, trate de pensar e achar uma razão porque você escolheu essa maneira.

D: Digamos que eu.. Que a metade de 84 é 42.

P: Mas, como você percebeu isso?

D: Dividi de cabeça.

P: Fernanda, teria alguma outra maneira de resolver esse problema?

D: Sim, teria. (A aluna resolve no papel). Eu dividi 84 por 2, deu 42.

P: Por que dividir por 2?

D: Pra mim confirmar se a metade de 84 é 42.

P: Ta, esse é o cálculo mental que você já havia feito. Vamos ler a 5ª questão?

D: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais".

P: O que você quer saber nesse problema?

D: Quanto devo pagar em 8 carrinhos.

P: E você fez que cálculo?

D: Eu multipliquei 130, 8 vezes.

P: Só que 130 é o preço de quantos carrinhos?

D: 5 carrinhos... Fiz errado.

P: Então pense e resolva.

D: (A aluna resolve no papel). 5 carrinhos são 130 reais e, então, eu dividi 130 por 3. É, porque em 8 dá pra tirar 5 não dá? Aí já tem 130. Sobram 3 carrinhos. Aí eu dividi 130 por 3.

P: Mas, por que dividir?

D: Eu dividi por 3... porque eu queria o preço de 3 carrinhos pra somar com os outros 130.

P: Mas, não é dessa forma que você vai saber o preço de 3 carrinhos. Você sabe o preço de um carrinho?

D: (Pausa). Não entendi. Eu dividi 130 por 3 porque eu queria o preço de 3 carrinhos. E o preço de 3 carrinhos que eu achei foi 49.

P: Ta bom. Eu vou dar pra você um outro problema. Leia pra mim por favor.

D: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?".

P: Você entendeu?

D: Vou tentar entender. (Pausa). Ainda não sei.

P: Vamos ler novamente?

D: (A aluna lê o problema novamente). Eu dividi 234 por 18.

P: Ta, e daí?

D: Achei 13. Acho que ela pode comprar... deixa ver...(Pausa).

P: Pense melhor.

D: Primeiro eu dividi 234 por 18.

P: O que é 234?

D: É o dinheiro que a profª Cleide tem.

P: E 18?

D: 18 é o preço de 5 cadernos.

P: Daí você achou 13. O que é o 13?

D: É o resultado final da conta.

P: Tudo bem. E daí?

D: Aí eu multipliquei 13 por 5.

P: Por que você multiplicou 13 por 5?

D: (Pausa). Eu acho que... eu acho que eu multipliquei por 5 pra poder dar o resultado de cadernos. E deu 65 cadernos que ela podia comprar com 234 reais. Ta errado?

P: Ta ótimo. Tudo bem. Muito obrigada.

**Marcelo/5ª série A**

PROFESSORA: Marcelo, leia o 1º problema pra mim.

MARCELO: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”*

P: Só isso. Aí já acaba o 1º problema?

M: *Sim.*

P: E essa informação? (Aponto a gravura).

M: *Ah! A informação está escrito: “Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Agora eu quero que você leia todo o problema, completo.

M: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Agora, eu quero que você lembre como resolveu e depois explique pra mim. A resposta está correta. Eu só quero saber como você pensou pra resolver.

M: *Eu dividi 78 que é o preço de 6 carrinhos juntos. Fiz dividido por 6.*

P: Você dividiu por 6 para quê?

M: *Pra ver quanto... pra... pra o resultado fazer vezes...*

P: Mas, o resultado é o quê?

M: *13 que o preço de cada um dos carrinhos.*

P: Ótimo.

M: *Aí eu fiz 6 vezes 13 que dá 78. O preço de 78 reais pelos carrinhos. Eu descobri que cada carrinho é 13.*

P: Ta ótimo. E o que você quer no problema?

M: *Quero quanto ele pagou.*

P: Por quanto?

M: *Por 18 carrinhos.*

P: E como você fez?

M: *13 vezes 18, ou seja “mais”, aí somei aqui, aí deu 236 reais e zero centavos.*

P: Ta. Você fez através da soma. Você teria uma outra forma de resolver esse problema?

M: *Eu acho que teria aqui. (O aluno resolve no papel).*

P: Vamos voltar ao problema? Você tem o preço de quê?

M: *De 6 carrinhos: 78 reais.*

P: E o que o problema pede?

M: *O preço de 18 carrinhos. (O aluno resolve no papel). Terminei.*

P: Como você fez?

M: *Fiz... 78 mais 78 que é o preço de 6 carrinhos, dá 12 carrinhos deu 156. 156 reais mais 78 deu 234. Porque 234 reais é o preço de 18 carrinhos.*

P: Por que você somou 78 três vezes e não 4 ou 5? Por que 3?

M: *Porque eu acho que não daria. Porque ia passar da... ia passar do... Como é que eu vou falar?(Pausa). Ia passar dos carrinhos que ele queria, só 18. E ia passar de 18.*

P: Mas, você ainda não me respondeu, por que 3 vezes?

M: *(Pausa). Porque 6 carrinhos tem o preço de 78 reais.*

P: E daí? (Risos)

M: *E daí, somando 6 mais 6 mais 6 dá 18 carrinhos, é que dá isso.*

P: Ta ótimo. Vamos para a 2ª questão?

M: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais”. Como no exercício anterior, cada carrinho era 13*

*reais, fiz aqui 3 vezes 13. Ou seja, eu fiz 13 mais 13 mais 13 deu 39.*

P: O que é 39?

M: *39 reais é os 3 carrinhos.*

P: É o preço de 3 carrinhos. Teria alguma outra forma de resolver esse problema?

M: *Acho que tem. (Pausa). Não consegui.*

P: Então deixa eu mostrar esse esquema pra você. Olha 6 carrinhos custam 78 reais, 3 carrinhos irão custar...

M: *39 reais.*

P: 39 porque você já sabe. Mas eu queria saber se, por esse esquema, você teria uma outra forma de resolver.

M: *(Pausa). Eu fiz 78 dividido por 3 que deu 26.*

P: Deu 26. Está certo? Deu a mesma resposta?

M: *Não. Está errado.*

P: Por que você dividiu por 3?

M: *Porque eu achei assim: 78 dividido por 6 que dá 39. Aí eu fiz 78 dividido pela metade de 6 que é 3 e era pra dá 39, mas não deu.*

P: Pela metade de 6. Ta bom, vamos para a 3ª questão.

M: *“André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.*

P: Lembra como você fez?

M: *Fiz assim... Fiz 168, ele quer comprar carrinhos não é? Com 84 reais dá pra comprar 4. Ele tinha 168 reais. Aí daria pra ele comprar 8 carrinhos da marca Flash.*

P: Ta ótimo. Teria outra forma de resolver?

M: *Não. Essa não teria não.*

P: Então, vamos ler a 4ª questão?

M: *“Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais”. Com 42 reais, quantos carrinhos ele... Com 84 reais daria pra ele comprar 4 carrinhos, mas Paulo tem apenas 42 reais, o que ele faz? Ele fez 2 vezes 2, quatro, daria 84 reais. 84 reais... (Pausa). 4 menos 2 é 2. aí daria metade de 84, dividido por 2 que dá 42, isso. Daria 42, daria pra ele comprar apenas 2 carrinhos.*

P: Ta ótimo. Leia a 5ª questão agora.

M: *“Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais”.*

P: Como você fez?

M: *130 dividido por 5 que dá... não.*

P: Você dividiu 130 reais por 5. Por que essa divisão?

M: *Acho que daria o preço de cada carrinho. Daria 26 reais. Depois somava 26... 5 vezes 26 que deu 130. Depois pega 130 reais mais 26 mais 26 mais 26 que daria 208 reais.*

P: Agora, Marcelo, leia esse problema.

M: *“Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”*

P: Então, você entendeu?

M: *Entendi.*

P: Resolva, por favor.

M: *(O aluno resolve no papel). Eu não estou conseguindo fazer. Estou em dúvida.*

P: O que você tentou fazer?

M: *Fazer assim: 18 dividido por 5.*

P: Por que?

M: Porque eu acharia o preço de cada caderno, porque o preço de 5 é 18 reais

P: E você conseguiu dividir?

M: Eu não consegui.

P: Então, tente fazer de outra maneira. Volte ao problema.

M: (Pausa). Não consegui.

P: Veja esse esquema: 5 cadernos custam 18 reais.

A prof<sup>a</sup> tem 234 reais. Ela quer saber quantos cadernos pode comprar. Veja se esse esquema ajuda você.

M: (O aluno resolve no papel). Com 5 reais dá 18 cadernos. Aí eu fiz 20. Daria 20 vezes 18 daria 260 mas passaria do limite de 234 reais. Aí 15 cadernos vezes 18 passou ainda. Agora eu vou fazer 14 vezes 18 pra ver se dá certo. (Pausa). Deu 252.

P: E agora, o que você vai fazer?

M: Agora eu vou ver se dá certo o 13... (O aluno resolve no papel).

P: (O aluno erra os cálculos. Eu ajudei a corrigir).

M: Deu 234.

P: Tudo bem. Agora eu quero que você me explique, o que concluiu disso.

M: Eu concluí que 13 vezes 18 dá 234. Que a professora poderia comprar somente 13 cadernos. É 13 cadernos.

P: Com 18 reais ela compra 5 cadernos. E, com 234 reais ela só poderá comprar 13?

M: 26.

P: Por que 26?

M: O dobro de 13.

P: Por que o dobro?

M: Não sei. Eu não sei como explicar.

P: Então tudo bem. Obrigada Marcelo.

### Pedro Henrique/5<sup>a</sup> série A

PROFESSORA: Pedro Henrique, leia o 1<sup>o</sup> problema pra mim.

HENRIQUE: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"

P: Só isso?

H: É.

P: E essa parte que tem na gravura? Faz parte do problema. Leia agora o problema completo.

H: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Agora, explique pra mim, como você resolveu.

H: Ele... ele comprou 18 carrinhos e 6 carrinhos custam 78 reais. Aí 18 vezes 78. Foi assim que eu fiz.

P: Mas, veja bem, 78 reais é o preço de 6 carrinhos.

H: Era pra eu fazer 78 vezes 6, não era? (Pausa). Ou então dividido.

P: Não, não faça várias operações aleatoriamente. Entenda o problema e veja o que é preciso fazer. Veja: quanto custam 6 carrinhos?

H: 78 reais.

P: E o problema quer o quê?

H: Ta perguntando quanto ele pagou em 18 carrinhos.

P: Então pense um pouco nisso e tente resolver.

H: (O aluno resolve no papel). Pode fazer 78 dividido por 6 pra saber quanto dá cada carrinho?

P: Pode. E depois?

H: Aí depois eu vou fazer o preço de um carrinho vezes 18.

P: Ta ótimo. Mas, além dessa forma você tem uma outra maneira de resolver?

H:(Pausa). 13 reais cada carrinho. (Pausa). Então eu faço 18 vezes 13.

P: Agora leia o 2<sup>o</sup> problema completo.

H: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Então, lembrou? O que você fez?

H: Aqui, eu acho que eu tenho que fazer 78 dividido... é... dividido por 3.

P: Foi isso que você fez, por que?

H: É... 7 dividido por 3 dá 2...

P: Não é necessário que você me explique a conta, o cálculo. Por que você escolheu o 3 pra dividir?

H: (Pausa).

P: Ta, o que é 78?

H: Preço de 6 carrinhos.

P: E o que é o 3 aí?

H: 3 são os carrinhos que ele vai comprar.

P: Ele quer saber o preço de 3 carrinhos. Veja esse esquema: 6 carrinhos custam 78 reais. Qual o preço de 3 carrinhos?

H: (O aluno resolve no papel). Eu dividi 78 por porque aqui 3 é o dobro de 6.

P: 6 é o dobro de 3.

H: Então, aí eu fiz 78 dividido por 2, porque 6 é o dobro de 3.

P: Ta ótimo. Vamos ver a 3<sup>a</sup> questão.

H: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? 4 carrinhos é 84 reais".

P: Como você fez?

H: Fiz 168 dividido por 84 e achei 2.

P: Ta, mas veja bem, com 84 reais você compra...

H: 4 carrinhos.

P: E com 168 reais você acha que pode comprar mais carrinhos ou menos carrinhos?

H: Mais.

P: Mais carrinhos. Só que você respondeu 2 carrinhos.

H: (Pausa). O aluno tenta resolver, mas não consegue.

P: Vamos para o nosso esquema. Com 84 reais eu posso comprar 4 carrinhos, com 168 reais eu posso comprar quantos carrinhos?

H: (Pausa)...

P: Reveja o esquema.

H: Eu ia fazer 168 dividido por 84 que dá 2.

P: E daí?

H: E daí... tem que fazer assim... tem que fazer 2 vezes 4.

P: Muito bem. Vamos ler a 4<sup>a</sup> questão agora.

H: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Eu dividi 84 por 42. Agora eu tenho que fazer...

P: Ta, aí você achou 2. O que é esse 2?

H: 2 é o dobro de 4. 4 é o dobro.

P: Mas, como você pensou?

H: É que 84 é o dobro de 42, não é? Então eu fiz 2 dividido por 4.

P: 4 dividido por 2.

H: Sim. Isso.

P: Tudo bem. Vamos ler a 5<sup>a</sup> questão, agora?

H: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais".

P: Então, quanto custam 5 carrinhos?

H: 130 reais.

P: E você quer saber o quê?

H: Quanto é o preço... quanto eu vou pagar se eu comprar 8 carrinhos.

P: Ótimo. E como você fez?

H: 130 vezes 8.

P: Por que? Por que 8?

H: (Pausa).

P: Você me falou que queria saber o preço de 8 carrinhos e multiplicou 8 por 130. Mas 130 é o preço de 5 carrinhos. Veja bem.

H: Então, eu tenho que fazer 8 vezes 5.

P: Você resolveria um outro problema pra mim?

H: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A prof<sup>a</sup> Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Você entendeu o problema? O que ele diz?

H: Que com 18 reais eu posso comprar 5 cadernos, e a prof<sup>a</sup> Cleide tem 234 reais. Quantos carrinhos ela pode comprar.

P: Você pode resolver?

H: Eu tenho que fazer 18 reais dividido por 5 cadernos, pra achar quanto custa cada caderno, não é?

P: Não sei, pode ser.

H: (O aluno resolve no papel). Eu achei 3 reais cada carrinho. É porque 18 dividido por 5 dá 3... (pausa).

P: Veja o esquema. Com 18 reais é possível comprar 5 cadernos, ta vendo aqui? Com 234 reais é possível comprar quantos cadernos? Eu vou poder comprar mais que 5 ou menos que 5 cadernos?

H: Mais que 5.

P: Quantos?

H: (Pausa). Eu tenho que fazer 5 vezes 234 ou dividido... Eu tenho 234 reais e cada caderno custa 3 reais.

P: Cada caderno não custa 3 reais. A divisão não está correta.

H: Acho que não consigo. Não sei.

P: Tudo bem. Obrigada.

### Fernando/5ª série A

PROFESSORA: Fernando, leia o 1º problema, por favor.

FERNANDO: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"

P: Eu quero que você leia todo o problema. Você não leu essa parte da ilustração.

F: Ah! Ta. "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ótimo. Como você resolveu?

F: Eu peguei, dividi o preço pelo tanto de carrinhos que dava pra saber quantos carrinhos.

P: Dividiu que preço?

F: O preço dos carrinhos da marca Tanque, que era 6 carrinhos 78 reais, então eu dividi por 6 pra saber quanto era o valor unitário de cada carrinho.

P: E depois?

F: Daí eu peguei e como eu comprei 18 carrinhos eu fiz 13 vezes 18.

P: Ótimo. Agora eu gostaria de saber se você tem uma outra forma de resolver esse problema.

F: (Pausa). Faz vezes 3.

P: Por que?

F: (O aluno resolve no papel). Eu peguei fiz 78 vezes 3, porque se cada carrinho é 78 reais...

P: Cada carrinho?

F: É 6 carrinhos é 78 reais eu fiz vezes 3 que dava 18 e deu o resultado certo.

P: Ta, você multiplicou 78 por 3. Por que 3 e não 4, 5 ou 6?

F: Porque 3 vezes 6 é que dá 18.

P: Ótimo. Agora leia o 2º problema, por favor.

F: "É a mesma marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais. João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?". Eu peguei e coloquei 78 dividido por 6. Então eu fiz vezes 13.

P: Quem multiplicado por 13?

F: 3 vezes 13.

P: Ta. Então você achou o preço de um carrinho, como fez na 1ª questão. E depois?

F: Vezes o resultado. Então eu fiz o resultado vezes 3.

P: Por que 3?

F: Porque ele comprou 3 carrinhos.

P: Ta, você quer saber o preço de 3 carrinhos. Tem uma outra forma de resolver?

F: Tem... (Pausa). Eu fiz 78 dividido por 3.

P: Por que?

F: Porque eram 6 carrinhos por 78 reais. Então, como é a metade dos carrinhos eu tenho que...

P: Quanto é a metade dos carrinhos?

F: Como ele só comprou 3 é a metade dos carrinhos. Não. Eu errei. (Pausa). Como 6 carrinhos é 78 reais e eu queria 3, 3 é a metade de 6, então eu dividi por 2.

P: Ótimo. Leia agora a 3ª questão.

F: "Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais. André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar?"

P: Sim. E você respondeu...

F: 84 dividido por 4.

P: Você dividiu 84 por 4, por quê?

F: Porque... 84 por 4... é porque como ele tinha... Espere aí que eu esqueci o raciocínio...(Pausa). Eu queria saber o valor unitário de cada carrinho, daí eu peguei e fiz 168 reais que é o que ele tinha pelo valor de cada carrinho que deu 8 carrinhos.

P: Ótimo. Tem outra forma de resolver?

F: Tem. (O aluno resolve no papel). Eu fiz 168 dividido por 84, que é o dinheiro que ele tinha pelo preço de 4 carrinhos. Daí deu 2. Daí fiz vezes 4 e deu 8.

P: Tudo bem. Leia a 4ª questão completa.

F: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash -Preço de 4 carrinhos: 84 reais".

P: Como você fez?

F: Eu fiz 84 dividido por 4 pra achar o preço de um carrinho. E 42 dividido por 21.

P: Procedeu da mesma maneira que na 3ª questão.

F: Sim.

P: Tem uma outra maneira de resolver?

F: Tem. (Pausa). Fiz 84 dividido por 42, que é o preço de 4 carrinhos dividido pelo preço que o menino tinha para comprar carrinhos. E achei 2.

P: Ta bom. A 5ª questão, agora.

F: "Marca Basculante - Preço de 5 carrinhos: 130 reais. Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar?". Eu fiz 130 dividido por 5 pra achar o valor de cada um e fiz vezes o tanto de carrinhos que ele queria comprar e deu 208.

P: Ótimo. Está certíssimo. Agora eu gostaria que você lesse esse problema pra mim.

F: Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?

P: Ela irá comprar, com 234 reais, mais ou menos que 5 cadernos?

F: Mais. (O aluno resolve no papel). Dividi 234 reais por 18 reais e achei 13.

P: E daí?

F: Agora... agora a conta é de... (Pausa). Eu achei 13, agora eu estou meio... aqui eu faço... Que nem a profª compra 5 cadernos por 18 reais. Então eu acho que ela compra 13 cadernos.

P: 13 cadernos com 234 reais?

F: Sim.

P: Veja esse esquema: 5 cadernos custam 18 reais. Com 234 reais posso comprar...

F: Ah! Deixa eu ver. Vai ser 13 vezes alguma coisa.

P: Por que você acha isso?

F: Porque eu fiz aqui o 234 reais da profª com os meus 18, eu dividi, deu 13. Então eu vou ter que fazer o 13 vezes 18.

P: Por que?

F: Porque 18 é o preço que eu tinha. (Pausa).

P: Veja, você já dividiu 234 por 18. e agora você vai multiplicar o 13 por 18 novamente?

F: Não. Eu não sei.

P: Ok. Muito obrigada.

### Vanessa/5ª série F

PROFESSORA: Vanessa, leia o 1º problema, por favor.

VANESSA: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?"

P: Já leu todo o problema? Não é só isso.

V: Sim. É só... Não. "Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Agora leia todo o problema, completo.

V: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais.

P: Relembrou o problema?

V: Não. (A aluna lê o problema novamente).

P: Me conta como você fez.

V: Se ele comprou 18 carrinhos e é 78 reais, eu tenho que fazer... dividir.

P: O que é 78 reais?

V: 6 carrinhos custa 78 reais. Então, se eu dividir 78 por 6, eu vou chegar ao resultado quanto cada um... o preço de cada um carrinho.

P: Ótimo. E depois?

V: Se ele comprou 18 carrinhos. 78 mais 78 que é 6 mais 6 que seria 12 carrinhos eu vou ao resultado 234.

P: Ta, você somou 78, quantas vezes?

V: Duas.

P: Mas, me parece que tem outro 78 aí na sua resolução.

V: Isso, que daria 18... 18 carrinhos. Aí o resultado deu 234.

P: Eu não entendi muito bem. Por que você somou 78 mais 78 mais 78?

V: Porque... é assim: se 6 carrinhos custam 78 eu vou ter que, primeiro, dividir 78 por 6 pra saber quanto custa cada carrinho. Depois eu tenho que somar 6 mais 6 mais 6, não dá 12? Então...

P: Não. 6 mais 6 dá 12.

V: Aí deu 78. 78 mais 78 deu 156 e mais 78 deu 234.

P: Teria outra forma de resolver esse problema?

V: Não. Eu acho que não.

P: Então, o que é 234?

V: É quanto ele pagou. Ele pagou 234 em 18 carrinhos.

P: Ótimo. Agora leia o 2º problema completo.

V: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Aqui você quer saber o quê?

V: Eu quero saber o preço de 3 carrinhos. Então, eu já sei que 6 carrinhos custam 78 reais, então eu sei que cada carrinho custa 13 reais e 13 vezes 3, que é cada carrinho vai dá 39.

P: Então, o que é 39?

V: 39 é quanto ele pagou pelos 3 carrinhos.

P: Veja: no 1º problema você achou o preço de um carrinho, mas esse valor você não usou para chegar na resposta, no 234. Você percebe? Aqui no 2º problema você usou.

V: É porque não dá pra mim fazer o resultado de 6 carrinhos: 78 dividido por 3 porque ele só quer 3 e não 6.

P: Eu gostaria que você resolvesse esse problema da mesma maneira que você resolveu o 1º. Quero que você analise novamente e tente resolver de uma outra maneira.

V: (Pausa). Não consegui porque 78 dividido por 6 dá 13 e é o preço de um carrinho. Pra mim saber o preço de 3 carrinhos eu tenho que fazer vezes... a... a conta de vezes.

P: Ta, isso é o que você já havia feito, e está correto. Mas, o que você fez agora a lápis?

V: Eu tentei fazer... dividir mas só que não ia dar certo. 78 dividido por 2.

P: Por que por 2?

V: Porque seria metade de 78. Mas eu acho que não ia dar certo.

P: Por que não?

V: Porque eu não ia chegar ao resultado certo.

P: Mas, vamos ver o que você fez. Vejamos o cálculo: você dividiu 7 por 2, deu 3. Depois dividiu 18 por 2...

V: É aqui seria 9, deu 39, aqui daria zero.

P: Qual foi o resultado, então?

V: 39. Mas... É deu certo.

P: Você tinha errado nos cálculos. Agora me conta o raciocínio. Por que você dividiu 78 por 2.

V: Porque seria a metade de 78.

P: Por que você queria a metade de 78 reais?

V: Ah! Porque... , não sei.

P: Vamos voltar ao problema. 78 reais é o quê?

V: É o preço de 6 carrinhos.

P: E você quer o quê no problema?

V: Eu quero... de 3 carrinhos. Então, 78 é 6 carrinhos. Se eu dividir vai dá 39, porque é a metade, que seria o preço de 3 carrinhos.

P: Tudo bem. Leia agora o 3º problema.

V: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Se André tem 168 reais e 4 carrinhos custam 84 reais e ele quer comprar... ele quer saber quantos dá. Então eu somo 4 carrinhos, 84 mais 84 que ele comprou 8 carrinhos. Dá 168 reais, então dá pra comprar 8 carrinhos.

P: Ta bom. Agora leia o 4º problema.

V: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos ele poderá comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Seria o mesmo problema, ele tem 42 reais e ele quer saber quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar. Se 4 carrinhos é 84 reais, então eu tenho que fazer a conta de menos pra dá 42. Seria 84 menos 42. Ai ele pode comprar 2 carrinhos.

P: Por que?

V: Porque 84 reais... (Pausa)... Ele só tem 42 reais, então, se 84 menos 42 dá 42, vai dar exato o número do dinheiro que ele tem, então a metade de 84 é 2 carrinhos.

P: A metade de 84 é 42.

V: Isso que daria 2 carrinhos porque 4 menos 2 dá 2.

P: Ótimo. Leia agora o 5º problema.

V: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais". Ele quer comprar 8 carrinhos e o preço de 5 carrinhos é 130 reais, então eu faço 130 dividido por 5.

P: Para quê?

V: Pra mim chegar ao resultado de... pra mim chegar ao resultado.. (pausa).

P: Vamos ver. Você dividiu 130 por 5, por quê?

V: Porque eu pensei que 130 reais dividido por 5 carrinhos, ai daria 26.

P: O que é o 26?

V: 26 é o resultado de quanto ele ia pagar. Ele ia pagar 26 reais em 8 carrinhos.

P: Em 8 carrinhos? Veja bem, 5 carrinhos custam 130 reais. Então 8 carrinhos você acha que custa mais ou menos que 130 reais?

V: Mais.

P: Então, seria 26? O que ele significa?

V: Eu imagino assim, que ele ia pagar 26 reais...

P: Por quantos carrinhos?

V: (Pausa). Por... por cada carrinho?

P: O que você acha?

V: Eu acho que é, porque 26 vezes 5 dá 130, mas ai eu errei porque era pra mim ter feito mais 3 carrinhos.

P: Você pode fazer agora.

V: (A aluna resolve no papel). Dá 208.

P: Então, o que é 208?

V: É 8 carrinhos. Ele ia pagar 208 em 8 carrinhos. E cada carrinhos ia custar 26 reais.

P: Agora eu gostaria que você lesse esse outro problema.

V: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?".

P: Você entendeu?

V: (A aluna lê novamente o problema). Pausa. Eu estou tentando chegar no resultado que dá 234. Ai depois, esse 234 eu vejo quantos cadernos tem 234.

P: O que o problema diz?

V: Com 18 reais compro 5 cadernos.

P: Então, você já sabe que 5 cadernos custa 18 reais. E a professora Cleide tem quanto?

V: 234 reais.

P: E o que você quer saber?

V: Eu quero saber... aqui 18 vezes 15 deu 230 e sobra 4 reais.

P: Mas, por que você fez 18 vezes 15?

V: Porque eu quero saber sempre

### Thales/5ª série A

PROFESSORA: Thales, leia o 1º problema pra mim, por favor.

THALES: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?".

P: Você já leu todo o problema?

T: Já.

P: Não. E essa parte da ilustração?

T: "Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ta. Agora leia todo o problema, completo.

T: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais". Ai eu fiz 3 vezes 78 mais 3 que eu tinha somado da outra vez, ai deu 232, ai eu peguei somei mais esse daí que deu esse resultado. Ai eu coloquei aqui (aponta para o traço no enunciado do problema que corresponde à resposta).

P: Mas, veja bem, o que 78?

T: 78 desse aqui (aponta na ilustração) 6 carrinhos.

P: Mas o que é 78?

T: 78 reais é esse?

P: É o preço de 6 carrinhos, não é?

T: Sim. 78 é o preço de 6 carrinhos.

P: Ótimo. O resultado está correto. Eu queria saber por que você somou esse 78, 3 vezes?

T: Porque... agora eu não sei explicar.

P: Por isso é necessário que você relembre e entenda o problema.

T: (Pausa). Por que eu somei 3 vezes não é? Pra dá o resultado, porque aqui ta pedindo 18 carrinhos. Ai eu fiz 78 três vezes, ai deu esse resultado aqui.

P: Mas, por que 3 vezes, e não 4 ou 5 vezes?

T: (Pausa). O preço de 6 carrinhos é 78 reais, não é? Então, para 18 carrinhos tem que ser 3 vezes, que dá 78 e eu peguei e somei deu 232.

P: A 2ª questão agora.

T: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais". Então, ai tem que fazer... deixa eu ver...

P: Esse você vai fazer agora porque estava em branco.

T: (O aluno resolve no papel). Eu estou tentando fazer a conta que eu ainda não consegui.

P: Veja o problema aqui.

T: João comprou apenas 3 carrinhos.

P: O que o problema quer saber?

T: O preço de 3 carrinhos.

P: E o que o problema está dizendo?

T: O preço de 6 carrinhos.

P: Então você sabe o preço de 6 carrinhos que é 78 reais e quer o preço de...

T: De 3.

P: E o que você fez aqui?

T: Eu fiz 17 mais 17, aí é 7 mais 7 é 14.

P: Por que você somou 17 mais 17? Por que tentou isso?

T: Porque eu tentei, pra ver se dá o resultado de 78.

P: Então você está somando números pra chegar no 78. E esses números tem que ser iguais?

T: Não.

P: E se uma dessas somas der 78, o que você vai concluir?

T: O resultado é esse.

P: Qual vai ser o resultado?

T: Vai ser metade desse daqui (O aluno aponta o 78 reais).

P: Como, não entendi, qual será o resultado do problema?

T: De... do que, olha: 6 carrinhos é 78 então 3 tem que ser metade de 78.

P: E você não sabe achar essa metade de 78?

T: Eu estou tentando achar.

P: Através da soma?

T: Sim (E o aluno continua somando valores).

P: Eu acho que já entendi o que você quer fazer. A gente pode passar para a 3ª questão.

T: André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Ele tem 168 reais. Então aqui vai dá 84 mais 84, vai dá 168, então daria pra ele comprar 2 carrinhos.

P: O que é o 84?

T: É 4 carrinhos.

T: É o preço...

T: de 4 carrinhos.

P: Veja bem, com 84 reais quantos carrinhos podem ser comprados?

T: 4

P: E com 168 reais compram-se mais ou menos carrinhos?

T: Mais, é 8.

P: Por que 8?

T: Porque com 84 reais ele compra 4 carrinhos, mais 84 são 168, então vai ser mais 4 carrinhos, então vai dá 8 carrinhos ao todo.

P: Ótimo. Leia a 4ª questão, por favor.

T: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Aí a resposta que eu fui colocar foi "nenhum carrinho" não é? Porque 42 para 84 não dá pra ele comprar carrinho.

P: Mas, com 84 reais quantos carrinhos ele compra?

T: Com 84 reais ele compra 4.

P: E com 42 reais?

T: Ah! Ele compra 2.

P: Por que 2?

T: Porque, olha metade.

P: Você não tem nenhuma conta.

T: Fiz de cabeça.

P: Então, organize aí no papel.

T: (O aluno faz os cálculos no papel).

P: Pode ler a 5ª questão.

T: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais". Ele quer comprar 8 carrinhos, não é, aí eu coloquei 130 vezes 8, o total deu 104, porque 8 vezes 0 é 0,...

P: Ta, não é necessário que você me conte como multiplicou. Eu quero saber o que o problema está dizendo.

T: 5 carrinhos dá 130.

P: Ta, 130 reais é o preço de 5 carrinhos. E você quer saber o preço de...

T: 8. Aí eu peguei 130 vezes 8 e fiz que deu 104 reais.

P: Esse 104 é o preço de quê?

T: Dos 8 carrinhos.

P: 104 é um número menor ou maior que 130?

T: 130 é maior que 104.

P: 130 é o preço de 5 carrinhos e 104 é o preço de 8.

T: É, não. Será que a conta não é vezes?

P: Mas, o que você vai multiplicar?

T: Eu estou tentando achar o resultado.

P: Que resultado?

T: É... o preço de 8 carrinhos (Pausa). Você não acha melhor passar para a outra porque essa aqui eu não consegui achar o resultado.

P: Tudo bem. Agora, Thales, eu gostaria que você lesse esse problema.

T: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Você entendeu?

T: Sim. (O aluno resolve no papel).

P: Então, o que você fez?

T: Eu fiz 234, que é o dinheiro que ela tem vezes 5 cadernos. Aí a quantia que deu, que ela pode comprar é de 1070 cadernos.

P: Veja bem, quanto custa 5 cadernos?

T: 5 cadernos custa 18.

P: Com 18 reais compro 5 cadernos e com 234 reais você acha que dá pra comprar 1070 cadernos?

T: (Pausa). (O aluno faz novos cálculos). Eu tentei fazer 18 quatro vezes, mas ainda não chegou no resultado.

P: Que resultado?

T: 234 reais. (Pausa). Agora eu fiz 18 vezes 9, mas ainda não chegou no resultado que estou tentando, que é 234 reais.

P: E daí, o que você concluiu?

T: Agora eu tenho que multiplicar... eu tenho que fazer novas contas pra ver se eu consigo chegar... (Pausa). Chegou. Eu fiz 18 vezes 13, deu 234.

P: O que é mesmo o 18?

T: 18 é vezes 13.

P: Volte ao problema. O que é o 18?

T: O 18 é a quantia de 5 livros.

P: 18 é o preço de 5 cadernos. E o que é o 13?

T: O 13 é... é pra fazer a conta pra ver se dá 234.

P: E daí?

T: Agora eu vou somar pra ver a quantia do caderno.

P: Você vai somar o quê?

T: Vou somar 5 cadernos mais 5 cadernos mais...até chegar aqui, no 234.

P: Mas, me explica só uma coisa: você procurou aquele 234, multiplicando o 18 várias vezes, até

que chegou no produto de 18 por 13. Eu não entendi, em que isso te ajudou. Você agora vai somar 5 mais 5 mais...

T: *É, eu vou tentar fazer 5 até chegar no 234, pra mim ver a quantia de quantos cadernos vai dá pra ela comprar.*

P: E para que serviu aquela conta 13 vezes 18?

T: *Pra dá o resultado de 234.*

P: Mas o 234 foi fornecido pelo próprio problema.

T: *Sim, mas 13... então esses 13 aqui, eu vou fazer 5 vezes 13 pra ver quantos cadernos vai dá pra ela comprar.*

P: Você disse que ia somar o 5.

T: *Porque 5 vezes 13 é bem mais fácil que fazer 5 mais 5 mais...*

P: Ótimo. Muito obrigada.

### Alex/5ª série A

PROFESSORA: Alex, leia o 1º problema pra mim, completo.

ALEX: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”.*

P: Eu gostaria que você lesse todo o problema.

A: *Sim.*

P: E a parte da ilustração?

A: *“Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: Relembrou? O que diz o problema?

A: *Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque e 6 carrinhos é 78 reais.*

P: E o que o problema quer saber?

A: *O preço de 18 carrinhos.*

P: Como você fez?

A: *Ele comprou 18 carrinhos e queria saber quanto ele pagou. Aí tinha que fazer 78 vezes 18 pra chegar no resultado.*

P: 78 reais é o preço de quantos carrinhos?

A: *78 é... de 6 carrinhos.*

P: Então você multiplicou o preço de 6 carrinhos 18 vezes. Você acha que está correto?

A: *(Pausa - O aluno resolve no papel). Eu somei 78 mais 78 deu 156, agora eu estou pegando o resultado mais 78.*

P: Por que você optou por somar 78 mais 78 mais 78?

A: *Porque aqui é 18 carrinhos. É... 6 carrinhos... 6 mais 6, 12 mais 6 é 18, aí são... eu somei 78 mais 78 deu 156 aí esse resultado mais 78 deu 234.*

P: Ta, isso eu entendi, isso eu já entendi. O que eu estou querendo saber é por que você somou o 78 três vezes e não 4 ou 5. Por que 3 vezes?

A: *Porque aqui é 18 carrinhos e aqui é 6. É... 6 mais 6 é 12 com mais 6, é 18 aí dá 3.*

P: Ok. Leia a 2ª questão, completa.

A: *“João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.*

P: O que o problema quer saber?

A: *É... quanto ele pagou em 3 carrinhos.*

P: O preço de 3 carrinhos. Veja, essa resolução que você fez não está correta. Você pode resolver agora.

A: *(Pausa - O aluno resolve no papel). Eu peguei 78 e diminuí por 3.*

P: Mas, 78 é o que?

A: *É o preço dos 6 carrinhos.*

P: E o que você quer saber no problema?

A: *Quanto ele pagou em 3 carrinhos.*

P: E você acha que 3 carrinhos custam 75 reais?

A: *(Pausa). Não. Tem que dividir 78 por 6 vai dá 13 reais.*

P: E o que é o 13?

A: *É o... é quanto ele ia pagar nos 3 carrinhos.*

P: Você tem certeza?

A: *Tenho. 13 é o resultado. É o preço de 3 carrinhos.*

P: Tudo bem, vamos para a 3ª questão.

A: *“André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.*

P: Então, o que o problema quer saber?

A: *Quantos carrinhos ele pode comprar com 168 reais.*

P: Isso. Exatamente. E você respondeu que ele poderia comprar 2 carrinhos. Agora, veja, com 84 reais ele pode comprar quantos carrinhos?

A: *4 carrinhos.*

P: Com 168 reais ele só poderá comprar 2 carrinhos?

A: *Não. (Pausa - O aluno faz contas no papel). 8 carrinhos.*

P: 8? Por que?

A: *Porque 84 mais 84 é 168, então dá pra comprar 8 carrinhos. Porque 84 é 8 carrinhos mais 84, 8 carrinhos.*

P: Ta certo. Leia, agora o 4º problema.

A: *“Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.*

P: Nesse problema você respondeu 1, mas não está correto. O que é 42?

A: *42 reais... é que ele pode comprar 4 carrinhos.*

P: 42 reais é o dinheiro que Paulo tem. Por que você subtraiu 42 menos 42?

A: *Porque 42 não dá pra comprar nenhum carrinho. (Pausa). Somando 42 mais 42 vai dá 84, e 84 dá pra comprar 4 carrinhos.*

P: E 42?

A: *42 não dá pra comprar nenhum carrinho.*

P: Ta bom. Vamos passar para a 5ª questão.

A: *“Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais”.*

P: Você multiplicou 8 vezes 130. Mas, o que é que o problema está pedindo?

A: *(Pausa).*

P: Ele quer saber o quê?

A: *8 carrinhos... (pausa).*

P: Qual o preço de 8 carrinhos. É isso que ele quer saber. E o que ele está dizendo na gravura?

A: *Que 130 é o preço de 5 carrinhos.*

P: Você multiplicou 5 vezes 130. Só que não está correto porque 130 já é o preço de 5 carrinhos.

A: *(Pausa - O aluno resolve no papel). Agora eu diminuí 130 menos 8.*

P: Não, não é dessa maneira. Bom, eu vou dar um outro problema pra você.

A: *“Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª*

Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?”.

P: Deu pra entender?

A: Não.

P: Vamos lá. Quanto custam 5 cadernos?

A: 18 reais.

P: E, o que o problema quer saber?

A: Quantos cadernos a prof<sup>fi</sup> pode comprar com 234 reais.

P: Eu vou fazer um esquema pra você, veja: 5 cadernos custam 18 reais. Quantos cadernos eu compro com 234 reais?

A: (Pausa - O aluno resolve no papel).

P: Por que você multiplicou 234 por 5?

A: Porque eu pensei que era vezes. Não sei.

P: Você não tem nenhuma idéia?

A: Não.

P: Ok. Muito obrigada.

### Heber/5ª série F

PROFESSORA: Heber, leia, por favor, o 1º problema completo.

HEBER: “Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”

P: Você não leu o problema todo.

H: Como assim?

P: O problema é só isso?

H: Não. Tem aqui.

P: Então, eu quero que você leia todo o problema.

H: “Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais”.

P: Agora eu queria que você explicasse pra mim, como você fez, como você resolveu?

H: Porque 6 mais 6 são 12 não é? Aí 6 mais 6 são 12 mais 6 são 18. Aí faz por exemplo 6... que cada um... é... um... 78 mais 78 mais 78.

P: E tem uma outra forma de resolver esse problema?

H: Tem. 3 vezes 78.

P: Vamos para a 2ª questão.

H: “João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou?”.

P: Você ainda não leu todo o problema.

H: “João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais”. Então faz... (O aluno já começa a fazer um cálculo).

P: Não, me conta esse que você já havia feito.

H: Só que essa, eu acho que fiz errado.

P: Então, você quer um tempo pra pensar e resolver corretamente?

H: Sim. (O aluno resolve no papel). Só dividi. Eu dividi deu 13, aí...

P: Só um momento. Você dividiu o quê?

H: 78 por 6.

P: O que é o 78?

H: É o preço de 6.

P: De 6 carrinhos. Por que você fez essa divisão?

H: Porque... aí, cada um vai ser 13.

P: 13 reais.

H: É. Aí é só fazer 13 mais 13 mais 13 vai dá 39. 39 mais 39 dá 78.

P: Então, qual é a resposta?

H: É 39 reais.

P: Ta ótimo. E você teria alguma outra forma de resolver?

H: (Pausa - O aluno resolve no papel). Só se fizer... ir tentando, por exemplo: pôr 15 embaixo, 78 menos 15, mais 15, aí vai ter que ir tentando até... por exemplo, por 15 vai dá um resultado. Fazer 78 menos 13 vai dá 39, não é? Não, não dá.

P: Tudo bem. Vamos pra 3ª questão.

H: “André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.

P: Agora me conta como você resolveu.

H: (Pausa).

P: Não lembra? Vamos rever?

H: (O aluno lê o problema novamente - Pausa). Agora eu vou fazer.

P: Não, olha, você já fez. Respondeu corretamente. Agora você só me explica.

H: Se 4 é 84 e ele tem 168 reais, 84 mais 84 vai dá esse preço. Se 4 é um preço desse, mais 4 vai dá 8, aí é o resultado.

P: Teria uma outra forma?

H: (Pausa). Fazendo 168 menos 84, o resultado vai dar 84. Depois de “menos” é só fazer “mais”, 84 mais 84 é 168. Olha o preço de 4 carrinhos é 84 reais. Esse é 4 (aponta o 84 reais) e esse também é 4 (aponta novamente), então esse é o resultado certo. Eu sei que é 8 porque um é 84 e o outro é 84, vai dá 168.

P: Ta ótimo. Vamos para a 4ª questão.

H: Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.

P: A resposta que você deu está correta, mas eu não sei como você fez. Agora você me explica.

H: Aqui eu chutei. (Pausa). Porque se 42 carrinhos é 84... 4 carrinhos é 84 reais. Então fazendo 84 menos 42 vai dá 42.

P: Mas aqui você não fez esse cálculo 42 menos 42.

H: Eu fiz de cabeça. Se não quiser fazer de cabeça, você pode ir tentando até dá 84. Porque aqui 2 carrinhos vai dá 42 e, 2 vezes 42 vai dá 84.

P: O que é que vai tentando?

H: Os números vezes 42.

P: Sim, vamos para a 5ª questão.

H: “Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais”.

P: Essa você não fez. Você pode fazer agora?

H: (Pausa - O aluno resolve no papel). Se 5 é 130; 10 vai dá 290. 290 menos 130 dá 160. Aí o resultado é 160?... Porque se 5 é 130 mais 20 vai dá 150...

P: Por que você somou 130 com 20?

H: (Pausa). Não, ta errado. É 130 mais 15... eu acho que cada um é 15.

P: Ah, ta! Então, esse 20, esse 15, são tentativas de achar o...

H: O resultado. Achar o... Por exemplo: o 130...o 160...

P: Vamos fazer o seguinte: O que você quer saber no problema?

H: Quanto é o preço de 8 carrinhos. Pra mim saber eu posso fazer 130 mais 15, vai dá (pausa) eu acho que o

resultado é 160 porque se 5 é 130 vai ter que fazer mais um... ah, não sei. Esse foi o mais difícil.

P: Então, vamos ver se você consegue fazer esse .

H: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A prof<sup>a</sup> Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?".

P: Você entendeu?

H: (Pausa - O aluno resolve no papel). Fiz tudo de mais, por exemplo: 18 mais 18 vai dá 36, 36 mais 18 dá 54, 54 mais 18... fui fazendo.

P: Por que fez assim?

H: Porque se... 18... se 5 cadernos é 18... (Pausa).

P: O que é que você quer saber?

H: Quantos cadernos ela pode comprar.

P: E ela pode comprar quantos cadernos?

H: Onze... Não, é que eu não prestei atenção. Porque se 18 é 5, 5 vezes 18... Não, ta certo...

P: Ta certo, você foi somando o 18. Você conhece outra forma de resolver?

H: Tem, fazendo 18 vezes 10, 11, até dá 234.

P: Ta bom. Muito obrigada.

### Raquel/5ª série F

PROFESSORA: Raquel, eu queria que você lesse o 1º problema completo pra mim.

R: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca tanque. Quantos ele pagou?

P: Já leu todo o problema?

R: Sim, já.

P: Você não leu o problema todo. Quando você resolveu esse problema, você usou só esses dados?

R: Não. Eu usei este quadro também (aponta a ilustração ).

P: Então leia todo o problema.

R: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ta bom, agora, você me conta como você fez aí.

R: A conta?

P: Sim.. Me explica como você raciocinou.

R: Eu peguei 78 mais 78 mais 78 que era dos carrinhos.

P: O que é o 78?

R: É o preço de 6 carrinhos.

P: Sim.

R: Aí eu coloquei: 6 mais 6, 12 mais 6, 18.

P: Ah! Ta, mas você não colocou aqui, não é?

R: (Pausa ) A aluna resolve no papel.

P: Ta ótimo. Agora por que você somou o 6, três vezes?

R: Por que 6 carrinhos é 78 reais aí aqui ta dizendo 18 carrinhos, então 6 mais 6 mais 6 é 18?

P: Você tem outra forma de resolver esse problema?

R: Que eu tenha pensado não.

P: Então vamos passar para a segunda questão.

R: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca tanque. Quanto ele pagou ? Marca tanque - preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ta. Esse problema você não resolveu, não é? Você pode resolver agora?

R: Sim. (Pausa - A aluna resolve no papel).

P: Então, como você fez?

R: Eu peguei 78 e tirei 6. Aí deu essa resposta ( aponta o número 72 ).

P: Deu quanto?

R: 13.

P: Por que você tirou 6?

R: Porque era 6 carrinhos.

P: Vamos ver: O que o problema está pedindo ?

R: É... João comprou apenas 3 carrinhos da marca tanque. Quanto ele pagou ?

P: Então o problema quer o quê ?

R: Quer saber quanto ele pagou em 3 carrinhos.

P: Então quer saber o preço de 3 carrinhos. Aqui você tem o preço de ...

R: 6 carrinhos de 78 reais.

P: Então você tem o preço de 6 carrinhos e quer o preço de 3.

R: (Pausa ).

P: Veja esse esquema: 6 carrinhos custou 18 reais, 3 carrinhos vai custar mais ou menos ?

R: Menos.

P: Então veja: 6 carrinhos/78 reais, 3 carrinhos ...

R: (Pausa ). 44?

P: Por que 44 ?

R: Porque assim 7 ... 3 mais 4 dá 7, então eu tirei 4 de 7 e tirei 4 de 8.

P: Você subtraiu do 78 que valor ?

R: Não eu separei. Eu fiz assim: como 3+4 dá 7, eu peguei 4 aí deixei 3, do 8 eu peguei mais 4, aí ficou 44.

P: Sim, do 8 você pegou 4. Por que 4 ?

R: Porque era menos do 8 e 4 é menos que 8.

P: Ta, mas 5 também é menor que 8, 6 é menor que 8, 7 é menor que 8.

R: Porque eu acho que ia dá essa resposta, mais ou menos.

P: Ta bom. Então vamos para a 3ª questão.

R: "André tem 168 reais. Quantos carrinhos comprou? Marca Flash - Preço de 4 carrinhos: 84 reais".

P: Você entendeu?

R: ( Pausa ).

P: Vamos ver: 4 carrinhos custa ...

R: 84 reais.

P: E André tem...

R: 168 reais.

P: Ele quer saber quantos carrinhos ele pode comprar. E você fez, você resolveu aqui, porém, essa resposta não está correta. Então pensa e vê se você consegue explicar para mim.

R: ( Pausa - A aluna resolve no papel ).

P: Conseguiu?

R: Mais ou menos.

P: Veja aqui você multiplicou 84 por 2 e achou 168 reais que é a quantidade de dinheiro que o André tem. E o que o problema pergunta?

R: Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar?

P: Quanto ele tem?

R: É 168 reais.

P: Então.

R: ( Pausa ). Não sei.

P: Então leia a 4ª questão.

R: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos da marca Flash ele pode comprar? Marca flash: preço de 4 carrinhos: 84 reais"

P: Agora, continua a mesma quantidade de 4 carrinhos

custando...

R: 84 Reais.

P: Só que o Paulo tem...

R: 42 reais.

P: O que ele quer saber?

R: É ... quanto ele pode comprar.

P: Esse você multiplicou 2 vezes 21. De onde veio esse 21?

R: ( Pausa ). Não lembro.

P: Não lembra de que cálculo veio 21 reais?

Copiou de algum colega?

R: ( Risos ). Não, é porque eu não sei.

P: Leia a 5ª questão.

R: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante.

Quanto devo pagar? Marca Basculante - Preço dos 5 carrinhos: 130 reais".

P: Por que você multiplicou 24 vezes 8. De onde veio Esse número 24?

R: ( Pausa ). A aluna não responde.

P: Então?

R: Ainda não sei.

P: Ta bom vamos parar por aqui. Obrigada!

### Janaina/5ª série F

PROFESSORA: Leia pra mim, o 1º problema completo.

JANAINA: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca tanque. Quanto ele pagou?"

P: Esse é todo o problema?

J: Sim.

P: Não. Existem mais informações, mais dados.

J: (Pausa). Aqui, aponta a ilustração.

P: Sim. Então, agora leia todo o problema.

J: "Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca tanque - Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Ta ótimo. Você já lembrou o problema? Relembrou?

J: (Pausa). A aluna não responde.

P: Então, o que está dizendo ali na gravura?

J: Que o preço de 6 carrinhos é 78 reais.

P: Ótimo. E o problema está pedindo o quê?

J: É ... Ta perguntando quanto ele pagou..

P: Quanto pagou?

J: Nos carrinhos da marca Tanque.

P: Quantos?

J: Ele pagou.... Eu calculei assim: que ele tinha comprado

6 carrinhos, não é?

P: Mas está dizendo aqui no enunciado, quantos carrinhos ele comprou.

J: Ele comprou 18 carrinhos.

P: Ele comprou 18 carrinhos e quer saber o preço desses 18 carrinhos. Concorda?

J: Sim. Eu acho que eu devia ter feito 18 vezes ...

P: Sim, realmente, essa resolução não está correta. Então nesse espaço você pode resolver corretamente.

J: (Pausa - A aluna resolve no papel).

P: Então terminou?

J: Sim. Eu fiz 18 vezes 78. 18 carrinhos vezes o 18 que é o preço dos 78 carrinhos.

P: 78 é o preço de quê?

J: 6 carrinhos. Ah! Eu acho que ta errado. ( Pausa ).

P: Tudo bem. Pense um pouco mais.

J: (Pausa - A aluna resolve no papel). Eu tenho uma dúvida.. Porque eu tinha feito a continha de vezes, mais agora que eu esclareci a minha dúvida, porque se eu quero saber quanto ele pagou eu tenho que fazer uma conta de dividir... Agora eu não to lembrando se é uma conta de dividir ou uma conta de vezes.

P: Então, sem pensar na conta, vamos rever os dados? Você tem aqui nessa gravura uma informação. Qual?

J: Os desenhos dos carrinhos. 6 carrinhos?

P: Qual é o preço de 6 carrinhos?

J: 78 reais.

P: E você quer o quê no problema?

J: Eu quero saber qual é o preço de 18 carrinhos?

P: Então, veja esse esquema: Você tem o preço de 6 carrinhos e quer o preço de 18.

J: Então eu tenho que dividir? Dividir o 18, que é o tanto que ele quer comprar e o 6 ... e 78, não. 78 por 18. (Pausa).

P: 18 Carrinhos custam mais ou menos que 78 reais?

J: Mais. Porque é uma quantia maior. Primeiro ele comprou 6 carrinhos deu 78, se ele quer 18 vai ser um número maior.

P: O preço será maior. Quanto? Olhe o esquema .

J: (Pausa - A aluna resolve no papel).

P: E então?

J: Ah! Eu não sei.

P: Não. Então vamos para a 2ª questão? Leia o problema todo.

J: "João comprou apenas 3 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Preço de 6 carrinhos: 78 reais".

P: Então, ainda é a mesma marca: 6 carrinhos de 78 reais. E João comprou apenas 3. Agora me conta o que você fez aqui.

J: Eu fiz 78 vezes 3. Porque 78 é o preço de 6 carrinhos. Então eu calculei assim: que para eu saber quanto tinha que dá o preço de 3 carrinhos, eu colocava 78 vezes 3?

P: Mais, quem é 78?

J: (Pausa). É o preço de 6 carrinhos.

P: De 6 carrinhos. Veja bem.

J: (Pausa - A aluna resolve no papel).

P: Então?

J: Eu fiz 78 menos 3. 78 que é o preço de 6 carrinhos menos 3. Deu 75 o preço de 3 carrinhos. E eu fiz uma outra conta que era ... 78, não ... Esquece.

P: Veja o esquema, olha: Eu tenho aqui 6 carrinhos que custam

J: 78 reais.

P: E quero saber o preço de...

J: 3

P: 3 carrinhos. Vai custar mais ou menos?

J: Menos.

P: Menos. Esse esquema ajuda na resolução?

J: Sim. (Pausa). Pra mim a conta é de menos.

P: Sem falar na conta. Você entende o que está escrito. O que está no esquema. Fale pra mim.

J: (Pausa). 78 é quanto ele pagou por 6 carrinhos. Quer saber o preço de 3 carrinhos. (Pausa). Não sei.

P: Não consegue? Então leia a 3ª questão.

J: “André tem 168 reais e quer carrinhos da marca Flash. Quantos carrinhos ele pode comprar? Marca Flash: Preço de 4 carrinhos: 84 reais.”(Pausa).

P: Vamos rever? Você tem o preço de quê?

J: De 4 carrinhos, que é 78 reais.

P: O que ele quer saber?

J: Quantos carrinhos ele pode comprar com 168 reais.(Pausa).

P: Vamos ver o esquema: 4 carrinhos custam 84 reais. E aqui você tem ...

J: 168 reais.

P: E quer saber ...

J: Quantos carrinhos eu posso comprar.

P: Você entendeu?

J: Ta perguntando ... Ta falando assim: ele quer saber quantos carrinhos, com 42 reais ele pode comprar.

P: Isso. E quantos ele pode comprar?

J: (Pausa). E ... a conta eu não fiz mais eu tava pensando que com 42 reais ele ...ele tem 42 reais e o preço de 4 carrinhos dá 84. Com 42 reais ele pode comprar 3 carrinhos.

P: 3? Por quê?

J: Porque, se o preço de 4 carrinhos é 84 reais e ele tem 42 reais, é ... porque eu acho que quanto menos carrinhos, menos é o preço. 3 carrinhos ou uns 2 carrinhos. Acho que ele pode comprar 2 carrinhos com 42 reais. As continhas eu não fiz. Não sei fazer.

P: Então vamos ler a 5ª questão.

J: “Quero comprar 8 carros da marca Basculante: 5 carrinhos: 130 reais.” Eu fiz uma continha de mais, eu peguei o 8 carrinhos, que é quanto ele quer comprar, mais 5. Aí deu 13 (Pausa).

P: Mais o problema pede o preço de 8 carrinhos.

J: É, eu tenho que fazer uma conta pra saber quanto ele pode pagar.

P: Então faça.

J: (Pausa). Eu não lembro a tabuada do 8.

P: E o que você quer fazer?

J: Eu quero fazer uma conta de dividir. 130 dividido por 8 pra poder saber quanto ele deve pagar.

P: Mas, o que é 130?

J: É o preço de 5 carrinhos.

P: É o preço de 5 carrinhos.

J: (Pausa). Não sei não.

P: Tudo bem. Obrigada!

### Tiago Alves/5ª série F

PROFESSORA: Thiago, leia o 1º problema, pra mim.

THIAGO: “Carlos comprou 18 carrinhos da marca tanque.

Quanto ele pagou?”

P: E as informações da gravura? Fazem parte do enunciado, não é?

T: Sim..

P: Então leia todo o problema agora.

T: “Carlos comprou 18 carrinhos da marca Tanque. Quanto ele pagou? Marca Tanque - preço de 6 carrinhos: 78 reais”.

P: Agora lembre o problema, recorde os dados, o que o problema está pedindo e, como você resolveu. Você pode explicar?

T: (Pausa). Eu coloquei 78 vezes 6.

P: Mais aí no papel eu não estou vendo 6 vezes 78. Vamos relembra. O que o problema está pedindo?

T: 18 carrinhos.

P: O que o problema quer saber?

T: Quanto é o preço de 18 carrinhos.

P: Ótimo. Então, o que você fez pra saber o preço de 18 carrinhos?

T: Eu peguei é... eu já sei o preço de 6 carrinhos que é 78 aí eu fiz 3 vezes 78.

P: Sim. Ta correto o resultado. Mais eu quero saber porque você multiplicou por 3 o 78 e não por 4 ou 5. Por quê?

T: Porque eu tinha somado 4 vezes aí eu parei. Eu peguei em outro papel 4 vezes e depois eu fui colocando 5 aí não tava dando, aí eu coloquei 3.

P: Não tava dando o quê?

T: Não tava dando o resultado correto. Porque tava muito alto.

P: Então você multiplicou 78 por 3, mais poderia ser por 2 vezes também. Eu não estou entendendo por que você escolheu 3 para multiplicar.

T: Porque eu não sabia, eu não sabia nada, aí eu deixei aí. Eu coloquei esse resultado pra ver se tava certo. Eu ia colocar 4 mas só que eu percebi que tava errado aí eu coloquei 3.

P: Então significa que você não raciocinou nada sobre a informação dos 6 carrinhos que custam 78 reais? E não relacionou com o preço dos 18 carrinhos.

T: Eu não lembro bem como foi que eu fiz. Mais eu acho que foi assim: colocar 3 vezes 6 dá 18 aí eu coloquei 3 vezes 78.

P: Ótimo. Então foi assim que você pensou?

T: É porque eu não tava me lembrando.

P: Leia agora o 2º problema pra mim.

T: “João comprou seis carrinhos da marca Tanque, preço dos 6 carrinhos: 78 reais.”(Pausa). Eu tinha 6 carrinhos ia

tirar 3. Aí eu tenho que tirar o resultado de 3 carrinhos pra responder. (Pausa). Eu fiz 34 mais 34 não deu 78. E se eu colocar 44 mais 44 vai dá mais. Agora pra dá 78, não sei como é que faz.

P: Por que você escolheu esses números pra somar ?

T: Porque eu pensava que iam dá esses resultado aqui. Só que não deu esse resultado.

P: O que você quer mesmo?

T: 78. O preço de 6 carrinhos.

P: Eu não estou entendendo porque você está somando números repetidos pra chegar no 78.

T: Eu to fazendo essas somas porque eu quero a metade de 78 que é 3 carrinhos.

P: Ah! Agora eu entendi. A metade de 78 é o preço de 3 carrinhos. Muito bem e qual seria a resposta então?

T: 34.

P: Tudo bem leia o 3º problema.

T: “André tem 168 reais. Quantos carrinhos da marca flash ele pode comprar? Preço de 4 carrinhos: 84 reais”.

Eu coloquei 2 vezes o 84. Aí deu 168.

P: Ta. O que o problema está pedindo?

T: (Pausa). "André tem 168 reais. Quantos carrinhos ele pode comprar?"

P: Como você concluiu a partir dessa soma que a resposta é 8?

T: Porque 4 mais 4 deu 8. Aí eu coloquei 84 mais 84 que deu 168. Aí quando deu 168 eu pensei que podia acrescentar 4.

P: Ta ótimo leia. Leia agora o 4º problema.

T: "Paulo tem apenas 42 reais. Quantos carrinhos ele pode comprar. Preço de 4 carrinhos: 84 reais". Aqui deu 84 menos 42, deu 2 carrinhos. Depois eu fiz 42 mais 42 que deu 84, que é o resultado de 4 carrinhos.

P: Ta bom e o 5º problema?

T: "Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? Preço de 5 carrinhos: 130 reais".

P: Ta o que é 130 reais ?

T: É o preço de 6 carrinhos.

P: E o que você quer no problema?

T: 8. O preço de 8 carrinhos. Aí aqui já que o preço de 5 é 130. Quero comprar 8 carrinhos da marca Basculante. Quanto devo pagar? 130 reais. Não. 130 eu acrescentei mais 130. Mais 3 vezes 130.

P: Mais 3 vezes o 130?

T: É. Eu coloquei mais 3 vezes o 130 reais, aí eu fiz a conta deu 309, aí eu somei com 130. Que é o preço de 5 carrinhos.

P: Você acha que está correto ?

T: Eu acho.

P: Veja bem: 130 reais é o preço de 5 carrinhos. Quando você somou 130 mais 130 mais 130, você não tem o preço de 3 carrinhos. De quantos carrinhos você achou o preço?

T: De 15 carrinhos.

P: Então, dá pra corrigir?

T: Eu peguei a metade de 130. (Pausa). O preço de 8 carrinhos. Só que aqui eu tenho o preço de 5 carrinhos. Eu quero o preço de mais 3 carrinhos. Eu fiz a metade de 130 pra ver quanto dava. Que a metade de 130 é o preço de 2 carrinhos. Mais pra achar o preço de 3 carrinhos eu não consegui.

P: Ta bom. Eu vou dar um outro problema pra você.. Leia esse problema.

T: "Com 18 reais compro 5 cadernos. A profª Cleide tem 234 reais. Quantos cadernos ela pode comprar?"

P: Você entendeu? O problema diz que 5 cadernos custam..

T: 18 reais.

P: E a profª tem....

T: 234 reais.

P: E o que o problema quer saber?

T: Quantos cadernos ela pode comprar?

P: Você pode resolver agora?

T: Sim. (Pausa - O aluno resolve no papel). Eu estou usando aqui o preço de 5 cadernos. Eu estou achando que é 3 reais.

P: Não. O preço de 5 cadernos está aqui, é 18 reais.

T: Sim. Com 18 reais eu posso comprar 10. Agora eu vou fazer a conta pra ver quanto dá.. Se dê o mesmo resultado (aponta o 234 reais) que esse é porque ele pode comprar 10 cadernos.

P: E se não dê o mesmo resultado?

T: Se não dê o mesmo resultado eu faço uma outra conta. (Pausa - O aluno resolve no papel). Eu achei 54 mais eu vou fazer outra conta para ver se eu me aproximo mais.

P: Que outra conta?

T: Agora eu vou fazer conta de vezes.

P: Por que de vezes?

T: Porque eu vou aumentando 6 vezes 18... (Pausa - o aluno resolve no papel) Agora eu posso fazer 8 vezes 18,...aí eu vou fazendo. Se passar, eu abaixo.

P: Se passar de quê?

T: De 234. (Pausa). Aqui eu cheguei em 18 vezes 13, deu 234. (Pausa). Ele pode comprar 13 cadernos.

P: 13 cadernos? Veja bem, antes disso você fez o 3 vezes 18 e deu quanto?

T: 54 reais.

P: Com esses 54 reais, quantos cadernos ela poderia comprar ?

T: 15.

P: 15 cadernos. Veja, com 54 reais ela já compra 15 cadernos. Será que com 234 ela compra 13?

T: (Sorrisos). (Pausa). Com 108 reais ela pode comprar 30...

P: Veja esse esquema: 5 cadernos custam 18 reais.

Quantos cadernos custam 234?

T: (Pausa).

P: Olha aqui no esquema. Você já fez aquele cálculo em que fez 13 vezes 18. Vou pôr aqui no esquema. 13 vezes 18 deu 234 reais.

T: Eu não sei. Eu não estou conseguindo descobrir.

P: Ta ótimo. Obrigada!