

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Wagner Marcelo Pommer

**EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES:
Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2008**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Wagner Marcelo Pommer

**EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES:
Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da Prof^a Dr^a Silvia Dias Alcântara Machado.

**SÃO PAULO
2008**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Local e Data: _____

Dedico este trabalho a meus pais
(in memoriam)
e, especialmente, a minha esposa.

MEUS AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos a todos que contribuíram para que este trabalho se realizasse.

A Deus, nosso pai, guia que viabiliza nossas opções de vida, ilumina nossos caminhos e nos dá forças para prosseguir nossa existência.

Aos meus pais, que nesta vida sempre observavam a importância e me incentivaram a prosseguir nos estudos.

A minha esposa Clarice, pela compreensão e paciência nesta etapa, assim como pelas leituras e reflexões que permeiam este trabalho.

À minha orientadora, Prof^a Dr^a Silvia Dias de Alcântara Machado, pelo constante incentivo, dedicação, paciência, conhecimentos e competência nos esclarecimentos nos passos que me guiaram nesta jornada.

Ao Prof^o Dr^o Nilson José Machado e a Prof^a Dr^a Cristiana Abud da Silva Fusco, pelos comentários e orientações presentes no Exame de Qualificação, que possibilitaram a correção dos caminhos trilhados, assim como permitiram focar, esclarecer e delimitar os contornos deste trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP, pelos conhecimentos tão necessários à minha formação.

Aos colegas de Mestrado, pela troca de experiências e discussões enriquecedoras. Em particular, ao Prof^o Paulo César Queiroz, pela disponibilidade e prontidão na colaboração da aplicação desta pesquisa.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, instrumento e motivo pelo qual a pesquisa em Educação Matemática se faz necessária.

A CAPES, pela bolsa de estudos que me permitiu seguir adiante no Programa de Pós-Graduação da PUC/SP.

A todos vocês, muito obrigado.

RESUMO

Neste trabalho apresento um estudo qualitativo orientado pela questão ‘*É possível a alunos do Ensino Médio explicitar conhecimentos sobre equações diofantinas lineares?*’, cuja relevância se justifica a partir de pesquisas como a de Lopes Junior (2005), revelando que alunos de Ensino Médio não distinguem e não compreendem quando a variável assume valor discreto ou contínuo, assim como pelo fato da Matemática Discreta ser uma área relativamente esquecida no Ensino Básico, conforme relatam Brolezzi (1996) e Jurkiewicz (2004). Este estudo particulariza como recorte a Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio, onde pesquisadores como Campbell e Zazkis (2002), Ferrari (2002) e Resende (2007) ressaltam que atividades de resolução de problemas, num enfoque de re-utilização de conceitos como divisores e múltiplos, são propícias para o desenvolvimento de heurísticas, numa abordagem complementar e inter-relacionada com a Álgebra, em conformidade com Maranhão, Machado e Coelho (2005). Como referencial metodológico foi utilizada a Engenharia Didática, descrita em Artigue (1996), para elaborar, aplicar e analisar uma seqüência didática. As manifestações escritas e orais indicaram que os alunos do Ensino Médio desenvolveram estratégias, operacionalizando os conceitos de múltiplos e divisores, assim como utilizaram a escrita algébrica para a busca de soluções inteiras nas situações-problema propostas, explicitando assim conhecimentos envolvendo equações diofantinas lineares.

Palavras-Chave: Matemática Discreta, Teoria Elementar dos Números, Equações Diofantinas Lineares, Engenharia Didática, Educação Algébrica.

ABSTRACT

This work presents a qualitative study guided by the question 'Is it possible High School students to make explicit knowledge on linear diofantine equations?', whose relevance is justified from researches as met in Lopes Junior (2005), revealing that High School students do not distinguish and they do not understand when the variable assumes discrete or continuous value, as well as for the fact that Discrete Mathematics are a relatively forgotten area on Pre-Universitary School, according to Brolezzi (1996) and Jurkiewicz (2004). This study particularizes Elementar Number Theory on High School, where researchers as Campbell and Zazkis (2002), Ferrari (2002) and Resende (2007) emphasizes that problem resolution activities, in an approach of concepts re-use as divisors and multiples, are propitious for heuristical development, in a complementary and interrelated approach to Algebra, in compliance with Maranhão, Machado e Coelho (2005). As methodological reference it was used Didactical Engineering, described in Artigue (1996), to elaborate, to apply and to analyze a didactical sequence. The written and oral manifestations indicated that High School students had developed strategies, operacionalizing the concepts of multiples and divisors, as well as had used the algebraic equation to search the whole solutions on the proposed problem situations, thus making explicit knowledge involving linear diofantine equations.

Keywords: Discrete Matemhatics, Elementar Number Theory, Linear Diofantine Equation, Didactical Engineering, Algebric Education.

SUMÁRIO

| | |
|---------------------------|----|
| APRESENTAÇÃO | 12 |
|---------------------------|----|

CAPÍTULO I - JUSTIFICATIVA E OBJETIVO

| | |
|--------------------------------|----|
| Justificativa e Objetivo | 14 |
|--------------------------------|----|

CAPÍTULO II - FUNDAMENTOS TEÓRICOS: LEITURAS E ESCOLHAS

| | |
|--|----|
| Desenvolvimento Histórico das Equações Diofantinas Lineares | 24 |
| Considerações Matemáticas Envolvendo as Equações Diofantinas Lineares em Z | 26 |
| Fundamentos Didáticos: Leituras e Escolhas | 33 |

CAPÍTULO III – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

| | |
|---|----|
| A Metodologia da Engenharia Didática | 38 |
| Alguns Recursos Didáticos Empregados na Elaboração das Atividades | 42 |
| A importância dos Jogos | 42 |
| A Resolução de Situações-problema e a Importância do Contexto | 44 |
| Os Contextos Discretos da Microeconomia | 47 |
| Procedimentos Metodológicos da Engenharia Didática | 50 |

CAPÍTULO IV – A EXPERIMENTAÇÃO

| | |
|---|----|
| Crerios e Procedimentos para a Etapa da Coleta de Dados | 52 |
| Concepção da Seqüência Didática | 55 |

| | |
|--|------------|
| Da Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori das Sessões | 57 |
| 1ª Sessão | 59 |
| Análise a Priori | 59 |
| Descrição e Análise a Posteriori Local | 64 |
| Análise a Posteriori da 1ª sessão | 76 |
| 2ª Sessão | 78 |
| Institucionalização | 80 |
| Análise a Priori | 81 |
| Descrição e Análise a Posteriori Local | 90 |
| Análise a Posteriori da 2ª sessão | 100 |
| 3ª Sessão | 102 |
| Institucionalização | 102 |
| Análise a Priori | 108 |
| Descrição e Análise a Posteriori Local | 112 |
| Análise a Posteriori da 3ª sessão | 117 |
| Institucionalização Final | 118 |
| CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS | 121 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 125 |
| ANEXO A | 130 |
| ANEXO B | 147 |

LISTA DE ANEXOS

| Anexo A | Instrumento de Pesquisa | |
|---------|--|---|
| Sessão | Atividade | Descrição |
| 1ª | 1 parte A | Jogo do Sorvete - Regras |
| | 1 parte B | Jogo do Sorvete - Resultados da dupla |
| | 1 parte C | Jogo do Sorvete - Verificação dos Resultados da dupla |
| | 2 | Situação-problema 'Quantos pacotes de café?' |
| | 3 | Situação-problema 'Qual sua escolha: CD ou DVD?' |
| 2ª | | Jogo do Stop - Regras |
| | 4 | JOGO DAS COMPRAS NA QUITANDA |
| | 5 | JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO – item a |
| | 6 | JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO – item b |
| | 7 | JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO – item c |
| | 8 | JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO – item d |
| | 9 | DINARLÂNDIA – item a |
| | 10 | DINARLÂNDIA – item b |
| 3ª | 11 | Situação-problema 'Quantos pacotes de café?' |
| | 12 | Situação-problema 'Saques no banco' |
| | 13 | Situação-problema 'CDs ou DVDs?' |
| | 14 | Síntese |
| Anexo B | Documentos da Pesquisa | |
| | Breve caracterização dos alunos | |
| | Autorização | |
| | Carta convite | |
| | Termo de compromisso | |
| | Relação de alunos por agrupamento nas três sessões | |

APRESENTAÇÃO

Este trabalho se insere na linha de pesquisa '*A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores*' do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e dentro da problemática do Grupo de Pesquisa Educação Algébrica (GPEA), que articula pesquisas em questões do projeto '*O que se entende por álgebra?*'.

Dentre as várias ramificações desenvolvidas por este projeto, me interessei por pesquisas já em andamento envolvendo o sub-projeto '*A Teoria dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura*'.

A relevância deste tema se justifica em pesquisas em Educação Matemática que apontam para a importância do re-investimento de conceitos da Teoria dos Números como divisores e múltiplos no Ensino Médio, assim como pela pertinência e necessidade de estudos envolvendo as grandezas discretas neste nível de ensino, que articuladas com a Álgebra permitem ampliar a abrangência do desenvolvimento do pensamento matemático.

Deste modo, direcionei esta pesquisa a alunos do Ensino Médio, objetivando verificar *se, como e em que medida* os alunos do Ensino Médio explicitam conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

Apresento a seguir a organização do presente texto em cinco capítulos.

No Capítulo I, estão discriminadas sinteticamente as argumentações que justificam a proposta deste estudo, que visou investigar as equações diofantinas lineares com alunos do Ensino Médio. Delineei assim, os motivos que levaram a escolha deste tema, pertencente a Teoria Elementar dos Números, possibilitada pela importância e pertinência de estudos da Matemática Discreta, dentro do Ensino Básico, numa proposta de complementaridade com a Álgebra. Deste modo, a justificativa apresentou a relevância, o problema, as hipóteses e o objetivo desse estudo.

No Capítulo II, apresentei as considerações didáticas e matemáticas baseadas em pesquisas que permitiram situar, embasar e encaminhar este trabalho. Assim, delineei o desenvolvimento histórico das equações diofantinas lineares, assim como os resultados mais importantes advindos de autores da epistemologia deste objeto matemático. Inclui, ainda, os trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática ligados a Teoria dos Números e, mais particularmente, as Equações Diofantinas Lineares, dentro de uma perspectiva da importância e pertinência de estudos da Matemática Discreta, que permitiram uma melhor compreensão da temática abordada nesta pesquisa.

No Capítulo III, descrevi os fundamentos metodológicos, justificando as razões para a utilização da Engenharia Didática, descrita em Artigue (1996), como procedimento metodológico para a elaboração, aplicação e análise de uma seqüência didática, em conformidade com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a). Destaquei, ainda, as considerações envolvendo os recursos didáticos empregados neste trabalho, caracterizando a importância da utilização dos jogos associados a resolução de situações-problema contextualizadas, assim como os motivos para a escolha de contextos baseados em aproximações de temas da Microeconomia, que possibilitaram condições para a ambientação de uma situação a-didática, conforme Brousseau (1996a). Finalizei o capítulo descrevendo os procedimentos que me permitiram configurar os elementos da pesquisa.

No Capítulo IV, apresentei a etapa da Experimentação, onde foram expostos os preparativos e os critérios para a concepção da seqüência didática, utilizada como procedimento metodológico, a fim de investigar o desenvolvimento de conhecimentos sobre as Equações Diofantinas Lineares em alunos do Ensino Médio. Também, neste capítulo foi realizada a análise *a priori* e a descrição dos dados obtidos na fase da experimentação, que permitiram a realização da análise *a posteriori* local, representada pela avaliação horizontal relativa às respostas de cada grupo de alunos em cada atividade da Engenharia Didática, assim como a análise *a posteriori* de cada sessão, representada pela avaliação vertical das manifestações/ações dos alunos frente ao conjunto de atividades propostas, em relação às características delineadas na análise *a priori*.

Por último, apresentei no Capítulo V as considerações e conclusões deste trabalho, baseadas nas deliberações anteriores, que permitiram responder as questões levantadas, assim como as indicações e reflexões para pesquisas nesta área de estudo.

JUSTIFICATIVA E OBJETIVO

Meu interesse em lecionar teve início durante as atividades de monitoria exercidas na minha primeira graduação em Engenharia Mecânica. Tendo concluído este curso em 1983, decidi me dedicar ao exercício da atividade docente, nas disciplinas de Matemática e Física no Ensino Básico, atuando tanto na rede particular como na pública, da cidade de São Paulo.

Nas reuniões pedagógicas destas escolas, as discussões de textos envolvendo educadores que propunham um repensar sobre o ensino encontraram eco em mim e em alguns colegas. Tendo realizado meus estudos de escolaridade básica nos moldes da Matemática Moderna, decidi freqüentar algumas palestras, cursos e oficinas para melhor compreensão das questões cuja tônica principal se centrava num ensino onde o aluno assumiria um papel mais ativo e com ênfase em situações-problema contextualizadas, com o intuito de propiciar uma aprendizagem significativa.

Da minha mobilização inicial pela área educacional, senti a necessidade de estudos freqüentes, a fim de melhor compreender a mudança de paradigmas defendidos por diferentes educadores. Então, por volta de 1985, decidi ingressar na Licenciatura em Matemática, a fim de complementar a minha formação técnica e conhecer as especificidades da Educação em Matemática. As discussões promovidas por esses estudos acadêmicos, concomitantemente ao exercício profissional no magistério, permitiram iniciar uma nova compreensão do processo de ensino e de aprendizagem em Matemática. Deste modo, analisei diferentes abordagens de ensino através da leitura de livros e textos, as quais me nortearam e incentivaram na elaboração e aplicação em sala-de-aula de atividades baseadas na exploração de situações-problema contextualizadas.

Em 1990, comecei a lecionar em uma instituição particular do Ensino Superior, em disciplinas básicas da Licenciatura em Matemática. Para melhor compreender a formação dos licenciandos em relação ao ensino de Matemática, decidi então aprofundar meus estudos, ingressando em 1993 num curso de Pós-Graduação ao nível de especialização em Educação Matemática. Este curso, além de oficializar a permissão necessária para a atuação profissional no Ensino Superior, ampliou meus conhecimentos em Matemática, assim como desenvolveu reflexões para o aprimoramento das relações destes com o ensino. Para finalizar o curso, escrevi meu primeiro trabalho acadêmico na área da Educação, desenvolvendo considerações sobre um tema da Álgebra – as Progressões Aritméticas.

Observo que, em virtude de lecionar concomitantemente Matemática e Física no Ensino Básico e Superior e, pelo fato de haver, até então, privilegiado os estudos em Matemática, em 1995 ingressei no Curso de Bacharelado em Física. Esta decisão em aprimorar os conhecimentos desta área para lecionar teve motivação, em grande parte, a partir das dificuldades que percebia nos alunos quanto ao entendimento dos tópicos desta disciplina no meu ofício de professor. Neste curso, pude constatar a utilização da ferramenta algébrica como essencial para a descrição e compreensão dos vários fenômenos físicos, tanto no domínio das grandezas discretas, quanto nas contínuas.

Após vinte anos no magistério do Ensino Básico e alguns anos no Ensino Superior, atuando majoritariamente no ensino de Matemática e, tendo percebido limitações das sugestões dos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, assim como das vivências de cursos de aprimoramento de professores e de minha formação acadêmica, decidi continuar os estudos a fim de melhor entender a problemática do ensino e da aprendizagem, na especificidade da área de Matemática. Deste modo, ingressei no Programa de Estudos de Pós-Graduação do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no 2º semestre de 2005.

Após tomar contato com as linhas de pesquisa desenvolvidas no Programa de Mestrado da PUC/SP e aliando minha formação acadêmica, minhas experiências profissionais e meus interesses, decidi desenvolver meus estudos na área da Álgebra. Assim, comecei a freqüentar as reuniões do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), a fim de conhecer os trabalhos desenvolvidos neste grupo.

O GPEA articula pesquisas em questões do Projeto 'O que se entende por Álgebra?', descrito no texto de Maranhão, Machado e Coelho (2005). Este projeto desenvolve estudos de cunho documental, diagnóstico e interventivo, analisando as interações entre os professores, os estudantes e os programas curriculares.

Nas primeiras reuniões que freqüentei do GPEA, dentre as investigações em andamento, me interessei particularmente por duas pesquisas de mestrado, envolvendo o objeto equação diofantina linear, um tópico de estudo da Teoria dos Números.

Este grupo concebe a Teoria Elementar dos Números como parte integrante da Álgebra do Ensino Básico, conforme resultado de seus estudos. O objetivo das pesquisas desse projeto é investigar o estatuto que esse assunto tem no campo institucional (PCN¹, Programas, etc), no campo docente (professores do Ensino Superior, médio, fundamental e

¹ Os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1997a), foram desenvolvidos pelo Ministério de Educação e Desporto para servir de referência curricular não obrigatória para o Ensino Básico, tendo como objetivo garantir a todas as crianças e jovens brasileiros o direito de usufruir o conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania.

infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos). Os resultados dessas pesquisas visam contribuir para a sensibilização sobre a contribuição dos estudos sobre o tema no desenvolvimento do fazer matemático como demonstrar, conjecturar e diversificar estratégias para resolução de problemas que envolvam números inteiros (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2007).

Assim, me dispus a realizar estudos envolvendo as equações diofantinas lineares no mesmo subprojeto das duas dissertações de mestrado já referidas, denominado 'A Teoria dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura'. A motivação para esta escolha surgiu a partir das discussões por mim vivenciadas no GPEA, as quais relatei a algumas práticas do meu percurso profissional. Numa destas ocasiões, por volta do ano de 2003, tive a oportunidade de lecionar no Ensino Fundamental numa instituição que elabora o próprio material didático. No livro da 7ª série, dentro do caderno de Álgebra, havia um capítulo intitulado 'Duas incógnitas e muitas soluções', contendo uma série de situações-problema envolvendo contextos acessíveis a alunos do Ensino Fundamental e apresentando variado número de soluções inteiras, que implicitamente representavam equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbf{Z}$ e soluções inteiras. Isso me chamou a atenção por não ser comum esse tipo de abordagem no Ensino Básico.

Mais recentemente, um outro aspecto contribuiu para meu interesse pelo enfoque neste subprojeto do GPEA. Lecionando Fundamentos de Matemática junto a calouros do curso de graduação da área de Ciências Sociais, uma das recomendações didáticas aos professores era a utilização de contextos e aplicações dos temas curriculares envolvidos nos respectivos cursos, associando-os aos conteúdos de Matemática. Ocasionalmente, pude perceber que, ao abordar as relações entre alguns temas elementares da Matemática e assuntos específicos da Área de Ciências Sociais, houve uma maior motivação por parte dos alunos, evidência manifestada na fala de alguns alunos quando citavam algo próximo à expressão 'agora eu entendo para que serve a Matemática'. Em um desses cursos, dentro da proposta da integração dos conceitos matemáticos com os temas específicos, necessitei aprofundar meus estudos em Economia, tendo encontrado por meio de diversos livros e textos várias situações básicas desta área em interface com a Matemática.

Assim, relacionando os resultados dessa investigação às discussões no GPEA, observei a existência de uma forte relação envolvendo os conceitos básicos presentes em alguns temas da área de Economia com grandezas discretas, mais particularmente, em situações que envolviam soluções inteiras, as quais estão associadas ao objeto matemático equação diofantina linear.

Ao recuperar essas memórias, contribuições das instituições em que trabalhei como professor, onde havia incentivo e oportunidade para desenvolver propostas com foco na autonomia e tomada de decisões do aluno, aliadas às discussões proporcionadas pelo meu ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, e em particular, no GPEA, pude então questionar *se, como e em que medida* os alunos do Ensino Médio poderiam se beneficiar de conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

Os pesquisadores do GPEA ressaltam a importância de ser trabalhada a Teoria dos Números e a Álgebra de modo articulado e complementar, pois são campos que se entrelaçam permitindo “que se formulem questões cuja solução completa requer manejo de conceitos de forma integrada” (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2005, p. 11).

Com relação à pertinência de estudos, a Álgebra é um ramo do conhecimento matemático presente e predominante no Ensino Básico, conforme observei no programa oficial. Os pesquisadores do grupo GPEA consideram que esta área é imprescindível para o desenvolvimento de idéias matematicamente significativas, sendo necessária a articulação com a própria Matemática e com outros campos da atividade humana.

Além disso, o projeto que direciona as pesquisas do grupo GPEA levanta algumas questões importantes que provocam uma demanda por investigação:

- A Álgebra é verdadeiramente útil para a maioria?
 - Quais mudanças no montante e na natureza do que é ensinado em Álgebra são adequadas para torná-la acessível a mais estudantes?
- (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2005, p. 11).

Esse texto pondera que, apesar da valorização da Álgebra pelo tratamento axiomático da década de 60, iniciado pela reforma conhecida como Matemática Moderna², tal modelo de ensino contribuiu para as dificuldades de aprendizagem algébrica apresentadas pelos alunos. Isto gerou graves conseqüências, pois:

(...) o ensino da Álgebra vem apresentando tantos fracassos que passou a ser também um elemento de exclusão social, uma vez que, os que não conseguem aprendê-la, vêm formar-se diante de si barreiras intransponíveis para a ascensão do conhecimento (CASTRO, 2005, p. 2).

Em consonância com as preocupações expostas, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) propõem um repensar na Educação Algébrica, pois o pensamento algébrico pode ser expresso, dentre suas várias formas, através de linguagem natural, linguagem aritmética e linguagem algébrica. Deste modo, o pensamento algébrico “se potencializa a medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89).

² Segundo os PCN, Brasil (1997a), este movimento organizou o conhecimento matemático de modo axiomático, utilizando elementos da Teoria dos Conjuntos, da Lógica Clássica, das Estruturas Algébricas e da Topologia, pretendendo aproximar a Matemática escolar do modo como era vista pelos matemáticos.

Ainda, no desenvolvimento progressivo do aluno ao longo da sua Educação Algébrica, o papel desempenhado pela linguagem simbólica determina:

(...) um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico abstrato, uma vez que ela fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema, o que possibilita dar conta da totalidade e da estrutura da organização (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89).

Posto desta forma, os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) acreditam que uma primeira etapa do trabalho desenvolvido em Educação Algébrica deve se sustentar em situações-problema, de modo a garantir o funcionamento dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, uma habilidade imprescindível aos estudantes do Ensino Básico.

Passo agora a delinear contribuições do pesquisador Nilson José Machado, na ocasião do Exame de Qualificação, quando chama a atenção para um desequilíbrio existente no programa da escola básica entre a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo. Este autor ressalta que existem questões interessantes e simples envolvendo números inteiros, mas não abordadas na Escola Básica, pois geralmente são resolvidas no conjunto dos números reais e ajusta(m)-se a(s) solução(ões) particular(es) para os números inteiros. Deste modo, a pertinência de problemas envolvendo equações diofantinas lineares no ensino de Matemática do ciclo básico fica vinculada à valorização e importância de questões envolvendo números inteiros.

De modo geral, pode-se considerar que a parte quantitativa³ do conhecimento matemático pode ser subdividida em duas correntes: a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo. Brolezzi (1996), em sua tese de doutorado, aponta que o par discreto/contínuo se refere, respectivamente, a duas ações fundamentais da Matemática, quais sejam: contar e medir. Assim, para introduzir a caracterização do par discreto/contínuo, faço menção ao estudo etimológico presente no trabalho desse autor.

De modo geral, *discreto* é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim *discretus*, participio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. (...) Já *contínuo* vem de *com-tenere* (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido à outra coisa (BROLEZZI, 1996, p. 1).

Numa linguagem formal, uma grandeza é discreta quando ela for contável, ou seja, é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos de um dado conjunto e o conjunto dos números naturais. Em oposição a uma grandeza discreta, Brolezzi (1996) nos diz que uma grandeza é contínua quando for passível de ser medida.

³ Além da parte quantitativa do conhecimento matemático, Brolezzi (1996) argumenta que na Matemática existe uma parte qualitativa que se manifesta, por exemplo, no estudo das leis da lógica e na topologia.

Apesar desta caracterização proposta em Brolezzi (1996), distinguir a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo não implica em uma divisão em duas partes disjuntas. Este autor defende que entre essas duas correntes há uma importante interação, a ser explorada no ensino da Matemática Elementar.

Quanto aos PCN, Brasil (1997a), constatei uma breve recomendação para a exploração do par discreto/contínuo. Este documento considera que a Matemática se desenvolve:

(...) mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina (BRASIL, 1997a, p. 20, grifo meu).

Assim, a Matemática Discreta envolve apenas estruturas matemáticas discretas ou finitas. Haetinger (2007) aponta que ela é ferramenta utilizada em áreas científicas, como, por exemplo, nas Ciências da Computação e em Economia, assim como na própria Matemática, em particular com relação aos estudos de temas da Teoria dos Números, permitindo desenvolver habilidades de contagem, estimação e previsibilidade. Atualmente, uma grande ênfase da Matemática Discreta se encontra no estudo dos algoritmos aritméticos: máximo divisor comum, teste de números primos, modularidade e criptografia⁴.

Veloso et. al. (2005), ao relatar que a Matemática Discreta é uma área pouco valorizada no Ensino Básico, sugere que se desenvolvam estratégias de cálculo e de resolução de problemas no contexto da Teoria dos Números, permitindo estabelecer ponte com a Álgebra.

Ainda com relação a pouca ênfase na Matemática Discreta, Jurkiewicz (2004) esclarece que o processo de apropriação de temas para o Ensino Básico tem sido acarretado mais por fatores sócio-econômicos do que acadêmicos, culminando no estabelecimento do currículo de Matemática de forma seqüencial e cumulativo⁵. Um aspecto crucial para entender o atual desequilíbrio em favor do contínuo no currículo atual de Matemática da escola básica, se deve ao papel histórico desencadeado pelo surgimento do cálculo diferencial e integral.

⁴ Além dos temas citados, a Matemática Discreta contribui com estudos na Teoria dos Conjuntos, Teoria dos Grafos, Análise Combinatória, Probabilidade Discreta, Álgebra Linear, Álgebra Booleana, Estruturas Algébricas, na modelagem matemática e nos métodos de provas e demonstrações.

⁵ Por seqüencial e cumulativo, o autor credita o currículo montado de modo que o aluno da Escola Básica percorra passo a passo o desenvolvimento das idéias matemáticas desenvolvidas ao longo da linha do tempo, que aumenta à medida que a sociedade acumula mais conhecimentos.

A seqüência números naturais; números inteiros; números racionais; números reais (...) aponta de forma decisiva para uma matemática do contínuo. (...) A geometria analítica e o estudo de conjuntos e funções preparam o espírito dos estudantes para as ferramentas da continuidade. O programa é claro, explícito e bem sucedido. Nunca é demais reforçar que esse sucesso é merecido. A quantidade e a qualidade dos resultados de matemática do contínuo possibilitou ao mundo ser o que é hoje. Essa matemática soube responder, com louvor, aos desafios pela ciência dos séculos XIX, XX e ainda vai nos oferecer muito mais (JURKIEWICZ, 2004, p. 2-3).

Contrapondo esta tendência, Jurkiewicz (2004) aponta a era pós-industrial do século XX como um momento de retomada da Matemática Discreta, essencial para o desenvolvimento das ciências da computação, assim como na modelagem⁶, permitindo a resolução de problemas logísticos imprescindíveis para a administração de recursos e serviços da sociedade como um todo. Neste sentido, o autor propõe a inclusão de alguns de seus tópicos na sala de aula, citando-a como ferramenta pedagógica poderosa por proporcionar problemas de compreensão acessível, complementando os de concepção mais clássica, abordados pela Matemática do Contínuo.

Observando a indissociável relação entre o currículo de Matemática e o material utilizado no ensino vigente, a dissertação de Moura (2005) reafirma as conclusões delineadas acima, ao analisar livros didáticos no Ensino Básico, apontando que a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental e até o Ensino Médio, prevalece a Matemática do Contínuo. A autora conclui que o livro didático poderia encaminhar propostas que possibilitassem um maior aproveitamento tanto da via do discreto quanto da via do contínuo, de modo a propiciar uma melhor apresentação e discussão dos conceitos matemáticos.

Ainda com relação ao par discreto/contínuo, encontrei menção na dissertação de mestrado de Lopes Júnior (2005), que investigou a compreensão do conceito de função de 1º grau. Ao aplicar e analisar uma seqüência didática, o autor constatou que os alunos de Ensino Médio pesquisados não distinguem e não compreendem quando a variável assume valor discreto ou contínuo, em questões envolvendo a solução com números inteiros.

Assim, com base nas ponderações apresentadas que realçam a pertinência e necessidade de propostas envolvendo números inteiros no currículo do Ensino Básico, me propus a desenvolver uma pesquisa que contribua para o entendimento das questões da Matemática Discreta junto a alunos do Ensino Médio.

⁶ Segundo D'Ambrosio (2006), a modelagem se caracteriza pela natureza dos parâmetros envolvidos, sendo estes quantificáveis e sujeitos a um tratamento matemático.

Neste ponto, posicionando o lugar das equações diofantinas lineares na Matemática Discreta, referencio a tese de doutorado de Resende (2007), do GPEA, que desenvolveu sua pesquisa orientada pela questão: 'Qual a Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na licenciatura em Matemática, visando a prática docente na escola básica?'. O objetivo da pesquisa foi compreender a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar e buscar elementos para re-significá-la na licenciatura em Matemática. A autora desenvolveu a análise epistemológica e histórica, a análise de livros didáticos no Ensino Superior e fez entrevistas com educadores matemáticos e matemáticos especialistas.

Deste modo, Resende (2007) delimitou os assuntos básicos a serem tratados num curso inicial de Teoria Elementar dos Números:

Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades; definição por recorrência (potências em \mathbb{N} , seqüências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita. **Divisibilidade:** algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética. **Introdução à congruência módulo m :** definição, propriedades, algumas aplicações. **Equações Diofantinas Lineares** (RESENDE, 2007, p. 228).

Assim, com base em Resende (2007), considero pertinente ressaltar nesta pesquisa as equações diofantinas lineares como pertencente ao recorte designado como Teoria Elementar dos Números, que aborda temas exclusivamente voltados aos números inteiros, inseridos no contexto mais amplo da Matemática Discreta.

A descrição de Resende (2007) está de acordo com Campbell e Zazkis (2002), que caracterizam a Teoria dos Números como o estudo dos temas usuais - números inteiros, múltiplos e divisores, decomposição em fatores primos, estudo da divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum - assuntos pertencentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico.

Os autores Campbell e Zazkis (2002) questionam os motivos da falta do estudo da Teoria dos Números dentro da Matemática, ressaltando a necessidade de mais pesquisas. Estas ponderações estão em conformidade com os PCNEM⁷, Brasil (1998), que enfatizam a necessidade de contemplar estudos matemáticos envolvendo os números, suas operações e propriedades, tanto na Aritmética, como na Álgebra.

⁷ Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Brasil (1998), foram elaborados tendo como objetivo propiciar ao sistema de ensino subsídios para a re-elaboração do currículo nesta faixa de ensino, em face a construção da cidadania do aluno e do projeto pedagógico.

Ainda, Ferrari (2002) reforça que o trabalho com tópicos da Teoria dos Números necessita de conceitos básicos simples. O autor aponta que a atividade de resolução de problemas de Teoria dos Números não envolve, necessariamente, a aplicação direta de algoritmos, mas necessita do desenvolvimento de habilidades como interpretar e conjecturar, assim como incentiva a busca de heurísticas⁸.

Dessa forma, os membros do GPEA acreditam que pesquisas envolvendo Teoria dos Números poderão revelar caminhos promissores para a Educação Algébrica.

Dentre as investigações de Educação Matemática mundiais, aquelas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra e da Teoria Elementar dos Números em níveis de ensino superiores e entre professores do Ensino Básico têm tido uma atenção crescente por parte dos pesquisadores. A importância desses estudos repousa no fato de que a Álgebra e a Teoria dos Números são subjacentes a quase todos os domínios da Matemática, e até mesmo de outras áreas (...) (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2005, p. 11).

Dentre os trabalhos recentemente desenvolvidos envolvendo equações diofantinas lineares relacionadas ao Ensino Básico, dois deles foram recentemente apresentados por integrantes do grupo GPEA do Programa de Educação Matemática da PUC/SP, nomeadamente as pesquisas desenvolvidas por Oliveira (2006) e por Costa (2007), inseridas no subprojeto 'A Teoria dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura'.

A pesquisa de Oliveira (2006) almejou verificar se o objeto matemático equação diofantina linear se encontra presente em documentos oficiais e no livro didático do Ensino Médio. O autor observou não haver referência explícita e poucas situações implícitas nas duas coleções de livros didáticos analisadas. Considerando-se a pesquisa com docentes realizada por Costa (2007), este constatou que embora os professores afirmem trabalhar com seus alunos situações-problema que recaem em equações do tipo das diofantinas lineares, ainda utilizam o método de tentativa e erro como ferramenta de resolução, aliada a uma concepção da escrita algébrica como mera formalização, sem exploração de sua capacidade resolutive.

Estas constatações de Oliveira (2006) e de Costa (2007) revelam que o objeto equação diofantina linear é tratado esporadicamente de forma implícita, nunca explicitamente, no Ensino Médio. Tais conclusões configuraram uma motivação para o levantamento de situações-problema que possibilitassem a alunos do Ensino Médio encontrar estratégias eficientes para a busca de soluções em questões envolvendo equações diofantinas lineares.

⁸ Segundo Pozo (1998), procedimentos heurísticos ou estratégias são os planos e metas desenvolvidos pelos alunos que os guiam, de forma global, à busca de solução de problemas. Em oposição, os procedimentos algorítmicos são baseados em regras e operações pré-determinadas, que viabilizam a solução de forma direta e específica.

Aliada a essa motivação e atento às experiências de meu percurso profissional, observei que alguns conceitos básicos abordados em livros de Economia apresentam questões de contexto próximo à realidade do cidadão comum, permitindo uma modelagem utilizando grandezas discretas, e em particular, as equações diofantinas lineares. Entre essas situações econômicas, destaco àquelas direcionadas ao comportamento econômico individual de consumidores e relacionadas às escolhas e às possibilidades de aquisição de bens ou serviços ligados ao convívio diário, situações estas naturalmente envolvendo grandezas discretas.

No ensino, a discriminação de todas possibilidades de aquisição de produtos ou serviços, além de favorecer reflexões relativas às questões referentes à cidadania, envolvendo alunos do Ensino Médio, é uma operação de pensamento importante, pois proporciona oportunidade de vínculo com um tema matemático relativo a valores monetários associados à realidade cotidiana. Nesse sentido, as equações diofantinas lineares possibilitam o desenvolvimento deste tipo de competência, no campo dos números inteiros, através da busca de todas as soluções inteiras.

As ponderações feitas até o presente momento me nortearam a tecer as seguintes questões:

- Os alunos do Ensino Médio podem desenvolver conhecimentos sobre equações diofantinas lineares?

- Como os alunos do Ensino Médio explicitam as soluções de problemas envolvendo equações diofantinas lineares a partir de uma situação a-didática⁹ proposta, utilizando suas próprias estratégias?

Tendo como base as considerações delineadas, estabeleci como objetivo deste trabalho verificar *se, como e em que medida* os alunos do Ensino Médio explicitam conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

⁹ De acordo com Brousseau (1996a), a situação a-didática é aquela que permite provocar no aluno uma interação o mais independente e fecunda possível, através da adaptação do aluno a um meio com intenções didáticas, que lhe impõe dificuldades, contradições e desequilíbrios. Dessa forma, permite provocar o aparecimento de novas respostas, que representam a maneira como o aluno aprende o conhecimento almejado. Para provocar estas adaptações, Brousseau (1996a) propõe que seja realizada uma escolha judiciosa de problemas ou jogos, cujas resoluções sejam permitidas pela própria lógica interna da situação, de modo que o aluno os aceite, levem-no a agir, a refletir e a evoluir por si próprio, sem qualquer transmissão explícita de conhecimentos.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS: LEITURAS E ESCOLHAS

Neste capítulo apresento os fundamentos teóricos, tanto as considerações matemáticas como os argumentos didáticos, que embasaram esta pesquisa. Inicialmente, delinheiro um breve percurso histórico para evidenciar a origem e desenvolvimento das equações diofantinas lineares, descrevendo assim os conceitos matemáticos envolvidos neste estudo.

Saliento também que a proposta desta pesquisa, envolvendo situações-problema que representam equações diofantinas lineares, pode causar estranheza ao leitor, pelo fato de tal tema matemático não constar do Programa Oficial do Ensino Médio. Dessa forma, foram tecidas considerações didáticas acerca da necessidade e pertinência de tal assunto no ciclo básico, embasadas em estudos envolvendo a Matemática Discreta e, mais especificamente, a Teoria Elementar dos Números.

Desenvolvimento Histórico das Equações Diofantinas Lineares

Para a compreensão das equações diofantinas lineares quanto ao seu significado, surgimento e desenvolvimento histórico, inicialmente faço referência a Diofante¹⁰, matemático grego que tem seu nome ligado a este objeto, possibilitando assim, esclarecer seu papel e importância dentro de tal tema.

Encontramos menção em Rocque e Pitombeira (1991) que as obras de Diofante de Alexandria não seguem a tradição clássica grega para os textos matemáticos, não se assemelhando e nem formando a base da Álgebra elementar dos nossos dias.

Sua obra aproximava-se mais da álgebra babilônica no que se refere a determinar as soluções numéricas de uma equação. Porém, enquanto que:

(...) os matemáticos babilônicos se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas (...), [a obra de]¹¹ Diofante de Alexandria é quase toda dedicada à resolução exata de equações, tanto determinadas como indeterminadas (BOYER, 1974, p. 132).

Conforme Zerhusen, Rakes e Meece (2005), o trabalho mais conhecido de Diofante, *Arithmetica*, é um tratado que originalmente continha 13 livros, dos quais somente seis se preservaram. Estes pesquisadores não consideram tal coletânea um texto algébrico, mas sim uma coleção de problemas resolvidos de aplicação da álgebra.

¹⁰ Supõe-se que Diofante tenha vivido e nascido em Alexandria, no Egito, por volta de 250 a.C.

¹¹ Nesta citação, assim como nas demais, a inserção colocada entre colchetes visa articular o recorte.

Ainda com relação a *Arithmetica*, Lins e Gimenez (2005) apontam que Diofante solucionava os problemas expostos utilizando aplicações numéricas específicas, introduzindo diversas técnicas de resolução, porém sem recorrer à teorização. Estes problemas envolviam equações representando expressões na forma polinomial, subdivididas em dois grupos: as equações determinadas e as equações indeterminadas. Porém, ocorre que “não é feita uma distinção clara entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, para os quais o número de soluções é geralmente infinito, uma só resposta é dada” (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 46).

Para compreendermos o papel da obra de Diofante e situá-la dentro das fases evolutivas da linguagem algébrica, relato três momentos no desenvolvimento da Álgebra:

- a primeira, conhecida como álgebra pré-diofantina, é constituída da fase retórica ou verbal, onde “não se fazia uso de símbolo nem de abreviações para expressar o pensamento matemático” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 79);

- a segunda etapa, denominada fase sincopada, iniciou-se com a obra *Arithmetica*, de Diofante, que fez uso de “um símbolo para a incógnita - a letra sigma do alfabeto grego - e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações” (ibidem, p. 80). Posteriormente, os hindus utilizaram esta forma sincopada;

- a terceira, denominada fase simbólica, corresponde “ao momento em que as idéias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 80). Assim, Viète (1540-1603) introduziu novos símbolos na álgebra e Descartes (1596-1650) consolida esta fase introduzindo as últimas letras do alfabeto (x, y, z, \dots) como as quantidades desconhecidas (incógnitas), sendo as letras iniciais do alfabeto (a, b, c, \dots) utilizadas para as quantidades conhecidas (parâmetros).

Apesar do grande mérito de Diofante pela introdução do estilo sincopado, muitos historiadores, de acordo com Zerhusen, Rakes e Meece (2005), atribuem a este estilo o fato de Diofante nunca ter desenvolvido um método geral de solução para os problemas envolvendo equações indeterminadas.

Porém, estes autores fazem reflexão sobre este tema, mencionando o livro *Diophantus and Diophantine Equations*, de Isabella Bashmakova (s/d), afirmando que:

(...) muitas das técnicas eram mais gerais do que os críticos pensam, mas não são reconhecidas como tais devido a limitações em sua notação. Por exemplo, Diofante não introduz variáveis adicionais num problema, mas prefere introduzir um inteiro arbitrário. (...) [Num] problema encontrado no Livro *Arithmetica*, tomo 2, pode ser visto que ele [Diofante] está ciente que qualquer inteiro servirá (ZERHUSEN; RAKES; MEECE, 2005, p. 3).

Milies e Coelho (2003) apontam que na *Arithmetica*, Diofante buscava encontrar as soluções inteiras ou racionais não negativas de equações indeterminadas¹², que atualmente são conhecidas como equações diofantinas. Ainda, segundo Milies e Coelho (2003), foi Fermat o primeiro a tratar questões envolvendo as equações indeterminadas estritamente no âmbito do conjunto dos números inteiros.

Apesar de muitos problemas tratados no livro *Arithmetica* estarem relacionados às equações diofantinas, Zerhusen, Rakes e Meece (2005) afirmam que a obra não contém problemas envolvendo as equações indeterminadas de primeiro grau, pois Diofante não lhes atribuía qualquer importância.

Deste modo, Hefez (2005) aponta que Diofante teve seu nome atribuído às equações diofantinas lineares como uma homenagem póstuma, dada por sua importância dentro do desenvolvimento da Matemática.

Vale observar que problemas envolvendo aplicações de equações diofantinas lineares a duas variáveis, do tipo $ax + by = c$, assim como as de segundo grau a três variáveis, do tipo $x^2 + y^2 = z^2$, já tinham sido abordados num período anterior a Diofante, pelos babilônios, conforme citam Zerhusen, Rakes e Meece (2005).

Historicamente, porém, foi Brahmagupta, um matemático hindu que viveu em 628 d.C., na Índia central, o primeiro a explicitamente:

(...) dar uma solução geral da equação linear diofantina [do tipo] $ax + by = c$, onde a , b e c são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c ; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x = p + mb$; $y = q - ma$, onde m é um número inteiro arbitrário [sendo p e q uma solução inteira particular]. (...) Brahmagupta merece muito louvor por ter dado todas as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto que Diofante de Alexandria tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada" (BOYER, 1974, p. 161).

Considerações Matemáticas Envolvendo as Equações Diofantinas Lineares em Z

O estudo a seguir, abordando o objeto matemático equação diofantina linear, é pautado nas leituras e discussões proporcionadas pelo grupo GPEA e desenvolvido nas pesquisas de Oliveira (2006) e de Costa (2007), assim como nos resultados presentes em Rocque e Pitombeira (1991), Milies e Coelho (2003), Universidade de Minho (2003) e Hefez (2005).

¹² O método utilizado na *Arithmetica* para a resolução dos problemas indeterminados tornou-se mais tarde conhecido como Análise Diofantina.

Como introdução, destaco a **equação diofantina** definida como:

(...) uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções (COURANT; ROBBINS, p.59, 2000).

Esta investigação assumiu um recorte ao considerar somente problemas envolvendo a busca de soluções inteiras da forma $ax + by = c$, com a , b e c inteiros, conhecida como **equação diofantina linear a duas incógnitas**.

Observando a definição de equação diofantina e a delimitação do objeto de estudo escolhido, emergem algumas questões: É possível antever se problemas envolvendo uma dada equação diofantina linear têm ou não solução? E, caso possua um número finito, quantas e quais são estas soluções inteiras? Ainda, caso existam infinitas soluções, como é possível expressá-las?

As respostas a estas questões foram solucionadas ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática, sendo apresentadas pela Teoria Elementar dos Números, embasadas em resultados advindos do tópico 'divisibilidade'.

A seguir, apresento três exemplos que ilustram situações que recaem em equações diofantinas lineares, cujas resoluções possibilitam introduzir e situar os critérios de existência de solução, o processo para a busca de solução e a representação algébrica, que permite expressar, de modo genérico, as respostas aos questionamentos pontuados.

Situação 1: O problema das quadras

Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos? (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Para que 80 alunos joguem simultaneamente, a situação pode ser descrita pela equação diofantina linear $10x + 12y = 80$, pois atuam em cada time de basquete cinco jogadores e em cada time de vôlei seis atletas. Esta situação apresenta duas soluções, que correspondem aos pares ordenados (2;5) ou (8;0), onde a coordenada 'x' representa a quantidade de quadras de basquete e 'y' representa a quantidade de quadras de vôlei. A variação da situação para um número ímpar de alunos, representada pela equação $10x + 12y = 77$, não apresenta solução.

Situação 2: O Problema do laboratório

Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez, enquanto [que] a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar exatamente 2 mil amostras? (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

A situação 2, que pode ser descrita pela equação $15x + 25y = 2000$, ou pela equivalente $3x + 5y = 400$, apresenta vinte e sete soluções naturais, onde 'x' e 'y' representam a quantidade de vezes que cada uma das máquinas é acionada.

Situação 3: O Problema das moedas

Suponhamos que só existam moedas de 15 e 7 escudos e que eu queira pagar uma certa quantia em escudos. Será que é sempre possível? E se existirem moedas de 12 e 30 escudos? (UNIVERSIDADE DE MINHO, 2003, p.1).

A situação 3 deixa em aberto a quantia total disponível a ser paga. Isto requer a interpretação que qualquer quantidade expressa por um número inteiro pode ser paga, desde que seja possível pagar 1 escudo, bastando repetir o pagamento até a quantia necessária. Assim sendo, a equação diofantina linear que representa este problema é $15x + 7y = 1$, sendo 'x' e 'y' respectivamente as quantidades de moedas de 15 e 7 escudos utilizadas. Deste modo, existem infinitas soluções inteiras, pois na troca de moedas, o ato de pagar pode se associar à operação de adição e o ato de receber a operação de subtração. E para o caso das moedas de 12 e 30 escudos, com equação descrita por $12x + 30y = c$, existem também infinitas soluções, desde que c seja múltiplo de 6.

Ressalto que situações-problema como as apresentadas acima, com número diverso de soluções inteiras e até mesmo com solução vazia, permitem aflorar variadas estratégias de resolução, como a da tentativa e erro, a utilização dos múltiplos ou divisores, assim como a utilização da escrita algébrica.

Cada uma destas estratégias tem uma certa abrangência para resolver parcialmente ou na totalidade as situações delineadas acima. Este fato permite entender a necessidade de critérios matemáticos que possibilitam prever e determinar todas as soluções inteiras, caso existam, envolvendo as equações diofantinas lineares a duas incógnitas.

Apresento a seguir um critério que permite verificar a existência de solução de uma equação diofantina linear a duas incógnitas, assim como um algoritmo que possibilita determinar todas as soluções inteiras e uma expressão algébrica representando, de forma concisa, todas as soluções a partir de uma solução particular.

Condição de existência de uma equação diofantina linear

Existe um critério que estabelece se uma equação diofantina linear tem ou não soluções inteiras, utilizando conceitos básicos presentes no currículo do Ensino Básico.

Inicialmente, abordo o caso das soluções triviais, que ocorre quando $\mathbf{a=0}$ ou $\mathbf{b=0}$. Se $\mathbf{a=0}$ e $\mathbf{b\neq0}$, então existe solução se \mathbf{b} divide \mathbf{c} . Nesse caso, a solução geral é dada por x qualquer e $y = \frac{c}{b}$. Analogamente, se $\mathbf{a\neq0}$ e $\mathbf{b=0}$, então existe solução se \mathbf{a} divide \mathbf{c} e a solução será obtida por $x = \frac{c}{a}$ e y qualquer.

Para os casos não-triviais, isto é, quando os coeficientes são inteiros não nulos, é necessário recorrer a algumas propriedades da divisibilidade de números inteiros. Sejam \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{d} números inteiros.

Propriedade 1- Se \mathbf{d} divide \mathbf{a} , então dividirá $\mathbf{a.m}$, para qualquer inteiro \mathbf{m} .

Propriedade 2- Se \mathbf{d} divide \mathbf{a} e \mathbf{d} divide \mathbf{b} , então \mathbf{d} divide $\mathbf{a + b}$.

Propriedade 3 (Teorema de Bézout)- Seja $\mathbf{d = m.d.c. (a,b)}$. Então, existem inteiros \mathbf{r} e \mathbf{s} tais que $\mathbf{d=ra + sb}$.

A partir das propriedades 1 e 2, a condição necessária para existir solução inteira da equação $\mathbf{ax + by = c}$, com \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} inteiros é expressa por: se a equação dada tiver uma solução representada pelo par de inteiros $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y_0}$, e se \mathbf{d} for um divisor comum de \mathbf{a} e \mathbf{b} , então \mathbf{d} dividirá \mathbf{c} . Ainda, se \mathbf{d} for o máximo divisor comum de \mathbf{a} e \mathbf{b} , então \mathbf{d} deve dividir \mathbf{c} .

Utilizando a propriedade 3, é possível verificar a condição como suficiente, pois se \mathbf{d} for o máximo divisor comum de \mathbf{a} e \mathbf{b} e \mathbf{d} dividir \mathbf{c} , então $\mathbf{c = d.m}$. Assim, existem inteiros \mathbf{r} e \mathbf{s} tais que $\mathbf{ar + bs = d}$. Ao se multiplicar por \mathbf{m} os membros desta última igualdade, resulta $\mathbf{a(rm) + b(sm) = c}$, onde surge que $\mathbf{x = rm}$ e $\mathbf{y = sm}$ é a solução procurada.

Então, vale o seguinte teorema:

Teorema 1: Sejam \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} inteiros (com \mathbf{a} e \mathbf{b} não nulos) e $\mathbf{d = m.d.c. (a,b)}$. A equação diofantina $\mathbf{ax + by = c}$ tem soluções inteiras se e somente se $\mathbf{d|c}$.

Como ilustração deste teorema, retomei 'o problema das quadras' apresentado anteriormente. No caso inicial de 80 alunos jogarem simultaneamente, a equação é dada por $10x + 12y = 80$. Assim, o $\mathbf{m.d.c.(10,12) = 2}$, que divide 80, garante a existência de solução. No caso da situação relativa a 77 alunos, representada pela equação $10x + 12y = 77$, a inexistência de solução ocorre pelo fato do $\mathbf{m.d.c.(10,12) = 2}$ não dividir 77. Neste caso, é possível verificar a inexistência de solução, considerando-se que o 1º membro da última equação é sempre par, diferindo em paridade¹³ com o 2º membro.

¹³ Dois números inteiros têm mesma *paridade*, quando são ambos pares ou ambos ímpares.

Algoritmo para encontrar as soluções de uma equação diofantina linear

Neste segmento, sintetizo as considerações sobre o algoritmo para a resolução de uma equação diofantina linear $ax + by = c$, ampliando os resultados do **Teorema 1**. Isto é possível, pois se existir solução e o máximo divisor comum entre os coeficientes a e b for $d \neq 1$, então basta dividir os membros da equação por d , de modo a obter novos coeficientes relativamente primos, com um segundo membro ainda inteiro.

Assim, o **Corolário do Teorema 1** é expresso por: Se $\text{mdc}(a,b) = 1$, então a equação $ax + by = c$, com a, b, c inteiros sempre tem soluções inteiras, para qualquer c .

Com base no **Corolário do Teorema 1**, resolver uma equação diofantina linear do tipo $ax + by = c$, com a, b, c e soluções inteiras, onde $\text{m.d.c.}(a,b) = 1$, equivale a encontrar inteiros r e s tais que $ar + bs = 1$. Um dos modos de se obter estes inteiros r e s é através do algoritmo de Euclides ou algoritmo das divisões sucessivas.

Sejam a e b inteiros, com $b > 0$. Pelo algoritmo da divisão, existem inteiros q e r , com $0 \leq r < b$, únicos, tais que $a = bq + r$. Se g é um divisor comum de a e b , então g divide a e g divide b . Como g divide b , então, pela propriedade 1, g divide $b \cdot q$. Fazendo-se $a - bq = r$, como g divide a e g divide bq , pela Propriedade 2, g divide r . Logo g é um divisor comum de b e r . Assim, o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e r .

Reciprocamente, se g divide b e g divide r , como $a = bq + r$, segue-se que g divide a . Como g também divide b , então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Satisfeita a condição de existência de solução para uma equação diofantina linear, para descobrir as soluções gerais deve-se inicialmente obter uma solução particular da mesma, denominada (x_0, y_0) , partindo, por exemplo, do algoritmo de Euclides para se encontrar o m.d.c. de dois números inteiros.

Usualmente, o algoritmo para dividir dois inteiros a e b é dado por:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

Muda-se este esquema para dispô-lo para o algoritmo de Euclides:

Observe que q representa o quociente e r o resto.

$$\begin{array}{r|l} & q \\ \hline a & b \\ r & \end{array} \quad \curvearrowright$$

Assim, o algoritmo de Euclides fica possibilitado pelas divisões sucessivas, representadas genericamente no dispositivo abaixo.

| | | | | | | | |
|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------|-----|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------|
| | q_1 | q_2 | q_3 | ... | ... | q_n | q_{n+1} |
| a | b | r_1 | r_2 | ... | r_{n-2} | r_{n-1} | r_n |
| $b \cdot q_1$ | $r_1 \cdot q_2$ | $r_2 \cdot q_3$ | ... | ... | $q_n \cdot r_{n-1}$ | $q_{n+1} \cdot r_n$ | |
| $r_1 = a - b \cdot q_1$ | $r_2 = b - r_1 \cdot q_2$ | $r_3 = r_1 - r_2 \cdot q_3$ | ... | ... | $r_n = r_{n-2} - q_n \cdot r_{n-1}$ | $r_{n-1} - q_{n+1} \cdot r_n = 0$ | |

Exemplifico a busca de uma solução particular através da equação diofantina linear $32x + 9y = 7$, presente no artigo de Rocque e Pitombeira (1991). Sendo, $a = 32$; $b = 9$ e $c = 7$, o algoritmo de Euclides para o cálculo do $mdc(32,9)$ é dado por:

| | | |
|-------|------------------|-------|
| | 3 | ↻ (.) |
| 32 | 9 | |
| (-) ↻ | ↻ | ↻ |
| ↻ | $3 \cdot 9 = 27$ | |
| | $32 - 27 = 5$ | |

| | | |
|----|-----------------|-------|
| | 3 | ↻ (.) |
| 32 | 9 | 5 |
| 27 | ↻ | ↻ |
| | $1 \cdot 5 = 5$ | |
| 5 | $9 - 5 = 4$ | |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 1 | 4 |
| 32 | 9 | 5 | 4 | 1 |
| 27 | 5 | 4 | 4 | |
| 5 | 4 | 1 | 0 | |

Este algoritmo resume as seguintes divisões:

$$32 = (3 \cdot 9) + 5 \quad (A)$$

$$9 = (1 \cdot 5) + 4 \quad (B)$$

$$5 = (1 \cdot 4) + 1 \quad (C)$$

Verifica-se que o $mdc(32,9) = mdc(9,5) = mdc(5,4) = mdc(4,1) = 1$. Portanto, existe solução, garantida pela aplicação do Corolário do Teorema 1.

A próxima etapa consiste em escrever as equações (A), (B) e (C) em função do resto das divisões euclidianas. Assim:

$$5 = 32 - (3 \cdot 9) \quad (A')$$

$$4 = 9 - (1 \cdot 5) \quad (B')$$

$$1 = 5 - (1 \cdot 4) \quad (C')$$

Combinando-se as equações, substitui-se (B') em (C'):

$$1 = 5 - (1 \cdot 4) \Leftrightarrow 1 = 5 - 1 \cdot [9 - (1 \cdot 5)] \Leftrightarrow 1 = 5 - (1 \cdot 9) + (1 \cdot 5) \Leftrightarrow 1 = (2 \cdot 5) - (1 \cdot 9) \quad (D).$$

Substituindo a equação (A') em (D), obtém-se:

$$1 = (2 \cdot 5) - (1 \cdot 9) \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot [32 - (3 \cdot 9)] - (1 \cdot 9) \Leftrightarrow 1 = (2 \cdot 32) - (6 \cdot 9) - (1 \cdot 9) \Leftrightarrow$$

$$1 = (2 \cdot 32) - (7 \cdot 9) \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot (32) + (-7) \cdot (9) \quad (E)$$

A partir de (E), os valores de r e s são 2 e -7, verificados abaixo por simples inspeção:

$$(32x + 9y = 1) \Leftrightarrow (32 \cdot (2) + 9 \cdot (-7) = 64 - 63 = 1)$$

Agora, para se obter os valores de x_0 e y_0 , basta multiplicar a expressão (E) pelo coeficiente c , que, neste caso, vale 7. Então:

$$(32 \cdot (2) + 9 \cdot (-7) = 1) \Leftrightarrow (7 \cdot 32 \cdot (2) + 7 \cdot 9 \cdot (-7) = 7 \cdot 1) \Leftrightarrow (32(14) + 9 \cdot (-49) = 7).$$

Assim, a solução particular almejada é dada pelo par $(x_0; y_0) = (14; -49)$.

Para a obtenção do algoritmo que exprima todas as possíveis soluções de uma equação diofantina linear $ax + by = c$, com a, b, c inteiros, a partir da solução particular (x_0, y_0) , a idéia consiste em adicionar e subtrair o número $a \cdot b \cdot k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Deste modo:

$$(ax_0 + by_0 = c) \Leftrightarrow (ax_0 + by_0 + a.b.k - a.b.k = c) \Leftrightarrow [a(x_0 + b.k) + b(y_0 - a.k) = c].$$

Assim, o par $(x_0 + bk, y_0 - ak)$ é solução da equação diofantina linear. Para provar a unicidade desta solução, deve-se supor a existência de outra solução, representada por $(x_1; y_1)$. Deste modo, existiriam duas soluções dadas por $ax_0 + by_0 = c$ e $ax_1 + by_1 = c$, que igualadas resultariam em:

$$ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1 \Rightarrow a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1).$$

No 1º caso, considerando $a = 1$ e denominando $k = y_0 - y_1$, tem-se:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1) \Rightarrow 1(x_1 - x_0) = b.k \Rightarrow x_1 - x_0 = b.k \Rightarrow x_1 = x_0 + b.k.$$

Também, $y_0 - y_1 = k \Rightarrow y_1 = y_0 - k$, com $a = 1$.

Logo, $(x_1; y_1)$ é da forma $(x_0 + bk, y_0 - ak)$.

No 2º caso, considerando-se $a \neq 1$ e sendo a e b relativamente primos, então a divide $y_0 - y_1$, ou seja, $y_0 - y_1 = a.k$, sendo k um número inteiro. Então:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1) \Rightarrow a(x_1 - x_0) = b.a.k \Rightarrow x_1 - x_0 = b.k, \text{ pois } a \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + b.k.$$

Provada a solução e sua unicidade, o **Teorema 2**, enunciado abaixo, garante o algoritmo para a busca de solução de uma equação diofantina linear:

Teorema 2: Se $(x_0; y_0)$ for uma solução da equação diofantina linear $ax + by = c$, com $m.d.c.(a; b) = 1$, então $(x; y)$ será solução se, e somente se, existir um inteiro k tal que $x = x_0 + b.k$ e $y = y_0 - a.k$.

Por último, para a equação $ax + by = c$, caso $d = m.d.c.(a, b) \neq 1$, as soluções gerais são dadas por: $x = x_0 + \frac{b}{d}.k$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}.k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Para efeito de ilustração, retomarei a equação $32x + 9y = 7$, descrita anteriormente. A partir da solução particular dada pelo par $(14; -49)$, a solução geral é expressa por:

$$x = x_0 + b.k = 14 + 9k \quad \text{e} \quad y = y_0 - a.k = -49 - 32k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, observo que pesquisas poderiam ser encaminhadas envolvendo a resolução de equações diofantinas lineares, a fim de permitir ao aluno construir o algoritmo expresso no Teorema 2, através da observação e generalização de padrões, apesar do algoritmo de Euclides não ser o método utilizado usualmente no ensino do m.d.c. no ciclo básico, conforme descrito em Rama (2005).

Fundamentos Didáticos: Leituras e Escolhas

Aponto, a seguir, estudos envolvendo a Matemática Discreta e a Teoria dos Números, enfocando, em particular, as equações diofantinas lineares, que contribuíram para o desenvolvimento do presente trabalho.

Inicialmente, considero relevante estudos voltados para as equações diofantinas lineares no Ensino Médio, pelo fato de sua resolução envolver conhecimentos usuais do programa oficial de Ensino Básico, como o conceito de múltiplo, divisor e o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Ainda, a busca das soluções inteiras de situações-problema contextualizadas que representam equações diofantinas lineares possibilita uma oportunidade de exploração de um tópico da Matemática Discreta.

Esta posição está de acordo com Jurkiewicz (2004) e Moura (2005), ao verificarem que no Ensino Básico atual ocorre a predominância da Matemática do Contínuo e defendem a inclusão de tópicos da Matemática Discreta neste nível de escolaridade. Ainda, Veloso et. al. (2005), em documento apresentado pela Associação de Professores de Matemática (APM) e Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), reforçam a posição dos autores citados anteriormente, ao traçar considerações sobre pressupostos básicos envolvendo o ensino da Matemática Discreta em todos os níveis da escolaridade básica portuguesa. Este documento particulariza, dentre os tópicos de Matemática Discreta, a necessária exploração de temáticas envolvendo a Teoria dos Números.

A escolha de situações que representam equações diofantinas lineares teve suporte em um estudo recente de Lopes Junior (2005), quando ao analisar a seqüência didática aplicada a um grupo de alunos do Ensino Médio, concluiu que os alunos não percebem a especificidade de problemas algébricos que envolvem somente a solução com números inteiros.

O autor, ao investigar a compreensão da função de 1º grau pelos alunos, realizou o levantamento de aspectos epistemológicos e análise de alguns livros didáticos do ciclo básico referente ao tema, concluindo que os materiais analisados não contribuem para o esclarecimento da questão da variável discreta e contínua.

Como podemos contemplar em nossa análise de materiais didáticos, a noção de variável discreta e contínua não vem sendo explorada no Ensino Fundamental, e, assim, acreditamos que muitos alunos tratem a variável x como grandeza discreta ou que pensem que a letra da expressão algébrica serve apenas para indicar um valor desconhecido (uma incógnita) (LOPES JUNIOR, 2005, p. 81).

Nesta perspectiva, a pesquisa de Lopes Junior (2005) fornece subsídios importantes para enriquecer o estudo deste tema e realça a validade de pesquisas que contribuam para discussão destes problemas. Assim, acredito que a proposição de atividades envolvendo equações diofantinas lineares possibilita aos alunos a percepção e distinção da variável quando assume um valor discreto na busca das soluções inteiras.

Como integrante do grupo de pesquisa do subprojeto denominado 'A Teoria dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura', os resultados dos estudos e discussões com os colegas desse mesmo projeto foram importantes para o encaminhamento deste trabalho. Passo então a tecer considerações sobre as contribuições destas pesquisas.

Inicialmente, me remeto à tese de doutorado de Resende (2007) do GPEA, cuja questão central foi pesquisar 'Qual a Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando a prática docente na sala de aula?' Assim, a autora objetivou "verificar quais são as concepções de Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, voltado para a formação do professor da escola básica e a buscar elementos que possam re-significá-la, neste contexto" (RESENDE, 2007, p. 16).

A autora ressalta que, o fato da Teoria dos Números ter elementos de interseção com a Álgebra e a Aritmética tem trazido algumas interpretações indevidas e com implicações no ensino e na aprendizagem. Segundo Resende (2007), tal ocorrência é devido à concepção vigente em tratar os inteiros simplesmente como subconjuntos dos números reais, podendo conduzir a simplificações que desprezam aspectos fundamentais dos números inteiros.

Resende (2007) ainda destaca que a interface com a Álgebra têm justificado a pouca ênfase dada à Teoria dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino. Em particular, "na escola básica, alguns temas de Teoria Elementar dos Números, por uma falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos, por não ter uma aplicação imediata" (RESENDE, 2007, p. 73).

Desse modo, a tese de Resende (2007) aponta potencialidades para explorar este tópico na Educação Básica, dentre as quais destaco a possibilidade de desenvolvimento de situações-problema envolvendo o uso dos múltiplos, divisores e o máximo divisor comum de números inteiros, permitindo que se formulem questões de fácil compreensão aos estudantes do Ensino Básico e passíveis de desenvolver habilidades tais como observar, conjecturar e generalizar.

Em decorrência, Resende (2007) delimita como Teoria Elementar dos Números a área que utiliza os métodos elementares da aritmética no conjunto dos números inteiros, incluindo neste íterim temas algébricos como as equações diofantinas lineares. Ao delimitar os tópicos a serem desenvolvidos num curso de Teoria Elementar dos Números, a autora possibilita situar as equações diofantinas lineares como objeto de estudo dentro desta área, numa perspectiva de interface com a Álgebra.

Ainda, Oliveira (2006) e Costa (2007), do grupo GPEA, desenvolveram estudos envolvendo a Teoria Elementar dos Números, mais particularmente sobre as equações diofantinas lineares.

Oliveira (2006) inicialmente direcionou sua pesquisa para a análise de documentos oficiais da Educação Básica, especificamente no PCNEM e PCN+¹⁴, buscando menção sobre o tema equações diofantinas lineares. Não encontrando registro, explícito ou implícito, e a partir dessa constatação, o autor decidiu buscar em livros didáticos a menção desejada e analisou duas coleções dedicadas ao Ensino Médio, escolhidas a partir de uma lista fornecida pela Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec/MEC), em 2004, ao Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio.

Nessas duas coleções, o autor encontrou somente quatro problemas envolvendo implicitamente o tema. Nas resoluções dos problemas, os autores não mencionavam o fato de se tratar de equações diofantinas lineares, sugerindo, então, abordagens que envolviam: a) o emprego de busca por tentativas organizadas numa tabela em ordem crescente de valores de 'x', de modo a obter somente valores naturais para 'y'; b) a resolução mista de conceitos aritméticos, conceitos algébricos e o método da tentativa e erro. Dessa forma, as coleções não atentaram para o fato de haver outras formas de resolver tais questões.

Ainda, Oliveira (2006) questionou a pouca ênfase no desenvolvimento de tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica.

Quem seriam os responsáveis: Os professores? Os livros didáticos? Os programas? A falta de situações-problema que necessitam desses conhecimentos para sua resolução e que sejam acessíveis aos alunos? (OLIVEIRA, 2006, p. 15).

A pesquisa de Oliveira (2006) oportunizou elementos para minha reflexão sobre se existiriam situações-problema, em alguma área do conhecimento, que fossem acessíveis aos alunos do Ensino Médio e que necessitariam da aplicação de conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares para sua resolução.

¹⁴ PCN+: Parâmetros Curriculares Nacionais em Ação.

Uma importante constatação para a elaboração desta pesquisa foi o fato de Oliveira (2006) não ter encontrado menção do uso do m.d.c. como condição de existência de solução das equações diofantinas lineares. Isso abriu espaço para um dos aspectos desta proposta de re-investimento de conceitos da Teoria dos Números, como os múltiplos, divisores e o máximo divisor comum de números inteiros, no Ensino Médio.

Farei agora considerações a respeito da pesquisa de mestrado realizada por Costa (2007), que objetivou estudar a concepção de professores do Ensino Médio acerca do objeto matemático equação diofantina linear. O autor, através de entrevistas semi-estruturadas, concluiu que alguns deles trabalham em suas aulas problemas que recaem em equações diofantinas lineares, porém não demonstram ter consciência desse fato.

Ao propor problemas que envolvem a resolução de equações diofantinas lineares com várias soluções e nenhuma solução, Costa (2007) verificou que os professores entrevistados: a) escrevem explicitamente a equação, porém não a utilizam como ferramenta para a resolução dos problemas propostos, o que levou o autor a concluir que os professores não concebem a sua utilidade na resolução de problemas; b) em sua maioria, crêem que a estratégia mais adequada para a resolução de problemas envolvendo as equações diofantinas lineares é a do ensaio e erro.

Ressalto que, tanto Costa (2007) como Oliveira (2006) observaram a utilização do método da tentativa e erro como estratégia dominante na resolução de problemas que envolvem, em sua resolução, as equações diofantinas lineares.

Outra contribuição a este trabalho foi o artigo apresentado pelos pesquisadores Gilda de La Rocque e João Bosco Pitombeira, na Revista do Professor de Matemática de 1991, que discute alguns problemas envolvendo equações diofantinas lineares aplicadas em algumas situações contextualizadas, à luz da Didática da Matemática.

A exposição apresenta três problemas contextualizados em situações diversificadas, onde os pesquisadores identificam as variáveis didáticas¹⁵ que permitem a escolha de diferentes quantidades de soluções inteiras. Ressaltam que, na proposição de problemas envolvendo equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$,

(...) a escolha dos coeficientes a , b , c importa, não só para maior ou menor dificuldade nos cálculos, como também para a existência de uma, várias ou nenhuma solução (desde que sejam inteiras ou inteiras positivas) (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 40).

¹⁵ Nas situações do referido texto, as variáveis didáticas correspondem aos valores numéricos intrínsecos aos problemas. De acordo com Gálvez (1996), a escolha adequada dos intervalos destas variáveis deve estimular nos alunos, de forma controlada, a necessidade de busca por novas estratégias para a resolução dos jogos ou problemas, fomentando condições para surgir o conhecimento almejado.

Ao ressaltar estas diferentes possibilidades de resultados, os autores desenvolvem o critério matemático para prever se uma equação diofantina linear tem soluções e, em caso afirmativo, o processo para determiná-las.

O artigo de Roque e Pitombeira (1991) foi importante para este trabalho ao evidenciar como realizar escolhas de situações-problema em conexão com variáveis didáticas, o que muito me auxiliou nas decisões para a composição da seqüência didática desta pesquisa.

Observei em Schin (2005), a utilização de diversos procedimentos de resolução num problema-desafio proposto num fórum junto a seus alunos de licenciatura em Matemática da UFMG. Destaco a utilização do método da tentativa e erro na resolução da situação, evidenciando sua importância ligada à prática dos alunos, inclusive neste nível de escolaridade.

Em outro artigo, problema semelhante ao apresentado por Schin (2005) foi encontrado em Pereira e Watanabe (2005), na Revista do Professor de Matemática, onde é notória a preocupação dos autores em apresentar a solução utilizando conceitos da Teoria Elementar dos Números - números primos, divisor, múltiplo - associado ao método da tentativa e erro.

As atividades presentes no fórum promovido por Schin (2005), assim como no artigo de Pereira e Watanabe (2005), contribuíram para a minha pesquisa na medida em que apresentaram uma diversidade de abordagens envolvendo as equações diofantinas lineares, seja através do método da tentativa e erro, seja pela utilização de conceitos da Teoria dos Números como paridade, divisibilidade e algoritmo de Euclides, que configuram a riqueza possibilitada pela exploração de estratégias diversificadas, em conjunção com situações-problema contextualizadas.

Finalizando este capítulo, as leituras sintetizadas permitiram uma sustentação teórica ao situar os recentes avanços em relação ao objeto matemático equação diofantina linear e as dificuldades apontadas por alunos em compreender e distinguir grandezas discretas.

No próximo capítulo serão encaminhados os fundamentos metodológicos que embasaram a concepção, a aplicação e a análise de uma seqüência didática, a fim de observar e caracterizar as manifestações orais e escritas dos alunos, permitindo verificar o objetivo deste estudo.

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

A Metodologia da Engenharia Didática

Para atingir o objetivo desta pesquisa qualitativa¹⁶, que se propõe a verificar se, *como e em que medida* os alunos do Ensino Médio explicitam conhecimentos envolvendo equações diofantinas lineares, elaborei e apliquei uma seqüência didática embasada na Engenharia Didática, metodologia descrita em Artigue (1996).

Segundo esta autora, a Engenharia Didática surgiu no bojo das questões levantadas pela Didática da Matemática Francesa¹⁷, em meados da década de 80, com a intenção de facilitar os estudos sobre as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino. Essa metodologia foi criada por inspiração do trabalho didático comparável à realização de um projeto pelo engenheiro, que se apóia e aceita o controle científico, mas também está ciente da maior complexidade dos problemas didáticos.

A Engenharia Didática possui uma “dupla função, a qual pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino” (Machado, S., 2002, p. 198).

Na concepção da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, utilizei para a elaboração da seqüência de atividades alguns elementos das quatro fases descritas por Artigue (1996): a 1ª fase, das *análises preliminares*, a 2ª fase, da *concepção e da análise a priori*, a 3ª fase, da *experimentação* e a 4ª e última fase, da *análise a posteriori e validação*.

É importante salientar que as quatro fases não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque. A elaboração da Engenharia Didática necessita, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.

¹⁶ Lüdke; André (1986), referenciam Bogdan e Biklen (1982), que concebem a pesquisa qualitativa como tendo as seguintes características: coleta de dados descritivos, obtidos diretamente na fonte (ambiente), através no contato do pesquisador com a situação pesquisada, preocupando-se mais com o processo do que com o produto, de modo a retratar as perspectivas dos participantes.

¹⁷ De acordo com Gálvez (1996), a proposta da Didática da Matemática se originou a partir da década de 60 na França, ambientada em reformas educativas levadas a cabo pelo IREM (Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas). Um dos idealizadores e pesquisador do IREM é Guy Brousseau, que ressalta na Didática da Matemática a preocupação em desenvolver estudos relativos a comportamentos cognitivos dos alunos, através de situações propícias para lhes ensinar.

Segundo Artigue (1996), as **análises preliminares** levam em consideração o quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos já adquiridos envolvendo o campo de domínio a ser estudado, assim como:

- a- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- b- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- c- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- d- a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva (ARTIGUE, 1996, p. 198).

Machado, S. (2002), acrescenta que as análises preliminares permitem embasar a concepção da Engenharia Didática, podendo ser retomadas e aprofundadas no percurso do trabalho, de acordo com os objetivos da investigação.

Na segunda fase, denominada **concepção e análise a priori**, de acordo com Artigue (1996), o investigador identifica e toma a decisão sobre um determinado número de variáveis didáticas pertinentes ao sistema.

Segundo Gálvez (1996), as variáveis didáticas são aquelas para as quais as escolhas de valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas. Essa autora ressalta a importância da determinação dessas variáveis e de seus intervalos para fundamentar a construção das seqüências didáticas, que permitirão o surgimento do conhecimento almejado.

Dentre as variáveis didáticas, Machado, S. (2002) indica que a pesquisa deve delimitar as variáveis de comando, que são as variáveis consideradas pelo pesquisador de modo a fazer evoluir o desempenho dos alunos, sendo descritas e delimitadas nas várias sessões ou fases da Engenharia Didática. A análise desta considera dois tipos de variáveis de comando:

- as variáveis *macro-didáticas* ou *globais*, que dizem respeito à organização global da engenharia;
- e as variáveis *micro-didáticas* ou *locais*, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado" (ARTIGUE, 1996, p. 202).

Artigue (1996) afirma que um dos pontos essenciais desta segunda fase reside no fato que a Engenharia Didática é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções dos alunos.

Para isso, a análise *a priori* deverá prever:

- (...) os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permitirá controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão no desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (Machado, S., 2002, p. 207).

Deste modo, Artigue (1996) ressalta que a análise *a priori* deve comportar um caráter descritivo e preditivo, sendo a análise vinculada às características da seqüência didática a ser desenvolvida e aplicada aos alunos.

Em vista destas características, a autora salienta que a análise *a priori* deverá ponderar qual o grau de investimento que esta situação terá para o aluno em decorrência de suas opções de escolhas, de ação e de decisão que surgem na experimentação.

Neste ponto, saliento que tais considerações estão de acordo com a situação de ação descrita em Brousseau (1996a,b), onde o aluno reflete e simula tentativas, elegendo um procedimento de resolução, dentro de um esquema de adaptação, através da interação com o 'milieu'¹⁸, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema. Já nas situações de formulação, conforme Brousseau (1996a,b), ocorre troca de informação entre o aluno e o 'milieu', através da utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambigüidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas. Assim, nas situações de formulação, os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a as informações que devem comunicar.

Inserida na metodologia de Engenharia Didática e vista como paradigma metodológico bem definido, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a), contribui para esta pesquisa na medida em que permite prever quais condições devem ocorrer para a efetivação da aprendizagem pelo aluno. Assim sendo, para fazer funcionar um conhecimento, numa situação de aprendizagem:

(...) é necessário que a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe; se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem. A 'resposta inicial' só deve permitir ao aluno utilizar uma estratégia de base com a ajuda de seus conhecimentos anteriores; porém, muito rapidamente, esta estratégia deveria se mostrar suficientemente ineficaz para que o aluno se veja obrigado a realizar acomodações – quer dizer, modificações de seu sistema de conhecimentos – para responder à situação proposta (BROUSSEAU, 1996b, p. 49).

¹⁸ O termo 'milieu', oriundo da Didática da Matemática, indica o meio que pode abranger, dentre outros, situações-problema, jogos, os conhecimentos prévios do aluno e os do(s) colega(s). Brousseau (1996a) coloca que o 'milieu' deve ter como característica uma intenção didática não-explicita do professor, que possibilita a interação autônoma do aluno em relação às situações que interage e em relação ao professor. Para este autor, o 'milieu' deve ser organizado para a aprendizagem numa interação feita de assimilações e acomodações, permitindo ao aluno a reflexão sobre suas ações e retroações, impondo restrições através de regras que devem ser respeitadas. Assim, "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios (...) Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem" (BROUSSEAU, 1996a, p. 49).

A terceira fase da Engenharia Didática corresponde à **experimentação** e, de acordo com Machado, S. (2002), consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*. Assim, a experimentação pressupõe:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático¹⁹;
- a aplicação do instrumento de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (MACHADO, S., 2002, p. 206).

Segundo Brousseau (1996a), no contrato didático é essencial a consciência da não-interferência explícita de conhecimentos, evitando-se explicações ou 'dicas' que facilitem as resoluções dos alunos, propiciando assim condições que permitam a mobilização do aluno em enfrentar o problema e em resolvê-lo, pelo menos em parte, através da lógica interna e dos conhecimentos anteriores. Assim, o entendimento mútuo dos papéis - da não-intervenção do pesquisador e da ação independente do aluno - e o respeito a estas condições, garantem condições para se caracterizar o contrato didático nesta pesquisa.

Complementando, é importante frisar que a intenção de propiciar condições de situar o sujeito em confronto com a situação da forma mais independente possível está de acordo com o conceito de devolução descrito em Brousseau (1996a), que significa o aceite do aluno em enfrentar o desafio intelectual de resolver as situações propostas, como se o problema fosse dele.

Segundo Machado, S. (2002), algumas vezes é necessária a obtenção de dados complementares, individuais ou em grupo, durante a fase de experimentação, que possibilitam esclarecimentos das respostas e manifestações dos sujeitos da pesquisa, assim como permitem efetuar eventuais correções nas atividades subseqüentes.

A quarta fase, correspondendo a **análise a posteriori e validação**, de acordo com Artigue (1996), se apóia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita.

Segundo a autora, esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

¹⁹ Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o contrato didático é um conjunto de normas ou cláusulas, geralmente implícitas, que regulam as obrigações recíprocas do professor e dos alunos, em relação ao projeto de estudo de ambas as partes, que evolui a medida que o processo didático avança.

Alguns Recursos Didáticos Empregados na Elaboração das Atividades

Apoiado em diferentes autores, parto da hipótese de que a inserção de situações-problema representando equações diofantinas lineares associadas a jogos constitui, para alunos de Ensino Médio, importante recurso didático para favorecer a devolução, o reconhecimento e a busca de soluções inteiras e, principalmente, a criação de diferentes estratégias de resolução. Assim, a seguir, passo a tecer considerações sobre os recursos didáticos que permitem caracterizar essa hipótese e as escolhas na elaboração das atividades.

A Importância dos Jogos

Início as considerações dos recursos didáticos empregados nesta pesquisa pela discussão da importância dos jogos e qual a motivação para esta escolha.

A palavra jogo é utilizada na literatura para definir diferentes atividades e contextos com diversos objetivos, tendo basicamente a finalidade de distrair ou ensinar, propiciando progresso cultural e criando condições para um melhor conhecimento da vida.

Conforme Müller (2000), o jogo é um recurso didático de mediação entre as possibilidades dos alunos e as exigências da tarefa, favorecendo o lúdico, o prazer, estimulando a imaginação e a criação. Além disso, propicia a adaptação às regras do jogo, permitindo que o pesquisador acompanhe o andamento das jogadas, percebendo como os jogadores agem e pensam na situação elaborada.

Destaco ainda as orientações expressas nos PCN, Brasil (1997a), propondo que as atividades com jogos representam uma forma interessante de propor problemas, permitindo aflorar a criatividade na busca das soluções através de distintas estratégias de resolução.

De acordo com Borin (1995), o uso dos jogos em Educação é uma atividade que envolve e motiva os alunos, provocando atitudes semelhantes ao do cientista, ao se deparar com um problema. A autora exemplifica que, em uma situação de jogo:

(...) os alunos inicialmente partiam para uma experimentação ou tentativa para conhecer o que iriam defrontar, sem muita ordem ou direção. Após este primeiro momento, começam a levantar os dados que poderiam influenciar ou alterar as jogadas que iriam fazer. Para isso, tinham que ler as regras com mais atenção, pois era através delas que iriam saber o que poderiam ou não fazer. Discutiam entre si o que tinham entendido e estabeleciam a meta que deveriam alcançar para serem os vencedores e, só depois disso, começavam a construir hipóteses que os fizessem chegar à solução (BORIN, 1995, p. 1-2).

A partir dos encaminhamentos expostos e conforme Freitas (2002), ao destacar a utilização dos jogos numa perspectiva de resolução de problemas, optei pela elaboração de jogos nesta pesquisa, por considerar um recurso adequado e compatível com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a,b), favorecendo as fases de devolução, ação e formulação.

É importante salientar as seguintes caracterizações relacionadas aos jogos de estratégia, de acordo com as concepções de Krulik e Rudnik (1983), citado em Borin (1995):

- ser para dois ou mais jogadores, de modo a facilitar a comunicação e troca de informações para o desenvolvimento de conjecturas e estratégias;
- ter regras pré-estabelecidas, que não devem ser alteradas, pelo menos durante uma rodada ou sessão, e que haja um só vencedor;
- permitir condições de promover significado para os alunos, ou seja, o jogo deve possibilitar o uso de estratégias, execução de jogadas e avaliação de procedimentos;
- permitir que exista uma estratégia vencedora ou otimizadora, sendo que esta deve ser viabilizada pelo bom uso das regras e uso do raciocínio lógico, onde o fator sorte é descartado.

Borin (1995) associa então os jogos estratégicos ao raciocínio lógico-dedutivo e indutivo na Matemática, afirmando que, num dado momento, após um breve 'jogar livre', os alunos têm a necessidade da busca de uma estratégia vencedora, através da formulação de conjecturas, do levantamento de hipóteses, da argumentação e da experimentação para a validação. Assim:

(...) esse processo que exige as habilidades de tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, compõe o raciocínio lógico que é uma das metas prioritárias do ensino de Matemática e a característica primordial do fazer ciência. Em situação de jogo, os nossos alunos executavam esses procedimentos, agiam exatamente conforme esse procedimento desejável (BORIN, 1995, p. 3).

Macedo, Petty e Passos (2000) constataram em suas pesquisas que o processo de construção do conhecimento do jogador passa fundamentalmente por quatro etapas:

- a) exploração dos materiais e aprendizagem das regras;
 - b) prática do jogo e construção de estratégias;
 - c) resolução de situações-problema;
 - d) análise das implicações do jogar.
- (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 14).

Neste sentido, estes autores argumentam que a aprendizagem das regras é condição essencial para o sucesso do jogo, assim como a forma de apresentá-las ao jogador, dependendo principalmente da situação e do público.

Borin (1995) observou que os alunos, após algumas jogadas fracassadas, começam a se organizar, como se tentassem controlar seu comportamento, manifestando as etapas descritas em Polya (1942):

- leitura atenta das regras do jogo para compreender o que é permitido e possível;
- levantamento dos dados e formulação de hipóteses;
- execução da estratégia escolhida a partir da hipótese inicial;
- avaliação da hipótese, isto é, a verificação da eficiência da jogada para alcançar a vitória (BORIN, 1995, p. 11).

Finalizando, um outro aspecto importante observado na autora, diz respeito à dinâmica com jogos como sendo favorecedora à defesa de conjecturas através da argumentação. Ao expor sua opinião, cada membro tem sua opinião respeitada, mas nem sempre, necessariamente acatada, propiciando um entrosamento imediato entre os elementos do grupo. Assim, registrar toda e qualquer tentativa de solução da situação do jogo é importante, pois para os alunos “essas iriam servir para chegar à resposta correta através da análise dos erros cometidos” (BORIN, 1995, p. 5).

A Resolução de Situações-problema e a Importância do Contexto

Além da proposta e associação com jogos, para a elaboração da seqüência didática, exponho algumas questões referentes à natureza e concepção envolvendo o termo problema, de modo a esclarecer a utilização desta ferramenta básica e motivadora.

Ao sugerir a contextualização por meio da resolução de problemas, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (2006), recomendam evitar os denominados problemas fechados, pela pouca contribuição ao desenvolvimento de habilidades para a construção de conhecimento.

O uso exclusivo desse tipo de problema consegue mascarar a efetiva aprendizagem, pois o aluno, ao antecipar o conteúdo que está sendo trabalhado, procede de forma um tanto mecânica na resolução do problema (BRASIL, 2006, p. 83).

Ressaltando agora a importância do exercício da cidadania, este documento evidencia que sejam propostos problemas do tipo aberto ou apresentadas situações-problema, de modo a estimular o desenvolvimento da competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à sua resolução.

Assim, tanto os problemas abertos como as situações-problema possibilitam situar o aluno em posição análoga à do matemático no exercício da profissão, pois “o aluno deve, diante desses problemas, realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados” (BRASIL, 2006, p.84).

Na concepção das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (2006), no problema do tipo aberto o conhecimento é concebido como ferramenta para se resolver problemas. Esta concepção está de acordo com o uso do termo 'problema' utilizado por Echeverría e Pozo (1998), definido como uma situação nova, diferente, difícil ou surpreendente, um verdadeiro obstáculo entre a proposição e a solução, onde o indivíduo reconhece que precisa ou deseja resolver, porém ainda não dispõe de um caminho rápido e direto que permita obter a solução.

Assim, a veiculação a alunos de problemas baseados em situações abertas e sugestivas exige:

(...) dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização de conhecimentos disponíveis para dar respostas a situações variáveis e diferentes (POZO, 1998, p. 9).

Conseqüentemente, isto exige uma investigação e tomada de decisão, demanda cognitiva e motivacional maior do que resolver exercícios ou problemas fechados, possibilitando ao aluno a aprendizagem de procedimentos e atitudes adequadas, a partir de estratégias²⁰ já conhecidas.

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasil (2006), a situação-problema se caracteriza por uma situação geradora que apresenta um objetivo mais amplo, pois propicia à construção de um novo conhecimento matemático pelo aluno.

Nesta pesquisa, adoto a concepção de situação-problema²¹ onde os conhecimentos anteriores dos alunos e o raciocínio lógico atuam como ferramenta que, associados aos contextos, possibilitam aos alunos condições de aquisição dos conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

Neste ponto, destaco em Echeverría e Pozo (1998) pesquisas indicando que a semelhança entre os contextos escolares e os contextos sociais permitem viabilizar um melhor encaminhamento para a solução de situações-problema.

Assim:

Embora não se trate de reduzir os problemas escolares ao formato das tarefas e situações cotidianas, (...) para [se caracterizar] as tarefas

²⁰ Echeverría e Pozo (1998) consideram estratégia como as diversas formas de organizar e determinar recursos para a solução de um problema. Os autores ainda destacam que, para Polya (1945), a fase de ação na resolução de problemas é conduzida através de estratégias mais globais, sendo a tentativa e erro a mais simples e básica, porém com utilidade restrita.

²¹ Ressalto que utilizei, neste trabalho, indistintamente a grafia *situação-problema* ou *problema*, com o significado delineado.

escolares como verdadeiros problemas é necessário que elas tenham relação com os contextos de interesse dos alunos ou, pelo menos, adotem um formato interessante no sentido literal do termo. Parece, então, imprescindível ampliar o âmbito dos problemas escolares, tanto na sua natureza, incluindo problemas abertos (...) como no seu conteúdo, abrangendo também alguns dos problemas e situações que causam inquietação nos alunos (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 42).

De acordo com os PCNEF, Brasil (1997b), a contextualização objetiva gerar no aluno a capacidade de compreender, interpretar e porventura atuar na realidade, de modo a favorecer duas funções básicas da Educação: o desenvolvimento da autonomia e a formação da cidadania²².

Duarte (2006) realça que a contextualização não visa trazer o ensino da Matemática somente em direção às vivências imediatas do aluno, mas também considerando as situações que permeiam o meio social, econômico e cultural.

A contextualização retira o aluno de uma condição passiva. Ao se referir:

(...) ao fato de que, a partir dos saberes já internalizados pelos alunos, (...) se criem condições de problematização pelos alunos, e então, eles se vendo parte dessa construção, (co)autores desse conhecimento, se colocam como atores principais desse teatro, que é o processo contínuo e dinâmico do aprender (DUARTE, 2006, p. 3).

Nesta linha, Duarte (2006) expõe que, na contextualização, o novo conhecimento será acrescentado aos anteriores, não por justaposição simples, mas através da interligação destes conhecimentos.

O ato de contextualizar associa a experiência real dos alunos aos conhecimentos almejados, uma vez que permite:

(...) vincular os conhecimentos aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, na vida real. Significa também incorporar vivências concretas ao que se vai aprender e incorporar o aprendizado a novas vivências (MELLO; DALLAN; GRELLET, 2000, p.8).

Conforme Machado, N. (2005), a contextualização é uma estratégia fundamental para a construção de significados, propiciando uma natural aproximação entre temas escolares e a realidade cotidiana extra-escolar do aluno.

À medida que incorpora relações tacitamente percebidas, a contextualização²³ enriquece os canais de comunicação entre a bagagem cultural, quase sempre essencialmente tácita, e as formas explícitas ou explicitáveis de manifestação do conhecimento” (MACHADO, N., 2005, p. 53).

²² A idéia de cidadania não está somente associada aos direitos, mas "entendida como a construção de uma articulação permanente e consistente entre projetos individuais e coletivos" (Machado, N., 2005, p.50).

²³ Etimologicamente, "contextuar significa enraizar uma referência a um texto, de onde fora extraída, e longe do qual perde substancialmente seu significado" (Machado, N., 2005, p. 53). Atualmente, muitos autores utilizam somente a grafia *contextualizar*, que neste texto considere como sinônimo de *contextuar*.

Por último, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio ressaltam que:

(...) a contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas - (...) [de modo a] antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de 'ilustrar' o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p.83).

Complementando este enfoque, Brousseau (1996b) concebe o sentido de um conhecimento "não só pela coleção de situações em que o sujeito encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma" (CHARNAY, 1996, p. 37).

Assim, para Brousseau (1996a), as concepções anteriores dos alunos e dos problemas que lhes são colocados pelo 'milieu' podem conduzir a novas concepções, cujo sentido é fundamentalmente local.

Os Contextos Discretos da Microeconomia

A Microeconomia é aqui entendida como a área da economia que estuda o comportamento econômico individual de unidades básicas de consumo, em relação às escolhas e às possibilidades de aquisição de bens ou serviços, que estão diretamente relacionadas por meio de preços e quantidades relativas.

Dentro desta perspectiva, Miller (1981) aponta que a coordenação de atividades econômicas é regulada pelo preço relativo. Denomina-se preço relativo à razão entre preços absolutos em dois períodos distintos. Em oposição a preço relativo, o preço absoluto é aquele dado no mercado a qualquer ponto do tempo.

Para entender o significado de preço relativo, consideremos uma situação hipotética onde um produto sofre um aumento percentual 'x' e o salário de um trabalhador não tenha reajuste. Assim, o preço absoluto e relativo tem aumento percentual 'x'. Mas, se o reajuste percentual 'x' for repassado ao salário do trabalhador, então o preço absoluto terá aumento num percentual 'x', mas o preço relativo não terá sido reajustado.

Segundo Miller (1981), os preços relativos são veículos de informação, rápidos e eficazes, para o indivíduo sobre a escassez relativa do mercado. Assim:

(...) para os compradores, o preço relativo de um bem indica o que o consumidor individual precisa sacrificar, para adquirir aquele bem. Em certos casos, indica também a quantidade de recursos sacrificados para produzir aquele bem. (MILLER, p. 7, 1981).

O aumento do preço relativo de um bem informa ao comprador que o bem agora está relativamente mais escasso. Porém, o modo pelo qual este comprador reagirá “à mensagem é impossível de ser previsto em base individual, pois o número de maneiras pela qual um consumidor pode preservar o consumo de um item relativamente escasso é provavelmente infinito²⁴ (MILLER, p. 7, 1981).

Em contrapartida, Miller (1981) aponta que os produtores podem encarar o aumento no preço relativo de uma mercadoria como uma oportunidade de aumentar os lucros, dispondo de mais recursos destinados à produção.

Assim, o conflito originado pela relação *preço relativo versus escassez* pode se traduzir em muitas possibilidades de respostas, tanto dos consumidores, quanto dos produtores. Isto leva a necessidade de uma tomada de posição referente à aquisição ou produção de um bem a um determinado preço. Expresso de outra forma surge a necessidade de uma ‘*escolha*’.

Segundo Stiglitz e Walsh (2003), as pessoas e os governos sempre fazem ‘*escolhas*’, explícitas ou implícitas. As explícitas são as ‘*escolhas*’ que um cidadão ou uma empresa faz de acordo com seus desejos e necessidades.

Assim, considero a Microeconomia como uma ciência que “estuda como pessoas, empresas, governos e outras organizações de nossa sociedade fazem escolhas e como essas escolhas determinam a forma como a sociedade utiliza seus recursos” (STIGLITIZ; WALSH, 2003, p. 8, grifo meu).

Para melhor compreender como essas ‘*escolhas*’ ocorrem e como afetam a alocação dos recursos da sociedade, Stiglitz e Walsh (2003) chamam a atenção ao fato que as ‘*escolhas*’ feitas pelas pessoas decorrem de decisões ponderadas diante das diversas alternativas e pelas vantagens ou desvantagens de determinado produto, que podem ser guiadas por incentivos ou restrições, sendo o preço o mais importante.

Conforme Stiglitz e Walsh (2003), as restrições mais comuns são as de ordem orçamentárias – relativa ao rendimento do indivíduo ou empresa - e as temporais - relativas ao tempo disponível.

Destaco, a seguir, um exemplo que ilustra a relação da Restrição Orçamentária com a Matemática Discreta e, em particular, com as equações diofantinas lineares. “Examine [o caso de] Michelle, que resolveu gastar US\$ 120,00 com CDs ou DVDs. Um CD custa US\$ 10 e um DVD US\$ 20” (STIGLITIZ; WALSH, 2003, p. 27).

²⁴ O termo *infinito* utilizado pelo autor deve ser aqui entendido no sentido figurado e não no sentido matemático, significando que existe um grande número (contável) de possibilidades para preservar o consumo.

Ao elaborar a representação cartesiana das soluções deste problema, Stiglitz e Walsh (2003) tecem um comentário cuja linguagem aproxima idéias matemáticas importantes, como, por exemplo, o caráter discreto das incógnitas envolvidas no problema da restrição orçamentária de Michelle.

Às vezes, obviamente, nem todos os pontos do gráfico são significativos do ponto de vista econômico. É impossível comprar meio DVD ou meio CD. Na maioria dos casos ignoramos essas considerações ao plotar gráficos; consideramos que qualquer ponto da restrição orçamentária é possível (STIGLITZ; WALSH, 2003, p.36).

Essa citação deixa a entender que o traçado da reta, comumente encontrado em livros didáticos de Economia, tem caráter apenas ilustrativo e de comodidade na representação gráfica para os economistas. Assim, esta representação simplificadora não permite ao aluno o entendimento de questões ligadas às quantidades discretas, podendo vir a se configurar num obstáculo de natureza didática²⁵, assim como necessita de esclarecimento do ponto de vista matemático. Discussão semelhante foi apontada na pesquisa de Lopes Júnior (2005), quando relata as dificuldades²⁶ dos alunos no discernimento das grandezas discretas e contínuas com relação a problemas envolvendo o tema de função de 1º grau.

Em conformidade com estas ponderações, a utilização nesta pesquisa de situações-problema contextualizadas em alguns temas básicos da Microeconomia que são passíveis de modelagem utilizando conceitos envolvendo as equações diofantinas lineares - dentre os quais destaco as *escolhas* e a *restrição orçamentária* - possibilita ao aluno a demarcação da natureza das grandezas discretas representadas pelas possibilidades de aquisição de produtos ou serviços e a delimitação de seu domínio durante a busca das soluções inteiras²⁷.

Também, acredito que a aproximação e simplificação de alguns temas da Microeconomia forneceram contextos propícios para a elaboração das situações-problema desta pesquisa, uma vez que estes se constituem em mais uma contribuição para um dos principais objetivos da Educação, que é a formação do cidadão.

²⁵ Segundo Iglori (2002), Brousseau (1976) define o obstáculo didático como sendo aquele relativo às escolhas realizadas num Sistema Educativo. Este está muitas vezes associado a um obstáculo epistemológico, que é constitutivo do conhecimento visado, sendo este raramente espontâneo no ensino da Matemática e não advindo "da ignorância, da incerteza, do acaso (...), mas [sim pelo] efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente, mal adaptado" (IGLIORI, 2002, p. 100 apud BROUSSEAU, 1976).

²⁶ Estas dificuldades são obstáculos que se manifestam, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), mediante erros que são reprodutíveis, com alguma coerência interna, persistentes, resistentes e relativamente universais, necessitando de uma ação didática consciente para abordá-los.

²⁷ Neste sentido, de acordo com Brousseau (1996a), estes recursos contribuem para a superação dos obstáculos de origem didática, onde o conhecimento surge através do desenvolvimento de nova(s) estratégia(s), capaz(es) de resolver um problema que a estratégia de base se mostra incapaz de resolver, possibilitado pela mudança dos valores que podem assumir as variáveis didáticas.

Tal afirmação e a tentativa de relacioná-la ao contexto Microeconômico ganha perspectiva pela possibilidade de ajuste e aproximação a uma importante realidade cotidiana dos alunos: a relação das quantias monetárias (dinheiro) e seu consumo. Ainda, estes contextos podem ser instrumentos que permitem uma compreensão de conceitos fundamentais para indivíduos que sejam tomadores de decisão com relação às possibilidades de suas escolhas, dentro de sua própria restrição orçamentária.

Síntese

As considerações expostas sobre os recursos didáticos como os jogos, a resolução de problemas e o alcance de problemas contextualizados em Microeconomia, me permitiram assumir algumas hipóteses:

1ª: A utilização de jogos pode permitir a motivação necessária para o engajamento dos alunos nas tentativas de resolução, fator considerado primordial para a ação independente do aluno frente às situações-problema.

2ª: Entendo que a introdução de um assunto contextualizado e próximo à realidade do cidadão comum motiva e esclarece o estudo de temas matemáticos num entorno extra-matemático.

3ª: A escolha de temas relativos a questões monetárias envolvendo as escolhas e as possibilidades de aquisição de bens ou serviços viabiliza a interpretação e a busca de solução das situações-problema envolvendo grandezas discretas, que implicitamente representam equações diofantinas lineares.

Procedimentos Metodológicos da Engenharia Didática

Com base nos fundamentos metodológicos, **as análises preliminares** da Engenharia Didática desta pesquisa se pautaram nos subsídios já apresentados no Capítulo II, que foram obtidos através:

a- do desenvolvimento dos conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares baseado em autores da epistemologia da Teoria Elementar dos Números, cujo desenrolar forneceu subsídios para entender sua relevância e lugar, seja pelo fato dos conhecimentos envolvidos se situarem dentro do programa oficial de Ensino Básico, se constituindo numa oportunidade de re-investimento dos conceitos de múltiplos, divisores e máximo divisor comum entre números inteiros, conforme observados em Resende (2007), Campbell e Zazkis (2002), assim como pela possibilidade de exploração de variadas estratégias de resolução de problemas;

b- da constatação da escassa exploração de situações-problema no livro didático de Ensino Médio envolvendo implicitamente as equações diofantinas lineares, descrita na pesquisa de Oliveira (2006), bem como na utilização preferencial da estratégia de tentativa e erro pelos professores entrevistados por Costa (2007). Esse último fato revela indícios da pouca valorização destes professores para a utilização de outras estratégias facilitadoras ou mais eficazes na busca das soluções inteiras em situações-problema envolvendo essas equações. Assim, a exploração de problemas envolvendo as equações diofantinas lineares possibilita uma contribuição para a formação matemática do aluno do ciclo básico, conforme sugerem Brolezzi (1996) e Jurkiewicz (2004);

c- das dificuldades na compreensão e percepção por alunos do Ensino Médio da especificidade de problemas algébricos que envolvem só a solução com números inteiros, observada na pesquisa de Lopes Júnior (2005);

Na segunda fase, denominada **concepção e análise a priori**, determinei as variáveis *macro-didáticas* que permitiram a caracterização e concepção da seqüência didática, a saber: a adoção de alguns aspectos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a,b); a utilização de jogos e situações-problema como recursos didáticos e a escolha de situações-problema contextualizadas em quantias monetárias; o conjunto dos números inteiros; a realização das atividades em dupla ou trio, que viabiliza a comunicação entre os sujeitos com uma escolaridade equivalente, para a possível utilização de conhecimentos como ferramenta para a resolução do jogo.

Nessa fase, a partir das escolhas das variáveis macro-didáticas descritas, realizei algumas escolhas didáticas como a caracterização e seleção do tipo de escola, dos sujeitos de pesquisa e dos meios que pudessem viabilizar a elaboração e aplicação da seqüência didática: as autorizações necessárias do diretor da escola e dos pais (ou responsáveis), o número de sessões, as datas, o horário e o local da sua realização, de acordo com as disponibilidades oferecidas.

Passei, então, a elaboração dos instrumentos da pesquisa com base nas análises preliminares, teorias já indicadas e dados referentes às escolhas anteriores.

Na análise *a priori* de cada questão determinei o objetivo, avaliei as variáveis didáticas envolvidas e previ as estratégias de resolução. Após cada sessão, fiz a descrição e uma **análise a posteriori local** de cada atividade, que permitiram verificar as condições para a elaboração da sessão seguinte.

No próximo capítulo, descrevo a etapa de experimentação da seqüência didática, pautada nas considerações metodológicas e nos procedimentos iniciais expostos.

A EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo descrevo os preparativos para a aplicação da seqüência didática, apresentando os critérios para a seleção do local, a escolha dos sujeitos de pesquisa, as deliberações iniciais com os alunos e as referências às condições materiais, logísticas e didáticas planejadas, que viabilizaram a concepção e a análise *a priori*. Ao que segue, delinheiro a descrição dos dados obtidos em cada etapa da fase da experimentação, que permitiram a realização da análise *a posteriori* das três sessões da Engenharia Didática.

Critérios e Procedimentos para a Etapa da Coleta de Dados

A seguir, apresento os elementos, os critérios considerados e os procedimentos adotados para efetivação da aplicação da seqüência didática e a coleta de dados.

Seleção da Escola

Para a aplicação desta pesquisa, optei pela busca de uma escola inserida na Rede Pública de Ensino de São Paulo, considerando-se o critério da representatividade e homogeneidade, pois a rede abriga um maior percentual da população estudantil.

Como atualmente não leciono no ensino público, expus aos mestrandos colegas a intenção desta pesquisa, solicitando e indicando a necessidade do local de aplicação. Dois pesquisadores do grupo se prontificaram a colaborar, pois trabalham em escola pública da rede estadual na cidade de São Paulo. Acabei optando por uma delas, pelo fato de estar situada numa região que presta serviço a uma comunidade com poucos recursos.

Seleção dos sujeitos

O critério de seleção dos sujeitos da pesquisa se direcionou a alunos cursando o Ensino Médio, pela relevância em apresentarem conhecimentos básicos necessários para o desenvolvimento do tema escolhido. Fazia-se necessária a possibilidade que, habilidades cognitivas e procedimentais adquiridas no nível de ensino em questão, viabilizassem ações e o encaminhamento de estratégias por esses sujeitos, referentes a resolução das atividades propostas.

A escolha de alunos distribuídos nas três séries do Ensino Médio relaciona-se a níveis de expectativas e motivações distintos. Assim, o aluno da terceira série encontra-se teoricamente com mais referenciais de estudo e intensificando os mesmos para uma boa atuação no vestibular, diferentemente dos alunos da 1ª série, que iniciam uma fase de ampliação de conhecimentos, onde terão contato com os poucos temas que abordam números inteiros no Ensino Médio: Contagem, Seqüências e Progressões, Arranjos e Combinações e alguns assuntos de Estatística. Assim, alunos do Ensino Médio de séries distintas podem apresentar diferentes potencialidades e estratégias ao utilizar os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais adquiridos ou em aquisição.

Quanto à escolha do período – diurno, vespertino ou noturno – optei pelo período noturno por caracterizar supostamente uma clientela com maiores restrições e possíveis dificuldades de aprendizagem em matemática, o que é desejável para esta pesquisa, pois permite que a abrangência dos resultados torne-a mais plausível de reprodutibilidade em qualquer circunstância e clientela do ensino secundarista.

Em relação à aplicação das atividades – em horário de aula ou extra-aula - em função das opções anteriores, optei pela utilização de um horário extra-aula, de modo a viabilizar a presença de todos.

Como decorrência dos motivos delineados, escolhi sábado, no período da manhã, como o dia da semana para a realização das sessões, que também possibilitaria a participação dos alunos que porventura trabalhassem durante a semana, caracterizando-se, então, a opção de alunos voluntários.

Decidi realizar três sessões de sessenta minutos cada, em função dos objetivos da pesquisa, permitindo um encaminhamento adequado que viabilizaria as manifestações e a evolução das estratégias dos alunos. Também, este número de sessões é suficiente para favorecer o comparecimento dos alunos voluntários na globalidade das sessões, sem comprometer a motivação necessária para a participação nesta pesquisa.

Como a pesquisa é qualitativa, optei pelo trabalho com um pequeno grupo de alunos, que permite maior fidelidade na observação e favorece a coleta dos dados obtidos pelos registros sonoros. Assim, inicialmente dimensionei o limite máximo de doze alunos, possibilitando o agrupamento em duplas ou trios, formados pela aglutinação de alunos da mesma série, o que permitiu confrontar o desempenho de alunos de séries distintas para a análise de dados. Também, tal formação favorece a necessária troca de idéias nas fases de ação (a elaboração de tentativas) e de formulação (o desenvolvimento de estratégias de resolução), de acordo com Brousseau (1996a, b).

Primeiro contato com a escola e com os sujeitos de pesquisa

Com relação aos protocolos de pesquisa acadêmica, é praxe a obtenção de permissão do diretor da escola para apresentar a proposta e solicitar autorização para aplicá-la. Ao entrar em contato com a diretora da escola escolhida e expor a intenção da pesquisa, fui prontamente atendido.

Tendo obtido a autorização da direção da escola, agradei a oportunidade e, acompanhado de um colega professor desta escola, pude entrar nas salas para efetivar o convite a todos os alunos do Ensino Médio do período noturno e apresentar os aspectos fundamentais da forma como seria encaminhado este estudo.

Um dos pressupostos metodológicos fundamentais para a coleta de dados é o comparecimento dos alunos em todas as sessões. Para formalizar o envolvimento e o compromisso com o convite, assim como para obter uma breve caracterização dos sujeitos selecionados, elaborei um pequeno formulário (ver anexo B), para obter dados de origem escolar (série), profissional (caso houvesse) e pessoal (idade).

Nesta ocasião havia, então, dez alunos voluntários, sendo três alunos e uma aluna da 1ª série, uma aluna da 2ª série e cinco alunas da 3ª série do Ensino Médio. De posse desses dados, pude efetuar algumas ponderações para a escolha das duplas ou trios.

Para a atividade inicial da 1ª sessão, seriam compostos dois grupos de alunos, formados por:

- uma dupla de alunos de 1ª série, jogando com um trio composto por dois alunos da 1ª série e a aluna da 2ª série;
- uma dupla, jogando com um trio de alunos da 3ª série.

O aceite do convite por dez alunos foi satisfatório e dentro das expectativas desta proposta de pesquisa. Apesar da preparação descrita acima, previ a possibilidade da ocorrência de algumas desistências na ocasião da aplicação da 1ª sessão. Desta forma, ainda com a ausência de alguns alunos seria ainda possível manter a intenção da pesquisa, através de um rearranjo dos alunos, ainda viabilizando a troca de idéias entre os alunos e a gravação sonora, fundamentais para a coleta dos dados.

Contato com os responsáveis dos alunos

Outro protocolo imprescindível para uma pesquisa acadêmica é a solicitação de permissão dos pais ou responsáveis. Deste modo, elaborei um documento de autorização, dirigido aos pais ou responsáveis (ver anexo B), para obter o consentimento por escrito, de modo a oficializar a participação dos alunos.

Local da aplicação da pesquisa

Escolhi uma sala de aula padrão, localizada perto do portão de entrada da escola, provendo fácil acesso aos alunos e situada do lado oposto às quadras poliesportivas, utilizadas aos sábados para as atividades da 'Escola da Família'. A sala situava-se em local arejado, com vista de frente a um pequeno jardim e com janelas que complementavam a iluminação artificial, possuindo carteiras que possibilitavam o rearranjo em duplas ou grupos, satisfatórias para o posicionamento dos alunos e colocação dos gravadores.

Decisões gerais

Como investigador, assumi o papel de observador, não-interventor, de modo a permitir as ações dos sujeitos da pesquisa, o mais independente possível.

Para o registro dos dados, optei pela gravação sonora das argumentações e verbalização dos raciocínios expressos pelos alunos, possibilitando assim complementar os dados registrados por escrito, de modo a garantir a fidedignidade do material, ampliando as formas de manifestação necessárias para a análise dos dados.

Concepção da Seqüência Didática

Levando em consideração os relatos das análises preliminares e os critérios e procedimentos para a etapa da coleta de dados, a concepção da seqüência de atividades perpassa dois enfoques:

- a utilização da concepção de múltiplo e divisor de um número inteiro como ferramenta facilitadora da resolução de problemas envolvendo equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbf{Z}$, que permite a introdução da condição necessária e suficiente para que exista solução para esse tipo de equação, representada pelo máximo divisor comum entre os coeficientes a e b dividir o termo c ;

- a representação algébrica desse tipo de equação possibilita uma eficiente estratégia para a busca de possíveis soluções inteiras de situações-problema envolvendo equações diofantinas lineares.

Nesta pesquisa, as considerações teóricas propiciaram elementos para antecipar o método da tentativa e erro como estratégia de base, que até pode permitir ao aluno determinar algumas ou, em alguns casos, todas as soluções inteiras de uma equação diofantina linear, porém não permite verificar a inexistência de solução.

Ao planejar esta pesquisa, previ que o aluno de Ensino Médio, ao se deparar com as atividades propostas, utilizaria o método da tentativa e erro para encontrar as soluções inteiras frente aos problemas propostos, durante a situação de ação conforme Brousseau (1996a,b). Após diversas tentativas para encontrar as demais soluções inteiras, os alunos poderiam perceber a necessidade da organização de dados e o caráter facilitador da utilização de certos elementos da Teoria Elementar dos Números, como os conceitos de múltiplo e divisor de um número inteiro. Também, dentre os vários cálculos para encontrar as quantidades inteiras envolvidas nas soluções, os alunos deveriam descartar os resultados não inteiros, propiciando assim indícios de percepção e reconhecimento das grandezas discretas envolvidas. Deste modo, estaria caracterizada as situações de comunicação, de acordo com Brousseau (1996a,b).

Assim, a utilização de elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a) contribuiu para esta pesquisa pela possibilidade de estabelecer problemas e jogos que permitem descrever se a situação propicia ao aluno de Ensino Médio desenvolver conhecimentos em relação ao objeto equação diofantina linear.

Para a escolha de alguns contextos das situações-problema da seqüência de atividades deste estudo, ponderei por aqueles que:

- são próximos à realidade cotidiana do aluno;
- tenham relação com os possíveis centros de interesse do aluno;
- envolvam quantidades monetárias;
- possam propiciar posicionamentos e reflexões em questões básicas da educação do consumidor, referenciais de cidadania, o que ilustrou e permitiu ampliar a visão e compreensão do cidadão em lidar com seus possíveis gastos, papel do consumidor e as possíveis escolhas e tomadas de decisão.

Considerando-se tais justificativas para a contextualização, esta foi direcionada a conceitos relacionados à área da Microeconomia.

As situações-problema utilizadas foram obtidas a partir de diversas fontes como: Albuquerque (1986); Hefez (2005); Miller (1981); Stiglitz e Walsh (2003); Universidade de Minho (2003) e sites de vestibulares. A adaptação para a seqüência de atividades foi realizada levando-se em conta o objetivo desta pesquisa, assim como os referenciais teóricos e metodológicos da Engenharia Didática.

Para a confecção e utilização de jogos no início da 1ª sessão e ao longo da 2ª sessão, associados à resolução de situações-problema, considere como pressupostos que os jogos:

- a) são elaborados a partir de momentos significativos do próprio jogo;
- b) apresentam um obstáculo, ou seja, representam alguma situação de impasse ou decisão sobre qual a melhor ação a ser realizada;
- c) favorecem o domínio cada vez maior da estrutura do jogo;
- d) tem como objetivo principal promover análise e questionamento sobre a ação de jogar, tornando menos relevante o fator sorte e as jogadas por ensaio-e-erro.

(MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 21).

Assim, ao confeccionar os jogos para esta pesquisa, conforme ressalta Borin (1995), delimito como características ser configurado para duplas ou trios, de modo a favorecer a comunicação, ter regras pré-estabelecidas, permitir o desenvolvimento de estratégias, a execução de jogadas e avaliação de procedimentos, assim como possibilitar a existência de uma estratégia otimizadora, viabilizada pelo bom uso das regras e uso do raciocínio lógico.

Deste modo, formatei as regras dos jogos em folha avulsa, conforme observação de Borin (1995), permitindo a leitura minuciosa no início e durante a realização dos jogos.

Da Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori das Sessões

No texto que se segue, para cada sessão da seqüência didática proposta aos alunos, é realizada:

- a análise *a priori*, constando o objetivo da sessão, o número de atividades, o objetivo específico de cada atividade, a escolha das variáveis didáticas envolvidas, o enunciado do jogo ou da situação-problema, a descrição das estratégias previstas a serem utilizadas pelos alunos, de modo a tornar possível descrever e prever os comportamentos dos alunos, de acordo com Machado, S. (2002);

- a descrição dos acontecimentos e dos resultados obtidos, através de quadros-síntese, protocolos e registros transcritos da gravação e textualizados, assim como pelas respostas envolvendo as resoluções de alguns alunos, feitas durante a etapa de institucionalização;

- a análise *a posteriori* local, representada pela avaliação horizontal relativa as respostas de cada grupo de alunos em cada atividade da sessão considerada, que permite verificar a necessidade de 'correção de rota' na elaboração da sessão seguinte, assim como retomar alguns pontos para a institucionalização eventualmente requerida na sessão posterior;

- a análise *a posteriori* de cada sessão, representada pela avaliação vertical, objetivando uma verificação seqüencial dos dados realizada através da apreensão comparativa e global das manifestações/ações/registros dos alunos frente às atividades propostas, comparando-os às características delineadas na análise *a priori*.

Após as deliberações de cada uma das sessões, evidencio na análise final as considerações que propiciaram responder às seguintes questões desta pesquisa:

- Os alunos do Ensino Médio podem desenvolver conhecimentos sobre equações diofantinas lineares? e;

- Como e em que medida os alunos do Ensino Médio explicitam as soluções de problemas envolvendo equações diofantinas lineares a partir de uma situação a-didática proposta?

Assim, a fim de realizar os encaminhamentos para as análises de tais questionamentos, observei se nas manifestações escritas ou orais durante a busca de soluções das situações-problema propostas, os alunos de Ensino Médio:

- utilizaram as grandezas discretas como soluções, descartando as de natureza contínua;

- utilizaram o múltiplo ou divisor de um número inteiro como ferramenta facilitadora;

- escreveram as equações correspondentes e as utilizaram como ferramenta facilitadora;

- explicitaram alguma relação entre os elementos fornecidos nos enunciados e a solução dos problemas, relacionando-as com os múltiplos ou divisores de um número, presentes na Teoria Elementar dos Números e no currículo do Ensino Básico.

- perceberam que existe relação entre os coeficientes **a** e **b** e o coeficiente **c**, caracterizando o máximo divisor comum entre números inteiros como condição necessária e suficiente para a existência de solução de uma equação diofantina linear.

Estas manifestações serão representadas em forma de tabela, viabilizando assim as comparações para responder aos questionamentos efetuados para cada sessão, permitindo a composição das análises finais.

Estas análises permitiram o encaminhamento das reflexões, conclusões finais e recomendações deste estudo, realizados no capítulo V.

1ª sessão

Análise a Priori

O objetivo da 1ª sessão é de propiciar aos alunos contato com situações-problema contextualizadas em quantias monetárias que envolvem diferentes possibilidades – nenhuma solução e variado número finito de soluções inteiras, da ordem de uma dezena – permitindo aos sujeitos de pesquisa vivenciar esta característica das equações diofantinas lineares.

As três atividades propostas nesta 1ª sessão constam de um jogo inicial seguido de duas situações-problema.

Atividade 1: O Jogo do Sorvete²⁸

O objetivo desta 1ª atividade é a participação dos sujeitos de pesquisa em um jogo, caracterizando um primeiro contato com uma situação-problema relativa a um contexto cotidiano, envolvendo um pequeno número de soluções inteiras, possibilitando sucesso na explicitação e utilização da estratégia da tentativa e erro.

As variáveis didáticas envolvidas são:

- os preços dos sorvetes de casquinha, pertencendo ao domínio dos números naturais e pares, de fácil manuseio em cálculos mentais ou escritos;
- os valores gastos na compra de sorvetes de casquinha, revelado ao aluno ao retirar uma carta, sendo números naturais e pares, que permite um número de soluções finito e de ordem das unidades;
- a relação entre os preços dos sorvetes de casquinha e os valores a serem gastos, que permite a existência de mais de uma solução;
- o número de soluções previstas para as quatro rodadas: três ou quatro.

Assim, na situação-problema deste jogo que introduz a 1ª sessão, era esperado que o aluno percebesse a existência de várias possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, vivenciando assim uma situação que implicitamente representava tal característica das equações diofantinas lineares.

²⁸ Ver atividade 1, parte A, no anexo A.

Convidamos vocês a participarem do jogo do sorvete.

Regras:

- O jogo transcorre em quatro rodadas de, no máximo, 2 minutos cada.
- O jogo será disputado entre duas duplas da mesma série.
- Cada dupla registra seus resultados na folha entregue para tal²⁹.
- Cada quadra de alunos, das duas duplas, recebe quatro cartas fechadas com os seguintes valores: R\$ 8,00; R\$ 10,00; R\$ 12,00; R\$ 14,00.
- Cada carta corresponde ao valor que deve ser gasto em sorvetes.
- São duas opções de sorvetes de casquinha: bola simples, a R\$ 2,00 e bola dupla, a R\$ 4,00.
- Existem muitos sabores disponíveis para os pedidos.
- Inicia o jogo a dupla que ganhar na disputa par ou ímpar.
- A dupla vencedora retira a carta de cima e a mostra para todos.
- A dupla oponente registra o valor da carta e todas as possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, sem as revelar à dupla adversária.
- O jogo continua até o término das cartas, invertendo em cada rodada os papéis das duplas.
- Completando-se as quatro rodadas, cada dupla mostra todos os resultados obtidos à dupla adversária, que deverá conferi-los³⁰, dispondo de três minutos para tal tarefa. Caso haja discordância da correção por parte da dupla cujos resultados estejam sendo verificados, será dado um minuto para a réplica³¹, a ser registrada, por escrito.

Contagem dos pontos: De comum acordo, cada resultado errado ou faltante vale 1 ponto. Ganha quem tiver menos pontos.

Atividade 1 – ‘O Jogo do sorvete’

Descrevi o desenvolvimento das soluções da atividade 1 através da previsão das possíveis estratégias de solução a serem veiculadas pelos alunos, indicadas por E_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, dispostas em ordem decrescente de probabilidade de ocorrência.

As estratégias previstas são:

E_1 : A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.

E_2 : A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro.

E_3 : O equacionamento do problema para a busca das soluções.

²⁹ Ver atividade 1, parte B, no anexo A.

³⁰ Após a realização das quatro rodadas para a busca das soluções, o ‘Jogo do Sorvete’ apresentou uma etapa de verificação dos resultados (ver atividade 1, parte 3, no anexo A), onde cada grupo conferiu os resultados do adversário, oportunizando uma retomada dos caminhos percorridos, através da revisão pelos próprios alunos das estratégias e hipóteses consideradas. Como suporte, me apropriei de constatação observada nas pesquisas de Borin (1995), quando cita que os alunos periodicamente sentiam a necessidade de corrigir os próprios erros ou os dos colegas. Esta autora considera importante a correção feita pelos próprios pares, pois os pontos de vista dos alunos são semelhantes e a comunicação discente é mais próxima.

³¹ Denominei *réplica* a ferramenta que permite a contestação da verificação dos resultados da dupla adversária. Encontrei motivação e suporte em observação de Borin (1995), quando os próprios alunos perceberam que uma vitória não era garantia da obtenção de uma estratégia vencedora, pois a equipe adversária poderia ter cometido um erro ou utilizado uma estratégia que proporcionou uma vitória parcial.

Exemplifico estas estratégias, levando-se em consideração o gasto com R\$ 8,00 :

E₁: O sujeito sabendo que há somente dois tipos de sorvete (bola simples, a R\$ 2,00 e de bola dupla, a R\$ 4,00), por estimativa (cálculo mental) obtém três soluções:

- 4 sorvetes de bola simples;
- 2 sorvetes de bola simples e 1 sorvete de bola dupla;
- 2 sorvetes de bola dupla.

E₂: Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca das soluções, utilizando cálculos explícitos, obtendo as três soluções expostas em E₁.

E₃: O sujeito equaciona o problema explicitamente como sendo $2s+4d = 8$, ou sua equivalente $s + 2d = 4$ e a utiliza para a busca das soluções inteiras.

Atividade 2: Quantos pacotes de café?³²

Esta atividade objetiva que os sujeitos de pesquisa vivenciem um problema que envolva um número de soluções de maior ordem em relação à atividade anterior, de modo a dificultar a determinação de todas as soluções inteiras pelo método da tentativa e erro.

As variáveis didáticas são:

- os valores dos preços dos pacotes de café, que pertencem ao domínio dos números naturais, primos entre si, sendo valores de fácil manuseio em cálculos mentais ou escritos;
- o valor a ser gasto na compra dos pacotes de café, que permite um número de soluções finito e que exige organização e persistência na busca das nove soluções;
- a relação entre os valores dos pacotes de café e o gasto em Reais, que permite existir mais de uma solução, além de viabilizar a distinção entre grandezas discretas e contínuas para a escolha das soluções inteiras;
- o número de soluções previstas: nove.

Esta atividade apresentou a seguinte situação-problema:

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente R\$ 58,00, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é R\$ 2,00 e do pacote da marca B, R\$ 3,00.

Atividade 2 – Situação-problema ‘Quantos pacotes de café?’

³² Adaptado de problema encontrado em Pueri Domus Escolas Associadas, 2003, p. 229. Ver anexo A.

A seguir, descrevo as possíveis estratégias de resolução, indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3$:

E₁: O sujeito, sabendo que há somente duas marcas de café, por tentativa e erro, ensaia várias possibilidades, não organizadas, através da tentativa e erro, para a busca de possíveis soluções, utilizando cálculos explícitos e obtendo nove soluções.

E₂: O sujeito, percebendo a organização como fator primordial para encontrar todas as soluções, organiza os dados numa tabela, onde 'x' representa a quantidade de pacotes de café do tipo A (normal) e 'y' representa a quantidade de pacotes de café do tipo B (descafeinado).

E₃: O sujeito equaciona o problema explicitamente como sendo $2a + 3b = 58$ e a utiliza para determinar as nove soluções.

Atividade 3: Qual sua escolha: CD ou DVD?³³

Esta atividade objetiva a interação dos sujeitos de pesquisa com um problema sem nenhuma solução, possibilitando questionamento sobre a eficiência e praticidade do método da tentativa e erro em problemas envolvendo a determinação de soluções inteiras.

Inicialmente se propôs uma situação de modo que o aluno tenha sucesso na interpretação e determinação das soluções inteiras. A seguir, utilizando-se o recurso da mudança de certos valores das variáveis didáticas, foi viabilizada uma variante da situação sem nenhuma solução inteira, que permite ao aluno perceber a limitação do método da tentativa e erro como estratégia de resolução para estes tipos de problemas.

As variáveis didáticas são:

- o valores a serem gastos na compra de CDs ou DVDs: R\$ 60,00 e R\$ 70,00;
- os valores dos preços dos CDs e dos DVDs, números naturais de fácil manuseio em cálculos mentais ou escritos e compatíveis com valores de mercado;
- a relação entre os valores dos CDs e DVDs e o gasto, que permite existir mais de uma e nenhuma solução.
- o número de soluções previstas: três soluções e nenhuma solução.

³³ Situação-problema adaptada de exemplo encontrado em Stiglitz e Walsh, 2003, p. 27. Ver atividade 3, no anexo A.

O problema considerou a seguinte situação:

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R\$ 60,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$ 10,00 e um DVD R\$ 15,00.

a) Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R\$ 60,00?

b) Passados dois meses, Bianca resolveu fazer novas aquisições, porém notou que os preços de CD e DVD aumentaram para R\$ 12,00 e R\$ 16,00, respectivamente. Para compensar estes aumentos, Bianca pensou em gastar exatamente R\$ 70,00 para as compras musicais. Como ficariam as possibilidades de compra destes dois bens, gastando-se exatamente R\$ 70,00?

Atividade 3 – Situação-problema ‘Qual sua escolha: CD ou DVD?’

No item (a), as possibilidades de aquisição de CDs e DVDs, gastando-se exatamente R\$ 60,00, são abordadas pelas estratégias de solução indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3$:

E_1 : O sujeito ensaia várias possibilidades para a busca de possíveis soluções, utilizando estimativa (cálculos mentais) e obtém três possíveis soluções.

E_2 : O sujeito utiliza cálculos explícitos, por tentativa e erro, para a busca das três soluções.

E_3 : O sujeito equaciona o problema explicitamente como sendo $10c + 15d = 60$, ou sua equivalente, $2c + 3d = 12$ e a utiliza para a determinação das soluções.

No item (b), gastando-se exatamente R\$ 70,00, as possíveis estratégias de solução são:

E_1 : O sujeito ensaia várias possibilidades, utilizando estimativa (cálculos mentais), não encontrando solução e nem questionando os dados.

E_2 : O sujeito utiliza cálculos explícitos, através da tentativa e erro, porém não consegue encaminhar critério válido para decidir pela inexistência de solução, questionando os dados.

E_3 : O sujeito equaciona o problema explicitamente como sendo $12c + 16d = 70$, ou sua equivalente, $6c + 8d = 35$ e a utiliza para demonstrar a inexistência de solução.

O problema dos CDs e DVDs foi planejado para finalizar a 1ª sessão, pois a solução vazia causará maior demanda de tempo nas tentativas dos alunos³⁴.

³⁴ Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o contrato didático usual no ensino de matemática tradicional leva a crença nos alunos que problemas matemáticos ou têm sempre solução única, ou se não a possuem, o enunciado fornece pistas explícitas sobre a não existência delas.

Ao finalizar esta 1ª sessão com a situação-problema cuja solução é vazia, intencionei propiciar oportunidade para uma possível reflexão ou questionamento dos alunos desta pesquisa, durante o intervalo entre a 1ª e 2ª sessão, envolvendo as condições que definem a existência ou não de soluções nestes tipos de problemas, assim como qual seria o critério para se determinar o número de soluções inteiras, nos casos em que existem soluções.

Descrição e Análise a Posteriori Local

Esta sessão ocorreu no sábado, dia 04 de novembro de 2006, em sala previamente reservada e preparada com dez carteiras agrupadas para a realização do jogo.

Na sala estavam o pesquisador, um professor de matemática da própria escola, com a função de colaborar com o manuseio do material de pesquisa, como a entrega e recolhimento das atividades e folhas de rascunho, colocação dos gravadores para cada grupo de alunos e outras possíveis necessidades de ordem material.

Compareceram sete dos dez alunos que tinham se voluntariado, não havendo explicação de qualquer natureza por parte dos alunos ausentes. Esse fato me compeliu a reorganizar os grupos previamente escolhidos.

Para a descrição da sessão atribuí nomes fictícios aos alunos participantes.

| | Ana | Bárbara | Camila | Dora | Eva | Fernando | Gerson |
|----------------------------|----------------|---------|----------------|------|----------------|----------|------------------------------|
| Séries | 3ª | 3ª | 3ª | 3ª | 1ª | 1ª | 1ª |
| Duplas³⁵ | D ₁ | | D ₂ | | D ₃ | | U ₃ ³⁶ |
| Grupo | G ₁ | | | | G ₂ | | |

Descrição dos agrupamentos dos alunos na 1ª sessão

Para a aplicação da pesquisa, após agradecer a presença de todos, retomei algumas considerações fundamentais com os sujeitos de pesquisa:

- o pesquisador não poderia fornecer informações ou dicas para a interpretação, o encaminhamento e a resolução das atividades propostas;
- as duplas ou trios deveriam resolver as atividades conjuntamente e, por isso, era não só permitido, mas desejado que se comunicassem;

³⁵ Para a designação das duplas foi escolhido o símbolo D_i, com i = 1, 2, 3.

³⁶ Para um aluno da 1ª série que trabalhou individualmente, foi atribuído o símbolo U₃.

- a distribuição das folhas referentes às diversas atividades das sessões seria de forma seqüencial, após o recolhimento das atividades já realizadas em cada etapa;

- o pesquisador se incumbiria de trazer e distribuir canetas de tinta azul, assim como papel sulfite (tamanho A4) na cor branca, para possíveis rascunhos, sendo vedada a utilização de qualquer outro tipo de papel;

- as duplas ou trios receberiam uma folha com os enunciados da atividade e espaço para registrar as resoluções com caneta de tinta azul;

- os alunos deveriam deixar todo e qualquer procedimento registrado por escrito, mesmo aqueles que eles considerassem um erro ou algo inadequado para a solução. Caso isto acontecesse, não deveriam riscar os procedimentos errados, mas somente prosseguir na resolução, pois isto permitiria a leitura pelo pesquisador dos caminhos percorridos pelos alunos para a resolução das atividades, conforme ressalta Borin (1995).

Descrição da Atividade 1: 'O Jogo do sorvete'

Para o jogo introdutório, o pesquisador formou um grupo denominado G_1 , composto pelas quatro alunas da 3ª série do Ensino Médio, subdividido nas duplas D_1 e D_2 . Um segundo agrupamento, denominado grupo G_2 , foi instituído pelos três alunos da 1ª série, subdividido na dupla D_3 e no aluno Gerson, designado por U_3 . Esta etapa de organização dos alunos ocorreu com rapidez e tranqüilidade.

Cada dupla recebeu um total de três folhas (ver anexo A), sendo previsto um tempo de execução em torno de 25 minutos.

A primeira folha da atividade 1 continha as regras do jogo, a segunda estava designada para o registro dos resultados obtidos e a terceira permitia a verificação dos resultados dos adversários.

Estas três folhas foram entregues seqüencialmente, conforme o andamento da sessão e recolhidas ao final, de modo a permitir a utilização das regras e dos registros durante a realização da atividade.

Havia planejado cinco minutos para a leitura, reflexão e discussão das regras do jogo, a fim de propiciar o entendimento destas, conforme sugestão de Borin (1995).

Após entregar a folha contendo as regras do 'Jogo do sorvete', observei uma grande atenção na leitura destas regras e uma intensa comunicação entre os participantes, principalmente no grupo G_1 , revelando o empenho e a necessidade em compreendê-las. No grupo G_2 ocorreu a leitura individual, com algumas trocas de esclarecimentos.

Findo este tempo, iniciou-se o jogo onde cada dupla recebeu a segunda folha e um jogo de quatro cartas para sorteio dos valores de compra de sorvetes.

Constatai que o grupo G_1 não teve dificuldade quanto à etapa de sorteio e distribuição das cartas. Porém, em certo momento, o grupo G_2 estava prestes a reutilizar as cartas já sorteadas anteriormente e efetuar um novo sorteio. Ao perceber isto, orientei o grupo para simplesmente distribuir as duas cartas restantes.

Cada dupla dispôs de até dois minutos para resolução de cada rodada, perfazendo um total de aproximadamente oito minutos.

Os alunos começaram a leitura da folha de registro de respostas e por várias vezes reram as regras para compreender como seria o andamento do jogo. Ressalto que um dos pontos mais polêmicos desta leitura foi a pontuação do jogo, que se estendeu até depois do encerramento das atividades da 1ª sessão.

A seguir, apresento a síntese dos resultados obtidos pelos jogadores. Representei as respostas dos dois grupos em tabelas separadas, de modo a possibilitar um quadro geral das produções, ressaltando os resultados corretos e as soluções faltantes.

| Grupo G_1 | D_1 | | D_2 | |
|--------------------|--------------------------------|------------------------------------|---------------------------|---|
| | Gasto (R\$) | | Gasto (R\$) | |
| | 8,00 | 12,00 | 10,00 | 14,00 |
| Soluções corretas | 2 | 2 | 2 | 4 |
| | 4 b.s. ³⁷ 2 b.d. | 6 b.s. 3 b.d. | 5 b.s. 1 b.s. e 2 b.d. | 7 b.s. 5 b.s. e 1 b.d. 3 b.s. e 2 b.d. 1 b.s. e 3 b.d. |
| Soluções faltantes | 1 | 2 | 1 | 0 |
| | 2 b.s. e 1 b.d. | 2 b.s. e 2 b.d. 4 b.s. e 1 b.d. | 3 b.s. e 1 b.d. | 0 |

Grupo G_1

| Grupo G_2 | D_3 | | U_3 | |
|--------------------|-------------------------------------|--|---------------------------|---------------------------|
| | Gasto (R\$) | | Gasto (R\$) | |
| | 12,00 | 14,00 | 8,00 | 10,00 |
| Soluções corretas | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 b.s. e 2 b.d. | 3 b.s. e 2 b.d. | 1 b.d. + 1 b.d. | 1 b.s. e 2 b.d. |
| Soluções faltantes | 3 | 3 | 2 | 2 |
| | 6 b.s. 3 b.d. 4 b.s. e 1 b.d. | 7 b.s. 5 b.s. e 1 b.d. 1 b.s. e 3 b.d. | 4 b.s. 2 b.s. e 1 b.d. | 5 b.s. 3 b.s. e 1 b.d. |

Grupo G_2

³⁷ Simbologia empregada: b.s.= sorvete de bola simples (R\$ 2,00) e b.d.= sorvete de bola dupla (R\$ 4,00).

A etapa de verificação dos resultados e contagem dos pontos

Nesta etapa, cada dupla recebeu a folha para a etapa da verificação dos resultados, dispondo de até três minutos para esta tarefa e mais um minuto para a etapa da réplica.

No grupo G_1 , houve intensa leitura e discussão para o entendimento das regras referentes à contagem dos pontos, porém, no grupo G_2 ocorreu leitura silenciosa, com brevíssima discussão para seu entendimento.

Segue abaixo síntese dos dados coletados das duplas D_1 , D_2 , D_3 e de U_3 .

| Valor da carta | Resultados corretos | Possibilidades de compra | | Réplica | Pontuação |
|----------------|---------------------|--------------------------|----------------------|---------|-----------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| R\$ 14,00 | 4 | nenhum | nenhum | não | 4 |
| R\$ 10,00 | 2 | nenhum | nenhum | não | 2 |
| Total | | | | | 6 |

D_1 analisa os resultados de D_2

| Valor da carta | Resultados corretos | Possibilidades de compra | | Réplica | Pontuação |
|----------------|---------------------|--------------------------|------------------------------------|---------|-----------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| R\$ 12,00 | 2 | nenhum | 2 b.s. e 2 b.d. 4 b.s. e 1 b.d. | não | 2 |
| R\$ 8,00 | 2 | nenhum | nenhum | não | 2 |
| Total | | | | | 4 |

D_2 analisa os resultados de D_1

| Valor da carta | Resultados corretos | Possibilidades de compra | | Réplica | Pontuação |
|----------------|---------------------|--------------------------|----------------------|---------|-----------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| R\$ 12,00 | sim | 2 simples | (falta com) b.d. | não | 4 |
| R\$ 14,00 | sim | 2 simples | (falta com) b.d. | sim | 6 |
| Total | | | | | 10 |

U_3 analisa os resultados de D_3

| Valor da carta | Resultados corretos | Possibilidades de compra | | Réplica | Pontuação |
|----------------|---------------------|--------------------------|----------------------|---------|-------------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| R\$ 8,00 | sim | - | (falta com) b.s. | sim | 1 |
| R\$ 10,00 | sim | - | - | sim | 2 (riscado) |
| Total | | | | | - |

D_3 analisa os resultados de U_3

Análise a posteriori local da atividade 1

Conforme a análise *a priori*, esperava que os alunos percebessem a existência de várias possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, vivenciando assim uma situação que implicitamente representava tal característica das equações diofantinas lineares.

No entanto, somente no primeiro grupo G_1 , de alunos da 3ª série do Ensino Médio, houve essa percepção conforme manifestação oral de aluna³⁸ da dupla D_1 :

D_1 : Você tem R\$ 14,00 e verificará quantas formas existem para comprar, entendeu? É possível comprar 7 sorvetes de R\$ 2,00, assim como 2 sorvetes de R\$ 4,00 e o resto de R\$ 2,00, de modo a resultar R\$ 14,00.

No grupo G_2 , composto por alunos da 1ª série, todos deram apenas uma solução no início da atividade. Porém, perceberam que haveria mais de uma solução em um segundo momento, ao responder o quesito '*resultados faltantes*'³⁹. Esse tipo de reação dos elementos desse grupo pode ser reflexo do contrato didático, onde os alunos acreditam que existe somente uma solução para problemas matemáticos.

É importante ressaltar que todos os alunos deram respostas no âmbito dos números inteiros, o que parece indicar que perceberam tratar-se de um problema de Matemática Discreta.

Ao reler as regras do jogo, percebi que não havia indicado o descarte das cartas já obtidas no sorteio. Talvez, por isso, o grupo G_2 tenha iniciado um novo 'carteio'.

É importante destacar que todos os alunos utilizaram a estratégia que indicamos como E_1 , que foi considerada a mais provável, ao utilizar cálculo mental para a determinação das soluções inteiras, associado ao uso do método da tentativa e erro.

Ao preencher a segunda folha da atividade 1, apenas as alunas Camila e Dora, da dupla D_2 , representaram corretamente todas as soluções inteiras de uma das cartas sorteadas. Excetuando-se este acerto, para as outras cartas sorteadas, os alunos se contentaram com uma ou duas soluções, o que parece apontar para uma falta de organização mais efetiva dos dados, motivo pelo qual não favoreceu a formação de conjecturas.

³⁸ Esta citação, assim como as demais deste capítulo, foram obtidas pela transcrição das gravações de áudio, onde ocorreu um tratamento de linguagem. Deste modo, foram retirados os vícios e redução de linguagem dos alunos desta pesquisa, segundo as normas de ortografia e sintaxe, mantendo-se o mais fiel possível e preservando o texto quanto às quantidades numéricas envolvidas, os termos e as idéias.

³⁹ Isto atestou a importância da etapa de verificação dos resultados, que oportunizou uma retomada dos caminhos percorridos, através da revisão pelos próprios alunos das respostas até então consideradas, de acordo com Borin (1995).

É interessante notar que as soluções encontradas pelas alunas Ana e Bárbara, da dupla D₁, envolviam somente a compra de um tipo de sorvete, revelando uma provável interpretação do 'ou' exclusivo.

Quanto a etapa de verificação dos resultados, no preenchimento da terceira folha da atividade 1, as alunas Ana e Bárbara, da dupla D₁ perceberam que as quatro respostas da dupla adversária estavam corretas para o gasto de R\$ 14,00, porém não perceberam que faltou uma resposta para o gasto de R\$ 10,00. Quanto as alunas Camila e Dora, da dupla D₂, estas verificaram que a dupla adversária não colocou dois resultados e os apontou de modo correto para o gasto de R\$ 12,00, porém não perceberam uma solução faltante para o gasto de R\$ 8,00. Estes resultados evidenciam que os alunos não desenvolveram uma estratégia capaz de determinar todas as soluções.

Ao preencher a terceira folha, os alunos do grupo G₂ aparentemente perceberam que poderia haver mais de uma solução para cada carta, ao esboçar indicações não claras, de que faltavam resultados.

Quanto à contagem dos pontos para verificar qual grupo foi o vencedor, decididamente os alunos não entenderam a regra correspondente. No grupo G₁ houve intensa discussão para o entendimento da pontuação, ocorrendo inicialmente a interpretação correta por uma das alunas da dupla D₂. Porém, devido a divergências, prevaleceu o entendimento das outras colegas, Ana e Bárbara, da dupla D₁.

D₁: Se vocês errarem é ponto para vocês ou para nós? Onde está escrito que é para eles? Não entendi.

D₂: Se, na etapa de verificação, nós completarmos os resultados faltantes e os errados, a dupla adversária ganha esses pontos. E o vencedor é a dupla que tiver menos pontos.

D₁: Ah, quem errar mais vence!

Esta dificuldade no entendimento das regras de pontuação me indicou a necessidade de solicitar esclarecimentos as duplas do grupo G₁, assim como rever as regras para a contagem de pontos para a 2ª sessão.

Ressalto que no 'jogo do sorvete' ocorreu uma grande comunicação entre os pares, de modo a viabilizar a ação independente dos alunos para a busca das soluções. Considerei isso uma mostra do envolvimento, caracterizando a etapa de devolução do jogo, de acordo com Brousseau (1996a,b).

Assim, o objetivo da atividade foi atingido, pois os sujeitos da pesquisa participaram ativamente do jogo, nesse primeiro contato com a situação-problema envolvendo um certo número de soluções inteiras, o que possibilitou a explicitação e utilização da tentativa e erro como estratégia preferencial.

Vale observar que, no 'jogo do sorvete', nenhum dos grupos se preocupou em equacionar as situações-problema (estratégia E₃), parecendo evidenciar que os alunos preferem resolver situações-problema através de cálculos numéricos.

Descrição da Atividade 2: 'Quantos pacotes de café?'

Para a atividade 2, mantive a formação das alunas da 3ª série, ou seja, a dupla D₁ composta pelas alunas Ana e Bárbara e a dupla D₂ composta pelas alunas Camila e Dora, porém reuni os alunos da 1ª série no grupo G₂. Inicialmente, entreguei a folha da atividade 2 para cada agrupamento, que continha o enunciado da situação-problema e espaço para a busca e registro das soluções. Foi previsto um tempo de execução em torno de 15 minutos.

Os alunos rapidamente se mobilizaram para a busca das soluções. No quadro abaixo sintetizei os resultados obtidos pelas duplas D₁ e D₂, assim como pelo grupo G₂.

| | 02 - A 18 - B | 05 - A 16 - B | 08 - A 14 - B | 11 - A 12 - B | 14 - A 10 - B | 17 - A 08 - B | 20 - A 06 - B | 23 - A 04 - B | 26 - A 02 - B |
|----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| D₁ | (2,18) | (5,16) | (8,14) | (11,12) | (14,10) | (17,8) | (20,6) | (23,4) | (26,2) |
| D₂ | (2,18) | (5,16) | - | - | (14,10) | - | - | - | - |
| G₂ | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Resultados obtidos na atividade 2 pelo grupo G₂ e pelas duplas D₁ e D₂

O grupo G₂ apresentou o seguinte resultado:

| | | |
|--|--|---|
| $\begin{array}{r} 58 \\ \times 2 \\ \hline 116A \end{array}$ | $\begin{array}{r} 58 \\ \times 3 \\ \hline 174B \end{array}$ | $\begin{array}{r} 58 \\ \times 3 \\ \hline 174 \\ -116 \\ \hline 058 \end{array}$ |
|--|--|---|

Protocolo 1: Resposta do grupo G₂ ao problema 'Quantos pacotes de café?'

Os registros dos cálculos realizados em folha de rascunho e a transcrição de áudio do grupo G₂ evidenciaram o trabalho realizado, de forma aleatória, pelos alunos da 1ª série, envolvendo os números 2, 3 e 58, dados no enunciado. Como ilustração, além dos resultados indicados no protocolo acima, constam os seguintes cálculos: 58:2=29; 29:2=14,5; 29:3 (cujo resultado não foi apresentado); 2+3=5 e 5.58= 290.

Infelizmente, no final da sessão percebi que ocorreu um problema com um gravador, não ficando registro sonoro das alunas Ana e Bárbara, da dupla D₁, a partir da atividade 2 até o final desta 1ª sessão.

Análise a posteriori local da atividade 2

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os sujeitos de pesquisa percebessem a existência de vários modos de aquisição de café de dois tipos e organizassem seus resultados, de modo a viabilizar a determinação de todas as soluções inteiras, vivenciando uma situação que implicitamente representava tal característica das equações diofantinas lineares.

As alunas Ana e Bárbara, da dupla D_1 , após obterem uma das soluções através de cálculos explícitos e uso do método da tentativa erro, acertaram todas as soluções, tendo organizado os resultados em ordem crescente de pacotes de café de R\$ 3,00, utilizando assim a estratégia E_2 .

Porém, as alunas Camila e Dora, da dupla D_2 , utilizaram exclusivamente o método da tentativa e erro, conforme ilustra a transcrição abaixo.

D_2 : Com 14 pacotes de R\$ 2,00 resulta R\$ 28,00, sendo o restante obtido com pacotes de R\$ 3,00.

D_2 : Como assim?

D_2 : Será possível comprar $14 \cdot 2 = 28$ Reais, e sobra quanto?

D_2 : Resulta 30, que dividido por 3 nos fornece 10 pacotes de R\$ 3,00.

Após encontrar três soluções inteiras, a dupla D_2 encerrou as buscas, revelada nas manifestações orais como falta de estímulo. Vale notar que esta dupla utilizou a estratégia E_1 , ao ensaiar várias possibilidades através de cálculos explícitos por tentativa e erro, sem organizar um encaminhamento mais eficaz para a procura por soluções.

Definitivamente, o grupo G_2 não compreendeu o problema. Houve discussões, porém encaminhadas para uma interpretação errônea e o uso aleatório das operações básicas, conforme destaca o relato abaixo:

G_2 : 58 por 2, quanto resulta?

G_2 : 29. Mas 29 não é divisível por 3. Acho que é subtração. Só pode ser!

G_2 : Acho que o exercício solicita quantos pacotes do tipo A são possíveis de serem adquiridos com R\$ 58,00 e, também, quantos pacotes do tipo B são possíveis com este valor.

G_2 : É, pode ser isto também. Utiliza-se a operação de multiplicar, de modo a verificar o total de possibilidades de cada pacote em separado, não dos dois juntos. Agora subtrai o valor de cada um.

G_2 : 58. Oh! Deu o valor, veja.

A falta de sentido deste problema para os alunos, explicitada nos encaminhamentos, indica o efeito do contrato didático conhecido na Didática da Matemática por 'Problema da Idade do Capitão'⁴⁰, revelando a crença pelos alunos que

⁴⁰ Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), por volta dos anos 80, pesquisadores franceses propõem a crianças na faixa de 7 a 10 anos o 'Problema da Idade do Capitão', cujo enunciado é: 'Em um barco, há sete cabras e cinco ovelhas. Qual a idade do capitão?' Os pesquisadores verificaram que a maior parte

os problemas matemáticos são resolvidos aplicando-se aos dados alguma(s) das operações matemáticas elementares.

Todos os alunos reconheceram e utilizaram o caráter discreto das grandezas envolvidas para o encaminhamento das soluções, conforme se verifica no relato das alunas Camila e Dora, da dupla D_2 .

D_2 : Quanto é 58 dividido por 2?

D_2 : 29.

D_2 : É possível comprar 29 pacotes de 2 Reais. E quanto é 58 dividido por 3?

D_2 : 58 dividido por 3, não é possível.

D_2 : Resultam 19 pacotes de R\$ 3,00 e sobra 1 Real.

De modo geral, pelas manifestações dos sujeitos de pesquisa, considere-se que ocorreu a percepção de que a situação-problema apresenta mais de uma solução, permitindo ser vivenciada esta característica das Equações Diofantinas Lineares. Também, se caracterizou que os alunos souberam operacionalizar o uso das grandezas discretas, contrapondo as de natureza contínua na etapa de cálculos, durante a aplicação do método da tentativa e erro, o que permitiu a obtenção das soluções inteiras.

Quanto à busca pela organização dos dados, somente uma das duplas percebeu sua importância como facilitador para a determinação de todas as soluções.

Também, tal como ocorreu na primeira atividade desta sessão, os sujeitos de pesquisa não se preocuparam em equacionar o problema e usá-la como estratégia de resolução (estratégia E_3).

Descrição da Atividade 3: ‘Qual sua escolha: CD ou DVD?’

Para a atividade 3, o pesquisador manteve a formação dos grupos da atividade anterior. Inicialmente, entreguei a folha da atividade 3, contendo o enunciado da situação-problema, subdividida em duas partes, designadas por ‘A’ e ‘B’ e espaço para a busca e registro das soluções, sendo previsto um tempo de execução em torno de 15 minutos.

Os alunos imediatamente encaminharam as soluções da parte ‘A’ desta atividade. Porém, a parte ‘B’ desta atividade demandou maior quantidade de tempo e promoveu discussão entre os integrantes em todos os agrupamentos, gerando grande número de cálculos na tentativa de encontrar solução para o problema, como já se esperava.

dos alunos respondeu ao problema utilizando operações aleatórias, sendo a resposta mais freqüente dada pelo cálculo $7.5 = 35$ anos. Tais fatos foram relacionados a efeitos advindos do contrato didático.

Os quadros abaixo sintetizam as resoluções dos três grupos, nas partes 'A' e 'B'.

| Parte 'A' R\$ 60,00 | D_1 | D_2 | $G_2 (D_3 + U_3)$ |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Soluções | 3 CDs + 2 DVDs | 3 CDs + 2 DVDs 6 CDs 4 DVDs | 3 CDs + 2 DVDs 6 CDs 4 DVDs |
| Soluções faltantes | 6 CDs 4 DVDs | 0 | 0 |

Síntese das respostas dos alunos na parte 'A' da atividade 3

| Parte 'B' R\$ 70,00 | Respostas |
|------------------------|--|
| D_1 | 2 DVDs + 3 CDs = 68,00; o valor não será exato |
| D_2 | Não encontramos possibilidades |
| G_2 | 5 CDs |

Síntese das respostas dos alunos na parte 'B' da atividade 3

Análise a posteriori local da atividade 3

De acordo com a análise *a priori*, propus na parte 'A' desta atividade valores para a variável didática que favorecessem o uso do método da tentativa e erro e possibilitasse sucesso aos alunos na interpretação e determinação das soluções inteiras para a aquisição de CDs ou DVDs.

As alunas Camila e Dora, da dupla D_2 , utilizaram cálculos explícitos, revelando uso da estratégia E_2 , encontrando rapidamente as três soluções através da tentativa e erro.

Quanto ao grupo G_2 , este utilizou cálculos mentais para a determinação correta das três soluções, revelando uso da estratégia E_1 . Destaco que este grupo apresentou rapidamente a resolução correta nesta atividade, em oposição a produção nas atividades 1 e 2, conforme pode ser observado na transcrição abaixo:

G_2 : Ela levou 2 DVDs que resulta R\$ 30,00 e 3 CDs que representa um gasto de R\$ 30,00.

G_2 : Outra possibilidade é comprar 4 DVDs. Ainda, uma terceira possibilidade é adquirir 6 CDs.

G_2 : Então, no total, há três possibilidades.

Quanto as alunas Ana e Bárbara, da dupla D_1 , estas encontraram somente uma das respostas, utilizando cálculo explícito, revelando o uso da estratégia E_2 . Os registros mostram que a dupla realizou somente este cálculo, indicando provável desestímulo em prosseguir na busca pelas outras soluções.

Assim, de modo geral, os sujeitos de pesquisa obtiveram sucesso na determinação das soluções na parte 'A' da atividade 3, interpretando corretamente o problema e vivenciado esta característica das Equações Diofantinas Lineares, revelada pela existência de variado número de soluções inteiras.

Na parte 'B' desta atividade, conforme a análise *a priori*, ao propor um problema sem solução, esperava que os alunos se questionassem sobre a eficiência e praticidade do método da tentativa e erro em problemas envolvendo a determinação de soluções inteiras.

De fato, a mudança propiciada pela alteração dos valores unitários do CD e do DVD, assim como o valor disponível para as compras, dificultou a busca das soluções, conforme previ. Assim, todos os alunos dispuseram de maior tempo na tentativa de busca das soluções que acreditavam existir, pela insistência na utilização do método da tentativa e erro.

Destaco que as alunas Ana e Bárbara, da dupla D_1 , após muitas tentativas através de cálculos explícitos, utilizaram a expressão 'o valor não será exato', revelando indícios que a resposta dada pela própria dupla não é adequada, ou seja, provavelmente elas perceberam que não existem quantidades inteiras de CDs e DVDs que possibilitam um gasto de exatamente R\$ 70,00, porém não formularam argumentos matematicamente válidos que comprovassem tal especulação, revelando assim o uso da estratégia E_2 .

Considerando-se as alunas Camila e Dora, da dupla D_2 , após muitos cálculos explícitos, não conseguiram chegar a uma solução, intensificando o diálogo, questionando os dados e, com base em suas tentativas, efetuaram o diagnóstico 'não encontramos possibilidades', fazendo uso da estratégia E_2 .

Ressalto que as alunas Camila e Dora não conseguiram utilizar uma argumentação matemática válida para a afirmação expressa acima, apresentando uma concepção peculiar sobre o conceito de paridade⁴¹, conforme se observa no relato abaixo:

D_2 : Já passou. Não tem. Não acredito. Tem que ter solução.

D_2 : É uma 'pegadinha' o fato do problema não ter possibilidade.

D_2 : Então, vamos escrever não há possibilidades.

D_2 : Se o nosso raciocínio for lógico, não tem como gastar R\$ 70,00. Por que os dois números são pares e 70 é ímpar.

D_2 : Você percebeu que para o gasto de R\$ 60,00 houve possibilidades.

D_2 : E 60 é um número par.

D_2 : Então é isso, não há possibilidade.

D_2 : Não é que não há, não encontramos possibilidades.

⁴¹ Dois números naturais têm mesma paridade se ambos forem pares ou ambos ímpares, ou seja, se a soma deles for par. Conseqüentemente, dois números têm paridade distinta se um for par e o outro ímpar, ou seja, se a soma dos dois números for ímpar.

O grupo G_2 , composto pelos alunos da 1ª série, obteve resposta, mas isto ocorreu devido a erro de cálculo, conforme manifestado nos rascunhos utilizados. Também, não houve a verificação e nem o questionamento dos dados, se caracterizando o uso da estratégia E_1 .

O objetivo desta parte 'B' desta atividade foi atingindo, pois, conforme previ, os sujeitos de pesquisa insistiram no uso do método da tentativa e erro, demandando uma maior quantidade de tempo nas buscas, revelando dificuldades em lidar com esta alteração nos valores das variáveis didáticas, questionando os dados, mas não formularam nenhuma conjectura matemática válida em relação a inexistência de solução, vivenciando assim uma insatisfação.

Ressalto que os alunos se envolveram nas atividades, sem intervenção externa, assim como houve intensa comunicação entre os pares para a discussão das propostas, principalmente na etapa do jogo. Também, o registro escrito se efetivou sem maiores problemas.

A tabela abaixo mostra os tempos previstos e os tempos utilizados na 1ª sessão.

| 1ª sessão | | Atividade 1 - Jogo | | Atividade 2 | Atividade 3 | TOTAL |
|----------------|-----------|--------------------|--------------------------|-------------|-------------|--------|
| | | Leitura das regras | Resultados e verificação | | | |
| Tempo previsto | | 5 min | 25 min | 15 min | 15 min | 60 min |
| Tempo real | D_1 | 5 min | 25 min | 10 min | 08 min | 48 min |
| | D_2 | 5 min | 25 min | 12 min | 10 min | 52 min |
| | D_3+U_3 | 5 min | 25 min | 15 min | 15 min | 60 min |

Assim, encerrou-se a 1ª sessão dentro do prazo estimado de 60 minutos.

Análise a Posteriori da 1ª sessão

A 1ª sessão objetivou propiciar aos alunos contato com situações-problema contextualizadas em quantias monetárias envolvendo nenhuma solução e variado número finito de soluções inteiras, da ordem de uma dezena, permitindo aos sujeitos vivenciar esta característica das equações diofantinas lineares.

O quadro abaixo sintetiza as constatações com relação às manifestações escritas ou orais dos sujeitos de pesquisa em relação às atividades propostas na 1ª sessão. Assim, nas três atividades da 1ª sessão, pude observar que os alunos:

| Atividade | 1ª sessão | D ₁ | D ₂ | D ₃ | U ₃ |
|-------------|--|----------------------|-----------------|----------------------|----------------|
| | | G ₁ | | G ₂ | |
| 1 | utilizaram as grandezas discretas | X | X | X | X |
| | perceberam que havia mais de uma solução | X | X | X ⁴² | X |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | X | X | X | X |
| | houve evolução de estratégia | - | - | - | - |
| 2 | utilizaram as grandezas discretas | X | X | X | |
| | perceberam que havia mais de uma solução | X | X | Interpretação errada | |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | No início | X | X | |
| | houve evolução de estratégia | Organização de dados | - | - | |
| 3 parte 'A' | utilizaram as grandezas discretas | X | X | X | |
| | perceberam que havia mais de uma solução | - | X | X | |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | X | X | X | |
| | houve evolução de estratégia | - | - | - | |
| 3 parte 'B' | perceberam que não havia solução | - | - | - | |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | X | X | X | |
| | houve evolução de estratégia | - | Houve tentativa | - | |

⁴² Os alunos Eva e Fernando, da dupla D₃ e o aluno Gerson (U₃) perceberam que havia mais de uma solução, no momento da verificação dos resultados dos adversários, porém não as determinaram.

As considerações tecidas em relação à 1ª sessão me permitiram concluir que os sujeitos de pesquisa alcançaram os objetivos delineados, vivenciando uma característica das equações diofantinas lineares, ao descobrir que algumas das situações-problema apresentadas possuem variado número de solução, assim como reconheceram o caráter discreto das grandezas que representam as quantidades de produtos ou serviços a serem adquiridos, descartando aqueles valores que não conduzem às soluções inteiras.

Considero que os sujeitos desta pesquisa superaram o diagnóstico de Lopes Junior (2005), ao constatar que tiveram êxito em distinguir e compreender o caráter discreto das grandezas envolvidas, em questões envolvendo a solução com números inteiros. Este fato pode ser possivelmente creditado ao uso dos recursos didáticos dos jogos e situações-problema com contextos acessíveis, próximos a realidade cotidiana do aluno e envolvendo quantias monetárias para as escolhas relativas a aquisição de bens ou produtos, que favoreceram a devolução e a ação na situação a-didática apresentada, conforme Brousseau (1996a,b), revelando que as escolhas das variáveis didáticas possibilitaram a ação independente para a aquisição de conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

Ressalto que os alunos utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial para a busca de soluções, conforme as considerações de Pozo (1998 apud Polya, 1945), mas de certo modo levantaram indícios de percepção da limitação desta estratégia, na atividade finalizadora da 1ª sessão, onde o aluno não soube formular argumento matematicamente válido para verificar a inexistência de solução, mas acabaram vivenciando uma insatisfação com relação a esta estratégia de base.

Em relação ao desempenho dos grupos, se caracterizou que as duplas representadas pelos alunos do 3º ano apresentaram maior mobilização para obter as soluções inteiras, assim como na organização dos resultados, em comparação com as duplas compostas pelos alunos do 1º ano.

2ª Sessão

As atividades desenvolvidas nesta 2ª sessão constaram de três momentos: um questionamento inicial, para solicitar esclarecimentos de algumas respostas obtidas na 1ª sessão, uma institucionalização e, por último, a etapa da experimentação, onde foram desenvolvidas as análises *a priori*, as descrições das sessões e as análises *a posteriori*.

O questionamento dirigido aos sujeitos da pesquisa, realizado no início da 2ª sessão, se fez necessário após a análise das manifestações orais e escritas realizadas na 1ª sessão. As questões objetivaram alguns entendimentos dos encaminhamentos dados pelos alunos às resoluções dos problemas e os motivos que as nortearam, ampliando desta forma as condições para a análise dos dados.

A seguir, faço a descrição das perguntas e respostas dos alunos.

Para o grupo G_2 , dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, relativamente a etapa de verificação dos resultados da atividade 1, questionei:

- Como obtiveram os resultados faltantes?
- Por que responderam 'sim' para o item *réplica* e nada argumentaram?
- Como procederam para pontuar o jogo?

Os três alunos do Grupo G_2 afirmaram que não compreenderam as regras de pontuação do jogo, nem o significado do termo *réplica*. Assim, optaram por arriscar escrever algo na coluna reservada a *réplica* e inventaram a pontuação na hora. Ao mostrar aos alunos os resultados e pontuações que eles realizaram na 1ª sessão, nada acrescentaram.

Quando questionados a respeito dos resultados faltantes, a Eva e o Fernando entenderam que o Gerson tinha esquecido da possibilidade de aquisição de sorvete de bola simples, somente colocando a possibilidade de bolas duplas.

Também, o grupo G_2 expressou que não respondeu às questões das verificações dos resultados, deixando grande parte dos espaços das colunas reservadas sem resposta, pela dificuldade de entendimento. Ainda, acrescentaram não estarem acostumados com jogos e resolução de problemas nas aulas de Matemática, o que os desorientou quanto a ação, o que revela efeitos devido ao contrato didático vivenciado por estes alunos.

Tendo observado o jogo, percebi a Eva e o Fernando (dupla D_3) discutindo o entendimento das regras do jogo. Inicialmente, um deles afirmou que marcou 'não' para a coluna de resultados errados, pois estava faltando o resultado relativo à aquisição de sorvete de bola simples.

D₃: Aqui, estão faltando os resultados utilizando as bolas simples, pois ele só utilizou as bolas duplas. No lugar de uma bola dupla, devemos colocar duas bolas simples.

O Gerson argumentou que não entendeu e como consequência escreveu qualquer coisa, tanto para a pontuação, como para as outras colunas. Durante a 1ª sessão, observei-o argumentar, repetidas vezes, que não estava entendendo as regras do jogo, fazendo várias leituras em voz baixa e pouco interagindo com a dupla adversária.

E para o grupo G₁, composto pelas alunas da 3ª série, questionei:

- Como obtiveram o resultado da pontuação da atividade 1, na etapa da verificação dos resultados?

As alunas me disseram que houve divergência entre elas quanto a esta questão. Uma delas assegurou que, após intensa argumentação, acabou prevalecendo que fosse marcado um ponto para cada resposta correta, o que confirma os registros dos alunos, conforme a síntese apresentada na descrição da atividade 1, na 1ª sessão.

Durante minha observação foi nítido o debate referido acima pelas alunas das duplas D₁ e D₂, principalmente pela polêmica gerada pelas regras 'ganha quem tem menos pontos' e 'de comum acordo, cada resultado errado ou faltante vale um ponto'. A discussão basicamente se centrou na dúvida se o ponto deveria ser atribuído para quem estava corrigindo ou para quem estava sendo feita a correção. Esta ponderação é pertinente e realmente deve ser levada em consideração.

Em particular, para as alunas Ana e Bárbara, da dupla D₁, que acertaram todas as soluções na atividade 2, indaguei:

- Na resolução da situação-problema 'Quantos pacotes de café?', observei que vocês interromperam as tentativas e iniciaram os registros das respostas de modo ordenado, indicando os valores da quantidade de pacotes de B na seqüência (2, 4, 6, 8, 10, ..). Por que pegaram pacotes de ordem par? O que os levou a adotar este procedimento?

Como resposta, elas disseram que perceberam a lógica do problema durante a resolução, ao observar nos cálculos iniciais números pares, o que as levou a organizar, em ordem crescente, os resultados das quantias de café do tipo B.

A colocação destas questões no início da 2ª sessão permitiu uma maior compreensão para compor a análise de dados efetuada *a posteriori*, assim como viabilizou uma retomada dos encaminhamentos feitos pelos próprios alunos, através da reflexão das respostas por eles obtidas na 1ª sessão.

Institucionalização

No desenvolvimento da 2ª sessão, retomei com os alunos alguns aspectos da 1ª sessão, observando em suas produções indícios que pudessem promover a reflexão acerca dos caminhos e resultados obtidos na sessão anterior, assim possibilitando abertura para a busca de novas estratégias por parte deles.

Assim, fiz as seguintes questões aos alunos, como provocação, de modo que respondessem ao que fizeram.

1- Quais são os pontos em comum e/ou divergência nas situações apresentadas?

As respostas dos alunos indicaram percepção que as situações solicitavam descobrir as possibilidades de aquisição de objetos da vida cotidiana. Quanto às divergências, nada responderam.

2- Observando as resoluções das situações-problema da sessão anterior, existe somente uma solução para cada atividade?

As alunas do grupo G_1 foram categóricas no seu posicionamento, apontando que existia mais de uma solução, lembrando alguns enunciados e relacionando algumas das soluções encontradas. Porém, os alunos do grupo G_2 não se posicionaram ao escutar os argumentos das outras duas duplas.

3- É possível antever a não existência de solução para um problema?

Não souberam responder e ficaram curiosos, me retornando a questão, devido ao fato de não terem encontrado resultados para o problema dos CDs e dos DVDs.

4- Quais estratégias utilizaram?

Tiveram dificuldades em expressar e descrever a estratégia abordada nos problemas, mas mencionaram que utilizaram lógica e cálculos. Perguntei, em seguida, se haviam utilizado alguma propriedade dos números, questão ao qual não souberam responder. A seguir, indaguei se acreditavam que seria possível existir(em) outra(s) estratégia(s). Alguns alunos acenaram positivamente, acreditando que poderia haver tal possibilidade.

A provocação inicial visou propiciar aos alunos uma oportunidade de releitura das produções deles na sessão anterior, ao questionar se uma equação pode possuir mais de uma ou nenhuma solução, assim como na percepção da limitação do método da tentativa e erro na resolução de situações-problema envolvendo equações diofantinas lineares.

Análise a Priori

Ampliando os objetivos da 1ª sessão, a 2ª sessão visou desenvolver condições de provocar no aluno a percepção e a utilização dos múltiplos ou divisores como estratégia preferencial e vantajosa para a busca de soluções inteiras, em relação à estratégia da tentativa e erro.

A 2ª sessão utilizou um jogo entre dois grupos, denominado STOP⁴³, sub-dividido em três etapas:

ETAPA 1: Jogo das Compras na Quitanda - Atividade 4.

ETAPA 2: Jogo dos Saques no Caixa Eletrônico - Atividades 5, 6, 7 e 8.

ETAPA 3: Dinarlândia - Atividades 9 e 10.

Convidamos vocês a participarem de um jogo. As regras do jogo são as seguintes:

- O jogo transcorre em três etapas, correspondentes a três situações:

AS COMPRAS NA QUITANDA; OS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO e DINARLÂNDIA, cujos enunciados se encontram logo mais abaixo.

- O jogo será disputado entre dois grupos.
- As respostas serão assinaladas em caneta de tinta preta ou azul.
- Cada grupo deverá ler e interpretar os enunciados das situações-problema, registrando os resultados encontrados nas folhas recebidas.
- Ao final do jogo, cada grupo se encarregará de verificar os resultados do grupo adversário, registrando a pontuação no espaço reservado, dispondo de um minuto para tal tarefa.

Cada etapa será encerrada em uma de duas condições possíveis:

- 1- Até o tempo limite, que está indicado em cada etapa ou sub-etapa ou
- 2- Quando o grupo disser a palavra de comando 'STOP', correspondendo a afirmação que encontrou todas as respostas. Em tal situação, o grupo adversário deverá prosseguir até se encerrar o tempo limite ou quando também disser a palavra 'STOP'.

Contagem dos pontos:

- RESPOSTA CORRETA: Cada resposta certa corresponde a 2 pontos ganhos.
- RESPOSTA ERRADA: Cada resposta errônea implica em desconto de 1 ponto.
- PONTO EXTRA: A percepção de falta de uma resposta correta do grupo adversário implica no ganho de 1 ponto, desde que seja registrada na folha da dupla adversária com caneta de tinta vermelha.
- PONTO POR ANTECIPAÇÃO: A dupla que antecipar sua participação dizendo 'STOP', terá o adicional de 1 ponto para cada 0,5 minuto de antecipação, desde que acerte TODAS as respostas.

A contabilização dos pontos poderá resultar positiva, nula ou negativa em cada etapa a ao final do jogo.

Vence o grupo que obtiver maior número de pontos, após todas as etapas.

'O Jogo do Stop'

⁴³ A palavra de comando 'STOP' foi emprestada de um conhecido jogo popular de mesmo nome. Ver anexo A.

ETAPA 1 – Atividade 4: O JOGO DAS COMPRAS NA QUITANDA⁴⁴

O Jogo das Compras na Quitanda visou desenvolver condições de provocar no aluno a percepção dos múltiplos ou divisores como estratégia facilitadora para a busca de soluções, a partir do uso da estratégia de tentativa e erro.

As variáveis didáticas são:

- os preços das frutas - mamão e melão - que podem ser adquiridas na quitanda, sendo de fácil manuseio em cálculos e na determinação de seus múltiplos;
- o valor limite de R\$ 18,00 levado pela dona-de-casa às compras, que facilita os cálculos e possibilita abertura para a utilização de propriedades dos números inteiros;
- o número de soluções previstas: dezesseis possibilidades para as compras.

Cada dupla está recebendo um jogo de CARTAS AZUIS⁴⁵.

Os números indicados nas cartas representam os possíveis valores, em Reais, a serem gastos na situação abaixo.

Enunciado:

Uma dona-de-casa leva uma quantia de R\$ 18,00 para uma quitanda, a fim de comprar melão *ou* mamão, pelos preços unitários de R\$ 2,00 e R\$ 3,00, respectivamente.

Não desejando gastar os R\$ 18,00 para estas compras, quais os valores que a dona-de-casa poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco?

Para indicar as respostas, circule na tabela abaixo os números que correspondem aos possíveis valores para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco.

A seguir sobreponha com as cartas azuis os valores circulados.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |

Indique, se houver, em ordem crescente, os valores que ela NÃO poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco.

Atividade 4 - O Jogo das Compras na Quitanda

As possíveis estratégias previstas, indicadas por E_i , com $i = 1, 2$, dispostas em ordem decrescente de probabilidade de ocorrência, são:

E_1 : O sujeito utiliza elementos da Teoria Elementar dos Números (divisor, múltiplo, tabuada), obtendo os dezesseis valores de compra.

As seqüências facilitadoras seriam: (2,4,6,8,10,12,14,16), (3,6,9,12,15,18), (5,10,15) e (7,14). Os gastos de R\$ 11,00, R\$ 13,00 e R\$ 17,00 deveriam ser testados um-a-um, pois seus múltiplos estão fora do domínio deste problema.

E_2 : Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca das soluções descritas em E_1 , utilizando cálculos numéricos mentais ou explícitos.

⁴⁴ Situação-problema adaptada de Albuquerque, 1986, p. 7. Ver atividade 4, no anexo A.

⁴⁵ A intenção de sobrepor as cartas azuis nos resultados foi proporcionar aos alunos visualização dos resultados e possibilidades dos valores de compra que poderiam (e que não poderiam) efetuar.

ETAPA 2: O JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO⁴⁶

O jogo dos saques no caixa eletrônico foi desenvolvido nas atividades 5 a 8.

Atividade 5

Esta atividade objetivou que o aluno percebesse a vantagem na utilização dos múltiplos ou divisores como ferramenta facilitadora para a busca de soluções inteiras, reforçando o abandono gradual do método da tentativa e erro.

As variáveis didáticas são:

- o valor limite do saque (R\$ 61,00), que permite cálculos rápidos para a determinação das soluções, assim como possibilita ao aluno formular hipóteses;
- a relação entre os valores das cédulas disponíveis no caixa eletrônico e o valor do saque em Reais, expressa pelo m.d.c. $(5, 10) = 5$, que possibilita ao aluno a percepção do múltiplo de cinco como ferramenta facilitadora para a resolução da situação-problema;
- o número de soluções previstas: doze possíveis valores de saques;
- a representação das respostas em forma de tabela, que permite ao aluno organizar as respostas, visualizar as soluções e elaborar conjecturas.

Esta atividade considerou a seguinte situação:

Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques. Suponha que todos os caixas possuam suficientes cédulas para emissão.

a) Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R\$ 5,00 ou R\$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R\$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Marque (com X) na tabela abaixo todos os possíveis saques que poderiam ser realizados pelo usuário. Explique seu raciocínio.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |

Atividade 5 - O Jogo dos saques no caixa eletrônico

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2$, são:

E_1 : Utilização de propriedades dos múltiplos ou divisores, obtendo doze soluções, representados na seqüência (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60).

E_2 : Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca das doze soluções, utilizando cálculos numéricos mentais ou explícitos.

Esperava-se que, com as vivências das situações anteriores, os alunos utilizassem os múltiplos ou divisores como ferramenta, não necessitando testar um-a-um os valores.

⁴⁶ Adaptado de questão do vestibular da 1ª fase da Fuvest/1990. Ver atividades 5, 6, 7 e 8, no anexo A.

Atividade 6

Esta atividade objetivou a utilização dos múltiplos ou divisores como estratégia preferencial em relação a tentativa e erro, através de tomada de decisão dos alunos quanto as possíveis maneiras de emissão das cédulas frente a um saque pré-fixado.

As variáveis didáticas são:

- o valor total do saque (R\$ 145,00), que permite cálculos mentais;
- os valores das cédulas que o caixa eletrônico pode emitir (R\$ 5,00; R\$ 10,00, R\$ 20,00 e R\$ 50,00), números de fácil manuseio em cálculos;
- a relação entre o valor de saque e os valores das cédulas, que pode favorecer a utilização e a formação de conjectura do múltiplo como ferramenta facilitadora;
- a combinação das possíveis cédulas, perfazendo seis possibilidades;
- o número de soluções previstas: duas soluções, sintetizadas em ser possível efetuar o saque (m.d.c. igual a 5) ou não efetuar o saque (m.d.c. igual a 10);
- a representação das respostas em forma de tabela, propiciando a visualização dos resultados para o favorecimento de conjecturas.

Esta atividade considerou a seguinte situação:

b) Um segundo usuário entra no banco e deseja sacar R\$ 145,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R\$ 5,00, R\$ 10,00, R\$ 20,00 ou R\$ 50,00.

Preencha a 2ª coluna da tabela abaixo, indicando uma das duas possíveis respostas:

- SIM (SIM, é possível efetuar tal saque com as notas indicadas) ou
- NÃO (NÃO é possível efetuar tal saque com as notas indicadas).

Se for possível realizar o saque, escreva na 3ª coluna uma das possíveis maneiras de serem emitidas as notas para o pagamento dos R\$ 145,00.

| Notas emitidas pelo caixa eletrônico | É possível ? (Sim ou Não) ⁴⁷ | Escreva uma maneira, se possível. |
|--------------------------------------|--|-----------------------------------|
| R\$ 5,00 e R\$ 10,00 | | |
| R\$ 5,00 e R\$ 20,00 | | |
| R\$ 5,00 e R\$ 50,00 | | |
| R\$ 10,00 e R\$ 20,00 | | |
| R\$ 10,00 e R\$ 50,00 | | |
| R\$ 20,00 e R\$ 50,00 | | |

Justifique abaixo a escolha do **NÃO**⁴⁸ para a 2ª coluna:

Atividade 6 - O Jogo dos saques no caixa eletrônico

⁴⁷ Observo que a ordem de preenchimento das colunas foi escolhida de modo a favorecer a decisão da possibilidade ou não do saque utilizando propriedades da Teoria dos Números, através do preenchimento da 1ª coluna, sem a necessidade da obtenção das soluções através da utilização da tentativa e erro. Assim, o posicionamento da segunda coluna visou somente uma ilustração de uma das várias possibilidades.

⁴⁸ A intenção era que os alunos percebessem e explicitassem os múltiplos ou divisores dos valores dados nos enunciados como estratégia vantajosa em relação ao método da tentativa e erro, conforme o objetivo proposto.

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2$, são:

E_1 : A utilização dos múltiplos como ferramenta facilitadora para encontrar as soluções.

E_2 : Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca de possíveis soluções, utilizando cálculos mentais ou explícitos.

Atividade 7

Esta atividade objetivou que o aluno utilizasse preferencialmente os múltiplos ou divisores como estratégia de resolução, pela previsão dos possíveis valores de saques no caixa eletrônico.

As variáveis didáticas são:

- a utilização do valor limite de R\$ 50,00 para o saque permite cálculos mentais, favorecendo ao aluno a utilização do múltiplo ou divisor como ferramenta;

- a combinação das possíveis cédulas, perfazendo quatro possibilidades;

- os valores das cédulas que o caixa eletrônico pode emitir (R\$ 2,00, R\$ 5,00; R\$ 10,00, R\$ 20,00 e R\$ 50,00), permitindo três possibilidades de m.d.c.;

$$\text{m.d.c. } (5,10) = 5 \quad \text{m.d.c. } (10,20) = \text{m.d.c. } (20,50) = 10 \quad \text{m.d.c. } (2,10) = 2$$

- o número de soluções previstas e variáveis de acordo com as cédulas emitidas nos caixas eletrônicos: dez soluções para o caixa 1, cinco soluções para o caixa 2, três soluções para o caixa 3 e vinte e cinco soluções para o caixa especial;

- a representação das respostas em forma de tabela, que permite ao aluno organizar as respostas, para o favorecimento de conjecturas.

Esta atividade considerou a seguinte situação:

c) Uma determinada agência deste banco oferece um serviço de caixa eletrônico com opções específicas, conforme se vê na tabela abaixo.

| Caixa eletrônico | Cédulas emitidas |
|------------------|------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 |
| Caixa 2 | 10 e 20 |
| Caixa 3 | 20 e 50 |
| Caixa Especial | 2 e 10 |

Escreva, na tabela abaixo, quais os possíveis valores dos saques para cada caixa, até a quantia máxima de R\$ 50,00.

| | Cédulas emitidas | Saques permitidos |
|----------------|------------------|-------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 | |
| Caixa 2 | 10 e 20 | |
| Caixa 3 | 20 e 50 | |
| Caixa Especial | 2 e 10 | |

Atividade 7 - O Jogo dos saques no caixa eletrônico

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2$, são:

E_1 : A utilização dos múltiplos como ferramenta facilitadora para encontrar as soluções.

E_2 : Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca de possíveis soluções, utilizando cálculos mentais ou explícitos.

Atividade 8

Esta atividade objetivou que o aluno utilizasse o múltiplo ou divisor como estratégia preferencial para a tomada de decisão em relação à possibilidade de saque solicitado⁴⁹, assim como estabelecesse relações entre as cédulas emitidas e o valor do saque.

Assim, as variáveis didáticas são:

- os valores das cédulas, representados por R\$ 2,00, R\$ 5,00, R\$ 10,00, R\$ 20,00 e R\$ 50,00, que permitem cálculos mentais e com m.d.c. entre eles igual a 2, 5 ou 10;
- o valor do saque, que reforça a busca de uma estratégia mais eficiente;
- a combinação das possíveis cédulas, perfazendo quatro possibilidades;
- o número de soluções possíveis e previstas: duas soluções possíveis, de modo a verificar se é possível efetuar ou não é possível efetuar o saque de R\$ 1060,00;
- a representação em forma de tabela, de modo a organizar as respostas, permite ao aluno a elaboração de conjecturas.

Esta atividade considerou a seguinte situação:

d) Um terceiro cliente entra na agência com serviço de caixa eletrônico específico, indicado na tabela abaixo. Ele deseja fazer um saque de R\$ 1060,00. Indique na 3ª coluna, escrevendo SIM ou NÃO, qual (is) o(s) caixa(s) eletrônico(s) do banco que permite(m) tal saque. Justifique.

| Caixa eletrônico | Cédulas emitidas | Saque de R\$ 1060,00 |
|------------------|------------------|----------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 | |
| Caixa 2 | 10 e 20 | |
| Caixa 3 | 20 e 50 | |
| Caixa Especial | 2 e 10 | |

Justificativa⁵⁰

Atividade 8 - O Jogo dos saques no caixa eletrônico

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3$, são:

E_1 : A utilização de propriedades dos múltiplos como ferramenta facilitadora para encontrar as soluções.

E_2 : Por tentativa e erro, o sujeito ensaia várias possibilidades, utilizando cálculos mentais ou explícitos.

E_3 : A percepção do m.d.c. entre os valores das cédulas emitidas e sua relação com o valor do saque como fator determinante da solução.

⁴⁹ Isto se viabilizou pela mudança da variável de comando representada pelo aumento na ordem de grandeza do valor pré-fixado do saque, que pretendia impedir o uso da tentativa e erro pelo aluno.

⁵⁰ A solicitação de justificativa visou conhecer os argumentos dos alunos para o reconhecimento da estratégia e para a fomentação de conjecturas das propriedades dos números, agilizando e permitindo a busca de solução.

ETAPA 3: DINARLÂNDIA⁵¹

A Dinarlândia, subdividida em duas partes, foi desenvolvida nas atividades 9 e 10.

Atividade 9

Esta atividade visou que o aluno utilizasse a paridade, o múltiplo ou o divisor como estratégia preferencial para a tomada de decisão em relação a possibilidade de solução, assim como favorecesse o levantamento de conjecturas envolvendo a relação entre os valores das cédulas deste 'reinado' e as possíveis operações monetárias do dia-a-dia.

As variáveis didáticas são:

- as cédulas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 dinares, anteriores ao decreto do rei;
- as novas cédulas de 4 e 6 dinares, estabelecidas por decreto-lei, números pares, que impossibilitam o pagamento de quantias ímpares;
- a escolha de situação-problema desafiadora, que permite ao aluno interpretar os dados relevantes, expor e ouvir os argumentos dos adversários, para a tomada de decisão. Para o aluno perceber quais valores não podem ser pagos deverá encontrar contra-exemplos que mostrem que a medida é imprópria, seja através da reflexão sobre propriedades das operações com números inteiros, seja através de cálculos;
- a situação hipotética do enunciado em relação às duas cédulas, pois em geral um país não apresenta esta quantidade de cédulas para as transações comerciais;

A situação-problema Dinarlândia, parte (a), considerou o seguinte texto:

Em um reinado distante, de regime monarquista parlamentarista, existem cédulas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 dinares⁵², que permitem pagar e receber troco nas transações monetárias mais usuais (em dinares).

O rei, excêntrico por natureza, resolveu, por decreto, extinguir as cédulas existentes, retirando-as de circulação. Então, instituiu operações de pagar e receber troco, somente com novas cédulas de 4 e 6 dinares.

a) O primeiro-ministro argumenta com o rei que a utilização de cédulas de 4 e 6 dinares é matematicamente imprópria. Cada grupo deve escrever uma declaração, embasada em algum argumento, de preferência matemático, mostrando se o grupo concorda ou discorda do primeiro-ministro.

Argumento:

A seguir, cada grupo deverá expor seu argumento ao adversário. Terminada a exposição, cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento do adversário:

() Argumento correto ou () Argumento incorreto

Se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo.

Atividade 9 – Dinarlândia – parte 1

⁵¹ Ver atividades 9 e 10, no anexo A.

⁵² A palavra 'dinar' é derivada do denário, uma moeda romana, sendo atualmente a moeda nacional de vários países pertencentes ao extinto Império Otomano. Utilizei esta denominação como homenagem ao escritor brasileiro Malba Tahan, que a utilizou em seu livro 'O Homem que calculava', onde apresenta dois problemas envolvendo implicitamente equações diofantinas: as três divisões de Beremiz e o problema dos 21 vasos.

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2$, são:

E_1 : A utilização da propriedade de paridade ou múltiplo de 2 como ferramenta facilitadora.

E_2 : Por tentativa e erro, o aluno ensaia várias possibilidades, para a busca de possíveis valores de pagamento, utilizando cálculos mentais ou explícitos.

Nesta 1ª parte ‘Dinarlândia’ foi solicitada a justificativa escrita seguida de exposição do argumento, permitindo ao aluno a exploração de conjecturas sobre as possíveis operações monetárias envolvendo as excêntricas novas cédulas propostas pelo rei.

A escolha destas cédulas permitiu que somente fossem efetuados pagamentos e transações comerciais envolvendo números pares, pois a adição ou subtração de dois pares resulta par, assim como qualquer combinação envolvendo os múltiplos destas cédulas.

Na situação-problema, ao questionar os valores destas cédulas através do primeiro-ministro, possibilitou-se ao aluno refletir sobre a quantidade mínima de cédulas que podem ser utilizadas por um país em operações bancárias de ‘dar’ e ‘receber’ troco.

Não cogitei valores com ordem de grandeza elevada para a formulação da situação-problema, pois em atividades cotidianas normalmente um indivíduo não transporta dinheiro em quantias elevadas.

Previ que alguns alunos concluiriam pela impossibilidade das cédulas propostas pelo rei, comprovando que o primeiro-ministro está certo.

Atividade 10

No desafio proposto, caberia aos alunos a busca das duas cédulas que permitisse efetuar todos os pagamentos, utilizando propriedades de paridade, múltiplos ou divisores como estratégia preferencial para a tomada de decisão.

Assim, as variáveis didáticas são:

- os valores das cédulas possíveis, menores que 7 dinares, que visa restringir os cálculos para facilitar as reflexões acerca das possíveis combinações;
- a escolha de uma situação hipotética, pois em geral um país não apresenta somente duas cédulas para as transações comerciais;
- a proposta de um desafio, que estimule nos alunos a reflexão para o levantamento de hipóteses, a tomada de decisão e o debate, utilizando propriedades dos números;
- a escolha de uma história, que propicie ao aluno uma situação fictícia e que o desvincule do usualmente estabelecido, possibilitando um repensar desta realidade;
- o número de soluções previstas para as quatro rodadas: quatro soluções.

A situação-problema Dinarlândia, parte 2, considerou o seguinte texto:

b) O rei, descontente com seu primeiro-ministro, mas não podendo demiti-lo por causa disso, resolve estabelecer um duelo a nível nacional para resolver a questão de quais deveriam ser as duas moedas nacionais, achando que este concurso o ajudaria a desacreditar o primeiro-ministro, comprovando o mérito de seu decreto.

O rei assim proclama:

“Hoje e somente hoje, abro inscrições para os súditos reais que desejam colaborar com o Tesouro Nacional. Será paga a quantia de cem mil dinares ao(s) súdito(s) que me mostrar(em) quais são as maneiras que podem ser estabelecidas as duas cédulas necessárias para dar ou receber qualquer quantia monetária em dinares. Ainda, dentre as várias maneiras, o(s) súdito(s) deverá(ão) argumentar qual seria a mais cabível dentre todas, de modo a promover o bem estar monetário da nação. A regra única é que as cédulas deverão ser números naturais menores que 7. A única exceção desta regra é a impossibilidade de emissão de cédula de 1 dinar”.

Como súdito cada grupo deverá procurar e achar a solução.

Atividade 10 – Dinarlândia – parte 2

As possíveis estratégias de solução, indicadas por E_i , com $i = 1, 2$, são:

E_1 : A utilização de propriedades dos números inteiros.

E_2 : Por tentativa e erro, o aluno ensaia várias possibilidades, para a busca de possíveis soluções utilizando cálculos mentais ou explícitos.

Inicialmente, os alunos deverão decidir quais combinações de cédulas podem ser utilizadas:

- ambas pares: que não resulta em pagamento de quantias ímpares;
- uma par e a outra ímpar, ou ambas ímpares, que permitem pagar em dinheiro qualquer quantia.

As combinações possíveis de notas (em dinares) são: 2 e 3; 2 e 5; 3 e 5; 4 e 5. Para decidir qual das combinações é a melhor, não conheço um critério matemático que justifique decidir tal questão.

A parte 2 da Dinarlândia, propiciou ao aluno oportunidade de reflexão de um contexto muito familiar – as cédulas que são utilizadas em operações monetárias diárias – permitindo o desenvolvimento de operações de pensamento como opinar, debater e questionar sobre as ‘escolhas’ de pessoas ou organismos que regulamentam a emissão de cédulas numa nação.

Acredito que as ponderações apresentadas se constituem em contribuição ligada às escolhas e possibilidades de aquisição de produtos, referenciais propícios à educação do consumidor, ligado ao estatuto da formação da cidadania.

Descrição e Análise a Posteriori Local

Esta sessão ocorreu no sábado, dia 11 de novembro de 2006, sendo utilizada a mesma sala da sessão anterior, já previamente preparada para a formação de dois grupos para a realização do jogo do 'STOP'.

Compareceram seis dos sete alunos que participaram da 1ª sessão. Deste modo, formei dois grupos, que denominei G_1 e G_2 , para manter a mesma nomenclatura da sessão anterior, durante todas as atividades da 2ª sessão.

| | Bárbara | Camila | Dora | Eva | Fernando | Gerson |
|---------------|----------------------|---------------|-------------|----------------------|-----------------|---------------|
| Séries | 3ª | 3ª | 3ª | 1ª | 1ª | 1ª |
| Grupo | G₁ | | | G₂ | | |

Descrição dos agrupamentos dos alunos na 2ª sessão

Após agradecer a presença de todos, retomei alguns combinados em relação a aspectos organizacionais da 1ª sessão, antes do início das atividades da 2ª sessão⁵³.

Assim, devido à institucionalização, o início da etapa de experimentação da 2ª sessão ocorreu por volta das 9h 20min e se encerrou às 10h, completando 60 minutos.

Ao se iniciarem as atividades, entreguei para cada grupo a folha contendo as regras do 'JOGO DO STOP', permanecendo com os grupos durante toda a 2ª sessão, para consulta ou releitura das mesmas. Foi previsto o tempo de cinco minutos para leitura, reflexão e discussão das regras.

Como os dois grupos estavam sentados 'frente a frente' para a realização das etapas, ocorreu a leitura ininterrupta do texto das regras, em voz alta, por um voluntário, com silêncio dos demais sujeitos da pesquisa.

Foi utilizado um gravador MP3 para cada grupo. Os registros sonoros do grupo G_2 não se efetivaram, por problema técnico.

⁵³ Relembrei algumas regras básicas, visto que na 1ª sessão, as duplas D_1 e D_2 utilizaram folhas que trouxeram por conta própria, apesar do combinado que o fornecimento de material seria de responsabilidade do pesquisador. Também os relembrei da necessária leitura cuidadosa dos enunciados.

Descrição da Atividade 4: 'As Compras da Quitanda'

Após a leitura das regras, o pesquisador entregou a cada grupo uma folha contendo a atividade 'As Compras da Quitanda', assim como um jogo de 17 cartas azuis, numeradas de 1 a 17.

Os dois grupos argumentaram e registraram suas respostas, tendo ambos utilizado o tempo limite de quatro minutos para resolução da atividade.

No quadro abaixo sintetizo as resoluções dos dois grupos.

| | Seqüência de valores que podem ser usados | Valores que 'não' podem ser usados |
|----------------------------|---|------------------------------------|
| Grupo G₁ | 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 | 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 |
| Grupo G₂ | 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 | 1 |

Resultados obtidos na atividade 4 pelos grupos G₁ e G₂

Análise a posteriori local da Atividade 4

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os sujeitos de pesquisa utilizassem os múltiplos ou divisores como estratégia facilitadora para a busca de soluções, a partir do uso da estratégia de tentativa e erro.

O grupo G₁ rapidamente se mobilizou para a utilização do múltiplo de um número inteiro como estratégia facilitadora para a busca das soluções, conforme se observa na transcrição das alunas do grupo G₁, no início do jogo, ainda durante uma primeira leitura das regras:

G₁: Eu entendi que a dona-de-casa quer comprar ou um, ou outro, com até R\$ 18,00. Então, se ela comprar, por exemplo, somente melão, então poderá gastar 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 Reais.

Também, notei o entendimento do conectivo 'ou' no sentido matemático do 'ou exclusivo', o que provocou uma série de discussões entre as componentes do grupo.

G₁: Mas ela pode comprar somente um tipo de fruta.

G₁: Mas não pode combiná-las.

Uma das alunas discordou dessa posição, realizando cálculos mentais e o múltiplo como ferramenta para a busca das soluções, utilizando principalmente a estratégia E₁, conforme se observa na transcrição abaixo:

G₁: É possível gastar R\$ 2,00, R\$ 3,00, R\$ 4,00, R\$ 5,00. (...) É possível também gastar R\$ 8,00, pois é possível por 2. Ainda, a dona-de-casa pode gastar R\$ 9,00, comprando 3 mamões e ainda sobrar troco. Também é possível gastar R\$ 12,00, pois é possível por 2. Por último, é possível gastar R\$ 14,00 e R\$ 15,00.

G₁: São somente estas respostas. STOP.

Neste ponto, uma das alunas apontou: *'observem o ou em destaque, prestem atenção'*. Ressurgiram as discussões sobre o uso deste conectivo, mesmo após o grupo dizer 'STOP'. Decidi não interromper a discussão e desconsiderei o uso da palavra de comando 'STOP'.

Ao final das discussões acabou prevalecendo a posição do 'ou exclusivo', com as alunas optando por marcar somente os resultados referentes às compras das diversas quantias de melão, até o gasto máximo indicado na síntese delineada acima.

Assim sendo, o grupo G_1 apresentou dificuldade na busca de todas as soluções desta atividade, devido principalmente à concepção do 'ou exclusivo', próximo à utilização deste conectivo no cotidiano, diferindo do significado matemático.

Ainda, o grupo G_1 respondeu coerentemente a questão para indicar os resultados que a dona-de-casa 'não' poderia utilizar para fazer as compras, ao representar e justificar os resultados faltantes da seqüência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

De modo geral, o grupo G_1 atingiu o objetivo através do uso da estratégia E_1 , operacionalizando o conceito de múltiplo como ferramenta para a busca das soluções inteiras.

O grupo G_2 fez uso de cálculos numéricos através do método da tentativa e erro, representados pela estratégia E_1 , não conseguiu escrever todas as soluções. Estas constatações podem ser verificadas na transcrição dos alunos descrita abaixo:

G_2 : Adquirindo 2 mamões, custa R\$ 6,00, sobrando R\$ 12,00. (...) Também, é possível comprar 3 mamões e 2 melões, gastando R\$ 13,00.
 G_2 : É possível comprar 3 melões, resultando R\$ 6,00.
 G_2 : Com R\$ 15,00 também é possível.
 G_2 : Sim, comprando 3 mamões e 3 melões.
 G_2 : Também, é possível comprar 4 mamões e 1 melão, gastando R\$ 14,00.
 G_2 : É possível gastar R\$ 16,00, pois basta tomar vários mamões.
 G_2 : Há vários modos de se fazer. **Não vai ser possível comprar com R\$ 1,00.** [grifo meu]

Há um único indício do uso do múltiplo, na penúltima fala do grupo, porém não houve a exploração desta estratégia para a determinação das soluções deste problema. Quanto a indicação dos resultados que a dona-de-casa 'não' poderia utilizar, o grupo G_2 acertou o valor de R\$ 1,00, conforme explicitado na última fala do grupo, representando indício de identificação pelo grupo G_2 que havia várias possibilidades de compra. O fato do grupo não tê-las escrito na íntegra provavelmente se deve ao caráter limitador pela utilização da estratégia da tentativa e erro.

Assim, o grupo G_2 não alcançou o objetivo, pela insistência da tentativa e erro como estratégia principal de resolução.

Etapa 2: O Jogo dos Saques no Caixa Eletrônico

A Etapa 2 estava subdividida em quatro etapas, correspondentes as atividades 5 a 8, que foram entregues e recolhidas seqüencialmente, contendo cada qual os enunciados e os espaços para resolução.

Neste caso, houve a leitura do texto do ‘Jogo dos Saques no Caixa Eletrônico’ por cada grupo, de modo independente. Saliento nesta etapa um maior uso do comando ‘STOP’ em relação às outras duas etapas.

Descrição da Atividade 5

Sintetizo a seguir as respostas dos grupos G_1 e G_2 .

| | Seqüência de valores de possíveis saques | Justificativa |
|-------------------------------|---|---|
| Grupo G_1 | (5, 20, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60) | Todos os números divisíveis por 5 até o 60. |
| Grupo G_2 | (5, 20, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60) | Todos os números divisíveis por 5 |

Resultados obtidos na atividade 5 pelos grupos G_1 e G_2

Os dois grupos utilizaram a palavra de comando ‘STOP’, resolvendo a questão em pouco menos de 3 minutos.

Análise a posteriori local da Atividade 5

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os sujeitos de pesquisa percebessem a vantagem na utilização dos múltiplos ou divisores como ferramenta facilitadora para a busca de soluções inteiras, reforçando o abandono gradual do método da tentativa e erro.

Pela observação das manifestações escritas, os dois grupos atingiram rapidamente o objetivo, realizando inicialmente cálculos numéricos e, na maior parte do tempo, utilizando explicitamente o conceito de divisor, caracterizando-se a utilização da estratégia E_1 . Ilustrei tal fato em fala do grupo G_1 .

G_1 : São possíveis saques com os números que são **divisíveis** por 5, até o 60.

G_1 : Todo número que termina em 0 e 5 é **divisível** por 5. Então, é possível utilizar os números da seqüência (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60). STOP. [grifo meu]

Podemos notar que o grupo G_1 explicitou o uso dos números divisíveis por 5. Deste modo, os dois grupos atingiram o objetivo, utilizando a estratégia E_2 , ao explicitar a relação entre os saques possíveis e o fato destes serem todos divisíveis por 5.

Descrição da Atividade 6

Os dois grupos rapidamente se mobilizaram na resolução desta situação-problema, conforme se observa no quadro síntese das respostas dos grupos G_1 e G_2 .

| | Grupo G_1 | Grupo G_2 |
|---|---|---|
| É possível o saque de R\$ 145,00 com as cédulas de: | R\$ 5,00 e R\$ 10,00 R\$ 5,00 e R\$ 20,00 R\$ 5,00 e R\$ 50,00 | R\$ 5,00 e R\$ 10,00 R\$ 5,00 e R\$ 20,00 R\$ 5,00 e R\$ 50,00 |
| 'Não' e possível o saque de R\$ 145,00 com as cédulas de: | R\$ 10,00 e R\$ 20,00 R\$ 10,00 e R\$ 50,00 R\$ 20,00 e R\$ 50,00 | R\$ 10,00 e R\$ 20,00 R\$ 10,00 e R\$ 50,00 R\$ 20,00 e R\$ 50,00 |
| Justificativa | Não, pois não há nota de R\$ 5,00 para a soma de R\$ 145,00. | Porque são números inteiros. |

Resultados obtidos na atividade 6 pelos grupos G_1 e G_2

Os dois grupos utilizaram a palavra de comando 'STOP', sendo manifestada verbalmente pelo grupo G_1 a apreciação por seu uso. Por último, o grupo G_1 realizou as atividades em cerca de quatro minutos e o grupo G_2 em cinco minutos.

Análise a posteriori local da Atividade 6

De acordo com a análise *a priori*, esperava-se que os sujeitos de pesquisa utilizassem os múltiplos ou divisores como estratégia preferencial em relação ao método da tentativa e erro, através de tomada de decisão quanto às possíveis maneiras de emissão das cédulas frente a um saque pré-fixado.

As manifestações revelam que os dois grupos rapidamente encontraram a solução. No grupo G_1 , observei que os alunos partiram de cálculos mentais, utilizando a estratégia da tentativa e erro, e, posteriormente, fazem relação dos valores das cédulas e a paridade, conforme se observa na transcrição abaixo.

G_1 : No caixa que libera cédulas R\$ 5,00 e R\$ 10,00 é possível sacar R\$ 145,00.

G_1 : Sim, é fácil até fazer os cálculos de cabeça. Se utilizarmos 14 cédulas de R\$ 10,00 mais uma cédula de R\$ 5,00, resulta R\$ 145,00.

G_1 : Com o caixa que emite cédulas de R\$ 10,00 e R\$ 20,00 não será possível o saque, pois R\$ 145,00 termina em cinco.

G_1 : Também não será possível sacar com o caixa que emite as cédulas de R\$ 10,00 e R\$ 50,00, pois neste caixa não tem cédulas com número ímpar.

G_1 : É exatamente, pois nestes caixas somente existem cédulas com números pares: cédulas de R\$ 10,00, R\$ 20,00 e o R\$ 50,00. STOP.

O grupo G_2 também encontra todas as soluções corretas. Em particular, este grupo fornece uma concepção particular para o termo 'inteiro'. Ao questionar os alunos, tiveram dificuldades em explicar a concepção do termo 'inteiro' como, por exemplo, na fala 'o número 10 seria o inteiro e 5 a metade' ou 'as cédulas de 10 e 20 Reais não cabem dentro de 145', denotando, em certo sentido, que eles operacionalizam o divisor de um número.

Assim, de modo geral, considerei que os dois grupos atingiram o objetivo, ao utilizar inicialmente o método da tentativa e erro (estratégia E_2), porém evoluindo para a operacionalização de conceitos da Teoria Elementar dos Números, como a paridade, o múltiplo e o divisor, para resolver o problema (estratégia E_1).

Descrição da Atividade 7

Os dois grupos tiveram dificuldades no entendimento desta situação-problema, que solicitava os possíveis valores dos saques para cada caixa, até a quantia máxima de R\$ 50,00. Ao invés disso, os dois grupos registram alguns modos de se efetuar o saque utilizando exatamente o valor de R\$ 50,00, conforme o quadro síntese abaixo.

| | Grupo G_1 | Grupo G_2 |
|----------------|--|--|
| Caixa 1 | 5 notas de R\$ 10,00 10 notas de R\$ 5,00 4 notas de R\$ 10,00 e 2 notas de R\$ 5,00 | 5 notas de R\$ 10,00 10 notas de R\$ 5,00 |
| Caixa 2 | 5 notas de R\$ 10,00 2 notas de R\$ 20,00 e 1 nota de R\$ 10,00 | 2 notas de R\$ 20,00 e 1 nota de R\$ 10,00 |
| Caixa 3 | 1 nota de R\$ 50,00 | 1 nota de R\$ 50,00 |
| Caixa Especial | 5 notas de R\$ 10,00 25 notas de R\$ 2,00 | 5 notas de R\$ 10,00 |

Resultados obtidos na atividade 7 pelos grupos G_1 e G_2

Análise a posteriori local da Atividade 7

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os alunos utilizassem preferencialmente os múltiplos ou divisores como estratégia de resolução, pela previsão dos possíveis valores de saques no caixa eletrônico.

Observei no grupo G_1 discussão quanto a interpretação da atividade. Uma das alunas argumentou que a situação solicitava para representar os possíveis saques até R\$ 50,00, sem necessidade de escrever os modos como isto poderia ser realizado. Porém, as outras alunas acreditavam que o problema solicitava descrever as várias possibilidades de saque com exatamente R\$ 50,00. As alunas não se entenderam e se desestimularam no entendimento da situação-problema, conforme se observa na transcrição abaixo.

G_1 : Então, eu posso usar menos de R\$ 50,00.

G_1 : Não, não é isso.

G_1 : Não é necessário demonstrar o valor, mas somente as possibilidades de saque. (...) É possível utilizar 4 cédulas de R\$ 10,00, sacando R\$ 40,00.

G_1 : Há várias possibilidades. Coloquem somente três delas, pois é suficiente.

G_1 : Pessoal, vocês não precisam colocar as várias opções. Quais os possíveis valores dos saques para cada caixa, até a quantia de R\$ 50,00?.

G_1 : Ah, deixa isso mesmo.

G_1 : Para que continuar? STOP.

Quanto ao grupo G_2 , não houve discussões sobre o entendimento do enunciado, porém registraram algumas possibilidades de saque utilizando exatamente R\$ 50,00, através do método da tentativa e erro.

Assim, os objetivos não foram atingidos pelos dois grupos, o que me levou a questionar qual o motivo deste posicionamento das alunas. Acredito que, em parte, isto poderia ter sido evitado tornando a questão do enunciado mais precisa.

Descrição da Atividade 8

Os dois grupos rapidamente se mobilizaram na resolução desta situação-problema, sem questionamentos. As respostas dos grupos estão representadas no quadro síntese abaixo.

| | Cédulas | Grupo G_1 | Grupo G_2 |
|---------------|---------|---------------------------------------|---|
| Caixa 1 | 5 e 10 | Sim | Sim |
| Caixa 2 | 10 e 20 | Sim | Sim |
| Caixa 3 | 20 e 50 | Sim | Sim |
| Caixa 4 | 2 e 10 | Sim | Sim |
| Justificativa | - | Sim, pois todos os números são pares. | Todos os números são inteiros, menos o 2. |

Resultados obtidos na atividade 8 pelos grupos G_1 e G_2

Os dois grupos fizeram uso da palavra de comando 'STOP'.

Análise a posteriori local da Atividade 8

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os alunos utilizassem os múltiplos ou divisores como estratégia preferencial para a tomada de decisão em relação à possibilidade de saque solicitado, assim como estabelecessem relações entre as cédulas emitidas e o valor do saque.

Os dois grupos resolveram corretamente o problema, determinando os caixas que podem emitir R\$ 1060,00, diferindo somente nas justificativas utilizadas.

O grupo G_1 relatou que existiam somente números pares, porém, não observaram que o número 5 é ímpar. Quanto ao grupo G_2 , este utilizou novamente a palavra 'inteiro', no sentido já mencionado anteriormente na atividade 6.

Os alunos alcançaram os objetivos propostos, ao operacionalizar o múltiplo como estratégia preferencial, assim como apresentaram indícios de perceber relação entre as cédulas dos quatro caixas eletrônicos e o valor a ser sacado.

Em síntese, as quatro atividades da ETAPA 2 possibilitaram aos sujeitos da pesquisa, implicitamente, vivenciarem algumas características das equações diofantinas lineares, pela operacionalização de estratégias envolvendo conceitos da Teoria Elementar dos Números, como a divisibilidade e a paridade, mostrando indícios de evolução a partir da estratégia da tentativa e erro. Assim, descobriram diversas soluções inteiras presentes nas situações-problema propostas.

Etapa 3: 'Dinarlândia'

A 'Dinarlândia' estava subdividida em duas partes, conforme representado nas atividades 9 e 10, no Anexo A.

Descrição da Atividade 9

Após a leitura por cada grupo, os alunos redigiram argumentação e puderam expô-la, de modo que o outro grupo pôde verificar a validade dos posicionamentos do oponente. As respostas dos grupos estão representadas no quadro síntese abaixo.

| | Grupo G₁ | Grupo G₂ |
|-----------|--|--|
| Posição | Concordam com o 1º ministro | Concordam com o 1º ministro |
| Argumento | São poucas as possibilidades de compra e venda de 4 e 6 dinares, por serem valores baixos. E quando custar 1 ou 5 dinares? | Não seria possível comprar algo mais barato e nem de 5 dinares |

Resultados obtidos na atividade 9 pelos grupos G₁ e G₂

Análise a posteriori local da Atividade 9

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os alunos utilizassem propriedades como paridade, múltiplos ou divisores como estratégia preferencial.

Nos grupos G₁ e G₂ ocorre a argumentação, através da busca de valores particulares de solução, utilizando implicitamente o conceito de paridade, de acordo com a estratégia E₁, conforme transcrição abaixo:

G₁: Não será possível comprar nada de R\$ 1,00, assim como com R\$ 5,00, mas será possível com 2, 4, 6, 8, 20 e 50 Reais.

Na exposição dos argumentos, os grupos se limitaram a repetir o que tinham escrito. Então, interferi, para propiciar reflexão, solicitando aos grupos que novamente explicassem o que haviam entendido. O grupo G₂ insistiu na releitura do que haviam escrito, porém, o grupo G₁ fez uma menção importante, ao explicitar que números como 5 ou 7 estariam impossibilitados por serem ímpares. Deste modo, o grupo G₁ atingiu o objetivo ao explicitar a paridade, de acordo com a estratégia E₂, enquanto que o grupo G₂ se limitou a exemplos particulares, através da tentativa e erro, não atingindo o objetivo.

Descrição da Atividade 10

Na 2ª parte, foi apresentado um desafio, que motivou poucos argumentos dos alunos e uma resposta rápida, sem aprofundamento ou maior discussão. As respostas dos grupos estão sintetizadas no quadro abaixo.

| Grupo G ₁ | Grupo G ₂ |
|---|---------------------------|
| 2, 3, 5, 7 dinares. Com essas notas eu posso negociar qualquer valor monetário | 2 e 6 não justificaram |

Resultados obtidos na atividade 10 pelos grupos G₁ e G₂

Os dois grupos não aproveitaram o tempo limite disponível de 10 minutos, encerrando as discussões com cerca de três minutos da atividade, através do uso do comando 'STOP'.

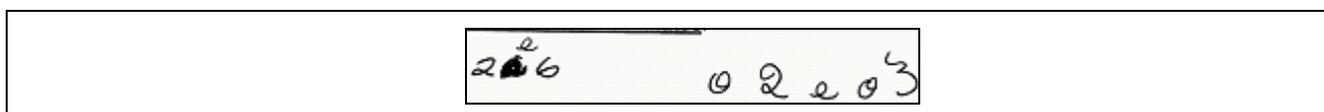
Análise a posteriori local da Atividade 10

De acordo com a análise *a priori*, esperava que os alunos utilizassem propriedades de paridade, múltiplos ou divisores como estratégia preferencial para a tomada de decisão.

O grupo G₁ não entendeu a atividade proposta, que solicitava as maneiras de se estabelecer duas cédulas, descrevendo quatro cédulas em operações de 'dar' e 'receber' troco, conforme mostra o quadro síntese.

No grupo G₂, após algumas discussões e utilizando cálculos mentais, os alunos escreveram como resposta as cédulas de R\$ 2,00 e R\$ 6,00. Assim, inicialmente o grupo G₂ não percebeu que a soma de dois pares é sempre par, conforme discutido na etapa de argumentação da 1ª parte, o que impossibilitaria a troca de valores monetários ímpares.

Após ter desligado os gravadores, quando estava prestes a recolher as produções dos grupos, os alunos espontaneamente iniciaram um debate muito intenso. O Grupo G₁ chegou a conclusão que as duas cédulas válidas são as de R\$ 2,00 e R\$ 3,00, argumentando que elas pagariam qualquer quantia em operações de 'dar' e 'receber' troco, devido ao fato de uma delas ser par e a outra ímpar. Ainda, o grupo pediu permissão para marcar os resultados deste debate extraordinário, o que foi permitido, logo após o registro das anotações já realizadas, indicado no protocolo 2 mostrado a seguir.



Protocolo 2- Correção efetuada pelo grupo G₁ relativo ao resultado do G₂, na 2ª parte da da Dinarlândia

Porém, não comentaram sobre as outras possíveis combinações, como as cédulas de R\$ 2,00 e R\$ 5,00, de R\$ 4,00 e R\$ 5,00, de paridade distinta, nem as cédulas de R\$ 3,00 e R\$ 5,00, com mesma paridade.

Então, considerando-se estas deliberações finais, o grupo G_1 atingiu o objetivo ao explicitar o conceito de paridade de forma operacional para a resolução da atividade 10. Porém, o grupo G_2 não conseguiu tal meta, devido à insistência na utilização exclusiva da estratégia da tentativa e erro, através de valores numéricos particulares.

A tabela abaixo mostra os tempos previstos e os tempos utilizados na 2ª sessão.

| 2ª sessão | | Atividade | | | | | | | | Debate | Total |
|----------------|-------|---------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | | Institucionalização | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| Tempo previsto | | 20 min | 4 min | 3 min | 8 min | 5 min | 4 min | 4 min | 10 min | - | 58 min |
| Tempo real | G_1 | 20 min | 10 min | 3 min | 4 min | 3 min | 2 min | 4 min | 5 min | 8 min | 59 min |
| | G_2 | 20 min | 10 min | 3 min | 5 min | 4 min | 2 min | 4 min | 3 min | 8 min | 59 min |

Finalizaram-se as atividades desenvolvidas na 2ª sessão dentro do prazo de 60 minutos, caracterizando-se mais a resolução de situações-problema do que a realização de jogos.

Após as resoluções das situações-problema, devolvi as folhas contendo as atividades da 2ª sessão. A seguir, houve discussão das regras relativas a contagem dos pontos, que não foram bem compreendidas pelos sujeitos da pesquisa, gerando polêmica, principalmente na questão da pontuação extra. Até o procedimento de correção foi alvo de discussão entre os alunos, mas foi entendido, conforme se observa na transcrição abaixo.

G_2 : São eles que vão corrigir, depois das três etapas terem sido realizadas. Assim, cada grupo vai corrigir o do outro, entendeu? Que nem foi feito na 1ª sessão. Nós corrigimos as respostas deles, e eles corrigem as nossas.

Análise a Posteriori da 2ª sessão

A 2ª sessão objetivou desenvolver condições de provocar no aluno a percepção e a utilização dos múltiplos ou divisores como estratégia preferencial e vantajosa, em relação à estratégia da tentativa e erro, para a busca de soluções inteiras em situações-problema envolvendo as equações diofantinas lineares.

O quadro abaixo sintetiza as constatações com relação às manifestações escritas ou orais dos sujeitos de pesquisa em relação às atividades propostas na 2ª sessão. Assim, nas três atividades da 2ª sessão, pude observar que os alunos:

| Atividade | 2ª sessão | Grupo G ₁ | Grupo G ₂ |
|-----------|--|----------------------|----------------------|
| 4 | utilizaram as grandezas discretas | X | X |
| | perceberam que havia mais de uma solução | X | X |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | - | X |
| | houve evolução para qual estratégia? | Múltiplos | - |
| 5, 6, 8 | utilizaram as grandezas discretas | X | X |
| | perceberam que havia mais de uma solução | X | X |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | - | - |
| | houve evolução para qual estratégia? | Múltiplos | Múltiplos |
| 7 | Problema: interpretação errada pelos dois grupos | | |
| 9 | utilizaram as grandezas discretas | X | X |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | - | - |
| | houve evolução para qual estratégia? | Múltiplos | Múltiplos |
| 10 | utilizaram as grandezas discretas | X | X |
| | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | - | X |
| | houve evolução para qual estratégia? | Paridade | - |

Em relação a 2ª sessão, o grupo G₁ manifestou adquirir conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, ao operacionalizar as soluções inteiras das situações-problema apresentadas e reconhecendo o papel da paridade e múltiplos como estratégia facilitadora na busca de soluções, fornecendo indícios de percepção da relação entre as quantidades monetárias fornecidas como fator fundamental para a existência de soluções.

Quanto ao grupo G₂, este ainda utiliza em alguns momentos a estratégia da tentativa e erro para iniciar a busca de soluções inteiras, porém em um segundo momento mostrou evolução, utilizando os múltiplos como estratégia de resolução. Porém, estes alunos não mostram indícios de relacionar as soluções com os valores monetários dos enunciados.

Em relação à 2ª sessão, as constatações delineadas permitiram concluir que os sujeitos de pesquisa alcançaram os objetivos, ao utilizar os múltiplos ou divisores como estratégia facilitadora para a busca das soluções inteiras nas situações-problema apresentadas, mostrando evolução da estratégia de resolução por parte dos alunos.

Quanto ao desempenho comparativo dos grupos, o grupo composto pelos alunos do 3º ano apresentou maior mobilização na utilização dos conceitos da Teoria Elementar dos Números como os múltiplos, divisores e paridade como ferramenta facilitadora para a obtenção das soluções inteiras, em relação ao grupo composto pelos alunos do 1º ano.

A diferença apresentada pode ser atribuída ao currículo de Ensino Médio, que desenvolve tópicos de Matemática Discreta – Seqüências, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Matrizes, Sistema Lineares, Probabilidades – a partir de meados da 1ª série, notando-se assim a falta que tais conteúdos acarretam em termos de exposição de estratégias envolvendo a resolução de situações-problema e que pareceu ter se concretizado nesta pesquisa, pelos indícios desta vantagem dos alunos de 3ª série em relação aos colegas de 1ª série.

Devo salientar que em algumas ocasiões da 2ª sessão os alunos utilizaram a palavra de comando ‘STOP’, mas a discussão continuou. A idéia do uso de tal recurso visava tornar a dinâmica mais desafiante, o que me pareceu ter ocorrido no jogo. Assim, não interrompi este procedimento, pois era nítido o envolvimento favorável dos alunos na resolução dos problemas. Também, o uso da palavra de comando ‘STOP’ tornou-se mais freqüente que o uso do tempo limite, de certo modo evidenciando assim, o envolvimento no jogo e a concentração dos alunos na busca das soluções das situações-problema.

Com relação a utilização dos jogos como fonte de motivação, as considerações delineadas revelam indícios de favorecimento para a devolução das situações, a ação e a formulação, conforme Brousseau (1996 a,b), proporcionando condições para a interpretação e busca de soluções inteiras, com a ressalva das dificuldades expostas na etapa de verificação dos resultados. Também, as respostas favoráveis na grande maioria dos problemas mostram indícios que os contextos utilizados contribuíram para a interpretação e ação na busca de soluções dos alunos.

Com relação a contagem e a distribuição de pontos, ponderei dois fatores que desencadearam a não compreensão dos alunos. Primeiramente, os alunos não possuindo vivência neste tipo de recurso, necessitariam de um preparo prévio que permitiria viabilizar sua utilidade na pesquisa. Também, há necessidade de re-elaboração do texto referente à contagem de pontos para torná-lo mais claro, talvez diminuindo os critérios para dois: resposta correta e resposta incorreta. Acredito que a inviabilização de tal estratégia não alterou a disposição dos alunos na resolução dos problemas, porém poderia ser repensada em futuras aplicações.

3ª sessão

As atividades desenvolvidas na 3ª sessão constaram de três momentos: uma institucionalização inicial, seguida da etapa da experimentação, onde foram desenvolvidas as análises *a priori*, as descrições das sessões e as análises *a posteriori* e, por último, desenvolvida uma institucionalização para finalizar a sessão.

Institucionalização

Iniciando as atividades da 3ª sessão, fez-se necessário um momento de institucionalização, em vista de dois fatores.

Um primeiro fator surgiu quando observei a não utilização da escrita algébrica pelos alunos, durante a 1ª e 2ª sessões desta pesquisa, preferindo a utilização de linguagem numérica para a busca das soluções inteiras. Este resultado já era em parte esperado, pelas dificuldades apontadas na pesquisa de Lopes Junior (2005), em relação à utilização da escrita algébrica pelos alunos do Ensino Médio.

Em vista dessa reflexão inicial, a institucionalização objetivou prover os alunos de recurso que os possibilitassem escrever as sentenças em linguagem algébrica, relativamente às equações que representavam as situações-problema encaminhadas nesta 3ª sessão, assim como que as utilizassem como ferramenta vantajosa para encontrar, de forma organizada, as possíveis soluções inteiras.

A segunda intenção foi proporcionar oportunidade para que os próprios alunos pudessem desvelar quais os conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares tinham sido aprendidos por eles, nas duas sessões anteriores.

Assim, utilizei como suporte para a discussão, as próprias produções dos alunos em relação às situações-problema da 1ª e 2ª sessões, questionando-os quanto às características em comum dos dados e das soluções, possibilitando elementos para a evolução da escrita algébrica a partir das estratégias desenvolvidas pelos próprios alunos na 1ª e 2ª sessão, favorecendo o uso desta ferramenta para a busca das soluções.

Em relação às situações-problema apresentadas na 1ª e 2ª sessões, almejei que os alunos percebessem:

- que solicitavam o total de possibilidades de aquisição envolvendo espécies;
- que quantificavam duas espécies (bens ou produtos), cuja natureza era discreta;
- que pode ter várias soluções inteiras ou não existir solução.

Como procedimento, preparei uma apresentação baseada em algumas explicações entrecortadas com questionamentos que atuariam como provocações, de modo a favorecer a explicitação por parte dos próprios alunos das características em comum das situações-problema propostas, a partir da reflexão da produção dos alunos nas sessões anteriores, da comunicação entre eles e da intervenção do pesquisador.

As questões básicas que nortearam a institucionalização foram:

- Qual a relação das situações-problema utilizadas com a Matemática?
- O que representam os dados nos enunciados dos problemas?
- Como o procedimento numérico que eles utilizaram no método de tentativa e erro poderia evoluir para uma escrita algébrica das situações propostas?

Como estratégia para favorecer o entendimento destas características, reutilizei uma das situações-problema da 1ª sessão intitulada '*Quantos pacotes de café?*', de modo que os alunos explicitassem os procedimentos e soluções que encontraram.

Antes do início da 3ª sessão, tinha afixado na lousa seis folhas de papel craft, duas já previamente preenchidas e quatro delas sem anotações, para registro das ponderações dos alunos frente às provocações colocadas pelo pesquisador. Os papéis já preenchidos foram cobertos, de modo que os alunos visualizassem seis papéis craft sem registros escritos, para não desviar a atenção aos procedimentos iniciais.

No 1º papel craft representei o gráfico *nº de pacotes do café tipo B versus o nº de pacotes do café tipo A*, sem indicar as coordenadas das soluções do problema, conforme a figura 1. Na 2ª folha craft, expressei, em forma de tabela, as nove soluções deste problema, já organizadas em ordem crescente dos pacotes do tipo B, conforme se observa abaixo.

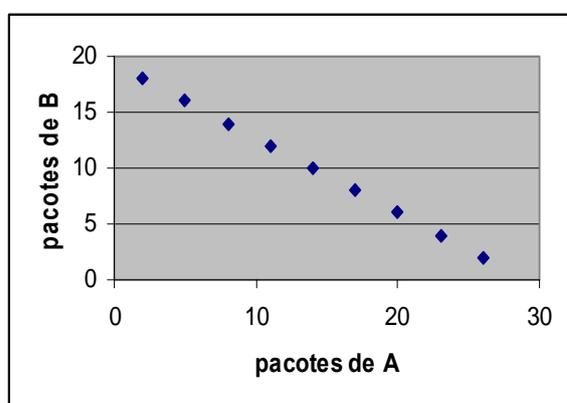


Figura 1: Gráfico representando o *nº de pacotes de B x nº de pacotes de A*.

| Nº de pacotes do tipo A | Nº de pacotes do tipo B | Gasto R\$ |
|-------------------------|-------------------------|-----------|
| 26 | 2 | 58,00 |
| 23 | 4 | 58,00 |
| 20 | 6 | 58,00 |
| 17 | 8 | 58,00 |
| 14 | 10 | 58,00 |
| 11 | 12 | 58,00 |
| 8 | 14 | 58,00 |
| 5 | 16 | 58,00 |
| 2 | 18 | 58,00 |

Tabela 1: Tabela representando o *nº de pacotes de B x nº de pacotes de A*.

Ao iniciar a institucionalização, introduzi o questionamento da relação entre as situações-problema utilizadas nas duas sessões anteriores com a Matemática. Os alunos apontaram que tais questões tratavam do total de possibilidades envolvidas.

A seguir, questionei-os em relação a estes tipos de possibilidades presentes na pesquisa e as espécies de bens utilizados, através da colocação: Quais foram os bens que vocês se depararam nas sessões anteriores?

Os alunos lembraram do mamão e melão, referente ao problema da quitanda da sessão anterior, dos sorvetes de duas e quatro bolas e o problema do CD e do DVD.

Em seguida, entreguei para cada grupo a folha contendo o enunciado do problema '*Quantos pacotes de café?*'. Esta situação foi propositalmente reutilizada, porém com outra pergunta. Na 1ª sessão, eram questionadas quais as possíveis soluções, sendo que agora era solicitada a equação algébrica que representava o fenômeno.

Um aluno voluntário fez a leitura do enunciado da situação-problema em voz alta. Indaguei aos alunos quais eram os resultados obtidos por eles na ocasião. A intenção era que os alunos explicitassem os procedimentos realizados e relacionassem os dados do enunciado, de modo que os próprios alunos percebessem as características das equações diofantinas lineares implícitas à situação. Com esse procedimento, os alunos poderiam organizar seus resultados, de modo a possibilitar o reconhecimento das incógnitas e o desenvolvimento da escrita algébrica.

De início, alguns alunos lembraram resultados, descrevendo principalmente os modos utilizados e registrados pelas diversas tentativas advindas de tal procedimento. Durante esse processo, eles mencionaram o descarte de resultados que não envolviam quantidades inteiras, conforme se observa na transcrição⁵⁴ abaixo.

Aluno: Somei de dois em dois Reais até uma certa quantidade e o restante representei os pacotes de três Reais. Também, percebi que não é possível dividir R\$ 58,00 por 3, de modo a resultar um valor exato.

Depois, como naturalmente não se lembravam de todos os resultados, começaram a reelaborar as tentativas, tal como haviam feito na 1ª sessão, explicitando alguns resultados:

Aluno: Encontramos 2 pacotes de R\$ 3,00. Daí, sobrou R\$ 52,00, que repartimos para os pacotes de R\$ 2,00.

Pesquisador: E como você procedeu para determinar a quantidade de pacotes de R\$ 2,00?

Aluno: Dividi 52 por 2.

⁵⁴ Nas citações desta 3ª sessão, obtidas a partir de transcrição de registros sonoros, foi realizado o tratamento da linguagem dos alunos e do pesquisador, pois utilizei aproximações com uma linguagem mais cotidiana. Assim, o texto foi preservado quanto às quantidades numéricas envolvidas, os termos e as idéias principais.

À medida que os alunos explicitaram alguns resultados, descobri as duas folhas de papel craft, contendo a figura 1 e a tabela 1. A seguir, as soluções apontadas por eles foram indicadas como par ordenado no gráfico cartesiano que representava o *número de pacotes do café tipo B versus o número de pacotes do café tipo A*. O procedimento que adotei em anotar os resultados em forma de par ordenado e relacioná-los com o gráfico tinha por objetivo contribuir para o entendimento das variáveis envolvidas.

Para explorar os resultados numéricos apontados pelos alunos prevendo que posteriormente pudessem generalizar para a escrita algébrica, provoqueei os alunos para escreverem uma sentença numérica para o resultado apontado.

Pesquisador: Mas como você escreveria isto numa sentença numérica [aponte para o par ordenado que acabávamos de discutir].

Aluno: $52 + 3.2 = 58$.

Neste momento, denominei esta escrita correspondendo a uma das soluções da situação-problema como sentença numérica. Para dar sentido a esta escrita, questioneei os alunos a respeito do significado dos números que compunham estas sentenças numéricas, de modo que os alunos fizessem relação entre os números presentes na sentença matemática e os dados presentes no enunciado.

Por exemplo, ao indagá-los a respeito dos números presentes na sentença, $52 + 3.2 = 58$, descrita acima, os alunos relataram que:

Aluno: Esta sentença representa 26 pacotes de R\$ 2,00, pois multipliquei 26 por 2, que resulta 52 e mais 2 pacotes de R\$ 3,00 Reais.

A medida que o aluno explicava o significado da expressão, fui escrevendo a expressão $2.26 + 3.2 = 58$. Ao questioná-los a respeito do significado dos números presentes nessa expressão, os alunos indicaram corretamente que os números 2 e 3 representam os preços do café do tipo A e B, respectivamente, assim como os números 26 e 2 indicam, respectivamente, as quantidades a serem adquiridas destes dois tipos de café.

Observo a seguir, na fala das alunas a respeito da sentença $2.26 + 3.2 = 58$, ressurgir a questão do uso do conectivo 'e' e 'ou', utilizados nos enunciados das situações-problema, questão muito debatida entre as alunas da 3ª série, nas duas sessões anteriores.

Pesquisador: Na situação, o conectivo 'e' indica simultaneidade, ou seja, os dois pacotes devem fazer parte da solução.

Aluno: Mas somente com pacotes de R\$ 3,00 não resulta valor exato.

Aluno: Mas no enunciado aparece a letra 'e'. Daí, serão consideradas soluções quando aparecem as quantidades dos dois tipos de café.

Neste ponto, percebendo que os alunos entenderam o uso do conectivo 'e', voltei a indagá-los como expressariam as outras soluções. Como resposta, eles perceberam que as quantidades envolvidas eram relativas aos preços e as quantidades de café do tipo A e B.

Aluno: Uma possibilidade seria 6 pacotes de R\$ 3,00 e 20 pacotes de R\$ 2,00.

Pesquisador: Como você escreveria a sentença?

Aluno: $6 \cdot 3 = 18$, mais $20 \cdot 2$, 40, que resulta 58.

[simultaneamente a fala da aluna, escrevi a frase **$6 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 58$**].

A partir deste momento, fiz uma pergunta para provocar uma forma de ligação das sentenças numéricas com a escrita da expressão algébrica da referida situação-problema.

Pesquisador: Vocês já encontraram este tipo de sentença em algum tema da Matemática?

Os alunos não souberam relacionar com nenhum assunto da matemática. Em seguida, introduzi a seguinte questão: Estas sentenças estão relacionadas com as equações? Se sim, como?

Após breve silêncio, ao perceber que ocorreu um impasse, indaguei o que eles entendiam como uma equação? As respostas dos alunos indicam que suas concepções acerca das equações é que deve aparecer a letra 'x' e '*alguma coisa*' para calcular.

Aluno: Uma equação, para mim, é quando eu quero descobrir um valor, que é representado por 'x'.

Pesquisador: Neste problema, quais são os valores que estamos querendo descobrir?

Aluno: São as possibilidades de aquisição de cafés do tipo A e B, gastando-se R\$ 58,00.

Aluno: Então, neste problema, os números 20 e 6 são os valores procurados?

Aluno: Isso. Na verdade, para mim eles seriam o 'x', pois eu os achei depois.

Pesquisador: E o que significa o 58?

Aluno: É o resultado, ou seja, é o valor da igualdade, que deve ser 58.

Neste ponto, com a associação que as alunas fizeram entre as sentenças representando as soluções da situação-problema e uma equação, continuei a questioná-los para que eles percebessem que as situações-problema apresentavam duas incógnitas.

Pesquisador: Na situação-problema 'Quantos pacotes de café?', quais seriam os valores a serem descobertos?

Aluno: Os valores seriam: 2, 5, 8, 11 e 14.

Pesquisador: Vamos escrever esses valores. Como você determinou esses valores?

Aluno: Não deveriam ser 'x' e 'y'?

Aluno: As quantidades de pacotes de café do tipo A que podem ser compradas.

Pesquisador: Então, estes números representam as possíveis aquisições de café?

Aluno: Não, estão faltando os pacotes do café B.

Pesquisador: E quais seriam os valores dos pacotes de B?

Aluno: 2, 4, 6, 8, 10, etc.

Nota-se que, os alunos perceberam que se tratavam de duas quantidades envolvidas nas sentenças numéricas discutidas. Ao indicar estes valores no gráfico, à medida que os alunos argumentavam, os outros alunos que não estavam participando do diálogo foram percebendo e comentando - algo que estava explícito no papel craft, mas que eles não haviam percebido - que os valores indicados no eixo horizontal do gráfico eram as quantidades de café do tipo A, assim como os valores indicados no eixo vertical eram as quantidades de café do tipo B.

Indaguei, então: Qual é a denominação de 'x', quando se trata de equação? Os alunos logo responderam que se denominavam incógnitas. Uma delas disse: *Eu pensaria que as minhas incógnitas seriam os números 'x' e 'y'.*

Pesquisador: Então, 'x' e 'y' são as incógnitas. Na situação-problema, o que corresponderia a 'x'?

Aluno: O 'x' seria o A.

Pesquisador: Mais especificamente, o 'x' corresponderia a quantidade de pacotes de café do tipo A. E com relação a 'y'?

Aluno: Seria o número de pacotes do café do tipo B.

Por último, sintetizei com os alunos os encaminhamentos e sucessos obtidos.

Vocês perceberam que esta situação apresenta duas incógnitas, ou seja, dois valores que não conhecemos. Note que no gráfico cartesiano os pares ordenados estão todos alinhados. Na verdade, vocês não poderiam unir estes pontos, pois não é possível encontrar um número inteiro de pacotes entre estes indicados. Este tipo de problema recai em uma equação denominada diofantina linear, em homenagem a Diofante, matemático grego. Já o termo linear está graficamente associado ao alinhamento dos pontos.

Em seguida, propus o início das atividades da 3ª sessão.

Agora, vocês deverão escrever, por conta própria, a equação que representa o problema 1. Observe que, ao escrever esta sentença [aponte para uma das sentenças aritméticas representadas no papel craft], você está descrevendo algo que tem como solução os valores que vocês encontraram, porém para equacionar vocês deverão utilizar explicitamente as incógnitas 'x' e 'y'.

Com estes encaminhamentos realizados, tendo ocorrido a percepção do significado algébrico e da quantidade de incógnitas da equação por parte dos alunos, os convidei a responder a pergunta proposta no problema inicial da 3ª sessão. Finalizou-se, então, a institucionalização.

Análise a Priori

O objetivo da 3ª sessão foi retomar alguns dos problemas resolvidos nas sessões anteriores, propiciando condições para que os alunos escrevessem as equações relativas a eles e a utilizassem como ferramenta facilitadora para a busca de soluções inteiras. Também, esta sessão visou favorecer a caracterização do conceito do máximo divisor comum como ferramenta necessária para a existência de solução de situações-problema envolvendo as equações diofantinas lineares.

Esta 3ª sessão consta de quatro atividades: três situações-problema adaptadas de atividades já abordadas na 1ª e 2ª sessões e uma síntese.

Atividade 11: ‘Quantos pacotes de café?’

O objetivo do problema ‘Quantos pacotes de café?’ foi propiciar condições para que o aluno representasse a situação por meio de uma equação.

As variáveis didáticas são:

- a provocação propiciada pela institucionalização, que visou sistematizar os conhecimentos até então obtidos e favorecer a generalização do pensamento algébrico;
- a escolha de uma situação-problema já trabalhada anteriormente na 1ª sessão, que propiciou aproveitar a vivência dos alunos, suas tentativas e resultados encontrados.

O enunciado da situação-problema proposta é:

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). O preço do pacote da marca A é R\$ 2,00 e do pacote da marca B, R\$ 3,00.

Sabendo-se que ele gastou exatamente R\$ 58,00, qual a equação que representa as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B?

Atividade 11: ‘Quantos pacotes de café?’

As possíveis estratégias de solução deste problema, indicadas por E_i , para $i = 1, 2$, são:

E_1 : O aluno escreve as várias sentenças numéricas, indicando os cálculos.

E_2 : O aluno escreve diretamente a sentença algébrica $2x + 3y = 58$.

Atividade 12: 'Saques no banco'

O objetivo do problema 'Saques no banco' foi propiciar condições para que o aluno escrevesse a equação algébrica que representa esta situação-problema e obtivesse as soluções a partir desta escrita e/ ou do uso do pensamento algébrico.

As variáveis didáticas são:

- os valores das cédulas (R\$ 5,00 e R\$ 20,00), que pertencem ao domínio natural;
- o valor do saque (R\$ 65,00), que permite cálculos mentais para a busca das soluções;
- a relação entre os valores das cédulas e o valor do saque, que pode propiciar a simplificação da equação;
- o número de soluções previstas: quatro possíveis modos de saque.

O enunciado da situação-problema proposta é:

Um cliente de um banco deseja sacar R\$ 65,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00.

- a) Com quantas cédulas de R\$ 5,00 e/ou de R\$ 20,00 ele poderá receber o dinheiro?
- b) Qual é a equação que representa essa situação?

Atividade 11: 'Saques no banco'

As possíveis estratégias, que estão indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, são:

E_1 : O aluno escreve as quatro sentenças numéricas indicando os cálculos, não mencionando as incógnitas 'x' e 'y'.

E_2 : Por tentativa e erro, o aluno ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca de possíveis soluções indicadas em E_1 , utilizando cálculos numéricos explícitos.

E_3 : O aluno escreve a sentença algébrica $5x + 20y = 65$ e a seguir determina as soluções, por substituições e cálculos.

E_4 : O aluno escreve a sentença algébrica $5x + 20y = 65$ e a simplifica, obtendo $x + 4y = 13$, permitindo obter as demais soluções por substituições e cálculos mentais.

Atividade 13: 'CDs ou DVDs?'

O objetivo foi propiciar condições para que o aluno escrevesse a equação algébrica que representa esta situação-problema e a utilizasse para verificar a inexistência de solução.

As variáveis didáticas são:

- os valores dos CDs e dos DVDs (R\$ 12,00 e R\$ 16,00), que pertencem ao domínio natural, sendo de fácil manuseio em cálculos;
- o valor disponível para gastos (R\$ 70,00), de fácil manuseio em cálculos;
- a relação entre os valores do CD e DVD (R\$ 12,00 e R\$ 16,00) e o gasto (R\$ 70,00), que podem propiciar a simplificação da equação e a utilização de propriedades dos números;
- o número de soluções previstas: nenhuma solução.

O enunciado desta situação-problema proposta é:

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs.

Se um CD custa R\$ 12,00 e um DVD R\$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R\$ 70,00? E qual a equação que representa este problema?

Atividade 13: 'CDs ou DVDs?'

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3$, são:

E₁: Por tentativa e erro, ensaia várias possibilidades, organizadas ou não, para a busca de possíveis soluções utilizando cálculos numéricos explícitos, mas não encontra solução.

E₂: O aluno escreve a sentença algébrica $12x + 16y = 70$ e não consegue determinar as soluções por substituições e cálculos.

E₃: O aluno escreve a sentença algébrica $12x + 16y = 70$ e a simplifica, obtendo $6x + 8y = 35$, verificando que não tem solução, pois a soma de dois números pares no primeiro membro nunca resulta um número ímpar no segundo membro.

Atividade 14: 'Síntese'

O objetivo desta síntese foi que o aluno registrasse e organizasse sua produção, propiciando condições para trocar idéias com seus colegas e conjecturar, estabelecer comparações e relacionar as situações-problema desta 3ª sessão, de modo a descrever um critério para se verificar quando uma equação diofantina linear tem ou não solução.

Esperava-se que o aluno estabelecesse relação entre os três valores numéricos representados pelas quantias monetárias presentes nos enunciados das situações-problema, de modo a perceber que estão envolvidos os seguintes conceitos matemáticos presentes na Teoria Elementar dos Números, e que são abordados no Ensino Fundamental: múltiplos ou divisores, propriedades dos números inteiros e o máximo divisor comum.

As variáveis didáticas são:

- a escolha de situações-problema da 3ª sessão, com várias soluções e nenhuma solução inteira;
- a forma de tabela, que favorece a observação e a formação de conjecturas para se formular algum critério;

O enunciado da Síntese é:

Você irá retomar os problemas anteriores, preenchendo a tabela abaixo.

Assim, procure o título dos problemas, quantas e quais foram as soluções encontradas, assim como escreva as equações correspondentes a cada situação-problema apresentada.

Retome os problemas anteriores e preencha o quadro abaixo.

| Problema | Título | Soluções | | Equação |
|----------|--------|----------|--------|---------|
| | | Quantas? | Quais? | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

Observando o quadro acima, como você estabeleceria um critério para se prever quando uma equação diofantina linear tem ou não solução.

Atividade 14: 'Síntese'

As possíveis estratégias, indicadas por E_i , para $i = 1, 2, 3$, são:

E_1 : O aluno não formula critério.

E_2 : O aluno descreve alguma propriedade da Teoria Elementar dos Números, como paridade, múltiplo ou divisor entre os dados do enunciado, mas não estabelece critério.

E_3 : O aluno reconhece a condição do máximo divisor comum entre os coeficientes da equação diofantina linear dividir o termo independente.

Descrição e Análise a Posteriori Local

Esta sessão ocorreu no sábado, dia 18 de novembro de 2006, sendo utilizada a mesma sala da sessão anterior, já previamente preparada para a formação de dois grupos.

Compareceram cinco dos alunos voluntários, sendo três de 1ª série e dois da 3ª série do Ensino Médio. Deste modo, mantive os dois grupos que compus na 2ª sessão. Os alunos que compareceram a 3ª sessão foram:

| | Camila | Dora | Eva | Fernando | Gerson |
|--------|----------------|------|----------------|----------|--------|
| Séries | 3ª | 3ª | 1ª | 1ª | 1ª |
| Grupo | G ₁ | | G ₂ | | |

Descrição dos agrupamentos dos alunos na 3ª sessão

Assim, devido a institucionalização, o início das atividades ocorreu as 9h 20 min, de modo a que a sessão se encerrou às 10h, fato que ocorreu sem maiores problemas.

Quanto aos registros sonoros, utilizei um aparelho MP3 para o registro das manifestações das resoluções dos problemas dos dois grupos e um gravador de fita cassete, situado sobre uma mesa em ponto equidistante da posição dos dois grupos. Ao final da pesquisa, ao tentar reproduzir a gravação, verifiquei que ambos aparelhos MP3 não registraram a gravação, porém o gravador de fita cassete funcionou normalmente.

Descrição da Atividade 11 – Quantos pacotes de café?

Neste problema, os dois grupos já estavam de posse da folha contendo o enunciado e espaço para resolução da situação-problema ‘Quantos pacotes de café?’. Os dois grupos registraram a equação algébrica, conforme se observa no quadro abaixo.

| | Grupo G ₁ | Grupo G ₂ |
|---------|----------------------|---|
| Equação | $2x + 3y = 58$ | $2x + 3y = 58$ $2 \cdot 26 + 3 \cdot 2 = 58$ |

Resultados obtidos na atividade 11 pelos grupos G₁ e G₂

O grupo G₁, além de escrever a equação algébrica, apresentou um procedimento antecedendo a resposta, conforme se observa no protocolo 3.

| | | | | |
|--|--|---|---|---|
| $2 \cdot x + 3 \cdot y = 58$ $2 \cdot 29 + 3 \cdot 0 = 58$ $58 + 0 = 58$ | $2 \cdot x + 3 \cdot y = 58$ $2 \cdot 26 + 3 \cdot 2 = 58$ $52 + 6 = 58$ | $2 \cdot x + 3 \cdot y = 58$ $2 \cdot 23 + 3 \cdot 4 = 58$ $46 + 12 = 58$ | $2 \cdot x + 3 \cdot y = 58$ $2 \cdot 20 + 3 \cdot 6 = 58$ $40 + 18 = 58$ | $2 \cdot x + 3 \cdot y = 58$ $2 \cdot 17 + 3 \cdot 8 = 58$ |
|--|--|---|---|---|

Protocolo 3- Escrita inicial do grupo G₁ na atividade 11, da 3ª sessão.

Análise a Posteriori Local

Conforme a análise *a priori*, esperava que os alunos representassem a situação por meio de uma equação.

O grupo G_1 inicialmente escreve a equação algébrica associando-a a cada resultado encontrado. Isto parece revelar que, inicialmente, as alunas sentem a necessidade de justificar a equação, verificando algumas respostas na forma de uma expressão numérica. Porém, a discussão prossegue e as alunas percebem que somente é necessária a escrita algébrica, denotando a evolução da estratégia E_1 para a estratégia E_2 , conforme se observa na transcrição abaixo.

G_1 : O problema pede a equação com todos as possibilidades, não é?

G_1 : Então, é melhor escrevermos três equações.

G_1 : Não, é para representar os valores numa só equação.

Quanto ao grupo G_2 , observei que não estava conseguindo chegar a um consenso. Em vista disso, retomei algumas ponderações feitas na institucionalização que iniciou a 3ª sessão de forma mais particular para este grupo, de modo a não provocar um bloqueio, assim possibilitando uma nova abertura para que o grupo entendesse e escrevesse a equação solicitada.

Pesquisador: Na 1ª sessão, vocês já se mobilizaram para descobrir as soluções. No início desta sessão, vocês esboçaram estas tentativas e me explicaram como vocês conseguiram tais soluções. Esta situação-problema inicial solicita a equação que representa estas soluções. Para isso, vocês chegaram a algumas conclusões. Estes problemas são representados por equações, com duas incógnitas, 'x' e 'y', representando dois tipos de bens, no caso, as quantidades de café dos tipos A e B, relativas aos preços unitários R\$ 2,00 e R\$ 3,00. Também, a equação tem que ter uma igualdade, que neste caso é o gasto total de R\$ 58,00.

A partir destas explicações, o grupo G_2 escreve a equação na forma algébrica, e em seguida registra a sentença numérica abordada na etapa de institucionalização, conforme se observa no quadro-síntese. Do modo como estão registradas a equação e a verificação, não é possível discriminar se o grupo compreende qual é a equação, denotando uso das estratégias E_1 e E_2 .

Sintetizando, os grupos G_1 e G_2 atingiram o objetivo ao escrever a equação que representa a situação-problema.

Descrição da Atividade 12 – ‘Saques no banco’

Os dois grupos receberam a folha contendo o enunciado e espaço para a resolução da situação ‘Saques no banco’, sendo que rapidamente se mobilizaram para a busca das soluções. O quadro-síntese abaixo indica as produções dos dois grupos.

| | Grupo G ₁ | | Grupo G ₂ | |
|------------|----------------------------------|----------------------------------|---|--|
| Equação | $5x+20y = 65$ | | $5x+20y = 65$ $5.1+20.3 = 65$ | $5x+20y = 65$ $5.9+20.1 = 65$ |
| | | | $5x+20y = 65$ $5.5+20.2 = 65$ | $5x+20y = 65$ $5.13 = 65$ |
| Resultados | $5x+20y = 65$ $5.1+20.3 = 65$ | $5x+20y = 65$ $5.9+20.1 = 65$ | 1 cédula de R\$ 5,00 e 3 cédulas de R\$ 20,00 | 9 cédulas de R\$ 5,00 e 1 cédula de R\$ 20,00 |
| | $5x+20y = 65$ $5.5+20.2 = 65$ | $5x+20y = 65$ $5.13 = 65$ | 5 cédulas de R\$ 5,00 e 2 cédulas de R\$ 20,00 | 13 cédulas de R\$ 5,00 |

Resultados obtidos na atividade 12 pelos grupos G₁ e G₂

Análise a Posteriori Local

Conforme a análise *a priori*, esperava que os alunos escrevessem a equação algébrica representativa da situação-problema 'saques no banco' e obtivessem as soluções a partir desta escrita e/ ou do uso do pensamento algébrico.

O grupo G₁ inicialmente efetua a escrita algébrica da equação e, em seguida, realiza alguns cálculos, por tentativa e erro, conforme se observa na transcrição abaixo.

G₁: O 1 multiplica por 5. Daí, subtrai 65 de 5, que resulta 60, que dividido por 3, fornece 20.

G₁: Acho que vai aumentando.

G₁: Então 5 vezes 5, resulta 25, e mais 1 de 20, resulta 45. Não deu certo.

G₁: Utilize 9 cédulas de R\$ 5,00, mais 1 cédula de 20, resulta R\$ 65,00.

Após estas tentativas, as alunas determinaram a maior quantidade de uma das cédulas, que elas denominam de '*valor máximo*', obtendo então três cédulas de R\$ 20,00. Então, as alunas percebem um padrão, ao diminuir gradativamente a quantidade de cédulas de R\$ 20,00, calculando mentalmente quantas seriam as cédulas de R\$ 5,00 para resultar R\$ 65,00. Vale observar no protocolo abaixo a escrita indevida pelas alunas (por exemplo, $20 \times 3 = 60 + 5 = 65$, ou seja, $60 = 65$), que denota a preocupação com o cálculo mental, mas acabam registrando a sentença de forma incorreta.

4 possibilidades

máximo

$$20 + 3 = 60 + 5 = 65$$

$$20 \times 2 = 40 + 25 = 65$$

$$20 \times 1 = 20 + 45 = 65$$

$$13 + 5 = 65$$

Protocolo 4- Organização dos resultados do grupo G₁, na atividade 12, da 3ª sessão.

Por último, utilizam a equação para obter as soluções de modo organizado, conforme se observa no quadro síntese, evoluindo, assim, da estratégia E₂ para a estratégia E₃.

Considerando-se o grupo G₂, este escreve a forma algébrica associada à sentença numérica para cada uma das soluções obtidas pela estratégia da tentativa e erro. Este grupo expressa a resposta em linguagem natural, denotando o entendimento da

equação algébrica para a busca das soluções, apresentando-as de forma organizada e rápida, conforme o quadro-síntese.

Assim, os dois grupos atingiram o objetivo, ao utilizar a estratégia E_3 , escrevendo inicialmente a equação que representa a situação-problema, seguida de substituições e cálculos mentais para a determinação das soluções, de modo organizado.

Descrição da Atividade 13 – ‘CDs ou DVDs?’

Os dois grupos receberam a folha contendo o enunciado e espaço para a resolução da atividade ‘CDs ou DVDs?’. Os grupos rapidamente determinaram a equação que representa a situação, porém utilizaram maior quantidade de tempo na tentativa de encontrar solução.

O quadro-síntese abaixo indica as produções dos dois grupos.

| | Grupo G_1 | Grupo G_2 |
|----------|-----------------------|------------------|
| Equação | $12x + 16y = 70$ | $12x + 16y = 70$ |
| Soluções | Não há possibilidades | - |

Resultados obtidos na atividade 13 pelos grupos G_1 e G_2

Análise a Posteriori Local

Conforme a análise *a priori*, esperava que os alunos escrevessem a equação algébrica que representa este problema e a utilizassem para verificar a inexistência de solução.

O grupo G_1 , após as várias tentativas através do método da tentativa e erro, concluíram que não há possibilidades, porém seus argumentos não foram suficientes para sustentar esta afirmação, conforme se observa na transcrição.

G_1 : Para saber a quantidade máxima de DVDs vamos fazer 16 vezes 2, 16 vezes 3, 16 vezes 4, 64. Não, não é possível.

G_1 : Vamos começar pelo CD. Qual número vezes 12 que resulta 70?

G_1 : Não, não vai dar, nem pelo de R\$ 12,00, nem pelo de R\$ 16,00.

O grupo G_2 , após escrever a escrita algébrica da equação que representa a situação-problema, realizou algumas tentativas esporádicas para a busca de solução inteira, pelo método da tentativa e erro, mas não respondeu a questão.

Deste modo, os dois grupos não atingiram o objetivo, se limitando ao uso da estratégia E_2 , escrevendo a equação algébrica e buscando as soluções por tentativa e erro, não se mobilizando para encontrar outras estratégias para verificar a inexistência de solução.

Descrição da Atividade 14 – ‘Síntese’

Os dois grupos receberam a folha contendo o enunciado e espaço para a resolução da situação ‘Saques no banco’.

O primeiro quadro abaixo sintetiza as produções dos dois grupos.

| Atividade | Grupo G ₁ | | Grupo G ₂ | |
|-----------|-----------------------|------------------|----------------------|-------------------------------------|
| | Soluções corretas | Equação | Soluções corretas | Equação |
| 11 | 9 | $2x + 3y = 58$ | 1 | $2x + 3y = 58$ $2.26 + 3.2 = 58$ |
| 12 | 4 | $5x + 20y = 65$ | 4 | $5x + 20y = 65$ |
| 13 | Não há possibilidades | $12x + 16y = 70$ | - | $12x + 16y = 70$ |

Atividade 14: Síntese dos resultados obtidos realizada pelos grupos G₁ e G₂

O segundo quadro abaixo descreve a conjectura dos grupos para se prever quando uma equação diofantina linear tem solução.

| Grupo | Critério |
|----------------|---|
| G ₁ | Procuramos verificar se os valores são divisíveis pelo valor estimado pelo professor. Se ele não for divisível, a equação não terá solução. |
| G ₂ | - |

Atividade 14: Critério formulado pelos grupos G₁ e G₂

Análise a Posteriori Local

Conforme a análise *a priori*, esperava que os alunos registrassem e organizassem a produção obtida por eles, estabelecendo relações entre as situações-problema apresentadas nesta 3ª sessão, de modo a descrever um critério para se verificar quando uma equação diofantina linear tem ou não solução.

O grupo G₁ organizou as respostas de modo correto, sabendo distinguir as soluções particulares da equação na forma algébrica, nas atividades 11 e 12. Na discriminação das soluções, no registro sonoro, o grupo concebeu corretamente as quantidades envolvidas, porém se limitou a escrever as sentenças na forma numérica, não registrando em linguagem natural as respostas.

Em contrapartida, o grupo G₂ descreveu de forma incompleta as soluções da atividade 11, ao representar somente a resposta que foi discutida na etapa inicial de institucionalização. Também, na atividade 11, o grupo G₂ não diferenciou a solução numérica e a forma algébrica, conforme se observa no quadro síntese. Na atividade 12, o grupo G₂ apresentou resposta correta e organizada, sabendo distinguir as soluções numéricas e a escrita algébrica.

Quanto a atividade 13, os dois grupos escreveram a equação, porém somente o grupo G_1 afirmou não haver possibilidades.

Quanto a formulação de um critério para se prever quando uma equação diofantina tem ou não solução, o grupo G_1 percebeu relação entre os valores dados nos enunciados e o conceito de divisibilidade, porém não houve verificação e aprofundamento da afirmação desta conjectura, revelando uso da estratégia E_2 . Quanto ao grupo G_2 , este não registrou justificativa, por escrito e nem deliberou, de forma oral, se caracterizando uso da estratégia E_1 .

Assim, considero que o objetivo desta atividade não foi atingido pelos sujeitos de pesquisa, pois somente o grupo G_1 formulou conjectura, ao afirmar, de forma vaga, a existência de relação de divisibilidade entre os dados dos bens e o valor total disponível nas situações-problema da 3ª sessão, porém não realizou tentativas e procedimentos para validar estes resultados.

Ao final desta 3ª sessão, agradei novamente a presença dos alunos e ressaltai a importância da participação deles nesta pesquisa.

Análise a Posteriori da 3ª sessão

A 3ª sessão objetivou retomar alguns dos problemas resolvidos nas sessões anteriores, propiciando condições para que os alunos escrevessem as equações relativas a eles e as utilizassem como ferramenta facilitadora para a busca de soluções inteiras.

O quadro abaixo sintetiza as observações em relação as manifestações dos alunos nas atividades da 3ª sessão.

| Atividade | 3ª sessão | Grupo G_1 | Grupo G_2 |
|-----------|--|---------------------------------------|--------------------------------|
| 11 | houve equacionamento | X | Associado a solução particular |
| 12 | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia inicial | X | X |
| | houve equacionamento | X | Associado a solução particular |
| | perceberam que havia mais de uma solução inteira | X | X |
| | utilizaram a equação para determinar as soluções | X | X |
| | determinaram todas soluções explicitaram todas as soluções | X Verbalmente | X Por escrito |
| 13 | utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia de partida | X | - |
| | houve equacionamento | X | X |
| | houve indícios da inexistência de solução inteira | os divisores dos dados dos enunciados | - |

Síntese das manifestações dos grupos G_1 e G_2 na 3ª sessão

A síntese apresentada da 3ª sessão permitiu concluir que os alunos do grupo G_1 e G_2 escreveram as equações relativas aos problemas e as utilizaram como ferramenta preferencial, a partir do método da tentativa e erro, para a busca das soluções inteiras nas situações-problema apresentadas, mostrando evolução da estratégia de resolução, alcançando o objetivo delineado.

Quanto à possibilidade de estabelecimento de algum critério para se prever quando uma equação diofantina tem ou não solução, os dois grupos não validaram este resultado. Somente o grupo G_1 formulou vestígios, ao indicar relação entre os valores monetários dos bens, o valor a ser gasto (dados nos enunciados) e o conceito de divisibilidade. Isto indicou uma abertura para a institucionalização da condição dada pelo m.d.c. dos coeficientes da equação diofantina linear dividir o termo independente, como condição necessária e suficiente para a existência de solução.

Quanto ao desempenho comparativo dos grupos, os grupos G_1 e G_2 apresentaram mobilização eqüitativa no equacionamento e utilização desta expressão algébrica como ferramenta facilitadora para a obtenção das soluções inteiras. Porém, quanto às situações onde não há solução, o grupo composto pelos alunos do 3º ano se mostrou mais perceptivo e até formulou conjecturas, o que não ocorreu com os alunos do 1º ano.

Institucionalização Final

Após o encerramento da 3ª sessão, realizei fechamento da pesquisa, em concordância com os alunos. Este devolutiva objetivou destacar os conhecimentos desenvolvidos nas três sessões, ressaltando quais eles conseguiram atingir e proporcionando recursos que lhes possibilitassem responder as inquietações provenientes das situações-problema envolvendo equações diofantinas lineares.

De início, retomei a atividade 12 (problema dos 'saques no banco'), com quatro soluções inteiras, sendo a equação caracterizadora desta situação dada por $5x + 20y = 65$. Assim, almejei expor outros modos de utilizar esta equação para descobrir as soluções a partir dela, utilizando propriedades da Teoria Elementar dos Números.

Argumentei que, dividindo esta equação por 5, a forma equivalente fica dada por $x + 4y = 13$. O próximo passo é isolar o 'x', que resulta $x = 13 - 4y$. Observei neste momento, que uma das maneiras de descobrir as soluções é substituindo-se valores de 'y', a partir do valor zero, calculando-se os valores de 'x'.

Assim, elaborei uma tabela, indicando os valores de 'y', a partir do zero, e calculei os valores de 'x', de modo que este resulte em um número inteiro positivo ou nulo.

| y | x | Solução (x;y) |
|---|-----------------------|---------------|
| 0 | $13 - 4 \cdot 0 = 13$ | (13;0) |
| 1 | $13 - 4 \cdot 1 = 9$ | (9; 1) |
| 2 | $13 - 4 \cdot 2 = 5$ | (5; 2) |
| 3 | $13 - 4 \cdot 3 = 1$ | (1; 3) |
| 4 | $13 - 4 \cdot 4 = -3$ | - |

Tabela 2: As quatro soluções da atividade 12

Em seguida coloquei que havia um modo de se verificar se uma situação-problema envolvendo equações diofantinas lineares tinha ou não solução. Os alunos se mostraram interessados.

Pesquisador: Vou explicar um modo de verificar se uma equação diofantina linear tem solução, utilizando o máximo divisor comum de dois números. Por exemplo, qual é a equação que vocês escreveram na atividade 13?

Aluno: $12x + 16y = 70$. Por que esta situação não tem solução? É devido ao fato de nenhum dos dois coeficientes [12 e 16] serem divisíveis por 70?

Aproveitei esta pergunta do aluno, que denota a percepção do papel dos divisores neste tipo de situação, para questioná-los.

Pesquisador: Nesta outra situação [aponte para a equação da atividade 12, dada por $5x + 20y = 65$], o coeficiente de y (20) é divisível por 65?

Aluno: Não.

Pesquisador: E por que neste caso existem soluções?

Aluno: Por que neste caso os números terminam em 0 ou 5 [apontando para os números 20 e 5 da equação], que envolve a seqüência dos números divisíveis por 5.

Esta fala revelou indícios de percepção no aluno de haver relação dos valores das cédulas (5 e 20) com o valor total a ser gasto (R\$ 65,00).

Pesquisador: Você perceberam que tem isto tem algo relacionado com os divisores. Observem, o m.d.c. entre 5 e 20 é 5. Mas 5 divide 65?

Aluno: Divide.

Pesquisador: Nesta outra equação [aponte para a equação $12x + 16y = 70$], qual o m.d.c. de 12 e 16?

Aluno: Não sei.

Pesquisador: Retomando, o que é m.d.c.?

Aluno: Seria o número que dá para dividir [seguiu-se um silêncio]

Pesquisador: Neste caso, o m.d.c. é o maior divisor comum, ou seja, é o maior número inteiro que é possível dividir tanto o 12, como o 16.

Aluno: Então é 4.

Pesquisador: É possível dividir 12 por 4?

Aluno: Sim, resulta 3.

Pesquisador: E 16 por 4?

Aluno: Resulta 4.

Pesquisador: O m.d.c. neste caso é 4. Será que 4 divide 70?

Aluno: Não, o 2 divide, mas não é o máximo divisor comum.

Pesquisador: Então, para saber se é possível ter solução, o conceito a ser utilizado é o m.d.c. Se o m.d.c. entre os coeficientes da equação for divisor do termo independente, então há solução para este tipo de equação.

Sintetizando, o m.d.c é o fator que determina se uma equação diofantina linear tem solução.

Neste momento, um aluno do grupo G_2 estava tentando entender por que a $12x + 16y = 70$ não tem solução, pois ele achava que havia. Neste momento, um aluno fez uma declaração importante, mostrando o que ela havia pensado durante a sessão e o que ela compreendeu.

Aluno: Eu acho que ele está pensando que esta equação tem solução, devido ao fato que os números 12 e 16 são pares e o número 70 também é par. Entendeu? E depois, com este novo critério, acabamos de descobrir que não há solução. Não é pelo fato de serem números pares é que haverá solução.

A fala da aluna foi muito oportuna. Terminei esclarecendo que tinha escolhido estes coeficientes pares nas sessões justamente com o propósito do aluno perceber que o fato de serem pares não bastava como critério, mas sim a relação entre os coeficientes e o termo independente da equação dada pelo máximo divisor comum.

Ao final, agradei a participação dos alunos, realçando que a contribuição deles era muito importante para minha pesquisa, com a esperança de que possa lhes ter contribuído com algo para a aprendizagem de Matemática.

Por último, observo a fala de uma aluna, com relação a este tipo de atividades envolvendo as situações-problema e os jogos como motivadoras para o processo de ensino e de aprendizagem: “Assim, dá mais vontade de fazer”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresento, inicialmente, quadro referente as manifestações escritas ou orais dos alunos na busca de soluções das situações-problema nas três sessões propostas, sintetizando os registros para as considerações finais.

Nos problemas em que há mais de uma solução:

| Grupos | G ₁ | | | G ₂ | | |
|--|----------------------|---|-----------------------------|----------------|---|---------------|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| Sessões | | | | | | |
| utilizaram as grandezas discretas como soluções, descartando as de natureza contínua | X | X | X | X | X | X |
| perceberam que havia mais de uma solução | X | X | X | X | X | X |
| utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial | X | - | - | X | - | - |
| houve evolução para outra estratégia a partir da tentativa e erro | Organização de dados | X | X | - | X | X |
| • Múltiplos/divisores | - | X | não se aplica ⁵⁵ | - | X | não se aplica |
| • Escrita algébrica | - | - | X | - | - | X |

Nos problemas em que não há solução:

| Grupos | G ₁ | | G ₂ | |
|---|----------------|--------------------|----------------|---|
| | 1 | 3 | 1 | 3 |
| Sessões | | | | |
| houve indícios de percepção de não haver solução | X | X | - | - |
| utilizaram a tentativa e erro como estratégia preferencial | X | X | X | X |
| houve evolução para qual estratégia a partir da tentativa e erro? | - | Indícios/Divisores | - | - |
| Equacionaram o problema? | - | X | - | X |
| Utilizaram o equacionamento como estratégia para verificar a inexistência de solução? | - | - | - | - |

Diante das análises realizadas de cada atividade das três sessões e em relação a estas, considero que os alunos de ensino médio desta pesquisa:

- utilizaram as grandezas discretas como soluções, descartando as de natureza contínua nas atividades apresentadas, assim como no decorrer das três sessões perceberam que havia situações com mais de uma solução;

⁵⁵ A estratégia envolvendo múltiplos ou divisores não foi explorada na 3ª sessão.

- utilizaram a tentativa e erro como estratégia espontânea e principal na 1ª sessão, que evoluiu a partir das atividades apresentadas na 2ª sessão, surgindo manifestações do uso do múltiplo ou divisor de um número inteiro como ferramenta facilitadora na busca de soluções inteiras, assim como escreveram as equações correspondentes e as utilizaram na 3ª sessão, a partir da institucionalização realizada, que viabilizou o uso desta ferramenta otimizadora e organizadora para a resolução dos problemas propostos onde havia mais de uma solução inteira;

- apresentaram indícios em perceber e estabelecer alguma conexão entre os dados fornecidos nos enunciados e a solução dos problemas, manifestando relação com os múltiplos ou divisores de um número através de exemplos particulares na 2ª sessão, porém não souberam validar tal resultado;

- manifestaram inquietação nas situações onde não encontraram solução, visto que nestas situações utilizaram preferencialmente a estratégia da tentativa e erro, não possibilitando a formulação de conjecturas envolvendo propriedades da Teoria Elementar dos Números que permitisse validar a inexistência de solução.

De modo geral, em relação ao desempenho dos grupos, nas três sessões se caracterizou maior capacidade de ação no grupo representado pelos alunos de 3ª série em relação aos alunos de 1ª série do Ensino Médio. Isto possivelmente ocorreu por terem vivenciado mais situações no ambiente escolar em temas que envolvem grandezas discretas, tais como as Seqüências Numéricas, Progressões Aritméticas, Análise Combinatória e Sistemas Lineares.

Destaco através de minhas observações e das manifestações e interações realizadas nesta pesquisa, o grande envolvimento e empenho dos alunos na busca das soluções. Acredito que os anos de atuação como professor em sala de aula contribuíram na opção da utilização dos jogos numa perspectiva de resolução de problemas, pois de acordo com Müller (2000), sendo este um recurso didático de mediação entre as possibilidades dos alunos e as exigências da tarefa, observei que o ato lúdico proporcionado pelo jogo facilitou a interação.

Conjuntamente com o desafio proporcionado pela escolha de situações contextualizadas em questões da Microeconomia, estes recursos didáticos se revelaram de fundamental importância para favorecer a devolução, conforme Brousseau (1996a,b), proporcionando uma motivação para a interpretação e a ação independente do aluno na busca de soluções nas atividades propostas, fator primordial para o desenvolvimento de conhecimentos envolvendo as equações diofantinas lineares.

A análise dos dados revelou a estratégia de tentativa e erro preponderante nas manifestações espontâneas dos alunos, resultado já esperado de acordo com Polya (1942, apud Pozo, 1998). A concepção da seqüência de atividades das 2ª e 3ª sessões possibilitaram a manifestação de evolução da estratégia da tentativa e erro para outras ferramentas facilitadoras, manifestadas pelos alunos através da utilização da operacionalização dos múltiplos e divisores, assim como pelo desenvolvimento do equacionamento algébrico, que se manifestaram nas situações de formulação, conforme Brousseau (1996a,b).

Assim, a seqüência didática baseada em situações-problema favoreceu o desenvolvimento de um dos elementos caracterizadores do pensamento matemático, que, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), se potencializou através do entendimento e uso pelos alunos da equação algébrica para a busca de soluções inteiras, habilidade imprescindível aos estudantes do Ensino Básico.

Diante de tais considerações, concluo que é possível a alunos de Ensino Médio desenvolver conhecimentos envolvendo equações diofantinas lineares, ao se deparar com uma situação didática embasada nos moldes de Brousseau (1996a,b), viabilizando a estes alunos a ação independente para desenvolver estratégia facilitadora que operacionalize conceitos da teoria Elementar dos Números – múltiplos ou divisores - assim como o uso da escrita algébrica como ferramenta otimizada e organizadora na busca das soluções inteiras.

Ressalto que o enfoque de reutilização de elementos básicos presentes no currículo do Ensino Básico e pertencentes a Teoria Elementar dos Números - os múltiplos e os divisores de um número - que associados a resolução de problemas, conforme recomendação de Ferrari (2002), permitiu o desenvolvimento de habilidades como interpretar e conjecturar, assim como a busca de estratégias de resolução, sem necessariamente envolver a aplicação direta de algoritmos.

Também, os resultados expressos nesta pesquisa, ilustram ser factíveis propostas que permitam a manifestação e a articulação de conceitos da Teoria Elementar dos Números - como os múltiplos ou divisores – e a Álgebra, campos articulados e complementares, permitindo dessa forma o manejo pelos alunos de conceitos de forma integrada, conforme ressaltam Maranhão, Machado e Coelho (2005).

Acredito que as manifestações, ações e constatações expressas neste trabalho possam constituir um repensar em relação à importância e valorização de propostas a serem desenvolvidas em sala de aula, envolvendo situações no âmbito da Matemática

Discreta, conforme expresso em Moura (2005). Vale lembrar que, de acordo com Jurkiewicz (2004), a Matemática Discreta viabiliza problemas de compreensão fácil e acessível, constituindo assim importante e poderosa ferramenta pedagógica que contribui para o processo de ensino e de aprendizagem no Ensino Básico.

Ainda, em conformidade com Brolezzi (1996), acredito que este estudo pode se constituir em mais uma motivação para o desenvolvimento de outras pesquisas envolvendo a Matemática Discreta no Ensino Básico, em particular envolvendo a Teoria Elementar dos Números, preferencialmente se articuladas com a Matemática do Contínuo. Assim, os resultados expostos podem permitir re-significações e ampliações deste tema, nos aspectos de:

- abrangência de contextos em diversas áreas do conhecimento que sejam importantes para o desenvolvimento e formação da cidadania;
- desenvolvimento de outros meios de interação do aluno, através de jogos com material estruturado ou com ambientação virtual;
- validação do máximo divisor comum como condição necessária e suficiente para a existência de solução de situações envolvendo as equações diofantinas lineares;
- possibilidades do desenvolvimento das expressões resolutivas das equações diofantinas lineares a duas incógnitas, através da observação e generalização de padrões.

Observo que a utilização de contextos baseados em conceitos da área científica ou cultural, como a Microeconomia utilizada nesta pesquisa, podem favorecer o encaminhamento das soluções, assim como inspirar o professor de Matemática do Ensino Básico na busca de articulação com outras disciplinas ou como ferramenta para um trabalho transdisciplinar, recurso fundamental no exercício do ofício educacional, conforme os PCN, Brasil (1997).

Diante de tais considerações, encerro o relato desta pesquisa, mantendo uma intenção de contribuir e, principalmente, de ter aprendido com as possibilidades surgidas no decurso e encaminhamento deste estudo.

Referências Bibliográficas

ALBUQUERQUE, M. C. C. **Microeconomia**. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1986.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas**: Uma Estratégia para as aulas de Matemática. São Paulo: CAEM, IME-USP, 1995. v.6.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. v. 2. p. 135. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2006.

_____. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEMT/MEC. 1997a. Disponível em: <<http://mecsrv04.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 20 mai. 2006.

_____. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília: SEMT/MEC, 1997b.

_____. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEMT/MEC, 1998.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

_____. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996b. Cap. 4. p. 48-72.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 1. p. 1-14.

CASTRO, M. R. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas**. Disponível em: <<http://www.tvebrasil.com.br/salto>>. Acesso em: 01 out. 2005.

CHARNAY, R. Aprendendo com a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 3. p. 36-47.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução de: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

COSTA, E. S. **Equações Diofantinas Lineares e o Professor do Ensino Médio**. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução de: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

D'AMBROSIO, U. **Conteúdo nos cursos de formação de professores de Matemática**. 2006. Disponível em: <<http://www.vello.sites.uol.com.br/conteudo.htm>>. Acesso em: 15 jan. 2007.

DUARTE, E. F. **Contextualização em Educação Matemática**. Minas Gerais: UEMG. Disponível em: <<http://www.divinopolis.uemg.br/revista/revista-eletronica2/artigo1>>. Acesso em: 21 mai. 2006.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A Solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Cap. 1. p. 13-42. ISBN 85-7307-356-X.

FERRARI, P. L. Understanding Elementary Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 5. p. 97-115.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar ... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições. v. 4. n. 1. mar. 1993. p. 78-91.

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma introdução**. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 65-87.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 2. p. 26-35.

HAETINGER, K. **Matemática Discreta**. 2007. Disponível em: <<http://ensino.univates.br/~chaet/Matematica%20Discreta.html#introducao>>. Acesso em: 15 abr. 2007.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. 169p.

IGLIORI, S. B. C. A Noção de 'Obstáculo Epistemológico' e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma introdução**. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p 99-113.

JURKIEWICZ, S. **Matemática Discreta e Ensino Médio**. Programa de Engenharia de Produção da UFRJ, 2004. Disponível em: <http://ensino.univates.br/~chat/Materiais/matdiscreta_medio.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. 176p.

LOPES JUNIOR, D. **Função do 1º grau: Um estudo sobre seus Registros de Representação Semiótica por Alunos da 1ª Série do Ensino Médio**. 2005. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com Jogos e Situações-Problema**. Porto Alegre: ArtMed Editora, 2000.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e contextualização. In: INEP. **ENEM** (Exame Nacional do Ensino Médio) Fundamentação Teórico- Metodológica. Brasília, DF, 2005. Cap. 1. p. 41-53.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: Uma introdução**. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. **PROJETO: O que se entende por Álgebra?** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

_____. **Linhas de Pesquisa**. Disponível em: <<http://www.pucsp.br/pos/edmat>>. Acesso em: 12 ag. 2007.

- MELLO, G. N.; DALLAN, M.; GRELLET, V. **Proposta pedagógica e autonomia da escola**: Novos paradigmas curriculares e alternativas de organização pedagógica na educação brasileira. Secretaria do Estado do Paraná, 2000. Disponível em: <<http://www.namodemello.com.br/pdf/escritos/outros/textoprealrecife1508.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2007.
- MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números**: Uma Introdução à Matemática. São Paulo: EDUSP, 2003. 240p.
- MILLER, R. L. **Microeconomia**: Teoria, Questões e Aplicações. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1981. 507p.
- MOURA, L. O. G. **O contínuo e o discreto no ensino da Matemática**: Conceitos Dicotômicos ou Complementares? 2005. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.
- MÜLLER, G. C. Um estudo de intervenção com jogos matemáticos. **Revista de Educação**: Projeto Matemática. Porto Alegre, Ano II, n. 3, 2000. p. 2-6.
- OLIVEIRA, S. B. **As Equações Diofantinas Lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio**. 2006. 102 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- PEREIRA, A. L.; WATANABE, R. **Seção O Leitor Pergunta**: Um probleminha sobre idades. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 2005, 1º quadr. p. 54.
- POZO, J. I. Introdução. In: POZO, J. I. (org). **A Solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-11.
- PUERI DOMUS ESCOLAS ASSOCIADAS. Seção Duas Incógnitas e muitas soluções. In: PUERI DOMUS ESCOLAS ASSOCIADAS. **Matemática**: 7ª série. São Paulo: 2003. Un. 5.
- RAMA, A. J. **Números Inteiros nos Ensino Médio e Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- RESENDE, M. R. **Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- ROCQUE, G. de La ; PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

SCHIN, E. **O Meu Aniversário**. UFMG. Disponível em: <<http://www.reniza.com/forums/MalbaTahan/posts/52.html>>. Acesso em: 15 jul. 2005.

STIGLITZ, J. E.; WALSH, C. E. **Introdução à Microeconomia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2003. Tradução de: principles of microeconomics, 3rd ed.

UNIVERSIDADE DE MINHO. **Equações Diofantinas**. Portugal, 2003. Cap. 2. Disponível em: <http://www.math.uminho.pt/.../outros/2003_Capitulo2>. Acesso em: 12 jul. 2006.

VELOSO, E. et. al. **A Matemática na formação inicial dos professores**. Documento para discussão. Portugal: Associação de Professores de Matemática (APM) e Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), 2005. Disponível em: <<http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matprof.pdf>>. Acesso em: 19 mar. 2007.

ZERHUSEN, A.; RAKES, C.; MEECE, S. **Diophantine Equations**. Disponível em: <<http://www.ms.uky.edu/~carl/ma330/projects/diophanfin1.html>>. Acesso em: 02 nov. 2005.

ANEXO A

INSTRUMENTO DE PESQUISA

1ª sessão**Atividade 01****Parte A: As regras do jogo**

Jogo nº 1: Convidamos vocês a participarem do jogo do sorvete.

Regras:

- O jogo transcorre em quatro rodadas de, no máximo, 2 minutos cada.
- O jogo será disputado entre duas duplas da mesma série.
- Cada dupla registra seus resultados na folha entregue para tal.
- Cada quadra de alunos, das duas duplas, recebe quatro cartas fechadas com os seguintes valores: R\$ 8,00; R\$ 10,00; R\$ 12,00; R\$ 14,00.
- Cada carta corresponde ao valor que deve ser gasto em sorvetes.
- São duas opções de sorvetes de casquinha: bola simples, a R\$ 2,00 e bola dupla, a R\$ 4,00.
- Existem muitos sabores disponíveis para os pedidos.
- Inicia o jogo a dupla que ganhar na disputa par ou ímpar.
- A dupla vencedora retira a carta de cima e a mostra para todos.
- A dupla oponente registra o valor da carta e todas as possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, sem as revelar à dupla adversária.
- O jogo continua até o término das cartas, invertendo em cada rodada os papéis das duplas.
- Completando-se as quatro rodadas, cada dupla mostra todos os resultados obtidos à dupla adversária, que deverá conferi-los, dispondo de três minutos para tal tarefa. Caso haja discordância da correção por parte da dupla cujos resultados estejam sendo verificados, será dado um minuto para a réplica, a ser registrada, por escrito.
- Contagem dos pontos: De comum acordo, cada resultado errado ou faltante vale 1 ponto. Ganha quem tiver menos pontos.

Atividade 01**Parte B: Os resultados das duplas**

| Valor da carta sorteada | Possibilidades de compra |
|-------------------------|--------------------------|
| R\$ _____ | |

| Valor da carta sorteada | Possibilidades de compra |
|-------------------------|--------------------------|
| R\$ _____ | |

Atividade 1

Parte C: A etapa de verificação dos resultados das duplas

| Valor da carta (R\$) | Resultados corretos? () Sim () Não | Possibilidades de compra | | Réplica () Sim () Não | Pontuação da dupla |
|----------------------|--|--------------------------|----------------------|-------------------------------|--------------------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| | | | | | |

| Valor da carta (R\$) | Resultados corretos? () Sim () Não | Possibilidades de compra | | Réplica () Sim () Não | Pontuação da dupla |
|----------------------|--|--------------------------|----------------------|-------------------------------|--------------------|
| | | Resultados errados | Resultados faltantes | | |
| | | | | | |

Pontuação total da dupla = _____.

Atividade 2

Situação-Problema: Quantos pacotes de café?

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente R\$ 58,00, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é R\$ 2,00 e do pacote da marca B, R\$ 3,00.

Atividade 3

Situação-Problema: Qual sua escolha: CD ou DVD?

Considere a seguinte situação:

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R\$ 60,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$ 10,00 e um DVD R\$ 15,00.

a) Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R\$ 60,00?

b) Passados dois meses, Bianca resolveu fazer novas aquisições, porém notou que os preços de CD e DVD aumentaram para R\$ 12,00 e R\$ 16,00, respectivamente. Para compensar estes aumentos, Bianca pensou em gastar exatamente R\$ 70,00 para as compras musicais. Como ficariam as possibilidades de compra destes dois bens gastando-se exatamente R\$ 70,00?

2ª sessão: JOGO DO 'STOP' - Regras

Convidamos vocês a participarem de um jogo.

As regras do jogo são as seguintes:

- O jogo transcorre em três etapas, correspondentes a três situações: AS COMPRAS NA QUITANDA; OS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO e DINARLÂNDIA, cujos enunciados se encontram logo mais abaixo.
- O jogo será disputado entre dois grupos.
- As respostas serão assinaladas em caneta de tinta preta ou azul.
- Cada grupo deverá ler e interpretar os enunciados das situações-problema, registrando os resultados encontrados nas folhas recebidas.
- Após cada etapa, cada grupo se encarregará de verificar os resultados do grupo adversário, registrando a pontuação no espaço reservado, dispondo de um minuto para tal tarefa.

Cada etapa será encerrada em uma de duas condições possíveis:

1- Até o tempo limite, que está indicado em cada etapa ou sub-etapa;

ou

2- Quando o grupo disser a palavra de comando 'STOP', correspondendo a afirmação que encontrou todas as respostas. Em tal situação, o grupo adversário deverá prosseguir até se encerrar o tempo limite ou quando também disser a palavra 'STOP'.

Contagem dos pontos:

- RESPOSTA CORRETA: Cada resposta certa corresponde a 2 pontos ganhos.
- RESPOSTA ERRADA: Cada resposta errônea implica em desconto de 1 ponto.
- PONTO EXTRA: A percepção de falta de uma resposta correta do grupo adversário implica no ganho de 1 ponto, desde que seja registrada na folha da dupla adversária com caneta de tinta vermelha.
- PONTO POR ANTECIPAÇÃO: A dupla que antecipar sua participação dizendo 'STOP', terá o adicional de 1 ponto para cada 0,5 minuto de antecipação, desde que acerte TODAS as respostas.

A contabilização dos pontos poderá resultar positiva, nula ou negativa em cada etapa e ao final do jogo.

Vence o grupo que obtiver maior número de pontos, após todas as etapas.

Atividade 4

ETAPA 1: JOGO DAS COMPRAS NA QUITANDA. (Tempo limite= 4 minutos)

Cada dupla está recebendo um jogo de **CARTAS AZUIS**.

Os números indicados nas cartas representam os possíveis valores, em Reais, a serem gastos na situação abaixo.

Enunciado:

Uma dona-de-casa leva uma quantia de R\$ 18,00 para uma quitanda, a fim de comprar melão *ou* mamão, pelos preços unitários de R\$ 2,00 e R\$ 3,00, respectivamente.

Não desejando gastar os R\$ 18,00 para estas compras, quais os valores que a dona-de-casa poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco?

Para indicar as respostas, circule na tabela abaixo os números que correspondem aos possíveis valores para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco.

A seguir sobreponha com as cartas azuis os valores circulados.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |

Indique, se houver, em ordem crescente, os valores que ela **NÃO** poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco:

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 1: _____

Atividade 5

ETAPA 2: JOGO DOS SAQUES NO CAIXA ELETRÔNICO

Esta etapa é composta de 4 sub-etapas.

Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques.

Suponha que todos os caixas possuam suficientes cédulas para emissão.

a) Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R\$ 5,00 ou R\$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R\$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Marque (com X) na tabela abaixo todos os possíveis saques que poderiam ser realizados pelo usuário.

Explique seu raciocínio.

Tempo limite = 3 minutos

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |

Raciocínio:

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 2: _____

Atividade 6

b) Um segundo usuário entra no banco e deseja sacar R\$ 145,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R\$ 5,00, R\$ 10,00, R\$ 20,00 ou R\$ 50,00.

Preencha a 2ª coluna da tabela abaixo, indicando uma das duas possíveis respostas:

- SIM (SIM, é possível efetuar tal saque com as notas indicadas) ou
- NÃO (NÃO é possível efetuar tal saque com as notas indicadas).

Tempo limite = 8 minutos.

Se for possível realizar o saque, escreva na 3ª coluna uma das possíveis maneiras de serem emitidas as notas para o pagamento dos R\$ 145,00.

| Notas emitidas pelo caixa eletrônico | É possível ? (Sim ou Não) | Escreva uma maneira, se possível. |
|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| R\$ 5,00 e R\$ 10,00 | | |
| R\$ 5,00 e R\$ 20,00 | | |
| R\$ 5,00 e R\$ 50,00 | | |
| R\$ 10,00 e R\$ 20,00 | | |
| R\$ 10,00 e R\$ 50,00 | | |
| R\$ 20,00 e R\$ 50,00 | | |

Justifique abaixo a escolha do **NÃO** para a 2ª coluna:

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 3: _____

Atividade 7

c) Uma determinada agência deste banco oferece um serviço de caixa eletrônico com opções específicas, conforme se vê na tabela abaixo.

Tempo limite= 5 minutos.

| Caixa eletrônico | Cédulas emitidas |
|------------------|------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 |
| Caixa 2 | 10 e 20 |
| Caixa 3 | 20 e 50 |
| Caixa Especial | 2 e 10 |

Escreva, na tabela abaixo, quais os possíveis valores dos saques para cada caixa, até a quantia máxima de R\$ 50,00.

| | Cédulas emitidas | Saques permitidos |
|----------------|------------------|-------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 | |
| Caixa 2 | 10 e 20 | |
| Caixa 3 | 20 e 50 | |
| Caixa Especial | 2 e 10 | |

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 4: _____

Atividade 8

d) Um terceiro cliente entra na agência com serviço de caixa eletrônico específico, indicado na tabela abaixo. Ele deseja fazer um saque de R\$ 1060,00. Indique na 3ª coluna, escrevendo SIM ou NÃO, qual (is) o(s) caixa(s) eletrônico(s) do banco que permite(m) tal saque. Justifique.

| Caixa eletrônico | Cédulas emitidas | Saque de R\$ 1060,00 |
|------------------|------------------|----------------------|
| Caixa 1 | 5 e 10 | |
| Caixa 2 | 10 e 20 | |
| Caixa 3 | 20 e 50 | |
| Caixa Especial | 2 e 10 | |

Tempo limite= 4 minutos.

Justificativa:

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 5: _____

Atividade 9

ETAPA 3: DINARLÂNDIA

Em um reinado distante, de regime monarquista parlamentarista, existem cédulas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 dinares, que permitem pagar e receber troco nas transações monetárias mais usuais (em dinares).

O rei, excêntrico por natureza, resolveu, por decreto, extinguir as cédulas existentes, retirando-as de circulação. Então, instituiu operações de pagar e receber troco, somente com novas cédulas de 4 e 6 dinares.

a) O primeiro-ministro argumenta com o rei que a utilização de cédulas de 4 e 6 dinares é matematicamente imprópria.

Cada grupo deve escrever uma declaração, embasada em algum argumento, de preferência matemático, mostrando se o grupo concorda ou discorda do primeiro-ministro.

Argumento:

A seguir, cada grupo deverá expor seu argumento ao adversário. Terminada a exposição, cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento do adversário:

() Argumento correto.

ou

() Argumento incorreto

(se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo)

Motivo: _____

Tempo limite = 2 minutos.

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 6: _____

Atividade 10

b) O rei, descontente com seu primeiro-ministro, mas não podendo demiti-lo por causa disso, resolve estabelecer um duelo a nível nacional para resolver a questão de quais deveriam ser as duas moedas nacionais, achando que este concurso o ajudaria a desacreditar o primeiro-ministro, comprovando o mérito de seu decreto.

O rei assim proclama:

“Hoje e somente hoje, abro inscrições para os súditos reais que desejam colaborar com o Tesouro Nacional. Será paga a quantia de cem mil dinares ao(s) súdito(s) que me mostrar(em) quais são as maneiras que podem ser estabelecidas as duas cédulas necessárias para dar ou receber qualquer quantia monetária em dinares. Ainda, dentre as várias maneiras, o(s) súdito(s) deverá(ão) argumentar qual seria a mais cabível dentre todas, de modo a promover o bem estar monetário da nação. A regra única é que as cédulas deverão ser números naturais menores que 7. A única exceção desta regra é a impossibilidade de emissão de cédula de 1 dinar”.

Como súdito, cada grupo deverá procurar e achar a solução.

Tempo limite: 10 minutos.

RESPOSTAS CORRETAS: _____

RESPOSTAS ERRADAS: _____

PONTO EXTRA: _____

PONTOS POR ANTECIPAÇÃO: _____

TOTAL 7: _____

PONTUAÇÃO FINAL DO GRUPO: _____

3ª sessão:**Atividade 11****Situação-Problema: Quantos pacotes de café?**

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – do tipo A (normal) e do tipo B (descafeinado). O preço do pacote da marca A é R\$ 2,00 e do pacote da marca B, R\$ 3,00.

Sabendo-se que ele gastou exatamente R\$ 58,00, qual a equação que representa as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B?

Atividade 12**Situação-Problema: Saques no banco.**

Um cliente de um banco deseja sacar R\$ 65,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R\$ 5,00 e de R\$ 20,00.

a) Com quantas cédulas de R\$ 5,00 e/ou de R\$ 20,00 ele poderá receber o dinheiro?

b) Qual é a equação que representa essa situação?

Atividade 13

Situação-Problema: CDs ou DVDs?

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs.

Se um CD custa R\$ 12,00 e um DVD R\$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R\$ 70,00? E qual a equação que representa este problema?

Atividade 14

Síntese.

Você irá retomar os problemas anteriores, preenchendo a tabela abaixo.

Assim, procure o título dos problemas, quantas e quais foram as soluções encontradas, assim como escreva as equações correspondentes a cada situação-problema apresentada.

Retome os problemas anteriores e preencha o quadro abaixo.

| Problema | Título | Soluções | | Equação |
|----------|--------|----------|--------|---------|
| | | Quantas? | Quais? | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

Observando o quadro acima, como você estabeleceria um critério para se prever quando uma Equação Diofantina Linear tem ou não solução.

ANEXO B

DOCUMENTOS DA PESQUISA

BREVE CARACTERIZAÇÃO DOS ALUNOS

| | |
|-----------------|--------------|
| Nome: | Série atual: |
| Profissão: | |
| Trabalho atual: | |
| Idade: | |

AUTORIZAÇÃO

Meu nome é Wagner Marcelo Pommer e sou aluno do Curso de Pós-Graduação da PUC/SP.

Realizo uma pesquisa sobre problemas matemáticos relacionados à Economia.

Preciso de alunos voluntários para participar de três encontros de aproximadamente 1 hora nos dias 04, 11 e 18 de novembro, aos sábados, das 9 às 10 horas, na Escola Estadual Nossa Senhora Aparecida, situada a Rua Álvaro Fragoso, 734, Vila Carioca, São Paulo.

Solicito a autorização dos senhores pais ou responsáveis para o comparecimento nas **três sessões**, para que a pesquisa tenha sucesso.

Nome.....

Assinatura:.....

São Paulo, ____ de _____ de 2006.

CARTA CONVITE

Meu nome é Wagner Marcelo Pommer e sou aluno do Curso de Pós-Graduação da PUC/SP.

Realizo uma pesquisa sobre problemas matemáticos relacionados à Economia.

Preciso de alunos voluntários para participar de três encontros de aproximadamente 1 hora nos dias 04, 11 e 18 de novembro, aos sábados, das 9 às 10 horas, na Escola Estadual Nossa Senhora Aparecida, situada a Rua Álvaro Fragoso, 734, Vila Carioca, São Paulo.

É necessário o comparecimento nas **três sessões**, para que a pesquisa tenha sucesso.

Nome.....

Estarei presente nas três sessões.

Assinatura:.....

São Paulo, ____ de _____ de 2006.

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Rua Marques de Paranaguá 111, Consolação, São Paulo
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Termo de Compromisso

Este termo tem o objetivo de esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente no que se refere a utilização dos dados coletados.

O material coletado – as atividades realizadas, as gravações de vídeo, as transcrições das fitas gravadas, os registros escritos – servirá de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de aprendizagem em sala de aula. O acesso a esse material é de uso exclusivo do grupo de pesquisa em Educação Algébrica. Os nomes da Instituição e dos participantes serão omitidos ou mudados a fim de resguardar a identidade dos sujeitos.

As informações provenientes das análises do material poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos.

São Paulo, ____ de novembro de 2006

Dr^a. Silvia Dias Alcântara Machado – líder do grupo

Wagner Marcelo Pommer - pesquisador

Sujeito da pesquisa

Relação de alunos por agrupamento nas três sessões.

| Alunos | 1ª Sessão | | 2ª Sessão | 3ª Sessão | Série |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| Ana | D ₁ | G ₁ | Falta | Falta | 3ª |
| Bárbara | D ₁ | | G ₁ | Falta | 3ª |
| Camila | D ₂ | | | G ₁ | 3ª |
| Dora | D ₂ | | | | |
| Eva | D ₃ | G ₂ | G ₂ | G ₂ | 1ª |
| Fernando | D ₃ | | | | 1ª |
| Gerson | U ₃ | | | | 1ª |