UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

Branas em Supergravidade

Leandro Ibiapina Beviláqua

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de mestre em Ciências.

Orientador:
Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Ricardo Ivan Medina Bascur (UNIFEI)

São Paulo
2006

À minha família: na alegria e na tristeza, vocês são os meus mais preciosos bens.

Sumário

Agradecimentos[1]

Os conceitos de física me vêm à mente junto com as imagens da minha turma de graduação (Alan, Aristeu, Brunos, Lucas, Felipe, Ednílson, Franciné, Wagner, Kátia, David, Valderlan e Victor). A infinidade de discussões sobre os mais diversos assuntos (mesmos os banais) e a amizade que eles me proporcionaram são parte das minhas melhores memórias. Para a minha formação, contribuíram também os professores Carlos Alberto, Victor Rivelles, Adílson da Silva, Marcelo Gomes e Nathan Berkovits. Agradeço a todos por isto.

Muito do que escrevi nesta dissertação tornou-se compreensível para mim graças às inúmeras discussões com as pessoas que conheci durante o mestrado. Em particular, agradeço à Jeferson de Oliveira, Rodrigo Fontana, Carlos Molina e Alan Bendassoli com quem muito aprendi sobre Relatividade Geral, principalmente buracos-negros. Pedro Lauridsen me ajudou bastante em tópicos relacionados à branas e correspondências calibre/gravitação. Sou muito grato também à Vladimir Pershin, Carlos Nuñez e João Eduardo, que me ajudaram quando eu me enleei nas cordas, e à João Basso, com quem discuti física geral horas a fio. Pela leitura deste texto e valiosos comentários, agradeço à Kátia Cristine, João Eduardo e Geová Maciel.

Em especial, agradeço à Sérgio Jardino, com quem dividi momentos de ignorâncias e descobertas nos longos cálculos de símbolos de Christoffel e vetores de Killing (os "Matadores") e, principalmente, por me ajudar a ver a física ao final de tantas contas. Obrigado por praticamente escrever o quarto capítulo comigo e pelas sugestões em vários trechos deste texto.

Ensinar não é dar respostas. Agradeço ao professor Victor O. Rivelles pelas contínuas lições, exigindo perguntas bem-formuladas e pelas correções, observações e comentários sobre este texto. Obrigado também pela orientação em vários aspectos, professor, e pela paciência em desfazer os nós que eu faço em Teoria de Cordas e Supersimetria.

A cada nova informação que adquiro, agradeço à José Belton, meu pai, por tantas vezes repetir "É seu e ninguém lhe toma o que você tem na mente". Todo e qualquer texto que eu produza é eternamente dedicado à minha mãe, Lúcia Vânia, quem primeiro me apresentou aos livros. Por tudo que sou, tudo que lembro de bom na infância e pelo contínuo apoio, agradeço a vocês, mãe e pai, por me proporcionarem um ambiente tão bom para se viver.

Pelo abrigo e, mais importante, por ter me mostrado um mundo novo, sou eternamente grato aos meus tios Vladimir e Josete. Não estaria nem próximo de onde estou sem a direta participação de vocês.

Por acreditar em mim e me erguer quando penso não ser mais capaz, agradeço à Kátia Cristine. Obrigado pela paciência, pelas críticas e conselhos, pelo carinho e atenção, por ser tão excepcional e me fazer sorrir nas horas tristes e chorar nas felizes. Muito em mim é dedicado a você, Kátia.

[1]Pelo apoio financeiro, agradeço às Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Prólogo

Depois de anos de trabalho
Fez o carpinteiro um dia
Uma ferramenta de belo talho
Que não tinha serventia.

Mas o objeto era bem feito
E encantou toda a cidade
Apesar do grande defeito
De não ter real utilidade.

Colocaram até um encarte
Procurando quem soubesse dizer
O que, com essa obra de arte,
Deveríamos então fazer.

Até que um dia surgiu
Um nobre e sábio cidadão
Com um problema sutil
Do qual tal objeto era solução.

É essa busca incessante
Da mais perfeita união
Que torna o mundo fascinante
E dá à minha vida uma direção.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de rever a obtenção das soluções do tipo brana em Supergravidade e contém uma dedução detalhada das soluções *extrema* e *negra*. A fim de motivar algumas escolhas feitas ao longo do cálculo, o trabalho inclui uma breve revisão dos conceitos advindos da Teoria de Cordas e Supersimetria. Esta revisão nos permitirá ainda relacionar as soluções da Supergravidade com as branas da Teoria de Cordas e tecer considerações sobre o papel desta relação na dualidade entre teorias de calibre e gravitação.

Abstract

This work intends to review the brane solutions of Supergravity and contains a detailed deduction of the *extremal* and *black* solutions. In order to provide some motivations to the choices through the calculation, this work includes a brief review of some concepts from String Theory and Supersymmetry. This review will enable us to relate the Supergravity solutions to String Theory's branes and to make considerations about the role of this relation in the duality between gauge and gravity theories.

Capítulo 1

Introdução histórica e motivações

No ano de 2005, celebramos o Ano Mundial da Física, em comemoração ao centenário da Teoria da Relatividade Especial de Einstein. Esta teoria resolveu muitos dos problemas que afligiam os físicos no início do século XX. Entretanto, como é comum em física, novos e mais profundos desafios surgiram com o advento desta teoria pois a Relatividade Especial não inclui fenômenos gravitacionais ou quânticos. Foi o próprio Einstein quem, em 1916, mostrou como descrever fenômenos gravitacionais no contexto relativístico com sua Teoria Geral da Relatividade.

Uma descrição quântica consistente com a Relatividade Especial tomou muito mais tempo para ser desenvolvida. Alguns dos maiores físicos do nosso tempo (Paul Dirac, Richard Feynman, Murray Gell-Mann, Steven Weinberg e Gerard 't Hooft, para citar somente alguns) debruçaram-se sobre o problema e obtiveram grandes sucessos com a chamada Teoria Quântica dos Campos. Uma grande gama de fenômenos é atualmente explicada (com enorme sucesso e precisão) pelo Modelo Padrão das Interações Fundamentais, que é uma teoria de campos quânticos e inclui as interações forte, fraca e eletromagnética. É notória a ausência da interação gravitacional no Modelo Padrão. Muitas tentativas foram feitas para desenvolver uma teoria de campos quânticos para a gravidade usando os métodos da Teoria Quântica de Campos. Todas falharam.

Desde os anos 80, um crescente número de físicos têm se dedicado ao estudo da Teoria de Cordas que propõe que os entes fundamentais do Universo são cordas, em vez de pontos, como são considerados no Modelo Padrão. Essa teoria é talvez a mais promissora dentre as que se propõem a descrever a Relatividade Geral num contexto quântico. Embora ainda não confirmada, a Teoria de Cordas já nos fornece um enorme desafio e uma estarrecedora conclusão: a teoria exige um espaço-tempo de dez dimensões para ser consistente.

Esta conclusão parece muito distante do nosso Universo quadridimensional para ser levada a sério. Entretanto, muitos esforços foram feitos para mostrar que, embora estranha, a idéia de dimensões extras pode ser perfeitamente consistente com a física que conhecemos hoje.

1.1 Antes de mais nada: Por que branas são interessantes?

Uma vez dispostos a abandonar a idéia de que os constituintes elementares da Natureza são pontos (sem dimensão espacial) para considerá-los como objetos com uma dimensão espacial (cordas), é tentador dar um passo adiante e considerar entes fundamentais com mais de uma dimensão. Neste trabalho, pretendemos estudar as membranas ou, mais geralmente, p-branas, que são objetos estendidos em p direções. Das várias razões para o crescente interesse em branas[1], citarei apenas dois exemplos.

A Teoria de Cordas possui p-branas de Dirichlet (hiperplanos onde estão presas as extremidades das cordas abertas com condições de contorno de Dirichlet), também conhecidas como Dp-branas. Estes objetos começaram a ser ativamente estudados a partir de 1995, com a Segunda Revolução das Cordas, quando se descobriu que as Dp-branas são fundamentais para o entendimento do (obscuro) regime não-perturbativo da Teoria de Cordas.

Outra interessante descoberta ocorreu quando, em 1997, Juan Maldacena apresentou a conjectura [3] de que a Teoria de Cordas em 10 dimensões num espaço $AdS_5 \times S^5$ descreve a mesma física contida numa Teoria de Campos supersimétrica e conforme em quatro dimensões. Esse trabalho deu início ao que chamamos hoje de "dualidade calibre/gravitação"e o papel das branas é fundamental no estabelecimento dessa dualidade, como veremos.

Assim, em poucas palavras, branas são interessantes por que elas são ingredientes fundamentais da nova física das cordas. Além disso, algumas tentativas de obter o Modelo Padrão tal como o conhecemos a partir da Teoria de Cordas necessitam deste conceito.

1.2 Primórdios e a Primeira Revolução das Cordas (1968 - 1985)

A teoria de cordas surgiu como uma tentativa de explicar uma série de propriedades da interação forte que haviam sido observadas experimentalmente[2]. Entretanto, embora tivesse tido êxito em alguns pontos, a teoria sofria de uma série de dificuldades e foi perdendo seguidores devido aos crescentes sucessos da Cromodinâmica Quântica. Os principais problemas da teoria eram:

- A teoria não descrevia férmions;
- A presença de partículas com massa imaginária ($M^2 < 0$), chamadas "táquions";
- Seriam necessárias 26 dimensões no espaço-tempo para que a invariância de Lorentz fosse preservada na teoria quântica;
- A presença de partículas não-massivas fundamentais de spin 2. (Não são conhecidos hádrons com essa característica).

Apesar dos problemas acima, vários físicos (entre eles Neveu, Schwarz e Ramond) continuaram trabalhando na teoria e descobriram que férmions podiam ser incluídos por meio da supersimetria[3], dando origem à Teoria de Supercordas. Há diferentes maneiras de se incluir esta simetria na Teoria de Cordas. No formalismo de Neveu-Ramon-Schwarz, por exemplo, esta é imposta na folha-mundo somente. Entretanto, como foi descoberto por Gliozzi, Scherk e Olive, uma projeção pode ser feita de modo a obter uma teoria com supersimetria no espaço-tempo e isso automaticamente elimina o táquion do espectro. Além disso, a supersimetria diminui a dimensão crítica para 10 e foi mostrado que nesta dimensão a teoria é livre de anomalias. No entanto, o último dos problemas supracitados não foi, de fato resolvido, pois não é possível retirar a partícula de spin 2 que aparece no espectro. Entretanto, isso passa a ser uma qualidade da

[1] Nos últimos 10 anos, mais de 2.000 trabalhos com a palavra-chave "Brane"foram publicados e, recentemente, foi publicado um livro inteiramente dedicado ao assunto [1].

[2] Tais propriedades não serão tratadas aqui. Para informações sobre este período da teoria, indico as referências [6] e [7].

[3] A supersimetria é a simetria que relaciona bósons e férmions. Teremos oportunidade de ver mais detalhes da supersimetria no capítulo 3.

teoria se a interpretarmos como uma teoria para descrever todas as interações fundamentais em vez de somente a interação forte. Embora não fosse conhecida uma teoria da gravidade quântica, sabia-se, na época, que o *quantum* do campo gravitacional (chamado gráviton) deveria ter spin 2 e, por ser a gravidade uma força de alcance infinito, sua partícula portadora deve ser não-massiva.

Assim, por volta de 1985, tínhamos uma teoria para a interação forte (QCD) e uma candidata para uma teoria de unificação (cordas)[4]. Mas muitos problemas ainda persistiam nesta nova interpretação para a Teoria de Cordas. Dentre estes problemas, estavam:

- Pouco ou nada se conhecia sobre a teoria além do regime perturbativo;
- Havia **cinco** teorias distintas e consistentes[5] como candidatas para a teoria fundamental.

Estas dificuldades só começaram a ser resolvidas em meados dos anos 90.

1.3 Supergravidade (1970 - 1990)

Nesse ínterim, desesenvolveu-se a Teoria da Supergravidade que é a versão supersimétrica da Relatividade Geral de Einstein. Esta união parecia frutífera devido à interessante propriedade que teorias supersimétricas têm de possuir, no mesmo multipleto, um número igual de férmions e de bósons. Esta característica parecia justamente o que precisávamos numa teoria de gravidade quântica, pois, todas as tentativas anteriores fracassaram por serem irremediavelmente não-renormalizáveis. A esperança de que os gráficos de Feynman problemáticos (com *loops*) se cancelassem entre si residia na idéia de que gráficos bosônicos e fermiônicos têm sinais opostos e a supersimetria garante que haja a mesma quantidade de ambos.

Infelizmente, a supersimetria não conseguiu resolver todas as divergências da teoria [8]. Apesar disso, a Supergravidade continuou a ser um campo de intensa pesquisa. Surpreendentemente, a Supergravidade está intimamente relacionada à Teoria de Cordas, pois a ação da Supergravidade em 10 dimensões aparece como a ação efetiva dos campos não-massivos de uma teoria de cordas fechadas com invariância conforme sobre a folha-mundo. Também foram encontradas relações entre a Supergravidade em 11 dimensões e a Teoria de Cordas por volta de 1995.

1.4 A Segunda Revolução das Cordas (1995 -)

Uma série de dualidades entre as cinco teorias de cordas foram observadas. A partir de 1995, durante o encontro anual de pesquisadores na área de cordas (Strings 95 [2]), surgiram fortes indicações de que as cinco Teorias de Cordas até então conhecidas e a Supergravidade em 11 dimensões são diferentes limites de uma mesma teoria, a chamada Teoria M. A partir daí, a Teoria de Cordas voltou a ter um crescente interesse, com a proposta da Teoria M no centro das atenções. Assim, por vezes, o Strings 95 é tomado como o marco inicial da Segunda Revolução das Cordas.

Além da descrição unificada das cinco Teorias de Cordas, a Segunda Revolução das Cordas lançou luz sobre o regime não-perturbativo. Também em 1995, um trabalho de Joseph Polchinski mostrou que as D-branas, que até então tinham o papel de prender as extremidades da corda

[4]Esta mudança na interpretação da Teoria de Cordas e a descoberta de que esta é livre de anomalias é, por vezes, chamada de Primeira Revolução das Cordas.

[5]O problema disto é filosófico: supõe-se que a teoria mais fundamental seja única e inevitável!

aberta, podem carregar cargas de Ramond-Ramond e essa dupla funcionalidade têm permitido avanços no sentido de mostrar a estreita relação entre teorias de calibre e gravitacionais.

Em 1996, Andrew Strominger e Cumrum Vafa descobriram como usar configurações de cordas para calcular a entropia de um buraco negro. Esta entropia foi calculada décadas antes por Stephen Hawking, usando argumentos termodinâmicos e propriedades quânticas nas proximidades de um buraco negro. O cálculo de Strominger e Vafa representa uma indicação de como obter esta entropia através da contagem direta dos estados acessíveis ao sistema o que permitiria um entendimento microscópico da origem desta entropia.

Outro grande avanço, como já comentamos, foi o trabalho de Juan Maldacena de 1997. A *Conjectura de Maldacena*, como ficou conhecida, estabelece uma correspondência entre uma Teoria de Cordas (10 dimensões), numa geometria $AdS^5 \times S^5$, e uma teoria de campos com simetria conforme (em 4 dimensões) e com $\mathcal{N} = 4$ supersimetrias (16 supercargas), motivo pelo qual a conjectura é também chamada[6] de *Correspondência AdS/CFT* [3, 4]. A idéia de que informações possam ser guardadas numa dimensão mais baixa jé era conhecida. Como sabemos, a holografia é a técnica por meio da qual, uma imagem tridimensional é representada numa superfície bidimensional sem que haja perda de informações. E é por essa razão que às vezes é dito que a Conjectura de Maldacena é uma manifestação do *Princípio Holográfico.*

Todas estas idéias deram origem à chamada *Cosmologia das Branas*, ou *Mundo Brana*, em que o Universo tal como o vemos (quadridimensional e descrito pelo Modelo Padrão) está confinado numa brana e, por esta razão, não teríamos acesso às dimensões extras. Recentemente, foi apresentado um trabalho buscando deduzir modificações que a existência de dimensões extras causaria nas ondas gravitacionais emitidas por um buraco negro perturbado [5].

Apesar dos sucessos em muitos aspectos, a teoria tem ainda diversos problemas. São alguns deles:

- Não se conhece ainda a teoria de campos de cordas. Ou seja, a quantização canônica é feita a partir de operadores de posição e momentum (como é feito em Mecânica Quântica) e não a partir de campos;
- Não há uma demonstração da Conjectura de Maldacena. A conjectura relaciona uma teoria de *campos* (ou seja, segundo-quantizada), com a teoria de cordas que é primeiro-quantizada;
- Num certo sentido, a teoria não é fundamental. Embora dê origem a todas as interações e partículas, é necessário, *a priori*, um espaço-tempo onde a corda é posta para se propagar. Assim, o espaço-tempo é posto à mão[7]!
- Não há até o momento evidências experimentais que embasem a supersimetria;
- A teoria não prediz como inevitáveis e únicas as conclusões de que nosso Universo tenha 3+1 dimensões, que a supersimetria é quebrada no nível de energia a que temos acesso e nem que não há escalares não-massivos;
- Nenhuma previsão inédita e ao alcance da nossa tecnologia atual foi feita pela teoria, para que possamos verificá-la.

[6] CFT = *Conformal Field Theory.*

[7] A Teoria da Gravitação Quântica dos Laços, que seria uma alternativa à Teoria de Cordas para a gravidade quântica (mas não para uma teoria de unificação!), não sofre deste problema, pois o espaço-tempo é fornecido pela teoria. Para uma comparação entre as teorias, veja [9].

Assim, a Teoria que Cordas aguarda por uma Terceira Revolução das Cordas. Resta-nos trabalhar para ver.

1.5 Roteiro

O capítulo 2 apresenta uma breve introdução à Teoria de Cordas Bosônicas e sua quantização. Neste capítulo, a D-brana é introduzida com o objetivo de permitir o uso de condições de contorno de Dirichlet. Além disso, mostramos como a dualidade T sugere que a teoria deve conter branas. No capítulo 3, fazemos a apresentação da álgebra da Supersimetria e mostramos algumas das suas conseqüências e suas representações. A introdução de férmions na Teoria de Cordas Bosônicas é discutida brevemente, bem como as Teorias de Supercordas tipos I e II. Em seguida, no capítulo 4, discutimos rapidamente as ações da Supergravidade e encontramos as equações de movimento para uma ação genérica mas similar às da Supergravidade. Introduzimos o conceito de p-branas como uma solução clássica espacialmente estendida, deduzimos as soluções extrema e negra e tecemos alguns comentários sobre estas soluções. Terminamos com algumas considerações finais.

Uma coletânea das convenções e fórmulas utilizadas no texto encontra-se no apêndice A. O apêndice B contém uma discussão sobre espinores em dimensões arbitrárias. O último apêndice introduz o formalismo de formas diferenciais.

Capítulo 2

Cordas

Faremos aqui uma rápida exposição da Teoria de Cordas dando ênfase apenas aos pontos mais relevantes para a teoria de branas. Há excelentes livros e revisões da teoria de cordas [1, 6, 7, 10, 11], onde o leitor deve recorrer ante a quaisquer omissões de detalhes que certamente serão feitas aqui.

2.1 Corda Bosônica

Como é sabido (ver, por exemplo, [11, 12]), uma partícula de massa m livre é descrita num diagrama de espaço-tempo por uma linha, a chamada *linha-mundo*. Sua ação é proporcional ao invariante $ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ ($\mu, \nu = 0, \ldots, D-1$, em que D é a dimensão do espaço-tempo) e é dada por:

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \tag{2.1}$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski (cf. eq. (A.12)). A ação acima é claramente independente da escolha do parâmetro τ (que consideramos adimensional) e, portanto, é dita *invariante por reparametrização*.

Para introduzir o conceito de uma corda como um objeto fundamental, seguimos o raciocínio do caso da partícula. O movimento da corda é descrito, então, por uma superfície no diagrama de espaço-tempo (*folha-mundo*), em que impomos uma invariância por reparametrização dos dois parâmetros (adimensionais) sobre essa superfície[1] (digamos, $(\tau, \sigma) \equiv (\xi^0, \xi^1)$). A métrica $\eta_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, induz uma métrica na folha-mundo:

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu, \qquad i, j = 1, 2 \tag{2.2}$$

onde ∂_0 (que às vezes representaremos por um ponto) e ∂_1 (que às vezes representaremos por uma linha) representam, respectivamente, uma derivada em relação à τ e a σ. Baseados no caso da partícula (em que a ação é proporcional ao comprimento da linha ds), escrevemos a ação da corda proporcional à área da folha-mundo, obtendo a celebrada *ação de Nambu-Goto*:

$$S_{NG} \qquad = -T \int dA = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h} \tag{2.3}$$

[1]Esta invariância por reparametrização é o que permite a interpretação de que a corda é um objeto fundamental, ou seja, sem estrutura interna. Num objeto comum (feito de átomos), esta invariância não é possível, já que temos uma parametrização natural no parâmetro σ (a quantidade de átomos a partir de uma das extremidades, por exemplo).

$$= -T\int d\tau d\sigma\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} = -T\int d^2\xi\mathcal{L}(\dot{X}, X'; \sigma, \tau) \tag{2.4}$$

em que T deve ter dimensão de $[comprimento]^{-2}$ (para que a ação S seja adimensional) no nosso sistema de unidades, em que $c = \hbar = 1$. A grandeza T é identificada com a tensão da corda e relaciona-se ao comprimento da mesma por $T = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}$.

Os momentos canonicamente conjugados na lagrangeana de Nambu-Goto (2.3) são:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} = -T\frac{(\dot{X}X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \equiv \mathcal{P}^\tau_\mu \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -T\frac{(\dot{X}X')X'_\mu - (X')^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \equiv \mathcal{P}^\sigma_\mu, \tag{2.6}$$

A ação de Nambu-Goto é inconveniente para alguns propósitos devido à raiz quadrada. Uma forma de reescrevê-la sem esta raiz foi encontrada por Brink, Di Vecchia, Howe, Deser e Zumino quando tentavam incluir supersimatria local na folha-mundo. Esta ação é mais conhecida como *ação de Polyakov*, porque foi esse cientista quem primeiro a quantizou usando o formalismo de integrais de trajetória [13]. A ação de Polyakov possui uma métrica γ_{ij} *independente* na folha-mundo, que é usada para levantar e baixar índices das coordenadas (ξ^0, ξ^1) e tem uma assinatura Lorentziana $(-,+)$

$$S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma(-\gamma)^{1/2}\gamma^{ij}\partial_i X^\mu\partial_j X_\mu \tag{2.7}$$

onde $\gamma = \det\gamma_{ij}$.

A ação (2.7) é invariante por:

- Transformações de Poincaré no espaço-tempo:

$$\delta X^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + \epsilon^\mu, \qquad \delta\gamma_{ij} = 0, \qquad (\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}) \tag{2.8}$$

  em que $\Lambda^\mu{}_\nu$ e ϵ^μ são os parâmetros (infinitesimais e constantes) das transformações de Lorentz e translação, respectivamente.

- Reparametrização na folha-mundo (ou seja, $\xi^i \to \xi^i + \lambda^i$):

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{ij} &= \lambda^k\partial_k\gamma_{ij} + \partial_i\lambda^k\gamma_{jk} + \partial_j\lambda^k\gamma_{ik} \\ \delta X^\mu &= \lambda^i\partial_i X^\mu \\ \delta(\sqrt{-\gamma}) &= \partial_i(\lambda^i\sqrt{-\gamma}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

- Transformação conforme na folha-mundo:

$$\delta X^\mu = 0, \qquad \delta\gamma_{ij} = f(\xi)\gamma_{ij}. \tag{2.10}$$

  sendo $f(\xi)$ uma função arbitrária[2] das coordenadas da folha-mundo.

[2]Como veremos, a ação de Polyakov fornece uma equação de movimento algébrica (cf. eq. 2.12) para a métrica γ_{ij}. Esta equação, que relaciona γ_{ij} à métrica induzida h_{ij}, não determina o fator de proporcionalidade $f(\xi)$, o que justifica a invariância (2.10). Esta invariância significa fisicamente que distâncias sobre a folha mundo medidas com a métrica γ_{ij} não têm um significado físico, já que é dependente de uma escolha arbitrária de $f(\xi)$.

Da ação de Polyakov, seguem duas equações de movimento[3]: uma para a variação de γ_{ij} e outra para a variação de X^μ.

Consideramos a métrica γ_{ij} como um campo independente e, portanto, podemos tratar a ação (2.7) como o acoplamento de D campos escalares X^μ numa teoria bidimensional de gravidade e, deste modo, a variação desta ação é proporcional ao tensor energia-momentum[4]. O princípio da mínima ação estabelece que a variação de (2.7) com relação à métrica anula-se: $\delta_{\gamma_{ij}} S = 0$. Assim, introduzindo a notação $X \cdot X \equiv X^\mu X_\mu$, temos:

$$\delta_{\gamma_{ij}} S = 0 \Rightarrow \qquad 0 = \partial_i X \cdot \partial_j X - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\gamma^{kl}\partial_k X \cdot \partial_l X \equiv T_{ij} = \tag{2.11}$$

$$= h_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\gamma^{kl}h_{kl} = 0, \tag{2.12}$$

em que usamos (2.2) na segunda linha para escrever em termos de h_{ij}.

A expressão (2.12) nos mostra que a métrica γ_{ij} é proporcional à métrica induzida: $\gamma_{ij} = f(\xi)h_{ij}$. Substituindo γ_{ij} na ação de Polyakov, temos:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\xi\sqrt{f^2(\xi)h}(f^{-1}h^{ij})h_{ij} = -T\int d^2\xi\sqrt{h} = S_{NG},$$

o que mostra a equivalência das ações (2.3) e (2.7) no nível clássico (ou seja, usando as equações de movimento). Quanticamente, esta equivalência não é trivial.

Variando a ação com relação ao campo X^μ, temos a equação:

$$\partial_i\left[\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\partial_j X^\mu\right] = 0. \tag{2.13}$$

Os termos de superfície anulam-se devido a escolha de condições de contorno apropriadas. Estas condições dependem do tipo de corda, como veremos a seguir.

Cordas fechadas não têm pontos preferenciais e, se considerarmos $\sigma \in [0, 2\pi]$, é natural impormos a condição de periodicidade:

$$X^\mu(\sigma + 2\pi) = X^\mu(\sigma). \tag{2.14}$$

Para o caso da corda aberta, duas possibilidade são evidentes: as extremidades da corda podem estar livres ou presas. O primeiro caso é chamado *condição de contorno de Neumann:*

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma} = 0 \qquad\qquad (nas\ \ extremidades). \tag{2.15}$$

O segundo caso é chamado *condição de contorno de Dirichlet:*

$$X^\mu = constante \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} = 0 \qquad\qquad (nas\ \ extremidades). \tag{2.16}$$

A condição de Dirichelet embora dê uma solução matemática para o problema de zerar a variação da ação na fronteira, não foi considerada por muitos anos devido à interpretação física que ela

[3]Na seção 4.1.1, fazemos deduções detalhadas de equações de movimento em ações gravitacionais para campos escalares, para a métrica e para uma n-forma.

[4]Poderíamos, neste ponto, pensar na introdução de um termo do tipo Einstein-Hilbert ou um termo cosmológico para a métrica da folha-mundo. Entretanto, o primeiro não possui dinâmica em duas dimensões (dependendo apenas da topologia do espaço) e o segundo, se introduzido, conduziria a equação de movimento $\gamma_{ij} = 0$, que dá uma dinâmica trivial.

exige. Como dissemos, essa condição indica que a extremidade da corda esteja presa. Mas presa em que? Como foi antecipado no capítulo 1, a solução para o impasse é a introdução de um novo objeto na teoria. Dizemos que o lugar geométrico da extremidade, uma hipersuperfície de p dimensões, é um objeto físico (a Dp-brana de Dirichlet). Observe que se usarmos condições de contorno de Neumann em todas as coordenadas espaciais, o local geométrico da extremidade é todo o espaço (pois não há nenhuma restrição: extremidades livres!) e, portanto, podemos interpretar um espaço-tempo de N dimensões como uma $D(N-1)$-brana de Dirichlet.

Desejamos agora resolver as equações de movimento para encontrar $X^\mu(\tau,\sigma)$. A métrica da folha-mundo tem três parâmetros livres (dois parâmetros da invariância por reparametrização (λ^i) e mais um da invariância conforme (f)) e podemos fixá-los escolhendo o chamado *calibre conforme* que consiste em tomar a métrica da folha-mundo como uma métrica de Minkowski:

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Neste calibre, as equações (2.5), (2.6), (2.13) e (2.11), ficam:

- Momenta:
$$\mathcal{P}^\tau_\mu = T\dot{X}_\mu \quad , \quad \mathcal{P}^\sigma_\mu = -TX'_\mu; \tag{2.18}$$

- Equação de movimento:
$$X''^\mu - \ddot{X}^\mu = 0; \tag{2.19}$$
cuja solução geral é $X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left[X^\mu_L(\tau+\sigma) + X^\mu_R(\tau-\sigma)\right]$.

- Equações de vínculos:
$$\left.\begin{array}{c} T_{00}=0 \text{ e } T_{11}=0 \text{ implicam } \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \\ T_{01}=0 \text{ e } T_{10}=0 \text{ implicam } \dot{X}\cdot X' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\dot{X} \pm X')^2 = 0. \tag{2.20}$$

Vejamos a solução para cada tipo de corda.

Corda aberta. Quando condições de Neumann[5] são aplicadas a esta solução, as ondas que se propagam para direita X_R e as que se propagam para esquerda X_L ficam relacionadas e fornecem:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu_0 + \ell_s\sqrt{2}\alpha^\mu_0\tau + i\sqrt{2}\ell_s\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n \cos n\sigma e^{-in\tau}, \tag{2.21}$$

em que x^μ_0 é a posição do centro de massa da corda e α^μ_n são os modos de oscilação na expansão de Fourier. O momento linear p^μ do centro de massa da corda descrita pela solução acima é ($\sigma \in [0,\pi]$):

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\mu\tau} d\sigma = \frac{\alpha^\mu_0}{\ell_s\sqrt{2}} \tag{2.22}$$

Corda fechada. Por não haver uma condição de contorno, as funções X_R e X_L não se relacionam como no caso da corda aberta e temos duas expansões diferentes. Entretanto, a condição de periodicidade (2.14) relaciona os modos zero das duas soluções:[6]

$$\bar{\alpha}^\mu_0 = \alpha^\mu_0; \qquad X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu_0 + \ell_s\sqrt{2}\alpha^\mu_0\tau + i\frac{\sqrt{2}\ell_s}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha^\mu_n e^{-in(\tau-\sigma)} + \bar{\alpha}^\mu_n e^{-in(\tau+\sigma)}\right). \tag{2.23}$$

[5]As condições de Dirichlet serão tratadas na seção 2.7.

[6]Este fato é bastante interessante, pois o modo zero está relacionado ao momento da corda (cf. eqs. (2.22) e (2.24)). A igualdade entre os modos zeros assegura que a corda tenha um momento bem definido.

Para o momento linear, temos a relação:

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\mu\tau} d\sigma = 2\frac{\alpha_0^\mu}{\ell_s\sqrt{2}} \tag{2.24}$$

(na corda fechada, consideramos $\sigma \in [0, 2\pi]$).

Obviamente, uma corda aberta pode ter condições de Neumann para algumas coordenadas e de Dirichlet para outras, ou até mesmo Neumann para uma extremidade e Dirichlet para a outra. Vale destacar, entretanto, que à coordenada temporal somente podemos impor condição de Neumann.

As soluções obtidas descrevem uma corda relativística clássica. A quantização da corda relativística pode ser feita de diversas maneiras. Há formulações covariantes usando a quantização canônica[7] ou integrais de trajetória[8]. Na primeira, as variáveis dinâmicas são operadores sobre os quais impomos relações de comutação e os vínculos (2.20) são resolvidos após a quantização, restringindo as soluções para obter estados físicos. Na quantização covariante moderna, introduz-se fantasmas na teoria a fim de usar o formalismo de Feddeev-Popov. Novamente, o espaço de Fock tem que ser restringido para obter estados físicos e essa restrição é feita pela carga BRST. O que se observa é que a teoria é totalmente livre de fantasmas apenas em 26 dimensões.

Os esquemas de quantização que comentamos no parágrafo anterior não possuem unitariedade explícita devido aos fantasmas. A quantização no calibre do cone de luz impõe o vínculo (2.20) antes da quantização, reduzindo o número de variáveis dinâmicas. Neste esquema, não há a introdução de fantasmas e a teoria é manifestamente unitária. Entretanto há uma perda da invariância por simetria de Lorentz. Esta simetria é restaurada apenas em 26 dimensões, concordando com o resultado da quantização covariante da dimensão crítica.

2.2 O calibre do cone de luz

Desenvolveremos aqui a quantização no cone de luz, por ser mais simples. No que segue, consideraremos a solução (2.21), ou seja, a corda aberta. A corda fechada será discutida na seção 2.4.

Inicialmente, introduzimos as coordenadas do cone de luz:

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1), \qquad X^I, \qquad I = 2, \ldots, D-1. \tag{2.25}$$

Neste sistema de coordenadas, a métrica é $\eta_{-+} = \eta_{+-} = -1$, $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$ e $\eta_{IJ} = \delta_{IJ}$. Assim, a equação de vínculos é

$$(\dot{X} \pm X')^\mu(\dot{X} \pm X')_\mu = -2(\dot{X} \pm X')^+(\dot{X} \pm X')^- + (\dot{X} \pm X')^I(\dot{X} \pm X')^I = 0,$$

ou seja,

$$(\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 2(\dot{X} \pm X')^+(\dot{X} \pm X')^-. \tag{2.26}$$

Embora tenhamos já escolhido o calibre conforme (2.17), ainda temos alguma liberdade na escolha do calibre, pois se escolhermos λ^i de tal forma que $f(\xi)\eta^{ij} = \partial^i\lambda^j + \partial^j\lambda^i$, a escolha é preservada (cf. eqs. (2.9) e (2.10)). Assim, escolhemos τ de tal forma que $x_0^+ = \alpha_n^+ = 0$, ou seja:

$$X^+ = 2\ell_s^2 p^+ \tau \tag{2.27}$$

[7]Também chamado de *antiga quantização covariante.*

[8]Ou *quantização covariante moderna*

Neste calibre, o vínculo passa a ser:

$$(\dot{X} \pm X')^- = \frac{1}{4\ell_s^2}(\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \tag{2.28}$$

A expressão acima justifica nossas escolhas. As coordenadas do cone de luz permitiram resolver (2.20) para X^- sem extrair a raiz quadrada. O calibre do cone de luz (que escolhe $\dot{X}^+$ como uma constante) permite obter o valor de X^- em termos de X^I a menos de uma constante de integração x_0^-. Dessa forma, as variáveis independentes de que dispomos em X^μ são:

- x_0^I e α_n^I (que definem X^I),
- p^+ (que, por meio de (2.27), determina X^+) e
- x_0^- (que juntamente com (2.28), determina X^-).

Através da relação (2.28), mostra-se que os modos de oscilação de X^I e X^- estão relacionados por:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2\sqrt{2}\ell_s p^+}\sum_p \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\ell_s p^+} L_n^\perp, \tag{2.29}$$

em que $L_n^\perp$ são definidos por esta relação e são chamados *modos transversais (ou normais) de Virassoro.*

A massa do estado é dada pela relação $p^2 + M^2 = 0$:

$$\begin{aligned} M^2 \qquad &= 2p^+p^- - p^I p^I = 2p^+ \frac{1}{2\ell_s^2 p^+} L_0^\perp - \frac{1}{2\ell_s^2}\alpha_0\alpha_0 = \\ &= \frac{1}{\ell_s^2}\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{\ell_s^2}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^I (a_n^I)^\dagger \geq 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Baseados no fato de que $\alpha_n = (\alpha_{-n})^\dagger$ (pois X^μ deve ser real), introduzimos os operadores

$$\alpha_{-n}^I = \sqrt{n}(a_n^I)^\dagger, \qquad \alpha_n^I = \sqrt{n} a_n^I. \tag{2.31}$$

A equação (2.30) nos mostra que a massa clássica é real e contínua. Estas características parecem tornar a teoria de cordas pouco promissora para uma descrição do que se vê na natureza (partículas com massas discretas e diferentes estados com massa nula). Entretanto, a quantização desse sistema modifica essas características tornando a massa discreta e permite um estado não massivo com polarização, que pode ser identificado com o fóton. Apesar desses sucessos, a teoria quântica permite uma massa de quadrado negativo (táquion) que gera uma instabilidade na teoria. Mas este problema é removido pela introdução da supersimetria no espaço-tempo.

2.3 Quantização da corda bosônica aberta

O esquema de quantização canônica consiste em tornar operadores as variáveis dinâmicas independentes $(X^I, x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}, p^+)$ e impor as relações:

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \qquad [x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i \tag{2.32}$$

e os comutadores restantes iguais a zero: $[X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [x_0^-, x_0^-] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = [p^+, p^+] = [X^I(\sigma), x_0^-] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), x_0^-] = [X^I(\sigma), p^+] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+] = 0.$

Dadas estas relações, é possível encontrar as relações de comutação entre os modos de oscilação:

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}, \qquad [x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ} \tag{2.33}$$

(lembrando que $p^I = \alpha_0^I/\sqrt{2}\ell_s$). A primeira das relações acima pode ser escrita como uma relação típica de operadores de criação/aniquilação como os satisfeitos pelo oscilador harmônico em Mecânica Quântica. Isso pode ser feito usando os operadores definidos em (2.31):

$$[a_m^I, (a_n^J)^\dagger] = \eta^{IJ}\delta_{m,n}, \qquad [a_m^I, a_n^J] = [(a_m^I)^\dagger, (a_n^J)^\dagger] = 0. \tag{2.34}$$

Estas relações nos mostram que os operadores da corda são uma infinidade de operadores de criação e aniquilação (pois m é um inteiro positivo qualquer). Além disso, temos os modos zero (x_0^I, p^I, x_0^-, p^+). O espaço dos estados pode ser construído, então, em analogia ao que fazemos em Mecânica Quântica, ou seja, definindo um estado de vácuo $|p^+, p^I\rangle$ que seja aniquilado por todos os a_n^I e construindo os estados atuando $(a_n^I)^\dagger$ sobre $|p^+, p^I\rangle$.

Antes de fazermos isto, porém, vamos investigar brevemente as conseqüências da relação (2.33).

O fato de que os operadores α não mais comutarem, leva a um claro problema de ordenamento na definição (2.29), pois devemos escolher qual a ordem adequada para esta definição[9]. Esta escolha de ordenamento terá conseqüências diretas na definição da hamiltoniana, uma vez que a mesma é definida como geradora de translação em τ e

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial X^+}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial X^+} = 2\ell_s^2 p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\ell_s^2 p^+ p^- = L_0^\perp. \tag{2.35}$$

(usamos que P^- gera translação em X^+. As relações (2.22), (2.27) e (2.29) também foram usadas.)

Optaremos por definir o *operador de Virassoro transversal* com o ordenamento normal (ou seja, com os operadores de criação à esquerda) e sem a introdução de uma constante de ordenamento:

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_p : \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I := \frac{1}{2}\sum_p \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \tag{2.36}$$

Na definição da hamiltoniana, introduzimos a constante de ordenamento a que determinaremos posteriormente:

$$H \equiv L_0^\perp + a. \tag{2.37}$$

Com estas definições, o operador de massa é:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^Ip^I = \frac{1}{\ell_s^2}(L_0^\perp + a) - p^Ip^I = \frac{1}{\ell_s^2}\left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^I)^\dagger a_n^I\right). \tag{2.38}$$

Observe que na teoria quântica somente é possível ter estados não-massivos com índices de polarização se $a < 0$, o que acontecerá, como veremos agora.

As constantes[10] a e D são fixadas impondo invariância de Lorentz na teoria. Classicamente, o gerador de transformações de Lorentz é

$$M_{class.}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}\int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \tag{2.39}$$

[9]Observe, entretanto, que apenas $L_0^\perp$ é mal definido quanticamente, já que α_{n-p}^I e α_p^I comutam se $n \neq 0$.

[10]Lembremos que até agora nos referíamos a um espaço-tempo com D dimensões. Assim, temos até agora duas constantes a serem fixadas por alguma condição de consistência: a constante de ordenamento e a dimensão do espaço-tempo.

A quantização por meio do calibre do cone-de-luz, que adotamos aqui, não preserva explicitamente a invariância de Lorentz. Assim, os geradores de rotação que alteram a relação (2.27) podem gerar problemas. Para que haja invariância de Lorentz, devemos impor que estes geradores satisfaçam a álgebra própria do grupo de Lorentz e, portanto, devemos ter, por exemplo, $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$. O que se observa é que essa relação não é satisfeita para valores arbitrários de a e D.

O resultado clássico (2.39) não pode ser ingenuamente usado na teoria após a quantização, pois, como vimos, $[x_0^I, p^-] \neq 0$. Além disso, a definição de p^- inclui a devido a dificuldade com o ordenamento no operador de Virassoro. Considerando tudo isso, definimos o gerador M^{-I} no caso quântico como:

$$M^{-I}_{quant.} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\ell_s^2 p^+}\left(x_0^I(L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a)x_0^I\right) - \frac{i}{\ell_s p^+ \sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp). \quad (2.40)$$

Notando que os operadores de Virassoro não comutam entre si,[11] o comutador encontrado é:

$$[M^{-I}, M^{-J}] = \frac{1}{(\ell_s p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m(\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \quad (2.41)$$

sendo

$$\mathcal{C}_m = m\left[1 - \frac{(D-2)}{24}\right] + \frac{1}{m}\left[a + \frac{(D-2)}{24}\right]. \quad (2.42)$$

Então, a imposição $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ leva a:

$$a = -1, \qquad D = 26. \quad (2.43)$$

Em outras palavras, a teoria de cordas "prevê"o número de dimensões do espaço-tempo, uma vez que somente é consistentemente definida em 26 dimensões[12]!

Direcionemo-nos agora para o espaço de Hilbert da corda. Os estados são construídos, como já dissemos, em analogia com o oscilador harmônico em Mecânica Quântica, ou seja, a partir de um estado fundamental $|p^+, p_T\rangle$ (usamos p_T para representar as direções transversais p^I) que é aniquilado por todos os operadores de aniquilação:

$$a_n^I |p^+, p_T\rangle = 0, \qquad n \geq 1, \qquad I = 2, \ldots, 25. \quad (2.44)$$

Os demais estados são construídos atuando os operadores de criação sobre o estado fundamental:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} [(a_n^I)^\dagger]^{\lambda_{n,I}} |\lambda\rangle, \quad (2.45)$$

onde $\lambda_{n,I}$ denota a quantidade de vezes que o operador $(a_n^I)^\dagger$ aparece. Novamente chamamos atenção ao fato de que há realmente infinitos valores de n, de modo que a teoria de cordas

[11] Na verdade eles satisfazem uma álgebra conhecida como *Álgebra de Virassoro* que não apresentaremos aqui. Direcionamos o leitor para os livros indicados no início deste capítulo para a dedução e discussão dessa álgebra.

[12] Lembre-se de que a teoria que tratamos até aqui somente possui bósons e, portanto não é uma boa teoria para descrever todas as coisas. Na Supercorda, em que férmions são introduzidos por meio da supersimetria, o número de dimensões espaço-temporais necessárias para a consistência é $D = 10$. As supercordas serão comentadas na seção 3.4.

descreve uma infinidade de partículas diferentes. Entretanto, como o comprimento da corda é muito pequeno $\ell_s << 1$, a medida que o número n cresce, a massa do estado correspondente aumenta bastante. Dessa forma, estudaremos a seguir apenas os estados de energias mais baixas (massas ao quadrado não maiores do que zero). O operador de massa, considerando o resultado (2.43), é dado por

$$M^2 = \frac{1}{\ell_s^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^I)^\dagger a_n^I - 1\right) \equiv \frac{1}{\ell_s^2}\left(N^\perp - 1\right), \tag{2.46}$$

em que introduzimos o operador $N^\perp$ que, por satisfazer as relações $[N^\perp, (a_n^I)^\dagger] = n(a_n^I)^\dagger$ e $[N^\perp, a_n^I] = -na_n^I$, é chamado *operador número*, já que, ao atuar sobre um estado, seu autovalor fornece a soma dos modos dos operadores de criação que originam o mesmo. Assim, por exemplo,

$$N^\perp(a_3^J)^\dagger(a_2^I)|p^+, p_T\rangle = 5(a_3^J)^\dagger(a_2^I)|p^+, p_T\rangle.$$

Comecemos por analisar o estado em que nenhum operador de criação atua, ou seja, $N^\perp = 0$. Nesse caso, (2.46) dá uma massa imaginária ($M^2 = -1/\ell_s^2 < 0$). Esta partícula é chamada táquion e representa uma instabilidade na teoria. A presença deste campo é um dos problemas com a teoria bosônica. A supersimetria, se presente em todo o espaço-tempo, elimina estados de massa imaginária e a supercorda não apresenta esse defeito.

O próximo estado a ser considerado é aquele para o qual $N^\perp = 1$. Nesse caso, temos $(a_1^I)^\dagger|p^+, p_T\rangle$ e o estado geral é a combinação linear destes:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I (a_1^I)^\dagger|p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0. \tag{2.47}$$

Observe que o estado (não-massivo) acima tem $24 = (D-2)$ graus de liberdade. Isto nos dá uma indicação de que este estado representa um fóton. É bastante interessante que a ação da qual partimos não tenha nenhuma invariância de calibre e, apesar disto, a teoria nos fornece o eletromagnetismo.

2.4 A corda fechada

Dos problemas indicados na seção 1.2, somente os três primeiros apareceram na teoria apresentada até aqui. Entretanto, uma teoria que possua apenas cordas abertas não é consistente, uma vez que a introdução de interações pode permitir o aparecimento de cordas fechadas, pois a possibilidade de haver a união da extremidade de uma corda com a extremidade de outra permite que uma extremidade de uma corda una-se com a sua outra extremidade, formando assim uma corda fechada. A partícula sem massa e de spin 2 a que nos referíamos naquela seção como um problema, surge na quantização da corda fechada e é atualmente interpretada como o gráviton. A dificuldade em se excluir essa partícula do espectro de uma Teoria de Cordas consistentemente definida é hoje considerada uma belíssima conclusão: A teoria não só prevê a existência de gravidade como *exige* a interação gravitacional por critérios de consistência!

Como dissemos, ao tratar da corda fechada, consideraremos um intervalo de parametrização duas vezes maior do que o considerado na corda aberta, ou seja, $\sigma \in [0, 2\pi]$. O calibre escolhido aqui é (cf. eq. (2.27)):

$$X^+ = \ell_s^2 p^+ \tau \tag{2.48}$$

O processo de quantização é o mesmo de antes, ou seja, introduzir a relação:

$$[X^I(\tau,\sigma),\mathcal{P}^{\tau J}(\tau\sigma)] = i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{IJ}.$$

Este comutador, entretanto, quando escrito em termos dos modos de oscilação, evidencia a diferença entre cordas abertas e fechadas: agora temos dois conjuntos de osciladores (com barra e sem barra) desconexos:

$$[\bar{\alpha}^I_m,\bar{\alpha}^J_n] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ}, \qquad [\alpha^I_m,\alpha^J_n] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ}, \qquad [\alpha,\bar{\alpha}] = 0. \tag{2.49}$$

Assim como foi feito antes, escrevemos a álgebra acima de um modo semelhante ao de operadores de criação e destruição:

$$[\bar{a}^I_m,(\bar{a}^J_n)^\dagger] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}, \qquad [a^I_m,(a^J_n)^\dagger] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}, \qquad [a,\bar{a}] = 0. \tag{2.50}$$

Ou seja, com exceção dos modos zero (que são iguais), o que temos são duas "cópias"da corda aberta independentes.

Também dois operadores de Virassoro são definidos:

$$\alpha^-_n = \frac{\sqrt{2}}{2\ell_s p^+}\sum_p \alpha^I_{n-p}\alpha^I_p \equiv \frac{\sqrt{2}}{\ell_s p^+}L^\perp_n, \qquad \bar{\alpha}^-_n = \frac{\sqrt{2}}{2\ell_s p^+}\sum_p \bar{\alpha}^I_{n-p}\bar{\alpha}^I_p \equiv \frac{\sqrt{2}}{\ell_s p^+}\bar{L}^\perp_n \tag{2.51}$$

e, devido a igualdade dos modos zero (2.23), temos:

$$L^\perp_0 = \bar{L}^\perp_0, \tag{2.52}$$

que, como toda igualdade entre operadores, deve ser interpretada em termos da atuação dos mesmos num estado. Assim, a igualdade acima significa que

$$L^\perp_0|\lambda,\bar{\lambda}\rangle = \bar{L}^\perp_0|\lambda,\bar{\lambda}\rangle.$$

Logo, a igualdade dos modos zero dos operadores de Virassoro com e sem barra é uma restrição sobre o espaço físico de modo que somente aqueles estados que satisfazem a relação acima são considerados admissíveis.

Os problemas devido ao ordenamento na definição dos operadores $L^\perp_0$ e $\bar{L}^\perp_0$ é resolvido do mesmo modo como fizemos na corda aberta: através do ordenamento normal, sem a introdução da constante de ordenamento[13]:

$$L^\perp_0 = \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + \sum_{n=1}^\infty \alpha^I_{-n}\alpha^I_n = \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + \sum_{n=1}^\infty n(a^I_n)^\dagger a^I_n \equiv \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + N^\perp, \tag{2.53}$$

$$\bar{L}^\perp_0 = \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + \sum_{n=1}^\infty \bar{\alpha}^I_{-n}\bar{\alpha}^I_n = \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + \sum_{n=1}^\infty n(\bar{a}^I_n)^\dagger \bar{a}^I_n \equiv \frac{\ell_s^2}{4}p^Ip^I + \bar{N}^\perp. \tag{2.54}$$

Em que introduzimos operadores número como em (2.46), com a diferença, entretanto que temos agora dois operadores, um para os operadores com barra e outro para os sem barra. Dessa forma,

[13]Uma análise da invariância de Lorentz leva novamente à $D = 26$ (o que significa que cordas abertas e fechadas podem coexistir), entretanto, como temos agora dois operadores de Virassoro, necessitamos de *duas* constantes de ordenamento a_1 e a_2. Novamente, a análise da simetria de Lorentz fixa esses valores: $a_1 = a_2 = -1$. A hamiltoniana é a soma dos modos para esquerda (com barra) e para direita (sem barra): $H = L^\perp_0 + \bar{L}^\perp_0 - 2$.

o operador número com barra "conta"os modos com barra usados para a construção do estado e o sem barra "conta"os modos sem barra.

O estado geral é:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} [(a_n^I)^\dagger]^{\lambda_{n,I}} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} [(\bar{a}_m^J)^\dagger]^{\bar{\lambda}_{m,J}} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \tag{2.55}$$

e a massa é dada por:

$$M^2 = \frac{2}{\ell_s^2} \left(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right). \tag{2.56}$$

A condição (2.52) nos diz que $N^\perp = \bar{N}^\perp$. Assim, o primeiro estado é aquele para o qual $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$. Isto significa uma massa imaginária ($M^2 = \frac{-4}{\ell_s^2}$) e, portanto, novamente há a presença de um táquion.

Para o próximo estado, devemos tomar $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$, devido a condição (2.52), ou seja, $N^\perp = \bar{N}^\perp$. Neste caso, temos uma combinação linear dos estados construídos com um único operador de cada (com e sem barra), sendo ambos de modo 1. Assim,

$$\sum_{I,J} R_{IJ} (a_1^I)^\dagger (\bar{a}_1^J)^\dagger |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0. \tag{2.57}$$

Para interpretar (2.57), usamos o fato de que qualquer matriz pode ser decomposta numa parte simétrica e outra antissimétrica $R_{IJ} = (R_{IJ} + R_{JI})/2 + (R_{IJ} - R_{JI})/2 \equiv R_{(IJ)} + R_{[IJ]}$. Além disso, podemos considerar uma matriz simétrica e de traço nulo S_{IJ} tal que[14]

$$R_{(IJ)} = S_{IJ} + R\delta_{IJ}, \tag{2.58}$$

sendo $R \equiv \frac{1}{D-2}\delta^{IJ} R_{(IJ)}$. Dessa forma, no (2.57) identificamos três combinações (todas de massa nula):

$$\sum_{I,J} S_{IJ} (a_1^I)^\dagger (\bar{a}_1^J)^\dagger |p^+, p_T\rangle, \tag{2.59}$$

$$\sum_{I,J} R_{[IJ]} (a_1^I)^\dagger (\bar{a}_1^J)^\dagger |p^+, p_T\rangle, \tag{2.60}$$

$$R (a_1^I)^\dagger (\bar{a}_1^J)^\dagger |p^+, p_T\rangle. \tag{2.61}$$

O primeiro dos estados acima é interpretado como sendo o gráviton. Como no caso do fóton, é surpreendente que a Teoria de Cordas forneça o gráviton, uma vez que a ação inicial não continha uma métrica geral para o espaço-tempo, nem invariância por transformações gerais de coordenadas.

O estado (2.60) representa um campo de calibre de dois índices antissimétricos $B_{\mu\nu}$. Este campo é denominado *campo de Kalb-Ramond*, ou simplesmente *campo* **B**.

Finalmente, o estado (2.61), que não possui índices livres, é interpretado como um campo escalar não-massivo ϕ e é conhecido pelo nome de *dílaton*. Este campo está relacionado intimamente com a constante de acoplamento da teoria.

[14] $S_{IJ} \equiv R_{(IJ)} - \frac{1}{D-2} R\delta_{IJ}$.

2.5 Dualidade T em cordas fechadas

Uma das maneiras de compatibilizar as D dimensões espaço-temporais preditas pela Teoria de Cordas e o nosso mundo quadridimensional, é considerar que $D-4$ destas dimensões são compactificadas[15]. Para entender um pouco sobre como a compactifação de uma dimensão permite uma impressão de que vivemos numa dimensão menor, imagine um equilibrista, caminhando sobre um fio muitos metros acima do solo. Para este equilibrita, há somente uma direção para se mover *sobre o fio* ("pra frente/pra trás"), uma vez que o movimento lateral ("esquerda/direita") está proibido[16]. Entretanto, se o tal equilibrista subitamente começar a diminuir, chegando a ter um tamanho comparável ao de uma pulga, este verá que é perfeitamente possível caminhar *sobre o fio* em duas direções independentes ("pra frente/pra trás"e "esquerda/direita"). Estando pequeno, ele teria acesso também a uma informação que não perece relevante para uma pessoa de estatura normal: o formato do fio. O fio pode ter o formato de um cilindro, de uma faixa ou, de um modo geral, pode ser um prisma com a base sendo um dos infinitos polígonos.

Ao compactificarmos as dimensões, efeitos diferentes ocorrem para diferentes formatos das dimensões extras. Uma compactificação comum é a toroidal. Nesta seção, estudaremos o caso em que apenas uma dimensão é compactificada toroidalmente (ou seja, formando um círculo) na corda bosônica ($D = 26$). A conclusão a que chegaremos é estonteante: o espectro resultante numa compactificação com um raio R, é idêntico ao de uma teoria em que a compactificação foi feita com um raio $\hat{R} = \ell_s^2/R$. Esta equivalência entre a física das duas teorias é chamada *dualidade T* (onde "T"significa toroidal).

A solução mais geral (antes de impormos a condição periódica de contorno, que leva a $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$) para uma corda fechada é:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \frac{\ell_s}{\sqrt{2}}(\alpha_0^\mu + \bar{\alpha}_0^\mu)\tau - \frac{\ell_s}{\sqrt{2}}(\alpha_0^\mu - \bar{\alpha}_0^\mu)\sigma + i\frac{\sqrt{2}\ell_s}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}\right). \tag{2.62}$$

cujo momento linear é:

$$p^\mu = \frac{1}{\ell_s\sqrt{2}}(\alpha_0^\mu + \bar{\alpha}_0^\mu). \tag{2.63}$$

Vejamos o que acontece ao compactificarmos uma direção (que representaremos por X^{25}). Sendo essa compactificação num círculo de raio R, é claro que $X^{25} \simeq X^{25} + 2\pi R$, o que significa que o momento nessa direção deve ser quantizado (pois uma translação de a deve ser equivalente a uma translação de $a + 2\pi R$ sobre a corda e, portanto, $e^{iap} \simeq e^{i(a+2\pi R)p}$):

$$p = \frac{n}{R}, \qquad n \in Z, \tag{2.64}$$

um resultado já conhecido em Mecânica Quântica.

O fato de termos cordas em vez de partículas, nos fornece uma outra relação. Acontece que podemos ter uma corda fechada ao longo da dimensão X^{25}, uma situação impossível com partículas pontuais. Isso significa que

$$X^{25}(\tau,\sigma+2\pi) \simeq X^{25}(\tau,\sigma) + 2\pi R w, \tag{2.65}$$

[15]Um outro modo de dar conta dessas dimensões espúrias aos nossos sentidos é a idéia de que as dimensões não estão compactificadas mas são inacessíves aos campos de matéria e eletromagnético, por exemplo.

[16]Obviamente, este equilibrista têm consciência da dimensão "esquerda/direita", pois esta é acessível aos seus braços. Entretanto isso acontece por que esta dimensão não está, de fato, compactificada. É necessário, portanto, algum "malabarismo"mental, uma vez que não há analogias precisas de dimensões compactificadas no nosso dia-a-dia.

em que w é chamado *número de enrolamento*[17] e significa, *grosso modo*, a quantidade de voltas que a corda dá na direção compactificada. A referência [11] contém uma discussão detalhada da interpretação de w.

As relações (2.64) e (2.65), juntamente com (2.62) e (2.63), nos informam que:

$$\alpha_0^{25} = \frac{\ell_s}{\sqrt{2}}(\frac{n}{R} - \frac{wR}{\ell_s^2}) \qquad \bar{\alpha}_0^{25} = \frac{\ell_s}{\sqrt{2}}(\frac{n}{R} + \frac{wR}{\ell_s^2}) \tag{2.66}$$

Assim, o operador de Virassoro $L_0^\perp$ (cf. eq. (2.36)) é modificado como segue (usaremos no que segue índices minúsculos para representar as direções não compactificadas):

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^I\bar{\alpha}_0^I + \bar{N}^\perp = \frac{\ell_s^2}{4}p^ip^i + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^{25}\bar{\alpha}_0^{25} + N^\perp, \tag{2.67}$$

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + N^\perp = \frac{\ell_s^2}{4}p^ip^i + \frac{1}{2}\alpha_0^{25}\alpha_0^{25} + N^\perp, \tag{2.68}$$

que, juntamente com a restrição (2.52), leva à:

$$N^\perp - \bar{N}^\perp = nw. \tag{2.69}$$

Vejamos então qual seria a massa que alguém observaria num espaço-tempo de 26 dimensões com uma delas compactificada num círculo. Uma vez que esse observador somente veria um espaço-tempo 25-dimensional, a fórmula de massa não inclui a dimensão compactificada e então é (cf. eq. (2.38)):

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^ip^i = \frac{2}{\ell_s^2}(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^ip^i.$$

que, devido a (2.67) e (2.68), é escrita como:

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{wR}{\ell_s^2}\right)^2 + (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \tag{2.70}$$

usando (2.66).

A observação interessante sobre a fórmula de massa (2.70) é que a mesma é invariante pela troca:

$$n \leftrightarrow w, \qquad R \leftrightarrow \hat{R} \equiv \frac{\ell_s^2}{R}, \tag{2.71}$$

o que significa dizer que do ponto de vista de um observador que "enxerga"somente 25 dimensões, no cálculo do espectro de massa, é irrelevante se a compactificação é feita num raio R ou num raio $\hat{R}$ (considere que, como n e w assumem percorrem valores inteiros, o conjunto de massas obtido é o mesmo[18]). Note que $R \to 0$ implica $\hat{R} \to \infty$ e é realmente surpreendente que o espectro de massa de uma teoria compactificada num raio minúsculo seja idêntico ao de uma com um raio enorme. Foi a essa simetria do espectro que nos referimos no início desta seção como *dualidade T*.

É interessante observar ainda que a física é "inacessível"para compactificações em raios menores do que $R^* = \ell_s$, no sentido em que toda informação contida numa compactificação de raio $R < R^*$ está contida na teoria compactificada em algum raio $\hat{R} > R^*$. Esse limiar

[17]A letra w é comumente usada devido ao termo em inglês *winding number*.

[18]Note que a troca (2.71) não altera (2.69).

R^*, chamado *raio autodual*, nos informa que nada consiguiremos em termos de física nova se insistirmos em diminuir o raio de compactificação além do comprimento da corda (ℓ_s). Isso é uma indicação de que coisas interessantes aperecem nessa escala de tamanhos e explica a afirmação (frequente) de que ℓ_s é o comprimento mínimo da teoria.

Desejamos agora ver que tipo de alterações a troca (2.71) nos sugere. Inicialmente, observe que essa transformação corresponde a $\alpha_0^{25} \leftrightarrow -\alpha_0^{25}$ e $\bar{\alpha}_0^{25} \leftrightarrow \bar{\alpha}_0^{25}$. Note, entretanto, que, embora a mudança (2.71) não implique uma modificação nos modos não-zero, é claro que (2.70) é simétrica pela troca

$$\alpha_n^{25} \leftrightarrow -\alpha_n^{25}, \qquad \bar{\alpha}_n^{25} \leftrightarrow \bar{\alpha}_n^{25}, \qquad\qquad \forall \ n. \tag{2.72}$$

A dualidade T pode ser enunciada, então, dizendo que são equivalentes as duas teorias decritas abaixo:

- Teoria com a coordenada $X^{25}(\tau,\sigma) = X_L^{25}(\tau-\sigma) + X_R^{25}(\tau+\sigma)$ compactificada num raio R, em que (veja eq. (2.64) e defina $\mathcal{W} = wR/\ell_s^2$):

$$X_L^{25}(\tau,\sigma) = \frac{x+q}{2} + \frac{\ell_s^2}{2}(p+\mathcal{W})(\tau+\sigma) + i\frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}^{25}e^{-in(\tau+\sigma)}, \tag{2.73}$$

$$X_R^{25}(\tau,\sigma) = \frac{x-q}{2} + \frac{\ell_s^2}{2}(p-\mathcal{W})(\tau-\sigma) + i\frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^{25}e^{-in(\tau-\sigma)}, \tag{2.74}$$

  ou seja:

$$X^{25}(\tau,\sigma) = x + \ell_s^2 p\tau + \ell_s^2\mathcal{W}\sigma + i\frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}(\bar{\alpha}_n^{25}e^{-in\sigma} + \alpha_n^{25}e^{in\sigma}). \tag{2.75}$$

- Teoria com a coordenada $\hat{X}^{25}(\tau,\sigma) = X_L^{25}(\tau-\sigma) - X_R^{25}(\tau+\sigma)$ compactificada num raio $\hat{R} = \ell_s^2/R$, em que X_L e X_R são definidos como no item anterior e, portanto,

$$\hat{X}^{25}(\tau,\sigma) = q + \ell_s^2\mathcal{W}\tau + \ell_s^2 p\sigma + i\frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}(\bar{\alpha}_n^{25}e^{-in\sigma} + \alpha_n^{25}e^{in\sigma}). \tag{2.76}$$

Observe que há uma troca na função dos pares (x,p) e $(q,\mathcal{W})$. Essas teorias possuem a mesma hamiltoniana e satizfazem as mesmas relações de comutação[19].

Dessa forma, a dualidade T é decorrente de uma possibilidade de escolha entre X ou $\hat{X}$. Quando enunciada nestes termos, a extensão da dualidade para cordas abertas é razoavelmente simples. E é isso que faremos na próxima seção.

Antes de prosseguir, porém, dois comentários devem ser feitos. Mostramos aqui a invariância do espectro de massa sob a troca (2.71). Entretanto, isso, *per si*, não constutui uma demonstração da dualidade T que afirma uma equivalência entre as teorias como um todo. Embora a demonstração esteja fora do escopo desta dissertação, afirmamos, sem demonstrações, que a dualidade é verificada mesmo na presença de interações.

Além disso, a apresentação que fizemos somente refere-se à teoria bosônica. Na Teoria de Supercordas, mostra-se com pouco esforço que a dualidade T, tal como apresentada aqui, é válida para a parte bosônica. No setor fermiônico, a dualidade relaciona duas teorias que a princípio eram consideradas distintas e independentes uma da outra: tipo IIA e tipo IIB.

[19] A referência [11] é indicada para uma análise mais detalhada.

2.6 Dualidade T em cordas abertas e a necessidade de branas

A compactificação de uma dimensão, como vimos na seção anterior, implica numa quantização do momento (dando uma contribição proporcional ao inverso do quadrado do raio na fórmula de massa) e isso certamente é reproduzido no caso de cordas abertas. Entretanto, a dualidade só é possível no caso da corda fechada por causa do possível enrolamento da mesma em torno da dimensão compactificada (que contribui com um fator proporcional a R^2 na fórmula de massa). Isso certamente não acontece em cordas abertas que possuam extremidades livres. Embora seja possível visualizar uma corda aberta enrolada num cilindro, o movimento das extremidades podem eventualmente desfazer esse enrolamento e é impossível definir um número de enrolamento como foi feito no caso de cordas fechadas.

Por outro lado, se tivéssemos cordas abertas com condições de Dirichlet, haveria um fio de esperança. Pois, tendo as extremidades fixas, a corda não poderia desfazer um dado enrolamento e isso permite uma definição de número de enrolamento para uma corda aberta que tenha extremidades presas. Considerando essa hipótese um pouco mais, teríamos um momento de desencantamento ao perceber que a condição de Dirichlet (que permite a definição de w) destrói a idéia de uma definição de p (já que as extremidades estão presas). Novamente, a dualidade parece não ser possível, pois necessitamos da contribuições de ambos, p e w, para que a fórmula de massa mantenha essa simetria.

A aparente impossibilidade de mostrar a dualidade T para cordas abertas é resolvida pensando que a teoria dual a uma corda com extremidades livres seria uma corda com extremidades presas. De fato, é isso que ocorre: observe que se pensarmos na dualidade T como a troca de X por $\hat{X}$, observamos as seguintes relações:

$$\partial_\sigma X = -X_L' + X_R' = -\partial_\tau X_L + \partial_\tau X_R = -\partial_\tau \hat{X}, \tag{2.77}$$

$$\partial_\sigma \hat{X} = -X_L' - X_R' = -\partial_\tau X_L - \partial_\tau X_R = -\partial_\tau X \tag{2.78}$$

(em que linhas representam derivadas com relação ao argumento da função).

As relações acima nos dizem que se a coordenada compactificada num raio R tem condição de controno de Neumann (2.15), a teoria dual terá a coordenada compactificada num raio $\hat{R}$ com condição de Dirichlet (2.16). Assim, a troca (2.71) mantém, mesmo no caso de teorias com cordas abertas, o espectro de massa invariante.

Dessa forma, se desejarmos uma dualidade T para uma teoria em que coexistam cordas abertas e fechadas, é necessário estudar cordas com condições de Dirichlet.

Uma vez que a dualidade T exige a consideração de D-branas (ou seja, de uma hipersuperfície onde repousem as extremidades da corda), dedicaremos a seção seguinte ao estudo da quantização com condição de Dirichlet, onde descobriremos que as D-branas possuem campos de calibres vivendo no seu volume-mundo.

2.7 Quantização com condição de Dirichlet

Na quantização da corda aberta na ausência de uma D-brana, usamos condição de contorno de Neumann e encontramos a solução (2.21). A quantização, como vimos, leva a campos de calibre no espaço-tempo (2.47).

A presença de uma Dp-brana modifica a expressão (2.21) de uma forma significativa. Para entender fisicamente como isso acontece, considere o sistema de coordenadas $\{x^-, x^+, x^i, x^a\}$, em que as coordenadas $\{x^-, x^+, x^i\}$ estão localizadas sobre a Dp-brana (ou seja, $i = 2, \dots, p$)

e as coordenadas $\{x^a\}$ estão fora da Dp-brana (i.e. $a = p+1, \ldots, D-1$). A condição de contorno de Dirichlet estabelece que as coordenadas $\{x^a\}$ devem ter um valor fixo (já que as extremidades estão presas à Dp-brana). Por outro lado, as coordenadas $\{x^-, x^+, x^i\}$ obedecem condições de contorno de Neumann (pois as extremidades da corda podem mover-se livremente sobre a brana).

Dessa forma, a solução na presença de uma p-brana é:

$$X^i(\tau,\sigma) = x_0^i + \ell_s\sqrt{2}\alpha_0^i\tau + i\ell_s\sqrt{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^i(\cos n\sigma)e^{-in\tau}, \tag{2.79}$$

$$X^a(\tau,\sigma) = x_0^a + \ell_s\sqrt{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^a(\sin n\sigma)e^{-in\tau}. \tag{2.80}$$

Note a ausência de um termo proporcional a τ em $X^a(\tau,\sigma)$. Isso deve-se ao fato de que este termo representa o movimento de translação da corda, o que não pode haver nas coordenadas perpendiculares à Dp-brana.

Na quantização com condições de Neumann, usamos o estado fundamental $|p^+, p_T\rangle$, com $p_T = p^I$. Agora, o índice I significa o conjunto de índices i e a. Entretanto, como

$$\alpha_0^\mu = \ell_s\sqrt{2}p^\mu,$$

não há operadores p^a e isso significa que nosso estado fundamental é simplesmente $|p^+, p_t\rangle$, com $p_t = p^i$.

Em termos de operadores de criação e aniquilação, o operador de massa é

$$M^2 \equiv -p^2 = \frac{1}{\ell_s^2}\left[-1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p} n(a_n^i)^\dagger a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=p+1}^{d} m(a_m^a)^\dagger a_m^a\right] \tag{2.81}$$

O estado geral é:

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=2}^{p}\left((a_n^i)^\dagger\right)^{\lambda_{n,i}}\right]\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{a=p+1}^{d}\left((a_m^a)^\dagger\right)^{\lambda_{m,a}}\right]|p^+, p_t\rangle. \tag{2.82}$$

A função de onda que este estado representa é dependente das variáveis (τ, p^+, p_t), ou seja, os campos são dependentes (por transformada de Fourier) apenas das variáveis (x^+, x^-, x^i), que são as coordenadas sobre a Dp-brana. E isto significa que os campos associados com estes estados vivem na Dp-brana.

Considere o espectro não-massivo da teoria, ou seja (ver (2.81)), os estados

$$(a_1^i)^\dagger|p^+, p_t\rangle \qquad e \qquad (a_1^a)^\dagger|p^+, p_t\rangle. \tag{2.83}$$

Disto, vemos claramente que o primeiro estado tem $(p-1) = (p+1) - 2$ graus de liberdade e transforma-se como um vetor, já que o índice i é um índice de Lorentz na brana. Por outro lado, no segundo estado, para cada valor de a, temos um escalar, pois o índice a não está sobre a brana e, do ponto de vista do espaço sobre a brana, é simplesmente um rótulo para cada estado e não um índice de Lorentz. Assim, concluímos[20] que:

[20]Obviamente, esta análise pouco rigorosa não nos permite tirar uma conclusão de fato. Na verdade, a idéia de onde vivem os campos de uma corda aberta na presença de branas ainda é controversa. Aparentemente, esta conclusão pode ser dependente do calibre escolhido e diferentes respostas podem ser igualmente consistentes. Entretanto, concluímos, pelo menos, que a interpretação de que os campos vivem na brana é consistente.

- Uma Dp-brana tem um campo de Maxwell (grupo de simetria $U(1)$) vivendo em sua folha-mundo;
- Uma Dp-brana tem $(d-p)$ campos escalares não-massivos vivendo em sua folha-mundo.

De um modo análogo[21], pode-se mostrar que no caso de haver N branas coincidentes, uma teoria de Yang-Mills com simetria $SU(N)$ é encontrada na folha-mundo[22].

2.8 A ação de Dirac-Born-Infeld

Como vimos, a existência de campos de calibre sobre a brana é consistente com a teoria de cordas. Portanto, é natural o interesse na dinâmica de tais campos. Propõe-se assim a questão:

- Dada uma configuração de campos (mais precisamente, uma métrica, um campos escalar e uma 2-forma) no espaço-tempo, como determinar a dinâmica dos campos de calibre que vivem numa D-brana?

Comecemos por introduzir o conceito de *pull-back*, que é a " projeção"do campo (que vive no espaço-tempo) no volume-mundo. Assim, por exemplo, se um espaço-tempo possui uma métrica $G_{\mu\nu}$, o *pull-back* desta geometria sobre a brana é simplesmente a métrica induzida no volume mundo:

$$\hat{G}_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu} \tag{2.84}$$

em que $\xi^a, a = 0, \ldots, p$ parametrizam a brana e $x^\mu, \mu = 0, \ldots, d$ são as coordenadas do espaço-tempo.

Num espaço-tempo com geometria $G_{\mu\nu}$ e um campo de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$, a dinâmica de um campo abeliano com intensidade de campo F_{ab} vivendo no volume-mundo da brana (ou seja, na variedade $\mathcal{M}_{p+1}$) é dada pela ação de Dirac-Born-Infeld:

$$S_{DBI} = -\tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{\det(\hat{G}_{ab} + \hat{B}_{ab} + 2\pi l_s^2 F_{ab})}, \tag{2.85}$$

sendo τ_p a tensão da brana. Apresentamos (2.85) sem provas e direcionamos o leitor interessado em mais detalhes para as referências [1, 14] que contêm argumentos heurísticos que justificam a ação de Dirac-Born-Infeld.

Além dos campos mencionados acima, o espaço-tempo pode conter outros campos se lidamos com a teoria supersimétrica[23] que contém o setor de Ramond-Ramond além do setor de Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (que coincide com o espectro da corda bosônica e cuja influência na brana é descrita pela ação (2.85)). Os campos[24] de Ramond-Ramond C_q são incluídos através do termo de Wess-Zumino:

$$S_{WZ} = \mu_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \sum_q \hat{C}_q \wedge e^{\hat{B} + 2\pi l_s^2 F}, \tag{2.86}$$

[21] Neste caso, introduz-se rótulos adicionais para diferenciar as várias configurações possíveis entre as branas e as extremidades da corda. Estes rótulos são chamados às vezes de índices de Chan-Paton.

[22] Além disso, a fórmula de massa é tal que, separando as tais branas coincidentes, alguns campos de calibre adquirem massa. Isto pode ser visto como uma alternativa ao mecanismo de Higgs.

[23] A supersimetria será vista no próximo capítulo.

[24] Estes campos estão presentes no setor de Ramond-Ramond da teoria de Supercorda fechada. Isto também será visto no próximo capítulo (ver pág. 40).

em que o somatório se extende sobre todos os campos de Ramond presentes e μ_p é a carga associada ao campo C_p.

Acolhendo todas estas considerações, vemos que a ação que descreve o comportamento a baixas energias dos campos de calibre (F_{ab}) sobre a Dp-brana na presença dos campos bosônicos $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ e C_q é, no quadro das cordas (*string frame*)[25],

$$S_{Dp} = -\tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{\det(\hat{G}_{ab} + \hat{B}_{ab} + 2\pi l_s^2 F_{ab})} + \mu_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \sum_q \hat{C}_q \wedge e^{\hat{B} + 2\pi l_s^2 F}, \quad (2.87)$$

em que τ_p e μ_p estão relacionados entre si e com os parâmetros da corda ℓ_s e g_s por [1, 10, 14] $\tau_p = \mu_p = 1/(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}$.

[25] A razão para este nome será compreendida no início do capítulo 4.

Capítulo 3

Supersimetria

3.1 Introdução

As simetrias adquiriram um caráter fundamental na física do século XX. O estudo dos grupos de simetria mostraram-se extremamente reveladores no estudo dos mecanismos básicos da Natureza. O objetivo deste capítulo é introduzir uma nova simetria, chamada *supersimetria*, ou, abreviadamente, *susy*.

A supersimetria surgiu com a necessidade de se incluir férmions na Teoria de Cordas bosônicas que estudamos no capítulo 2. A teoria resultante, a Supercorda, possui uma simetria sob uma transformação que transforma os campos bosônicos em fermiônicos e fermiônicos em bosônicos. Em 1974, Wess e Zumino [15, 16] apresentaram um modelo quadridimensional de uma teoria de campos que combina o grupo de Poincaré e as simetrias internas de um modo não trivial, obtendo assim transformações de simetria (supersimetria) que transformam um bóson num férmion e vice-versa.

Uma vez que estamos interessados principalmente na parte bosônica das teorias de supercordas e supergravidade, apenas alguns conceitos advindos da supersimetria serão necessários aqui. Introduziremos tais conceitos através de um estudo da superálgebra em quatro dimensões, por simplicidade. Algumas considerações sobre espinores em várias dimensões são feitas no apêndice B.

Além da perspectiva de descrever matéria (férmions) e interação (bósons) numa mesma representação, a supersimetria é importante pelos aspectos teóricos que ela proporciona. Por exemplo, uma das características de uma teoria supesimétrica é que há a mesma quantidade de estados bosônicos e fermiônicos, o que fornece um mecanismo para a remoção das divergências que importunam a teoria quântica de campos, já que *loops* bosônicos e fermiônicos têm sinais opostos e podem eventualmente cancelarem-se entre si. Além disso, numa teoria supersimétrica, todos os estados têm energia não-negativa e isso permite a remoção de estados taquiônicos quando férmions são incluídos na teoria de cordas bosônicas.

Apesar da elegância da supersimetria, é preciso lembrar que não há embasamento experimental para a afirmativa de que bósons e férmion existem em pares (não há registros, por exemplo, de nenhum bóson que tenha a mesma massa do elétron). Isso indica que, na escala de energias a que temos acesso hoje, a supersimetria deve ser quebrada para se ajustar às observações. Não discutiremos aqui, entretanto, a quebra espontânea de supersimetria e nos restringimos a indicar a referência [17] (capítulo 9) para uma primeira leitura.

3.2 A superálgebra

A álgebra de Poincaré é [17, 18]:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.1}$$
$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}P_\rho - \eta_{\mu\rho}P_\sigma) \tag{3.2}$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - \eta_{\mu\rho}M_{\sigma\nu} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}), \tag{3.3}$$

em que P_μ é o gerador de translação na direção x^μ, M_{ij} $(i = 1, \ldots, 3)$ gera rotação em torno do eixo x^k (perpendicular ao plano $x^i x^j$) e M^{0i} gera os *boosts* de Lorentz.

A supersimetria adiciona anticomutadores à álgebra de Poincaré (3.1). Um modo de ver o motivo disso, é observar que os geradores de um grupo de Lie satisfazem relações de comutação bem definidas e estão relacionados através das correntes de Noether aos campos. Como é sabido, o campo fermiônico satisfaz relações de anticomutação e a supersimetria requer, portanto, geradores anticomutantes. Uma demonstração rigorosa de que a introdução de operadores que mudam de 1/2 o spin de um estado e satisfaz uma relação de anticomutação é consistente com a localidade, causalidade e positividade da energia, foi feita por Haag Lopuszanski e Sohnius em 1975 [19].

Usando a representação de Weyl e a notação apresentada no apêndice A, a álgebra[1] dos geradores de supersimetria é [20]:

$$\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu\delta^A_B, \qquad A, B = 1, \ldots, \mathcal{N} \tag{3.4}$$
$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 0, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{3.5}$$
$$[P_\mu, Q^A_\alpha] = [P_\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha A}] = 0 \tag{3.6}$$
$$[Q^A_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^A_\beta. \tag{3.7}$$

Usaremos neste texto a nomenclatura segundo a qual $\mathcal{N}$ é a *quantidade de supersimetrias* e $n\mathcal{N}$, em que n é o número de componentes independentes de cada Q^A_α, é a *quantidade de supercargas*. O valor máximo de n varia de acordo com a dimensão (cf. apêndice B).

Uma consequência notável da superálgebra é que a energia ($E = P^0 = -P_0$) é não negativa. De fato, se tomarmos $A = B$ na eq. (3.4) e a multiplicarmos por $(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\alpha}$, que é definido por

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}, \qquad \varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \tag{3.8}$$

obtemos, para $\nu = 0$,

$$P^0 = \frac{1}{4}\left(Q^A_1 Q^*_{1A} + Q^*_{1A}Q^A_1 + Q^A_2 Q^*_{2A} + Q^*_{2A}Q^A_2\right) \tag{3.9}$$

em que usamos $Q^*_{1A} = \overline{Q}_{\dot 1 A}$ e a relação

$$Tr\,(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}. \tag{3.10}$$

[1] Esta não é a álgebra mais geral permitida, entretanto. Veremos o caso mais geral (que contém objetos chamados de “cargas centrais”) na seção 3.3.3.

3.3 Representações da supersimetria

Operadores de Casimir são operadores que comutam com todos os geradores de uma dada álgebra de Lie. Os autovalores destes objetos são, portanto, usados para rotular os multipletos. No grupo de Poincaré, por exemplo, os operadores de Casimir são $P^2 = P_\mu P^\mu = -m^2$ e $W^2 = W_\mu W^\mu = -m^2 J^2$, em que m é a massa da partícula, $J^2 = j(j+1)$ é o auto valor do momento angular e W^μ é o vetor de Pauli-Lubanski:

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \tag{3.11}$$

($\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é um tensor totalmente anti-simétrico tal que $\varepsilon^{0123} = 1$).

As representações do grupo de Poincaré são obtidas pelo método das representações induzidas, que consiste em encontrar as representações em num referencial em repouso e obter as demais através dos *boosts* de Lorentz. Assim, considerando uma partícula massiva em repouso $P_\mu = (m, 0, 0, 0)$, um multipleto da álgebra de Poincaré contém estados de mesma massa e mesmo spin $s = j$.

Para a superálgebra, P^2 é um operador de Casimir, devido à eq. (3.6). Entretanto, como as cargas supersimétricas Q^A_α são espinores, o que é expresso por (3.7), W^2 não é um operador de Casimir para a superálgebra. Fisicamente, estas observações significam que os multipletos da susy contêm estados de mesma massa, mas com spins diferentes.

Além disso, podemos mostrar que a quantidade de estados com spins semi-inteiros (férmions $|f\rangle$) num multipleto de susy é igual à quantidade de estados com spins inteiros (bósons $|b\rangle$). Para mostrar isso, introduzimos o operador $(-)^{n_f}$, cujos auto valores são $+1$ e -1, ao atuar em estados bosônicos e fermiônicos, respectivamente. Devido ao fato de que $Q|b\rangle = |f\rangle$ e $Q|f\rangle = |b\rangle$, o operador $(-)^{n_f}$ deve anticomutar com Q:

$$(-)^{n_f} Q = -Q(-)^{n_f}. \tag{3.12}$$

A relação acima, juntamente com a eq. (3.4) e a propriedade cíclica do traço, nos permite concluir que $Tr[(-)^{n_f} P_\mu] = 0$, pois:

$$\begin{aligned}
2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\delta^A{}_B Tr[(-)^{n_f} P_\mu] &= Tr[(-)^{n_f}\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta_B}\}] \\
&= Tr[(-)^{n_f}\left(Q^A_\alpha \overline{Q}_{\dot\beta B} + \overline{Q}_{\dot\beta B} Q^A_\alpha\right)] \\
&= Tr[-Q^A_\alpha (-)^{n_f} \overline{Q}_{\dot\beta B} + Q^A_\alpha (-)^{n_f} \overline{Q}_{\dot\beta B}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Suponha que um multipleto possua N_b bósons e N_f férmions. Uma vez que para um dado multipleto P_μ é fixo, temos

$$Tr[(-)^{n_f}] = N_b - N_f = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_b = N_f, \tag{3.13}$$

que é o que queríamos demonstrar.

3.3.1 Representações massivas

Seguindo a receita de Wigner das representações induzidas, consideramos aqui um referencial em repouso, em que $P_\mu = (-m, 0, 0, 0)$. Nesse caso, a superálgebra fica, simplesmente

$$\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 2m\delta_{\alpha\dot\beta}\delta^A_B \tag{3.14}$$

$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 0. \tag{3.15}$$

Inicialmente, observamos que as relações acima podem ser escritas na forma de uma álgebra com $2\mathcal{N}$ operadores de criação $(a^A_\alpha)^\dagger$ e aniquilação a^A_α:

$$\{a^A_\alpha, (a^B_\beta)^\dagger\} = \delta_\alpha{}^\beta \delta^A_B, \qquad a^A_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} Q^A_\alpha \tag{3.16}$$

$$\{a^A_\alpha, a^B_\beta\} = \{(a^A_\alpha)^\dagger, (a^B_\beta)^\dagger\} = 0, \qquad (a^A_\alpha)^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \overline{Q}_{\dot\alpha A}. \tag{3.17}$$

A vantagem de escrever na forma acima é que sabemos como construir representações de álgebras de criação/aniquilação. Para isso, introduzimos um *"vácuo"*[2] *de Clifford* $|\Omega\rangle$, que é aniquilado por todos os operadores a^A_α:

$$a^A_\alpha |\Omega\rangle = 0. \tag{3.18}$$

Os estados são agora construídos facilmente através de sucessivas atuações dos operadores de criação:

$$|\Omega^{\alpha_1}_{A_1} \cdots {}^{\alpha_n}_{A_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^{A_1}_{\alpha_1})^\dagger \cdots (a^{A_n}_{\alpha_n})^\dagger |\Omega\rangle. \tag{3.19}$$

São construídos desta forma um total de $2^{2\mathcal{N}}$ estados, pois os operadores $a^\dagger$ são objetos anticomutantes e, portanto, $(a^\dagger)^2 = 0$. Observe que (3.13) é satisfeita, já que um produto de uma quantidade par (ímpar) de diferentes operadores $a^\dagger$ é bosônico (fermiônico). Desta forma, se o estado $|\Omega\rangle$ for bosônico, temos:

$$N_b = \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 2\mathcal{N} \end{pmatrix} = 2^{2\mathcal{N}-1} = \frac{2^{2\mathcal{N}}}{2}, \tag{3.20}$$

$$N_f = \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 3 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 2\mathcal{N} \\ 2\mathcal{N}-1 \end{pmatrix} = 2^{2\mathcal{N}-1} = \frac{2^{2\mathcal{N}}}{2}. \tag{3.21}$$

Se o "vácuo"de Clifford $|\Omega\rangle$ for não-degenerado, chamamos (3.19) de *multipleto irredutível massivo fundamental*. Entretanto, o mesmo pode possuir um spin $j > 0$. Nesse caso, o "vácuo"$|\Omega, j\rangle$ é degenerado e pertence a um multipleto $(2j+1)$-dimensional.

Por simplicidade, considere $\mathcal{N} = 1$ daqui pra frente. Neste caso, há somente dois operadores de criação: $a^\dagger_1$ e $a^\dagger_2$. Para estudar o significado destes operadores, considere a eq. (3.7), donde decorre, através da relação (A.11) do apêndice A, que

$$[J^i, \overline{Q}^{\dot\alpha}] = -\frac{1}{2}(\sigma^i \overline{Q})^{\dot\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad [J^i, a^\dagger_\alpha] = \frac{1}{2}(\sigma^i)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} a^\dagger_\beta \tag{3.22}$$

em que usamos a notação (A.5) e $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M^{jk}$.

Considere agora o estado $|m, s, s_3\rangle$, que tem massa m e um spin s, cuja terceira componente é s_3:

$$P^2|m,s,s_3\rangle = -m^2|m,s,s_3\rangle, \qquad J^2|m,s,s_3\rangle = s(s+1)|m,s,s_3\rangle, \qquad J_3|m,s,s_3\rangle = s_3|m,s,s_3\rangle.$$

Estamos interessados nos autovalores de J_3 sobre os dois estados

$$|m, \alpha\rangle \equiv a^\dagger_\alpha |m, s, s_3\rangle. \tag{3.23}$$

[2] As aspas são para salientar que o conceito usual de vácuo como o estado de mais baixa energia não se aplica aqui. Como comentamos, todos os estados do multipleto possuem a mesma energia e $P^2|\Omega\rangle = -m^2|\Omega\rangle$.

De (3.22), escrevemos

$$[J_3, a^\dagger_\alpha] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^\dagger_1 \\ a^\dagger_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^\dagger_1 \\ -a^\dagger_2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, vemos que

$$J_3|m,1\rangle = \left(s_3 - \frac{1}{2}\right)|m,1\rangle, \qquad e \qquad J_3|m,2\rangle = \left(s_3 + \frac{1}{2}\right)|m,2\rangle. \tag{3.24}$$

Portanto, concluímos que, ao atuarem num estado com spin s, os operadores $a^\dagger_1$ e $a^\dagger_2$ aumentam e diminuem, respectivamente, o valor de s_3 de $1/2$. Além disso, temos:

$$J_3|m,1,2\rangle \equiv J_3 a^\dagger_1 a^\dagger_2|m,s,s_3\rangle = s_3|m,1,2\rangle. \tag{3.25}$$

Note que $|m,1,2\rangle = -|m,2,1\rangle$ e que não há mais estados possíveis, pois $(a^\dagger)^2 = 0$.

O multipleto fundamental contém duas partículas de spin 0, que são:

$$|\Omega\rangle \qquad e \qquad a^\dagger_1 a^\dagger_2|\Omega\rangle$$

e dois estados de spin meio (portanto *uma partícula* de spin meio):

$$a^\dagger_1|\Omega\rangle, \qquad s_3 = -\frac{1}{2}$$

e

$$a^\dagger_2|\Omega\rangle, \qquad s_3 = +\frac{1}{2}.$$

Este multipleto fundamental massivo é chamado *multipleto de Wess-Zumino* por possuir o mesmo conteúdo de spin do modelo quadridimensional apresentado por Wess e Zumino em 1974. Chamamos novamente atenção para o fato de que as número de *estados* bosônicos é igual ao de fermiônicos.

No caso de um "vácuo"degenerado $|\Omega, j\rangle$, este constitui, como dissemos, um multipleto de $2j+1$ estados. Sobre cada um destes estados, podemos atuar os operadores de criação, que dão origem a quatro estados de modo que haja, no total, $4(2j+1)$ estados. Considere o exemplo $|\Omega, \frac{1}{2}\rangle$:

$$j = 1/2 \to \left\{ \begin{array}{l} +1/2 \to \left\{ \begin{array}{lll} +1/2 & & |\Omega, j\rangle \\ \ \ 0 & (= +1/2 - 1/2) & a^\dagger_1|\Omega, j\rangle) \\ +1 & (= +1/2 + 1/2) & a^\dagger_2|\Omega, j\rangle) \\ +1/2 & (= +1/2 - 1/2 + 1/2) & a^\dagger_1 a^\dagger_2|\Omega, j\rangle) \end{array} \right. \\ \\ -1/2 \to \left\{ \begin{array}{lll} -1/2 & & |\Omega, j\rangle \\ -1 & (= -1/2 - 1/2) & a^\dagger_1|\Omega, j\rangle) \\ \ \ 0 & (= -1/2 + 1/2) & a^\dagger_2|\Omega, j\rangle) \\ -1/2 & (= -1/2 - 1/2 + 1/2) & a^\dagger_1 a^\dagger_2|\Omega, j\rangle) \end{array} \right. \end{array} \right. . \tag{3.26}$$

O conteúdo de partículas do multipleto acima é: uma partícula de spin 1 $[+1, 0, -1]$, duas partículas de spin 1/2 (duas vezes $[+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$) e uma partícula de spin 0 (feitos os outros agrupamentos, sobra um 0). Este é o chamado *multipleto vetorial*, pois o mais alto spin é 1.

Todo esse procedimento pode ser reproduzido para casos com $\mathcal{N} > 1$ (chamados *susy estendida*). Nesses casos, todos os operadores $(a_1^A)^\dagger$ diminuem 1/2 ao valor de s_3, enquanto que os operadores $(a_2^A)^\dagger$ aumentam 1/2 ao valor de s_3. Desta forma, é fácil ver que o mais alto spin presente num multipleto é aquele do estado construído com todos os operadores $(a_2^A)^\dagger$ atuando em $|\Omega\rangle$ e, é claro, nenhum dos operadores $(a_1^A)^\dagger$ está presente. Este mais alto spin no caso do multipleto fundamental é, portanto, dado por $\frac{\mathcal{N}}{2}$. Em casos em que o "vácuo"é degenerado $|\Omega, j\rangle$, o mais alto spin é $j + \frac{\mathcal{N}}{2}$. Em ambos os casos, a partícula de maior spin aparece uma única vez, como observa-se nos exemplos[3] dados abaixo:

$\mathcal{N} = 1$:

Spin	$\|\Omega\rangle$	$\|\Omega, \frac{1}{2}\rangle$	$\|\Omega, 1\rangle$	$\|\Omega, \frac{3}{2}\rangle$
0	2	1	-	-
$\frac{1}{2}$	1	2	1	
1	-	1	2	1
$\frac{3}{2}$	-	-	1	2
2	-	-	-	1

$\mathcal{N} = 2$:

Spin	$\|\Omega\rangle$	$\|\Omega, \frac{1}{2}\rangle$	$\|\Omega, 1\rangle$
0	5	4	1
$\frac{1}{2}$	4	6	4
1	1	4	6
$\frac{3}{2}$	-	1	4
2	-	-	1

$\mathcal{N} = 3$:

Spin	$\|\Omega\rangle$	$\|\Omega, \frac{1}{2}\rangle$
0	14	14
$\frac{1}{2}$	14	20
1	6	15
$\frac{3}{2}$	1	6
2	-	1

$\mathcal{N} = 4$:

Spin	$\|\Omega\rangle$
0	42
$\frac{1}{2}$	48
1	27
$\frac{3}{2}$	8
2	1

3.3.2 Representações não-massivas

Novamente, usamos o método das representações induzidas. A escolha feita para P_μ, entretanto, deve ser consistente com uma partícula de massa nula $P^2 = 0$. Assim, escolhemos o

[3]Exemplos extraídos da referência [20].

referencial em que $P_\mu = (-E, 0, 0, E)$. Nesse caso, a superálgebra fica, simplesmente

$$\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 2E\left(\sigma^3 - \sigma^0\right)\delta^A_B = \begin{pmatrix} 4E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^A_B \tag{3.27}$$

$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 0. \tag{3.28}$$

Mais uma vez, é possível escrever operadores de criação/aniquilação:

$$\{a^A, a^\dagger_B\} = \delta^A_B, \qquad a^A \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}} Q^A_1, \tag{3.29}$$

$$\{a^A, a^B\} = \{a^\dagger_A, a^\dagger_B\} = 0, \qquad a^\dagger_A \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}} \overline{Q}_{\dot 1 A} = (a^A)^\dagger. \tag{3.30}$$

Note que todos os operadores associados com os índices "2"e "$\dot 2$"anticomutam com todos os demais objetos. A álgebra de criação/aniquilação no caso não-massivo, portanto, tem metade dos operadores e o multipleto possui dimensão $2^{\mathcal{N}}$, com $2^{\mathcal{N}-1}$ estados bosônicos e $2^{\mathcal{N}-1}$ fermiônicos.

De modo análogo ao caso massivo, definimos um "vácuo"de Clifford com helicidade λ', definido por:

$$a^A|\Theta\rangle = 0 \tag{3.31}$$

Os demais estados são construídos assim:

$$|\Theta_{A_1\ldots A_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger_{A_1}\ldots a^\dagger_{A_n}|\Theta\rangle. \tag{3.32}$$

Cada operador $a^\dagger_A$ aumenta a helicidade de 1/2, de modo que o estado com maior helicidade é aquele construído com a maior quantidade possível de operadores de criação e possui helicidade $\lambda = \lambda' + \frac{1}{2}\mathcal{N}$. Por esta razão, uma Teoria de Super Yang-Mills Pura, em que $|\lambda| > 1$ é proibido, não pode ser formulada com susy $\mathcal{N} > 4$ em quatro dimensões e, portanto, com uma quantidade de supercargas superior a 16. Para Teorias de Supergravidade, em que $|\lambda| > 2$ é proibido, o limite para o número de supersimetrias é: $\mathcal{N} \leq 8$, o que significa uma quantidade máxima de 32 supercargas.

Abaixo, seguem alguns exemplos de multipletos para diversos valores de $\mathcal{N}$, em que consideramos $|\lambda| \leq 2$:

- $\mathcal{N} = 1$:

	$\lambda' = -2$	$\lambda' = -\frac{3}{2}$	$\lambda' = -1$	$\lambda' = -\frac{1}{2}$	$\lambda' = 0$	$\lambda' = \frac{1}{2}$	$\lambda' = 1$	$\lambda' = \frac{3}{2}$
$\lambda = 2$	-	-	-	-	-	-	-	1
$\lambda = \frac{3}{2}$	-	-	-	-	-	-	1	1
$\lambda = 1$	-	-	-	-	-	1	1	-
$\lambda = \frac{1}{2}$	-	-	-	-	1	1	-	-
$\lambda = 0$	-	-	-	1	1	-	-	-
$\lambda = -\frac{1}{2}$	-	-	1	1	-	-	-	-
$\lambda = -1$	-	1	1	-	-	-	-	-
$\lambda = -\frac{3}{2}$	1	1	-	-	-	-	-	-
$\lambda = -2$	1	-	-	-	-	-	-	-

- $\mathcal{N} = 2$:

	$\lambda' = -2$	$\lambda' = -\frac{3}{2}$	$\lambda' = -1$	$\lambda' = -\frac{1}{2}$	$\lambda' = 0$	$\lambda' = \frac{1}{2}$	$\lambda' = 1$
$\lambda = 2$	-	-	-	-	-	-	1
$\lambda = \frac{3}{2}$	-	-	-	-	-	1	2
$\lambda = 1$	-	-	-	-	1	2	1
$\lambda = \frac{1}{2}$	-	-	-	1	2	1	-
$\lambda = 0$	-	-	1	2	1	-	-
$\lambda = -\frac{1}{2}$	-	1	2	1	-	-	-
$\lambda = -1$	1	2	1	-	-	-	-
$\lambda = -\frac{3}{2}$	2	1	-	-	-	-	-
$\lambda = -2$	1	-	-	-	-	-	-

- $\mathcal{N} = 3$:

	$\lambda' = -2$	$\lambda' = -\frac{3}{2}$	$\lambda' = -1$	$\lambda' = -\frac{1}{2}$	$\lambda' = 0$	$\lambda' = \frac{1}{2}$
$\lambda = 2$	-	-	-	-	-	1
$\lambda = \frac{3}{2}$	-	-	-	-	1	3
$\lambda = 1$	-	-	-	1	3	3
$\lambda = \frac{1}{2}$	-	-	1	3	3	1
$\lambda = 0$	-	1	3	3	1	-
$\lambda = -\frac{1}{2}$	1	3	3	1	-	-
$\lambda = -1$	3	3	1	-	-	-
$\lambda = -\frac{3}{2}$	3	1	-	-	-	-
$\lambda = -2$	1	-	-	-	-	-

- $\mathcal{N} = 4$:

	$\lambda' = -2$	$\lambda' = -\frac{3}{2}$	$\lambda' = -1$	$\lambda' = -\frac{1}{2}$	$\lambda' = 0$
$\lambda = 2$	-	-	-	-	1
$\lambda = \frac{3}{2}$	-	-	-	1	4
$\lambda = 1$	-	-	1	4	6
$\lambda = \frac{1}{2}$	-	1	4	6	4
$\lambda = 0$	1	4	6	4	1
$\lambda = -\frac{1}{2}$	4	6	4	1	-
$\lambda = -1$	6	4	1	-	-
$\lambda = -\frac{3}{2}$	4	1	-	-	-
$\lambda = -2$	1	-	-	-	-

- $\mathcal{N} = 8$:

	$\lambda' = -2$
$\lambda = 2$	1
$\lambda = \frac{3}{2}$	8
$\lambda = 1$	28
$\lambda = \frac{1}{2}$	56
$\lambda = 0$	70
$\lambda = -\frac{1}{2}$	56
$\lambda = -1$	28
$\lambda = -\frac{3}{2}$	8
$\lambda = -2$	1

Teorias que são invariantes por transformações de CPT devem incluir partículas com helicidades $+\lambda$ e $-\lambda$ no mesmo multipleto, uma vez que esta transformação muda o sinal da helicidade. Dos exemplos acima, vemos que $(\mathcal{N} = 2, \lambda' = -1/2)$, $(\mathcal{N} = 4, \lambda' = -1)$ e $(\mathcal{N} = 8, \lambda' = -2)$ são multipletos automaticamente invariantes por transformações de CPT. Para incluir a simetria CPT nos demais multipletos, devemos duplicar o número de estados.

3.3.3 Estados de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)

A álgebra de supersimetria apresentada até aqui não é a mais geral. É possível adicionar um termo no lado direito da relação (3.5). Este objeto deve ser antissimétrico nos índices A e B e é incluído na álgebra como segue:

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{AB}. \tag{3.33}$$

Para $\overline{Q}$ tomamos o complexo conjugado da expressão acima. O operador Z^{AB} é chamado de *carga central* devido ao fato de que ele comuta com todos os outros elementos da álgebra. Note que, por ser antissimétrica nos índices A e B, a carga central somente pode estar presente em supersimetrias extendidas ($\mathcal{N} > 1$). Estudaremos aqui o caso mais simples, ou seja, com duas supersimetrias. Na representação massiva (com referencial em repouso), escrevemos a álgebra do seguinte modo:

$$\{Q_\alpha^A, (Q_\beta^B)^\dagger\} = 2m\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta_B^A = 2m\delta_B^A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} = \varepsilon_{\alpha\beta}(Z\varepsilon^{AB}) = Z\varepsilon_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

em que $(Q_\beta^B)^\dagger = \overline{Q}_{\dot{\beta}B}$ e Z é o autovalor de Z^{12}.

Assim como foi feito quando não tínhamos cargas centrais, é possível escrever uma álgebra de criação/aniquilação. Para tanto, consideramos a seguinte combinação:

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_\alpha^1 + \varepsilon_{\alpha\rho}(Q_\rho^2)^\dagger\right] \tag{3.36}$$

$$b_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_\alpha^1 - \varepsilon_{\alpha\rho}(Q_\rho^2)^\dagger\right]. \tag{3.37}$$

A álgebra satisfeita por estes operadores é:

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = \{b_\alpha, b_\beta\} = \{a_\alpha, b_\beta\} = 0 \tag{3.38}$$

$$\{a_\alpha, (a_\beta)^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}(2m + Z) \tag{3.39}$$

$$\{b_\alpha, (b_\beta)^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}(2m - Z) \tag{3.40}$$

Claramente as equações acima estabelecem a condição $2m \geq Z$, que é chamada condição de BPS. É comum chamar um objeto para o qual essa condição é saturada, ou seja, $2m = Z$, de objeto BPS ou extremo. Nesse caso, o multipleto apenas pode ser construído com o operador $(a_\alpha)^\dagger$, pois (cf. eq. (3.40)) a condição de extremismo implica que os estados devem ser todos aniquilados pelos operadores b_α e $(b_\alpha)^\dagger$. Isso resulta no que às vezes é chamado de pequeno multipleto por ter metade do tamanho do multipleto completo construído por ambos $(a_\alpha)^\dagger$ e $(b_\alpha)^\dagger$.

O interesse em objetos BPS é que uma solução do tipo brana da supergravidade II que contém somente um parâmetro livre (uma solução do tipo brana com esta característica é chamada extrema) preserva apenas metade da supersimetria inicial. Por outro lado, as D-branas, quando presentes na Teoria de Supercordas do tipo II, que é a teoria de cordas fechadas (seção 3.6), permite a realização de somente metade das supersimetrias possíveis numa teoria de cordas fechadas sem D-branas[4]. A redução pela metade da supersimetria proporcionada pelas D-branas e pelas branas extremas da supergravidade é um indício de que estes objetos podem ser interpretados como o mesmo ente físico.

No capítulo 4, deduziremos as soluções extrema e negra para a supergravidade. Nesta última, a condição de extremismo é relaxada, permitindo a caracterização da solução por dois parâmetros m e Z que satisfazem a condição de BPS. Esse nome deve-se à similaridade com os buracos negros de Reissner-Nordstrom (em que o princípio da censura cósmica implica a relação $M \geq Q$ entre sua massa e sua carga).

3.4 Como introduzir férmions em cordas?

É o propósito desta seção introduzir férmions na teoria de cordas bosônicas que desenvolvemos no capítulo 2. A ação resultante terá uma simetria adicional que será identificada com a supersimetria que estudamos nas seções iniciais deste capítulo.

Os férmions são descritos pela representação espinorial do grupo de Lorentz e, portanto, devemos decidir como introduzir espinores na ação de Polyakov (2.7). No caso bosônico, X^μ transforma-se como um vetor no espaço-tempo, mas como um escalar na folha-mundo e a ação da corda é a de uma teoria de D campos escalares livres em duas dimensões. De modo análogo, introduzimos um campo ψ^μ que se transforma como um vetor no espaço-tempo e como um espinor na folha-mundo (omitimos o índice espinorial). Esses campos são graus de liberdade internos da corda e são introduzidos como uma ação de Dirac livre e bidimensional, de modo que a ação da Teoria de Supercordas no calibre conforme é:

$$S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \left\{\partial_i X^\mu \partial^i X_\mu - i\overline{\psi}^\mu \rho^i \partial_i \psi_\mu\right\}. \tag{3.41}$$

[4]Como sabemos, as D-branas estão relacionadas à presença de cordas abertas e, por razões que discutiremos brevemente no final da seção 3.5 (pág. 39), as cordas abertas promovem uma redução pela metade da supersimetria.

Na ação acima, $\overline{\psi} = \psi^\dagger \rho^0$ e ρ^i são as matrizes de Dirac bidimensionais, que satisfazem a álgebra de Clifford $\{\rho^i, \rho^j\} = -2\eta^{ij}$. Uma representação possível para estas matrizes é:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Nesta representação puramente imaginária, o operador de Dirac $i\rho^i\partial_i$ é real e, portanto, ψ^μ também é real, ou seja, um espinor de Majorana ($\psi^\dagger = \psi^T$).

A ação (3.41) é invariante pelas transformações

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = -i\rho^i\partial_i X^\mu \epsilon \tag{3.43}$$

(ϵ é um espinor de Majorana constante e anticomutante).

A transformação (3.43) tem a interessante propriedade:

$$[\delta_1, \delta_2] = a^i\partial_i, \qquad a^i = 2i\bar{\epsilon}_1\rho^i\epsilon_2. \tag{3.44}$$

Esta relação significa que o comutador das transformações é proporcional a uma translação e que, portanto, temos aqui uma invariância por supersimetria $\mathcal{N} = 1$, pois há somente um parâmetro espinorial ϵ. Para demonstrar que $[\delta_1, \delta_2]\psi^\mu = a^i\partial_i\psi^\mu$, é necessário usar a equação de movimento $\rho^i\partial_i\psi = 0$, o que significa que a álgebra de supersimetria somente fecha *on shell*. Para que a supersimetria seja manifesta (álgebra satisfeita *off shell*), é necessário introduzir na ação (3.41) campos sem dinâmica, chamados *auxiliares*, cujas equações de movimento são algébricas. Isto é feito de modo mais natural usando o conceito de *superespaço*, que consiste, fundamentalmente, em adicionar uma coordenada anticomutante θ ao espaço-tempo [6, 17, 20]. O estudo do superespaço está fora do escopo deste trabalho e portanto trabalharemos apenas com susy não-manifesta.

As equações de movimento advindas de (3.41) são (cf. eq. (2.19)):

$$\partial_\tau\partial_\tau X^\mu - \partial_\sigma\partial_\sigma X^\mu = 0 \qquad e \qquad \rho^i\partial_i\psi^\mu = 0. \tag{3.45}$$

Para enfatizar a simetria entre as partes bosônica e fermiônica (supersimetria), escrevemos as equações acima na forma:

$$\partial_+(\partial_- X^\mu) = \partial_+\psi_-^\mu = 0, \qquad \partial_-(\partial_+ X^\mu) = \partial_-\psi_+^\mu = 0, \tag{3.46}$$

em que usamos coordenadas do cone-de-luz na folha mundo $\xi^\pm \equiv \tau \pm \sigma$:

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma), \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Nesse sistema de coordenadas fica claro a separação entre modos para a esquerda e para a direita:

- ψ_+^μ e $\partial_+ X^\mu$ dependem apenas de ξ^+;
- ψ_-^μ e $\partial_- X^\mu$ dependem apenas de ξ^-.

Para a parte bosônica, os mesmos resultados apresentados no capítulo 2 mantêm-se, embora uma modificação seja digna de nota: uma vez que ψ^μ é um vetor de Lorentz no espaço-tempo, a definição dos geradores de $M^{\mu\nu}$ inclui uma contribuição da parte fermiônica e uma nova análise da álgebra de Lorentz para a teoria quântica da supercorda leva à conclusão de que a dimensão do espaço-tempo deve ser $D = 10$.

Portanto, estudaremos agora apenas a parte fermiônica. Assim como no caso da corda bosônica, estas soluções dependem das condições de contorno que devem zerar os termos de superfície provenientes da variação da ação (3.41), nas extremidades de uma corda aberta:

$$\psi_+\delta\psi_+ - \psi_-\delta\psi_- = 0 \qquad (nas\ \ extremidades). \tag{3.48}$$

A relação acima é claramente satisfeita se $\psi_+ = \pm\psi_-$ em cada ponta da corda. Ao escolhermos[5] $\psi_+(\sigma = 0) = \psi_-(\sigma = 0)$, duas possibilidades satisfazem (3.48):

- $\psi_+(\sigma = \pi) = \psi_-(\sigma = \pi)$ (condição de Ramond (R));
- $\psi_+(\sigma = \pi) = -\psi_-(\sigma = \pi)$ (condição de Neveu-Schwarz (NS)).

A solução de (3.46) com condição de Ramond é:

$$\psi^\mu_\pm(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} d^\mu_n e^{-in(\tau\pm\sigma)} \qquad (R) \tag{3.49}$$

e a solução de (3.46) com condição de Neveu-Schwarz é:

$$\psi^\mu_\pm(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r\in Z+1/2} b^\mu_r e^{-ir(\tau\pm\sigma)} \qquad (NS) \tag{3.50}$$

(como ψ é real, $d_{-n} = d^\dagger_n$ e $b_{-r} = b^\dagger_r$.)

Como veremos, na teoria quântica, o setor (R) descreve férmions no espaço-tempo e o setor (NS) descreve bósons no espaço-tempo.

No caso de cordas fechadas, os modos para a direita e para esquerda são independentes e devem, portanto, ser periódicos ou antiperiódicos *separadamente*. Isso significa que a corda fechada possui quatro setores:

- ψ_+ periódico e ψ_- periódico (setor Ramond-Ramond (R-R));
- ψ_+ antiperiódico e ψ_- antiperiódico (setor Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (NS-NS));
- ψ_+ periódico e ψ_- antiperiódico (setor Ramond-Neveu-Schwarz (R-NS));
- ψ_+ antiperiódico e ψ_- periódico (setor Neveu-Schwarz-Ramond (NS-R)).

Os dois primeiros setores descrevem bósons espaço-temporais na teoria quântica e os dois últimos, férmions.

Faremos a quantização da supercorda também no cone-de-luz, como no caso bosônico. Nessas coordenadas, temos:

$$X^\mu = (X^-, X^+, X^I), \qquad \psi^\mu = (\psi^-, \psi^+, \psi^I).$$

O calibre do cone-de-luz consiste em fixar valor de X^+:

$$X^+ = \beta\ell_s^2 p^+\tau \tag{3.51}$$

(com $\beta = 2$ para a corda aberta e $\beta = 1$ para a corda fechada. Cf. eqs. (2.27) e (2.48)).

[5] Esta escolha é convencional, não importando o sinal absoluto escolhido. Apenas o sinal *relativo* entre ψ_+ e ψ_- nas duas extremidades nos conduz a situações fisicamente inequivalentes.

Devido à equação (3.43), para que esta escolha seja mantida, ou seja, para que $\delta X^+ = 0$, devemos escolher:

$$\psi^+ = 0. \tag{3.52}$$

Para seguir o procedimento feito na quantização bosônica que apresentamos, é necessário encontrar vínculos que permitam relacionar ψ^- com ψ^I, de modo que as variáveis independentes na parte fermiônica, às quais devem ser impostas as relações de anticomutação, são as componentes ψ^I apenas. Estes vínculos na Teoria de Supercorda são obtidos do mesmo modo que fizemos anteriormente: através do tensor energia-momentum associado à folha-mundo, que, com a contribuição do termo de Dirac presente na ação (3.41), é:

$$T_{\pm\pm} = (\partial_\pm X)^2 + \frac{i}{2}\psi_\pm \partial_\pm \psi_\pm = 0, \qquad\qquad T_{+-} = 0. \tag{3.53}$$

Claramente, a equação acima não permite escrever X^- ou ψ^- unicamente em termos de X^I e ψ^I. Entretanto, a invariância por supersimetria conduz à uma corrente (de Noether) conservada:

$$J_\pm = \psi^\mu_\pm \partial_\pm X_\mu \tag{3.54}$$

e a transformação de supersimetria (3.43) relaciona essas duas grandezas:

$$\delta J_\pm \sim T_{\pm\pm},$$

de modo que a condição $T_{ij} = 0$ implica, por consistência, um segundo vínculo:

$$J_\pm = 0. \tag{3.55}$$

Estes dois vínculos podem ser resolvidos de modo a obter:

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{2\beta\ell_s^2 p^+}(\partial_+ X^I \partial_+ X^I + \frac{i}{2}\psi^I_+ \partial_+ \psi^I_+) \tag{3.56}$$

$$\psi^- = \frac{1}{\beta\ell_s^2 p^+}\psi^I_- \partial_+ X^I \tag{3.57}$$

Estamos neste momento em posição de quantizar a teoria. É o que faremos na próxima seção.

3.5 Quantização, projetor GSO e espectro da Supercorda do tipo I

Relações de comutação são impostas à parte bosônica e de anticomutação à parte fermiônica. Como de costume, escreveremos estas relações para os modos de oscilação

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}, \quad [a^I_m, a^J_n] = \eta^{IJ}\delta_{m+n,0}; \qquad \{d^I_n, d^J_m\} = \delta^{IJ}\delta_{n+m,0}, \quad \{b^I_r, b^J_s\} = \delta^{IJ}\delta_{r+s,0} \tag{3.58}$$

que são interpretados como operadores de criação ($(a^I_n)^\dagger$ e $(b^I_r)^\dagger$) e aniquilação (a^I_n e b^I_r). Os modos bosônicos atuam num vácuo $|p^+, p_T\rangle$, enquanto que os modos fermiônicos provenientes dos setores de Neveu-Schwarz ou de Ramond atuam, respectivamente, num vácuo $|NS\rangle$ ou $|R\rangle$ dando origem ao espectro que estudaremos caso a caso a seguir.

Iniciamos pela corda aberta. Escolhemos começar pelo setor NS que não possui modo zero e portanto permite a definição de um vácuo não-degenerado. A massa de um estado NS é dada por

$$M^2 = \frac{1}{\ell_s^2}\left\{\sum_{n,r>0}\left[n(a_n^I)^\dagger a_n^I + r(b_r^I)^\dagger b_r^I\right] - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{\ell_s^2}\left\{N^\perp - \frac{1}{2}\right\} \tag{3.59}$$

em que o termo "$-1/2$"é a constante de ordenamento a_{NS}, fixada através da análise da álgebra de Lorentz na teoria após o processo de quantização (ver referência [6], sec. 4.3.1, para mais detalhes).

O vácuo é definido através de

$$b_r^I|NS\rangle = 0, \qquad\qquad r > 0. \tag{3.60}$$

Dessa forma, o estado fundamental é

$$|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad\qquad M^2 = -\frac{1}{2\ell_s^2} \tag{3.61}$$

que é um estado taquiônico. Comentamos anteriormente que a Supercorda é livre de estados taquiônicos. Entretanto, é necessário frisar que a supersimetria elimina estados taquiônicos se presente *no espaço-tempo*. A teoria tal como desenvolvida até aqui possui supersimetria somente na *folha-mundo*, de modo que a presença do estado (3.61) não contradiz o que foi dito antes. Voltaremos a este assunto quando estudarmos o projetor GSO mais adiante, ainda nesta seção.

O primeiro estado excitado é aquele para o qual $r = 1/2$:

$$(b_{1/2}^I)^\dagger|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad\qquad M^2 = 0, \tag{3.62}$$

que tem um índice vetorial $I = 2, \ldots, 9$ (8 graus de liberdade) e massa nula. O estado acima é identificado com o fóton.

O próximo estado já é massivo e é construído com um operador $a^\dagger$ e nenhum $b^\dagger$:

$$(a_1^I)^\dagger|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad\qquad M^2 = \frac{1}{2\ell_s^2}. \tag{3.63}$$

De um modo geral, um estado no setor NS da supercorda aberta é:

$$\prod_{I=2}^{9}\prod_{n=1}^{\infty}[(a_n^I)^\dagger]^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^{9}\prod_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots}[(b_r^J)^\dagger]^{\rho_{r,J}}|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.64}$$

em que, devido ao fato de que os $b^\dagger$'s são objetos anticomutantes, $\rho_{r,J}$ assume os valores 0 ou 1, somente.

Como comentamos, o espectro acima deve ser truncado e somente parte dele é considerado físico. Esse truncamento é feito a partir de um operador chamado *projetor de Gliozzi, Scherk e Olive (GSO)*:

$$P_{GSO}^{(NS)} \equiv \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^F\right), \tag{3.65}$$

em que F é o número de operadores $b^\dagger$, de modo que o espectro depois de projetado contém apenas estados com um número *ímpar* de operadores $b^\dagger$. Desta forma, o espectro físico da teoria é:

$$(b^I_{1/2})^\dagger|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0 \tag{3.66}$$

$$(b^I_{1/2})^\dagger(b^J_{1/2})^\dagger(b^K_{1/2})^\dagger|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = \frac{1}{2\ell_s^2} \tag{3.67}$$

$$(b^I_{3/2})^\dagger|NS\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = \frac{2}{2\ell_s^2} \tag{3.68}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

note que exemplificamos apenas estados construídos apenas com os operadores $b^\dagger$. Obviamente, também fazem parte do espectro estados construídos a partir dos estados acima através da atuação de uma quantidade qualquer de operadores $a^\dagger$, já que o projetor GSO não impõe nenhuma restrição ao número de operadores bosônicos.

Uma vantagem imediata da projeção $P^{(NS)}_{GSO}$ é que o espectro sobrevivente não contém o táquion. Além disso, há uma qualidade menos evidente: após a projeção, a teoria possui supersimetria no espaço-tempo! Não faremos aqui uma demonstração desse fato, limitando-nos a verificar uma propriedade básica da supersimetria, a saber, a igualdade entre o número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos no mesmo nível de massa (cf. eq. (3.13)).

Os bósons da teoria advêm todos do setor NS e, portanto, a teoria contém um bóson com oito estados de polarização, o fóton (3.62). Para contar os estados fermiônicos, é necessário estudar o setor R, de onde provêm todos os férmions da teoria. É o que faremos agora.

Ao contrário do que ocorre no setor NS, o setor R contém modos zeros, o que significa dizer (pois d_0 comuta com M^2) que seu vácuo é degenerado. Além disso, vemos de (3.58) que estes modos satizfazem

$$\{d^I_0, d^J_0\} = \delta^{IJ} \tag{3.69}$$

que reconhecemos como uma álgebra de Clifford e de onde concluímos que os d_0's são representados por matrizes 16×16. Assim, o vácuo do setor R, onde essas matrizes atuam, é um espinor de 16 componentes:

$$|R, A\rangle, \qquad A = 1, \dots, 16. \tag{3.70}$$

Embora a ação da qual partimos (3.41) não sugerisse isso, o estado (3.70) é um espinor no *espaço-tempo*. O setor R dá origem, portanto, a férmions no espaço-tempo. Enfatizamos que a existência desses férmions é uma consequência direta de (3.69) que, por sua vez, é uma consequência da quantização (3.58).

A massa de um estado R é dada por

$$M^2 = \frac{1}{\ell_s^2}\sum_{n,m>0}\Big[n(a^I_n)^\dagger a^I_n + m(d^I_m)^\dagger d^I_m\Big] = \frac{N^\perp}{\ell_s^2} \tag{3.71}$$

já que a constante de ordenamento para este setor, também fixada através da álgebra de Lorentz, é: $a_R = 0$.

O estado fundamental é o único não massivo:

$$|R, A\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0. \tag{3.72}$$

E um estado geral no setor R da supercorda aberta é:

$$\prod_{I=2}^{9}\prod_{n=1}^{\infty}[(a^I_n)^\dagger]^{\lambda_{n,I}}\prod_{J=2}^{9}\prod_{m=1}^{\infty}[(d^J_m)^\dagger]^{\rho_{m,J}}|R, A\rangle \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.73}$$

em que, devido ao fato de que os $d^\dagger$'s são objetos anticomutantes, $\rho_{m,J}$ assume os valores 0 ou 1, somente.

Como o vácuo é o único estado não massivo, este deve formar um multipleto com o bóson não massivo (fóton) do setor NS. Para tanto, é necessário que (3.70) possua apenas 8 estados físicos. Para varificar isto, decompomos o estado (3.70) em duas partes:

$$|R, A^{(+)}\rangle \qquad e \qquad |R, A^{(-)}\rangle, \qquad\qquad A^{(\pm)} = 1, \ldots, 8. \tag{3.74}$$

A equação de Dirac (que um estado físico deve obedecer) relaciona estas duas partes, o que significa que, das 16 componentes de (3.70), apenas 8 são independentes, o que está de acordo com (3.13). Esse estado é o *companheiro supersimétrico* de fóton e é chamado *fotino*.

A análise que fizemos no parágrafo anterior sugere que o vácuo da teoria deve ser apenas um dos estados (3.74). Escolheremos o primeiro deles. Baseado nessa escolha, a prescrição de Gliozzi, Scherk e Olive para o setor de Ramond é permitir apenas estados com um número par de $b^\dagger$'s atuando em $|R, A^{(+)}\rangle$ e um número ímpar de $b^\dagger$'s atuando em $|R, A^{(-)}\rangle$. De modo que o estado fundamental sobrevivente seja $|R, A^{(+)}\rangle$. Formalmente, isto é obtido através do projetor

$$P^{(R)}_{GSO} = \frac{1}{2}\left(1 + \Gamma^{11}(-1)^F\right) \tag{3.75}$$

em que Γ^{11} é construído a partir das matrizes de Dirac em 10 dimensões ($\Gamma^{11} = \Gamma^0 \cdots \Gamma^9$) e tem autovalor $+1$ ou -1 ao atuar em $|R, A^{(+)}\rangle$ (quiralidade positiva) ou $|R, A^{(-)}\rangle$ (quiralidade negativa), respectivamente.

A escolha entre os vácuos (3.74) é arbitrária e ambos conduzem à mesma teoria de cordas abertas. Esta é chamada *Teoria de Supercordas do tipo I*, pois as condições de contorno relacionam ψ_- e ψ_+ e a teoria resultante tem apenas uma supersimetria no espaço-tempo. No caso da corda fechada, duas diferenças ocorrem devido ao fato de que os modos para a esquerda e para a direita são independentes: (a) não havendo relação entre ψ_- e ψ_+, cordas fechadas dão origem a uma teoria com duas supersimetrias (por isso são chamadas *Teorias de Supercordas do tipo II*) e (b) as escolhas entre os vácuos (3.74) são arbitrárias e independentes para os setores direita/esquerda e duas teorias distintas (ou seja, que contêm campos diferentes) surgem. Estas teorias são chamadas *Teoria de Supercordas do tipo IIB* e *Teoria de Supercordas do tipo IIA*, dependendo de se as escolhas para os setores direita e esquerda têm a mesma quiralidade ou quiralidades opostas, respectivamente. O espectro destas teorias é o assunto da próxima seção.

3.6 Teorias de Supercordas fechadas (tipos IIA e IIB)

Para fazer o estudo da corda fechada, lembramos do capítulo 2 que esta é constituída basicamente de duas cópias da corda aberta, com modos para a esquerda e para a direita. Novamente, diferenciaremos estes modos usando uma barra sobre os primeiros. A massa dos estados é dada por:

$$M^2 = \frac{1}{\ell_s^2}\left\{N^\perp - a_s + \bar{N}^\perp - \bar{a}_s\right\} \tag{3.76}$$

com a_s significando a constante de ordenamento para cada setor: $a_{NS} = 1/2$ ou $a_R = 0$. Note, entretanto, que, embora os setores esquerdo e direito sejam independentes, a condição de periodicidade relaciona os modos zeros dos dois setores:

$$N^\perp - a_s = \bar{N}^\perp - \bar{a}_s. \tag{3.77}$$

Vimos na página 35 que cordas fechadas dão origem a quatro setores. Além disso, como discutimos no final da seção anterior, o vácuo de cada um destes setores pode ser escolhido de duas formas. Assim, com "E"e "D"denotando, respectivamente, os setores esquerdo e direito, temos:

- Tipo IIB (quiral):

$$|NS^{GSO}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.78}$$
$$|R, A^{(+)}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.79}$$
$$|NS^{GSO}\rangle_E \otimes |R, A^{(+)}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.80}$$
$$|R, A^{(+)}\rangle_E \otimes |R, A^{(+)}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.81}$$

- Tipo IIA (não-quiral):

$$|NS^{GSO}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.82}$$
$$|R, A^{(+)}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.83}$$
$$|NS^{GSO}\rangle_E \otimes |R, A^{(-)}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.84}$$
$$|R, A^{(+)}\rangle_E \otimes |R, A^{(-)}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.85}$$

em que escrevemos $|NS^{GSO}\rangle$ para lembrar que, de acordo com a prescrição de GSO, o estado fundamental não pode ser o vácuo para o setor de Neveu-Schwarz (cf. eqs. (3.66)-(3.68)).

Vejamos agora o espectro da teorias IIA e IIB. Para os nossos interesses, é suficiente apresentar apenas o nível não massivo, no qual aparecerão os campos com os quais trabalharemos no próximo capítulo. Iniciamos pelo setor NS-NS, que claramente é comum a ambas as teorias. Neste, o estado fundamental é

$$(b^I_{1/2})^\dagger (\bar{b}^I_{1/2})^\dagger |NS^{GSO}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0. \tag{3.86}$$

O estado acima contém $8 \times 8 = 64$ graus de liberdade e pode ser decomposto de modo a obtermos três campos, como fizemos em (2.59)-(2.61). Dessa forma o setor NS-NS contém os campos não massivos:

- Gráviton: $\left(\frac{8\times 8-8}{2} + 8\right) - 1 = 35$ graus de liberdade em $D = 10$;
- Kalb-Ramond: $\frac{8\times 8-8}{2} = 28$ graus de liberdade em $D = 10$;
- Dílaton: 1 grau de liberdade.

De modo que os dois tipos de Supercorda fechada contêm o campo gravitacional.

Além destes bósons, a teoria de Supercordas fechadas possui outros campos bosônicos sem massa. Estes são oriundos do setor Ramond-Ramond, já que o produto de dois espinores transforma-se como um vetor. Neste setor, o estado fundamental é

$$|R, A^{s_1}\rangle_E \otimes |R, A^{s_2}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \qquad M^2 = 0. \tag{3.87}$$

em que $s_1 = s_2 = +$ para o tipo IIB e $s_1 = +$ e $s_2 = -$ para o tipo IIA. O estado acima contém $8 \times 8 = 64$ graus de liberdade. O que, juntamente com o setor NS-NS, nos fornece um total de 128 graus de liberdade bosônicos.

Um estado geral pode ser escrito como

$$|\Phi_{RR}\rangle \sim (F + F_\mu \Gamma^\mu + \ldots + F_{\mu_1\ldots\mu_{10}}\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_{10}})|A^{s_1}, A^{s_2}\rangle \tag{3.88}$$

em que $|A^{s_1}, A^{s_2}\rangle$ é uma notação abreviada para o vácuo do setor R-R e[6]

$$\{1, \Gamma^\mu, \ldots, \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_{10}}\}, \qquad \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_k} \equiv \frac{1}{k!}\Gamma^{[\mu_1\ldots\mu_k]}$$

é uma base construída a partir das matrizes de Dirac. A condição de quiralidade, que é o que diferencia os tipos IIA (não-quiral) e IIB (quiral), resulta que apenas os coeficientes de $F_{\mu_1\ldots\mu_k}$ com k par (ímpar) são não-nulos para a teoria do tipo IIA (IIB). Como um tensor de n índices é dual a um tensor de $10-n$ índices, os campos independentes em cada teoria são:

- Tipo IIA: F, $F_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu\rho\sigma}$
- Tipo IIB: F_μ, $F_{\mu\nu\rho}$ e $F_{\mu\nu\rho\sigma\kappa}$.

Além disso, pode-se mostrar [7, 21, 22] que é válida a identidade de Bianchi para os coeficientes $F_{\mu_1\ldots\mu_k}$ e isso nos leva a interpretar estes campos como tensores de intensidade de campo aos quais associamos potenciais:

$$F_{\mu_1\ldots\mu_k} = \frac{1}{(k-1)!}\partial_{[\mu_1}A_{\mu_2\ldots\mu_k]}, \tag{3.89}$$

ou, escrita numa notação mais compacta[7],

$$F_k = dA_{(k-1)}. \tag{3.90}$$

Em termos destes potenciais, temos: Assim as teorias IIA e IIB possuem:

- Tipo IIA: um campo sem dinâmica F e os potenciais A_μ e $A_{\mu\nu\rho}$
- Tipo IIB: os potenciais A, $A_{\mu\nu}$ e $A_{\mu\nu\rho\sigma}$. Sendo este último um potencial auto-dual[8].

A parte fermiônica da teoria surge nos setores R-NS e NS-R da corda fechada. Os estados não massivos destes setores são:

$$R-NS: \qquad (\bar{b}^I_{1/2})^\dagger|R, A^{(s_1)}\rangle_E \otimes |NS^{GSO}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.91}$$

$$NS-R: \qquad (b^I_{1/2})^\dagger|NS^{GSO}\rangle_E \otimes |R, A^{(s_2)}\rangle_D \otimes |p^+, p_T\rangle, \tag{3.92}$$

É claro que cada um dos estados acima é fermiônico no espaço-tempo. Para a contagem dos graus de liberdade, basta lembrar que $I = 1, \ldots, 8$ e $A^{(s_1)} = 1, \ldots, 8$, de maneira que temos um total de $2 \times 8 \times 8 = 128$, que é o número necessário para haver supersimetria espaço-temporal no nível não massivo. Nestes setores, a diferença entre os dois tipos é que os estados acima têm mesma quiralidade (IIB) ou quiralidades opostas (IIA).

[6]Colchetes indicam anti-simetrização dos índices.
[7]Nesta notação, F_k é chamado de *forma diferencial*. No apêndice C, apresentamos brevemente este formalismo.
[8]Esta característica não é implementada na lagrangeana, tendo que ser colocada à mão na teoria, através das equações de movimento.

Capítulo 4

Supergravidade

Na supersimetria apresentada no capítulo anterior, os parâmetros das transformações são espinores constantes (supersimetria global). Ao tornar estes parâmetros funções da posição, obtemos uma supersimetria local que dará origem às Teorias de Supergravidade. Estas surgiram como uma tentativa de usar a supersimetria nos modelos de gravitação a fim de diminuir, ou mesmo solucionar, os problemas de divergência ultra-violeta na gravitação quântica. Entretanto, logo se verificou que a supersimetria local não era suficiente para remover divergências ultravioletas na teoria perturbativa. Embora incapaz de livrar a gravitação quântica das divergências, a supersimetria impõe sobre a mesma uma série de restrições nos termos que podem aparecer na ação e isso motivou estudos da supergravidade.

Ao contrário da supergravidade, a teoria de cordas mostrou-se adequada para o estudo da gravitação quântica. Mas desenvolvimentos na teoria de cordas mostraram uma profunda conexão entre essas duas teorias: as teorias de supergravidade são teorias efetivas no limite de baixas energias das cordas. Para entender como isso ocorre (maiores detalhes na seção 3.4 *Strings in Background Fields* da referência [6]), escrevamos a ação de Polyakov (2.7) num espaço-tempo curvo[1]:

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\xi \partial^a X^\mu \partial_a X^\nu g_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

em que escolhemos $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$, ou seja, o calibre conforme. Nesta ação, também deve ser imposta a condição $T_{ab} = 0$, que garante a invariância conforme na folha-mundo. A ação (4.1) pode ser vista como a ação de uma teoria de campos em duas dimensões (modêlo sigma não linear) e a invariância conforme pode ser estudada em termos da função β e desse estudo encontra-se[2]:

$$-\frac{1}{4\pi}\left(R_{\mu\nu} + \frac{\ell_s^2}{2}R_{\mu\kappa\lambda\tau}R_\nu^{\kappa\lambda\tau} + ...\right) = 0 \tag{4.2}$$

que, numa aproximação de baixas energias ($\ell_s \to 0$), nos dá $R_{\mu\nu} = 0$, que é a equação de Einstein no vácuo[3]!

Estendendo essa análise de modo a incluir os outros campos não-massivos da corda bosônica fechada (Kalb-Ramond e dílaton), obtém-se equações de movimento que em baixas energias

[1] Embora a corda inicialmente oscile num espaço-tempo chato, o gráviton surge como um dos modos de vibração e (como é sabido da Relatividade Geral) encurva o espaço-tempo. Para ser consistente, devemos analisar o que ocorre na teoria após essa curvatura do espaço-tempo provocada por ela mesma.

[2] Os objetos geométricos (Ricci e Riemann) estão assiciados a $g_{\mu\nu}$.

[3] A equação (4.2) é interpretada como uma generalização das equações de Einstein.

derivam da ação:

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^{26}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left\{R - 4D_\mu\phi D^\mu\phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right\} \tag{4.3}$$

em que $H_{\mu\nu\rho}$ é o tensor intensidade de campo associado ao Kalb-Ramond e κ é uma constante adequada. A ação como escrita acima é dita estar no quadro de cordas (*string frame*) por ser obtida da teoria de cordas e, embora seja reconhecida como uma ação gravitacional, possui uma exponencial do dílaton multiplicando o termo de Einstein-Hilbert. É possível reescrevê-la no chamado quadro de Einstein (*Einstein frame*) (em que temos o familiar $\sqrt{-g}R$) através de uma transformação conforme na métrica $g_{\mu\nu}$.

Na supercorda, uma ação semelhante a (4.3) é escrita para os campos não massivos do setor NSNS. Entretanto a ação, quando derivada da supercorda, vive num espaço-tempo de 10 dimensões.

4.1 As ações da supergravidade

A Teoria de Supergravidade em 11 dimensões é, segundo a crença atual, uma descrição do regime de baixas energias da (ainda desconhecida) teoria M. A parte bosônica da supergravidade em $D = 11$ é descrita pela ação:

$$S_{11}^{(E)} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\left\{\int d^{11}x\sqrt{-g}R + \frac{1}{2}\int\left[F_4\wedge {}^*F_4 - \frac{1}{3}A_3\wedge F_4\wedge F_4\right]\right\} \tag{4.4}$$

onde o índice $^{(E)}$ indica o quadro de Einstein, $F_4 = dA_3$ é a intensidade de campo do potencial A_3 e κ_{11} está relacionado às grandezas da teoria de cordas via $\kappa_{11}^2 = 2^7\pi^8 g_s^3 l_s^9$.

A compactificação de uma das onze dimensões da ação acima dá origem a supergravidade do tipo IIA, que é descrita por:

$$S_{IIA}^{(E)} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\left\{\int d^{10}x\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}\int\left[d\phi\wedge {}^*d\phi + e^{-\phi}H_3\wedge {}^*H_3 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -e^{3\phi/2}F_2\wedge {}^*F_2 - e^{\phi/2}\tilde{F}_4\wedge {}^*\tilde{F}_4 + B_2\wedge F_4\wedge F_4\right]\right\} \tag{4.5}$$

que é uma teoria não-quiral.

Uma outra possibilidade em $D = 10$ é a de uma teoria de supergravidade quiral. Tal teoria é denominada tipo IIB e é descrita por

$$S_{IIB}^{(E)} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\left\{\int d^{10}x\sqrt{-g}R - \frac{1}{2}\int\left[d\phi\wedge {}^*d\phi + e^{-\phi}H_3\wedge {}^*H_3 + \right.\right. \tag{4.6}$$

$$\left.\left. +e^{2\phi}F_1\wedge {}^*F_1 + e^{\phi}\tilde{F}_3\wedge {}^*\tilde{F}_3 + \frac{1}{2}\tilde{F}_5\wedge {}^*\tilde{F}_5 - C_4\wedge H_3\wedge F_3\right]\right\}$$

onde, em (4.5) e (4.6), $\kappa_{10} = 8\pi^{7/2}g_s l_s^4$ e:

$$H_3 = dB_2, \qquad F_n = dC_{n-1}, \qquad \tilde{F}_n = F_n \pm C_{n-3}\wedge H_3$$

(na última fórmula, usamos o sinal $+$ $(-)$ para valores ímpares (pares) de n).

Para um tratamento que englobe as eqs. (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6), usamos a ação mais geral (que desconsidera o último termo das ações acima, mas que para os nossos propósitos é suficiente)

$$I = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^Dx\sqrt{-g}\left\{R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2n!}e^{a\phi}F_n^2\right\} \tag{4.7}$$

em que consideramos apenas uma $n-$forma. Observe que os casos em 10 e 11 dimensões são obtidos com uma escolha adequada dos parâmetros em (4.7). Obviamente, para isso devemos incluir mais $n-$formas, mas estes termos são semelhantes ao termo representado na nossa ação geral. Em particular, para os campos de Ramond-Ramond em (4.5) e (4.6), temos $a_n = \frac{5-n}{2}$.

4.1.1 Equações de movimento

Deduziremos as equações de movimento da ação (4.3) numa dimensão arbitrária D.

- *Equação de movimento do dílaton:*

A variação de I com respeito a ϕ é (por simplicidade, usamos $\delta_\phi \equiv \delta$):

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^Dx\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}\delta(g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi) - \frac{1}{2n!}F_n^2\delta(e^{a\phi})\right\} \tag{4.8}$$

pois R é o escalar de curvatura, que não depende de ϕ. O primeiro termo é calculado como segue:

$$\delta(g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi) = g_{\mu\nu}\delta(\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi) = g_{\mu\nu}(\partial^\mu\delta\phi\partial^\nu\phi + \partial^\mu\phi\partial^\nu\delta\phi)$$

sendo a última igualdade decorrente do fato de que ∂^μ e δ_ϕ comutam. A simetria de $g_{\mu\nu}$ implica:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\partial^\mu\delta\phi\partial^\nu\phi + \partial^\mu\phi\partial^\nu\delta\phi) &= g_{\mu\nu}\partial^\mu\delta\phi\partial^\nu\partial\phi + g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\delta\phi \\ &= 2g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu(\delta\phi) \end{aligned} \tag{4.9}$$

O segundo termo é calculado facilmente. De fato,

$$\frac{\delta}{\delta\phi}e^{a\phi} = ae^{a\phi} \qquad \therefore \qquad \delta(e^{a\phi}) = ae^{a\phi}\delta\phi \tag{4.10}$$

Assim, usando (4.9) e (4.10), escrevemos:

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^Dx\sqrt{-g}\left\{-g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu(\delta\phi) - \frac{a}{2n!}e^{a\phi}F_n^2\delta\phi\right\} \tag{4.11}$$

A primeira integral de (4.11) pode ser feita por partes. Assim, temos:

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^Dx\left\{\partial^\nu\left(\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\right) - \sqrt{-g}\frac{a}{2n!}e^{a\phi}F_n^2\right\}\delta\phi \tag{4.12}$$

Pelo Princípio da Mínima Ação, a equação de movimento é obtida impondo que $\delta I = 0$. Como $\delta\phi$ é arbitrário, então o termo entre chaves na equação acima deve anular-se:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial^\nu\left(\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\right) = \frac{a}{2n!}e^{a\phi}F_n^2 \tag{4.13}$$

- *Equação de movimento para a métrica:*

Alguns termos de (4.3) não têm dependência explícita em $g_{\mu\nu}$. Explicitaremos essa dependência:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}; \tag{4.14}$$
$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}; \tag{4.15}$$
$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi; \tag{4.16}$$
$$F_n^2 = F_{\sigma_1\ldots\sigma_n}F^{\sigma_1\ldots\sigma_n} = \left(g^{\sigma_1\rho_1}...g^{\sigma_n\rho_n}\right)F_{\sigma_1\ldots\sigma_n}F_{\rho_1\ldots\rho_n}. \tag{4.17}$$

Então, a variação $\delta_{g_{\mu\nu}}I$ ($\equiv \delta I$, por simplicidade) é:

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}\left\{\delta\int d^{10}x\sqrt{-g}R + \delta\left(-\frac{1}{2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) + \delta\left(-\frac{1}{2n!}\int d^{10}x\sqrt{-g}e^{a\phi}F_n^2\right)\right\}$$

Assim,

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}(\delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3) \tag{4.18}$$

Para calcularmos δS_1, escrevemos:

$$\delta S_1 = \int d^D x\delta\left\{\sqrt{-g}R\right\} = \int d^D\left\{\delta\left(\sqrt{-g}\right)R + \sqrt{-g}\delta R\right\} \tag{4.19}$$

E, explicitando $g_{\mu\nu}$ em R no segundo termo, temos:

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \int d^D x\left\{\delta\left(\sqrt{-g}\right)R + \sqrt{-g}\delta\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)\right\}\\ &= \int d^D x\left\{R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right\}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Mas

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.21}$$

pois $\delta\sqrt{-g} = \left[\frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial g}\right]\delta g = -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\delta g$, em que $\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = (-g)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, sendo $\Delta^{\mu\nu}$ o cofator de $g_{\mu\nu}$. Observe que a última igualdade decorre do fato de que $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$ e, portanto, $g^{\mu\nu} = (\Delta^{\mu\nu}/g)$ e de que $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = 0$ e, portanto, $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Então a equação (4.20) fica:

$$\delta S_1 = \int d^D x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}, \tag{4.22}$$

pois $\int d^D x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0$, uma vez que $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ é uma derivada total, como mostraremos a seguir:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \delta(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}) - \delta(\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}) \qquad (4.23)\\ &= \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma} - \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\end{aligned}$$

em que a vírgula representa derivada parcial.

Num sistema de coordenadas local, $\Gamma = 0$ (entretanto, $\delta\Gamma \neq 0$) e $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \nabla_\mu$ (sendo ∇_μ a derivada covariante), então:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta(\nabla_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \delta(\nabla_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}). \tag{4.24}$$

como δ comuta com ∇_μ, escrevemos:

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})\right]\\ &= \left[g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right]\end{aligned} \tag{4.25}$$

que, renomeando os índices mudos ν e λ do segundo termo, pode ser reescrita na forma de uma derivada total:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\right] \tag{4.26}$$

que não contribui para as equações de movimento $(C.Q.D)$.

Para calcularmos δS_2, explicitamos a métrica escrevendo $\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ e usamos o fato de que $\delta(\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi) = 0$:

$$\delta S_2 = \int d^Dx\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}. \tag{4.27}$$

onde foi utilizada a relação (4.21).

Para o cálculo de δS_3, novamente explicitamos a dependência da métrica. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\delta S_3 \quad &= -\frac{1}{2n!}\int d^Dx e^{a\phi}\left\{\delta(\sqrt{-g})F_n^2 + \sqrt{-g}\delta(F_{\sigma_1\ldots\sigma_n}F^{\sigma_1\ldots\sigma_n}\right\}\\ &= -\frac{1}{2n!}\int d^Dx e^{a\phi}\left\{\delta(\sqrt{-g})F_n^2 + \sqrt{-g}\delta(g^{\sigma_1\rho_1}\ldots g^{\sigma_n\rho_n}F_{\sigma_1\ldots\sigma_n}F_{\rho_1\ldots\rho_n})\right\}.\end{aligned}$$

Neste ponto, sabendo que

$$\delta(g^{\sigma_1\rho_1}\ldots g^{\sigma_n\rho_n}) = (\delta g^{\sigma_1\rho_1})g^{\sigma_2\rho_2}\ldots g^{\sigma_n\rho_n} + \ldots + g^{\sigma_1\rho_1}\ldots g^{\sigma_{n-1}\rho_{n-1}}(\delta g^{\sigma_n\rho_n})$$

e que

$$\delta g^{\sigma_r\rho_r} = \frac{\partial g^{\sigma_r\rho_r}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = \delta^{\sigma_r}_\mu\delta^{\rho_r}_\nu\delta g^{\mu\nu},$$

podemos usar a eq. (4.21) e renomear alguns índices mudos para encontrar:

$$\delta S_3 = \int d^Dx\left\{\frac{e^{a\phi}}{2n!}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_n^2 - nF_{\mu\sigma_2\ldots\sigma_n}F_\nu^{\cdot\sigma_1\ldots\sigma_n}\right]\right\}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.28}$$

De volta a δI (eq. (4.18)), temos a variação ação com respeito à métrica. Sendo a variação $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrária, $\delta I = 0$ implica:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\right) - \frac{e^{a\phi}}{2n!}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_n^2 - nF_{\mu\sigma_2\ldots\sigma_n}F_\nu^{\cdot\sigma_2\ldots\sigma_n}\right) \tag{4.29}$$

em que usamos o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.

- *Equação de movimento para a n-forma intensidade de campo:*

Escrevemos a n-forma F_n em termos do potencial $A_{(n-1)}$

$$F_n = dA_{n-1}. \tag{4.30}$$

e calculamos a variação de I com relação ao potencial A é (por simplicidade, $\delta_A I \equiv \delta I$):

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^Dx\sqrt{-g}\left\{-\frac{e^{a\phi}}{2n!}\delta_A(F_{\mu_1\ldots\mu_n}F^{\mu_1\ldots\mu_n})\right\} \tag{4.31}$$

pois os demais termos são independentes de A.

Para resolvermos (4.31), explicitamos a dependência em A de F_n que, em componentes é:

$$F_{\mu_1\ldots\mu_n} = \sum_{Perm}(-1)^P\partial_{\mu_1'}A_{\mu_2'\ldots\mu_n'} \tag{4.32}$$

sendo P o número de permutações necessárias para colocar $(\mu_1'\mu_2' \ldots \mu_n')$ na ordem original $(\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n)$ e o somatório estende-se sobre todas as permutações possíveis, ou seja, a soma contém $n!$ termos.

Entretanto, nosso interesse é em $F^2(A)$. Para determiná-lo, vejamos o caso mais simples em que $n = 2$:

$$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu} = \partial_\mu A\nu F^{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu F^{\nu\mu} = 2\partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} \tag{4.33}$$

em que renomeamos alguns índices mudos e usamos a antissimetria de $F^{\mu\nu}$.

Por um procedimento análogo, é fácil ver que, no caso geral de uma $n-$forma,

$$(-1)^P \partial_{\mu_1'} A_{\mu_2' \ldots \mu_n'} F^{\mu_1 \ldots \mu_n} = \partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_n} F^{\mu_1 \ldots \mu_n} \tag{4.34}$$

qualquer que seja a combinação $(\mu_1'\mu_2' \ldots \mu_n')$. Dessa forma, escrevemos:

$$F^2 = n!\partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \ldots \mu_n} F^{\mu_1 \ldots \mu_n} \tag{4.35}$$

Para calcularmos (4.31), recorremos, novamente, ao caso $n = 2$:

$$\delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (2!)\delta\partial^\mu A^\nu F_{\mu\nu} = 2\delta \left[g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \partial_\sigma A_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right]. \tag{4.36}$$

Usando esse resultado em (4.31) e integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned}
\delta I_{n=2} \quad &= \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left\{ \partial_\sigma \left[\sqrt{-g} \frac{e^{a\phi}}{2} g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \left(F_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \right] \right\} \delta A_\rho \\
&= \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left\{ \partial_\sigma \left[\sqrt{-g} \frac{e^{a\phi}}{2} \left(F^{\sigma\rho} + F^{\sigma\rho} \right) \right] \right\} \delta A_\rho \\
&= \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \left\{ \partial_\sigma \left[\sqrt{-g} \frac{2e^{a\phi}}{2} F^{\sigma\rho} \right] \right\} \delta A_\rho
\end{aligned} \tag{4.37}$$

resultando na equação de movimento:

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} e^{a\phi} F^{\mu\nu} \right] = 0 \qquad (n = 2) \tag{4.38}$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o caso genérico F_n. Dessa forma, obtemos a seguinte equação de movimento para a $n-$forma intensidade de campo:

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} e^{a\phi} F^{\mu\nu_2 \ldots \nu_n} \right] = 0 \tag{4.39}$$

Além de (4.13), (4.29) e (4.39), temos ainda a identidade de Bianchi para a $n-$forma. Assim, o sistema de equações de movimento dos campos é:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \right) = \frac{a}{2n!} e^{a\phi} F_n^2 \\
&R^\mu_\nu = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{e^{a\phi}}{2n!} \left(n F^{\mu\lambda_2 \ldots \lambda_n} F_{\nu\lambda_2 \ldots \lambda_n} - \frac{n-1}{D-2} \delta^\mu_\nu F_n^2 \right) \\
&\partial_\mu \left[\sqrt{-g} e^{a\phi} F^{\mu\nu_2 \ldots \nu_n} \right] = 0 \\
&\partial_{[\mu_1} F_{\mu_2 \ldots \mu_{n+1}]} = 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

4.2 Soluções extensas

Para resolver o sistema (4.40), faremos escolhas de *Anzätze* apropriados para os campos envolvidos [23, 25].

Estamos interessados em soluções do tipo $p-$brana que, no contexto de uma teoria de gravitação, é uma solução clássica estendida em p direções. Para melhor descrever este objeto, podemos dividir o espaço-tempo $D-$dimensional em que vive a brana em um espaço-tempo $(p+1)-$dimensional longitudinal à brana (representado por $\{t, y^i\}$) e um um espaço $d-$dimensional

$$(d = D - p - 1) \tag{4.41}$$

transversal à brana (representado por $\{x^a\}$). Dessa forma, o espaço-tempo como um todo é descrito pelas coordenadas:

$$z^\mu = \left\{t, y^i, x^a\right\}, \qquad i = 1, \ldots, p \qquad e \qquad a = 1, \ldots, d.$$

Estamos interessados em uma solução que contenha uma única $p-$brana, portanto, é natural supor que as p direções longitudinais à brana sejam todas equivalentes. No caso geral, a coordenada tipo-tempo, que consideramos longitudinal à brana, não será considerada equivalente às demais coordenadas longitudinais.

Também é razoável supor que a $p-$brana seja um objeto uniforme, de modo que haja uma simetria de translação no espaço longitudinal. Além disso, ao considerarmos objetos estáticos (como é feito aqui), também há invariância por translação na coordenada tipo-tempo.

No espaço transversal, como a brana tem uma localização definida em termos das coordenadas $\{x^a\}$, a invariância por translação é quebrada. Por considerarmos uma solução estática, é razoável postular uma simetria esférica no espaço transversal.

O formalismo de vetores de Killing permite inferir uma métrica com tais simetrias. As simetrias de translação no espaço e no tempo na brana levam-nos aos vetores de Killing

$$(\xi_i)^\mu = \delta_i^\mu \qquad e \qquad (\xi_t)^\mu = \delta_0^\mu \tag{4.42}$$

A simetrias de rotação ($SO(p)$ na brana e $SO(d)$ no espaço transverso), levam-nos aos vetores de Killing:

$$(\xi_{ij})^\mu = y^i \delta_j^\mu - y^j \delta_i^\mu \qquad e \qquad (\xi_{ab})^\mu = x^a \delta_b^\mu - x^b \delta_a^\mu \tag{4.43}$$

Como sabemos, a derivada de Lie sobre um campo de vetores de Killing de qualquer tensor é nula. Se escolhermos esse tensor como sendo a métrica, temos:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho + g_{\rho\nu}\xi^\rho_{,\mu} + g_{\mu\rho}\xi^\rho_{,\nu} = 0 \tag{4.44}$$

As simetrias de translação (4.42) nos permitem concluir que a métrica é independente das coordenadas $\left\{t, y^i\right\}$. Isso por que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^\rho}\delta_0^\rho + g_{\rho\nu}\frac{\partial \delta_0^\rho}{\partial y^\mu} + g_{\mu\rho}\frac{\partial \delta_0^\rho}{\partial y^\nu} = 0 \tag{4.45}$$

ou seja,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^0} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0 \tag{4.46}$$

o mesmo podendo ser feito para $\left\{y^i\right\}$:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^i} = 0 \tag{4.47}$$

Estudamos agora os vetores de Killing (4.43). Nesse caso, a eq. (4.44) fica (usando (4.46) e (4.47)):

$$\left\{\begin{array}{lr} g_{j\nu}\delta^i_\mu - g_{i\nu}\delta^j_\mu + g_{\mu j}\delta^i_\nu - g_{\mu i}\delta^j_\nu = 0 & (\text{Espaço } y^i) \\ x^a\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^b} - x^b\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} + g_{b\nu}\delta^a_\mu - g_{a\nu}\delta^b_\mu + g_{\mu b}\delta^a_\nu - g_{\mu a}\delta^b_\nu = 0 & (\text{Espaço } x^a). \end{array}\right. \tag{4.48}$$

Para resolver este sistema de equações diferenciais, é conveniente fazer a transformação

$$x_c = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{c-1}\cos\theta_c, \qquad c = 1, \ldots, d-1 \tag{4.49}$$

$$x_d = r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{d-1} \tag{4.50}$$

ou, inversamente,

$$\cot\theta_c = \frac{x_c}{\sqrt{x_{c+1}^2 + \ldots + x_d^2}}, \qquad c = 1, \ldots, d-1 \tag{4.51}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2} \tag{4.52}$$

a variação dos ângulos é $\;0 \leq \theta_1, \ldots, \theta_{d-2} \leq \pi\;$ e $\;0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$.

Para escrever o operador

$$L_{ab} = x^a \frac{\partial}{\partial x^b} - x^b \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{4.53}$$

nessas coordenadas, primeiro note que (OBS: **No que segue, NÃO será usada a notação de soma de Einstein**):

$$\frac{\partial}{\partial x_a} = \frac{\partial r}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{c=1}^{a-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_c} + \frac{\partial\theta_a}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_a} \tag{4.54}$$

já que $\frac{\partial\theta_e}{\partial x_a} = 0$, $\forall\; e > a$.

Dessa forma, a eq. (4.53) fica:

$$L_{ab} = x^a \sum_{c=1}^{b-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_c} + x^a \frac{\partial\theta_b}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_b} - x^b \sum_{c=1}^{a-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_c} - x^b \frac{\partial\theta_a}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_a}. \tag{4.55}$$

Considere $a < b$ (não há perda de generalidade, já que a equação é antissimétrica em a e b e o caso $a = b$ é trivial). Dessa forma, escrevemos:

$$\begin{aligned} L_{ab} = \quad & \left\{ x^a \sum_{c=1}^{a-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_c} + x^a \frac{\partial\theta_a}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_a} + x^a \sum_{c=a+1}^{b-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_c} \right\} + \\ & + x^a \frac{\partial\theta_b}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_b} - x^b \sum_{c=1}^{a-1} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_c} - x^b \frac{\partial\theta_a}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_a}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Observando que

$$\sum_{c=1}^{a-1} \left(x^a \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b} - x^b \frac{\partial\theta_c}{\partial x_a} \right) = 0 \qquad (pois \quad c < a < b), \tag{4.57}$$

temos, simplesmente:

$$L_{ab} = x^a \sum_{c=a}^{b} \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial\theta_c} - x^b \frac{\partial\theta_a}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial\theta_a}. \tag{4.58}$$

De (4.49) e (4.50), vemos que $x_{c+1}^2 + \ldots + x_d^2 = r^2 \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_c$. Dessa forma, e usando também que

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} u(x) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \tag{4.59}$$

temos:

$$x^a \frac{\partial\theta_c}{\partial x_b} = \frac{(\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{b-1})(\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{a-1})}{\left(\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{c-1}\right)} \cos\theta_b \cos\theta_a \cot\theta_c \tag{4.60}$$

com $c = 1, \ldots, b-1$. Também

$$x^b \frac{\partial\theta_a}{\partial x_a} = -(\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{b-1}) \frac{\cos\theta_b \sin\theta_a}{\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{a-1}} \tag{4.61}$$

e

$$x^a \frac{\partial\theta_a}{\partial x_b} = \frac{\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{b-1}}{\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_a} \cos^2\theta_a \cos\theta_b. \tag{4.62}$$

Portanto (para $a < b < d$),

$$L_{ab} = \left[\frac{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{b-1}}{\sin\theta_1\dots\sin\theta_a}\cos^2\theta_a\cos\theta_b + \cos\theta_b\sin\theta_a\frac{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{b-1}}{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{a-1}}\right]\frac{\partial}{\partial\theta_a} + \\ + \sum_{c=a+1}^{b-1}\frac{(\sin\theta_1\dots\sin\theta_{b-1})(\sin\theta_1\dots\sin\theta_{a-1})}{(\sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{c-1})}\cos\theta_b\cos\theta_a\cot\theta_c\frac{\partial}{\partial\theta_c} - \\ - \cos\theta_a\sin\theta_b\frac{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{a-1}}{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{b-1}} \tag{4.63}$$

E, para o caso em que $a < b = d$, temos:

$$L_{ad} = \left[\frac{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{d-1}}{\sin\theta_1\dots\sin\theta_a}\cos^2\theta_a + \sin\theta_a\frac{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{d-1}}{\sin\theta_1\dots\sin\theta_{a-1}}\right]\frac{\partial}{\partial\theta_a} + \\ + \sum_{c=a+1}^{d-1}\frac{(\sin\theta_1\dots\sin\theta_{d-1})(\sin\theta_1\dots\sin\theta_c)}{(\sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{a-1})\sin\theta_a}\cos\theta_a\cos\theta_c\frac{\partial}{\partial\theta_c}. \tag{4.64}$$

Embora aparentemente complicado, o operador L_{ab} escrito desta forma, permite uma grande simplificação em (4.48)[4].

Usando o operador L_{ab} como sugerido acima, a solução do sistema (4.48) pode ser encontrada sem grandes dificuldades e é (OBS: **Neste ponto, voltamos a usar a notação de Einstein**):

$$g_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c|c|c} -B^2(r) & 0 & h(r)\delta_{ab}x^b \\ \hline 0 & C^2(r)\delta_{ij} & 0 \\ \hline h(r)\delta_{ab}x^b & 0 & k(r)\delta_{ab} + j(r)\delta_{ac}\delta_{bd}x^cx^d \end{array}\right] \tag{4.65}$$

ou seja,

$$ds^2 = -B^2(r)dt^2 + C^2(r)\delta_{ij}dy^idy^j + h(r)\delta_{ab}x^adx^bdt + k(r)\delta_{ab}dx^adx^b \\ +j(r)\delta_{ac}\delta_{bd}x^ax^bdx^cdx^d, \qquad r^2 = \delta_{ab}x^ax^b. \tag{4.66}$$

Podemos usar coordenadas esféricas, em que

$$\delta_{ab}dx^adx^b = dr^2 + r^2d\Omega^2_{d-1} \qquad e \qquad d\Omega^2_{d-1} = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{d-2}d\theta^2_{d-1}.$$

Além disso, a métrica pode ser posta na forma diagonal através de difeomorfismos (por exemplo, uma redefinição de t incluindo uma parte dependente de r pode eliminar o termo cruzado $rdrdt = \delta_{ab}x^adx^bdt$). Considerando tudo isso, usaremos o seguinte *Ansatz* para a métrica:

$$ds^2 = -B^2(r)dt^2 + C^2(r)(dy^i)^2 + F^2(r)dr^2 + r^2G^2(r)d\Omega^2_{d-1}, \tag{4.67}$$

donde tiramos que

$$\sqrt{-g} = BC^pF(Gr)^{d-1}. \tag{4.68}$$

Para a $n-$forma intensidade de campo, uma escolha adequada (chamado *Ansatz* elétrico ou elementar) é a $(p+2)-$forma

$$F_{ti_1\dots i_pr} = \epsilon_{i_1\dots i_p}\partial_rE(r) \tag{4.69}$$

que satisfaz trivialmente a identidade de Bianchi e, por depender apenas de r, mantém as simetrias desejadas.

[4]Por exemplo, observe que

$$L_{d-1,d} = \frac{\partial}{\partial\theta_{d-1}}$$

o que permite concluir que g_{0c} independe de θ_{d-1} se $d-1 \neq c \neq d$.

Resta-nos fazer um *Ansatz* para o dílaton que, tendo em mente a simetria esférica do problema, deve depender apenas de r:

$$\phi = \phi(r). \tag{4.70}$$

As eqs. (4.40) podem ser reescritas em termos de funções dependentes apenas de r usando os *Ansätze* desenvolvidos na seção anterior.

Substituindo o *ansatz* elétrico para a $(p+2)-$forma (4.69) na terceira equação de (4.40) e usando (4.68), temos:

$$e^{a\phi}\frac{(Gr)^{d-1}}{BC^pF}E'(r) = Q \tag{4.71}$$

onde Q é uma constante. Da expressão acima, tiramos o valor de $E'(r)$ e obtemos a solução:

$$F_{ti_1\dots i_p r} = \epsilon_{i_1\dots i_p}BC^pFe^{-a\phi}\frac{Q}{(Gr)^{d-1}}. \tag{4.72}$$

Usando (4.72), podemos calcular os termos dependentes de F nas eqs. (4.40):

$$\begin{aligned}
F^2_{p+2} = &\quad (p+2)!\ F_{ty_1\dots y_p r}F^{ty_1\dots y_p r} \\
= &\quad (p+2)!\ \left(\epsilon_{y_1\dots y_p}BC^pFe^{-a\phi}\frac{Q}{(Gr)^{d-1}}\right)\left(-\frac{1}{B^2C^{2p}F^2}\epsilon_{y_1\dots y_p}BC^pFe^{-a\phi}\frac{Q}{(Gr)^{d-1}}\right) \\
= &\quad -(p+2)!\ e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
F^{\mu\lambda_2\dots\lambda_{p+2}}F_{\nu\lambda_2\dots\lambda_{p+2}} = &\quad \bar{\delta}^\mu_\nu(p+1)!\ F_{ty_1\dots y_p r}F^{ty_1\dots y_p r} \\
= &\quad -\bar{\delta}^\mu_\nu(p+1)!\ e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}},
\end{aligned} \tag{4.74}$$

onde $\bar{\delta}^\mu_\nu = \delta^\mu_t\delta^t_\nu + \delta^\mu_i\delta^i_\nu + \delta^\mu_r\delta^r_\nu$.

Como o dílaton é função apenas do raio r, o lado esquerdo da primeira equação de (4.40) é:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right) &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi\right) \\
&= \frac{1}{BC^pF(Gr)^{d-1}}\left(BC^pF(Gr)^{d-1}\frac{1}{F^2}\phi'\right)' \\
&= \frac{1}{BC^pF(Gr)^{d-1}}\left\{\left(BC^p(Gr)^{d-1}\frac{1}{F}\right)'\phi' + BC^p(Gr)^{d-1}\frac{1}{F}\phi''\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right) =$$

$$= \frac{1}{F^2}\left\{\phi'' + \phi'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\}$$

Para calcular o lado esquerdo da segunda equação em (4.40), calculamos o tensor de Ricci usando (A.14) e (4.15), observando que $R^\mu_\nu = g^{\mu\sigma}R_{\sigma\nu}$. Dessa forma, temos:

$$R^t_t = \frac{1}{F^2}\left\{-(\ln B)'' - (\ln B)'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\}$$

$$R^{y_i}_{y_i} = \frac{1}{F^2}\left\{-(\ln C)'' - (\ln C)'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\}$$

$$R^r_r = \frac{1}{F^2}\Big\{-(\ln B)'' - p(\ln C)'' - (\ln B)'^2 - p(\ln C)'^2 + (\ln B)'(\ln F)' + p(\ln C)'(\ln F)'$$
$$-(d-1)\left[(\ln G)'' + (\ln G)'^2 + \frac{2}{r}(\ln G)' - (\ln G)'(\ln F)' - \frac{1}{r}(\ln F)'\right]\Big\}$$

$$R^{\theta_\alpha}_{\theta_\alpha} = \frac{1}{F^2}\Big\{-\left[(\ln G)' + \frac{1}{r}\right]\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]$$
$$-(\ln G)'' + \frac{1}{r^2} + (d-2)\frac{F^2}{r^2G^2}\Big\}$$

O primeiro par de equações em (4.40), fica, portanto:

$$\begin{aligned} R^t_t &= \frac{e^{a\phi}}{2n!}\left(-n(n-1)! + \frac{n-1}{D-2}n!\right)e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= \frac{1}{2n!}\left(-n! + \frac{n-1}{D-2}n!\right)e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)-(D-2)}{D-2}\right)e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} R^{y_i}_{y_i} &= \frac{e^{a\phi}}{2n!}\left(-n(n-1)! + \frac{n-1}{D-2}n!\right)e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= \frac{1}{2n!}\left(-n! + \frac{n-1}{D-2}n!\right)e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)-(D-2)}{D-2}\right)e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$R^r_r = \frac{(\phi')^2}{2F^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)-(D-2)}{(D-2)}\right)e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned} R^{\theta_\alpha}_{\theta_\alpha} &= \frac{e^{a\phi}}{2n!}\frac{n-1}{D-2}n!e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(n-1)}{(D-2)}e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right) &= -\frac{a}{2n!}e^{a\phi}n!\, e^{-2a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \\ &= -\frac{ae^{-a\phi}}{2}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.79}$$

Substituindo $n = p+2$ e $D = d-p-1$, temos:

$$\frac{1}{F^2}\left\{-(\ln B)'' - (\ln B)'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\} =$$
$$= -\frac{d-2}{2(D-2)}e^{-a\phi}\frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \tag{4.80}$$

$$\frac{1}{F^2}\left\{-(\ln C)'' - (\ln C)'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{d-2}{2(D-2)} e^{-a\phi} \frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{F^2}\Big\{-(\ln B)'' - p(\ln C)'' - (\ln B)'^2 - p(\ln C)'^2 + (\ln B)'(\ln F)' + p(\ln C)'(\ln F)' \\ &-(d-1)\left[(\ln G)'' + (\ln G)'^2 + \frac{2}{r}(\ln G)' - (\ln G)'(\ln F)' - \frac{1}{r}(\ln F)'\right]\Big\} = \\ &= \frac{(\phi')^2}{2F^2} - \frac{d-2}{2(D-2)} e^{-a\phi} \frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{F^2}\Big\{-\left[(\ln G)' + \frac{1}{r}\right]\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right] \\ &-(\ln G)'' + \frac{1}{r^2} + (d-2)\frac{F^2}{r^2G^2}\Big\} = \frac{p+1}{2(D-2)} e^{-a\phi} \frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{F^2}\left\{\phi'' + \phi'\left[(\ln B)' + p(\ln C)' - (\ln F)' + (d-1)(\ln G)' + \frac{d-1}{r}\right]\right\} = \\ &= -\frac{ae^{-a\phi}}{2} \frac{Q^2}{(Gr)^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.84}$$

4.2.1 Branas extremas

O interesse em branas extremas está na dualidade de interpretações entre estas soluções e as D-branas (veja página 33 e a ref. [24]). Uma solução extrema, como já comentamos, é caracterizada por um único parâmetro. Assim, no que segue nesta subseção, não podemos introduzir nenhuma outra constante além daquela introduzida em (4.71).

Uma escolha de coordenadas adequada pode fazer

$$F = G. \tag{4.85}$$

Tal escolha é denominada "calibre isotrópico".

A semelhança das equações (4.80) e (4.81) nos indica a restrição

$$B = C. \tag{4.86}$$

Esta restrição tem um significado físico: impomos uma invariância de Lorentz $SO(1,p)$ no volume-mundo da brana.

Com essas escolhas, as equações (4.80) e (4.81) tornam-se idênticas e o sistema (4.80)-(4.84) reduz-se a

$$\begin{aligned} &-(\ln B)'' - \frac{d-1}{r}(\ln B)' - (\ln B)'\left[(p+1)(\ln B)' + (d-2)(\ln G)'\right] = \\ &= -\frac{d-2}{2(D-2)} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} &-(p+1)(\ln B)'' - (d-1)(\ln G)'' - (p+1)(\ln B)'^2 + (p+1)(\ln B)'(\ln G)' - \\ &-\frac{d-1}{r}(\ln G)' - \frac{1}{2}\phi'^2 = -\frac{d-2}{2(D-2)} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$-\left[(\ln G)' + \frac{1}{r}\right][(p+1)(\ln B)' + (d-2)(\ln G)'] - (\ln G)'' - \frac{d-1}{r}(\ln G)' =$$

$$= \frac{p+1}{2(D-2)} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \qquad (4.89)$$

$$\phi'' + \frac{d-1}{r}\phi' + \phi'[(p+1)(\ln B)' + (d-2)(\ln G)'] =$$

$$= -\frac{ae^{-a\phi}}{2} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \qquad (4.90)$$

Tomando a combinação $\{(p+1)\times$eq.(4.87) $+$ $(d-2)\times$eq.(4.89)$\}$, temos que

$$\varphi'' + \varphi'^2 + \frac{2d-3}{r}\varphi' = 0 \qquad (4.91)$$

com $\varphi = (p+1)\ln B + (d-2)\ln G$.

A eq. (4.91) é facilmente satisfeita se tomarmos $\varphi = C^{te}$, entretanto, como a condição de extremismo não permite a introdução de uma nova constante, tomamos

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad (p+1)\ln B + (d-2)\ln G = 0$$

ou seja,

$$B^{p+1} G^{d-2} = 1 \qquad (4.92)$$

Resta-nos ainda as equações:

$$(\ln G)'' + \frac{d-1}{r}(\ln G)' = -\frac{p+1}{2(D-2)} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}, \qquad (4.93)$$

$$\phi'' + \frac{d-1}{r}\phi' = -\frac{a}{2} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}, \qquad (4.94)$$

$$\frac{(D-2)(d-2)}{p+1}(\ln G)'^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 = \frac{1}{2} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}. \qquad (4.95)$$

onde a última equação vem de (4.88), (4.92), (4.93) e (4.41):

$$-(p+1)(\ln B)'' - (d-1)(\ln G)'' - (p+1)(\ln B)'^2 + (p+1)(\ln B)'(\ln G)' -$$

$$-\frac{d-1}{r}(\ln G)' - \frac{1}{2}\phi'^2 =$$

$$= (p+1)\frac{d-2}{p+1}(\ln G)'' - (d-1)(\ln G)'' - (p+1)\frac{(d-2)^2}{(p+1)^2}(\ln G)'^2 -$$

$$-(p+1)\frac{d-2}{p+1}(\ln G)'^2 - \frac{d-1}{r}(\ln G)' - \frac{1}{2}\phi'^2 =$$

$$= -(\ln G)'' - \left[\frac{(d-2)^2}{p+1} + (d-2)\right](\ln G)'^2 - \frac{d-1}{r}(\ln G)' - \frac{1}{2}\phi'^2 =$$

$$= \frac{(p+1)}{2(D-2)} e^{-a\phi} G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} - (d-2)\left[\frac{d+p-1}{p+1}\right](\ln G)'^2 - \frac{1}{2}\phi'^2.$$

A combinação $\{a\times$eq.(4.93) $-$ $\frac{p+1}{D-2}\times$eq.(4.94)$\}$ fornece:

$$\chi'' + \chi' = 0$$

com $\chi = a \ln G - \frac{p+1}{D-2}\phi$. Novamente, tomamos

$$\chi = 0, \tag{4.96}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
a \ln G - \frac{p+1}{D-2}\phi &= 0 \\
\ln G &= \frac{p+1}{a(D-2)}\phi \\
G &= \exp\left\{\frac{p+1}{a(D-2)}\phi\right\}
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

Assim, a eq. (4.95) fica:

$$
\begin{aligned}
\frac{(D-2)(d-2)}{p+1}\frac{(p+1)^2}{a^2(D-2)}\phi'^2 &= \frac{e^{-a\phi}}{2}\exp\left\{-\frac{2(d-2)(p+1)}{a(D-2)}\right\}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \\
\left(\frac{(d-2)(p+1)}{a^2(D-2)} + \frac{1}{2}\right)\phi'^2 &= \frac{1}{2}\exp\left\{-a - \frac{2(d-2)(p+1)}{a(D-2)}\right\}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \\
\frac{\left[(d-2)(p+1) + \frac{1}{2}a^2(D-2)\right]}{a^2(D-2)}\phi'^2 &= \frac{1}{2}e^{\left\{-\frac{2}{a(D-2)}\left((d-2)(p+1)+\frac{1}{2}a^2(D-2)\right)\right\}}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}
\end{aligned}
$$

que, com a abreviação

$$\Delta \equiv (d-2)(p+1) + \frac{1}{2}a^2(D-2) \tag{4.98}$$

fica

$$\frac{\Delta}{a^2(D-2)}\phi'^2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{2\Delta}{a(D-2)}\phi}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}, \tag{4.99}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\Delta}{a^2(D-2)}}\phi' &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi}\frac{|Q|}{r^{(d-1)}} \\
\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\Delta}{D-2}}\frac{a(D-2)}{\Delta}\left(e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi}\right)' &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|Q|}{r^{(d-1)}}
\end{aligned}
$$

que, com uma escolha adequada de sinal a fim de evitar uma singularidade nua, nos dá:

$$e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi} = 1 + \frac{1}{d-2}\sqrt{\frac{\Delta}{2(D-2)}}\frac{|Q|}{r^{d-2}}. \tag{4.100}$$

onde usamos a condição de que o campo ϕ deve ir a zero no infinito ($r \to \infty$).

Com a abreviação

$$H = 1 + \frac{1}{d-2}\sqrt{\frac{\Delta}{2(D-2)}}\frac{|Q|}{r^{d-2}} \equiv 1 + \frac{h^{d-2}}{r^{d-2}}, \tag{4.101}$$

escrevemos:

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi} &= H \to e^{\phi} = H^{\frac{a(D-2)}{\Delta}}, \\
G = e^{\left\{\frac{p+1}{a(D-2)}\phi\right\}} &= e^{\frac{p+1}{a(D-2)}\ln H^{\frac{a(D-2)}{\Delta}}} = e^{\ln H^{\frac{p+1}{\Delta}}} = H^{\frac{p+1}{\Delta}}, \\
B = G^{\frac{2-d}{p+1}} &= H^{\frac{-(d-2)}{\Delta}} \\
F_{ty_1\ldots y_p r} &= \frac{Q}{|Q|}\sqrt{\frac{2(D-2)}{\Delta}}\left(H^{-1}\right)'
\end{aligned}
$$

A solução extrema de uma $p-$brana esfericamente simétrica é, portanto:

$$ds^2 = H^{-2\frac{d-2}{\Delta}}\left(-dt^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_p^2\right) + H^{2\frac{p+1}{\Delta}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2\right), \tag{4.102}$$

$$e^{\phi} = H^{\frac{a(D-2)}{\Delta}}, \tag{4.103}$$

$$F_{ty_1\ldots y_p r} = \frac{Q}{|Q|}\sqrt{\frac{2(D-2)}{\Delta}}\left(H^{-1}\right)'. \tag{4.104}$$

O parâmetro a em (4.7) nos dá o acoplamento do dílaton com a forma. No setor Ramond-Ramond (RR), para a $(p+2)$-forma F_{p+2}, temos

$$a = \frac{3-p}{2}. \tag{4.105}$$

Assim, para $D = 10$, temos que $\Delta = 16$ (veja eqs. (4.41) e (4.98)) de modo que as equações (4.102), (4.103) e (4.104) podem ser reescritas

$$ds^2 = H^{-\frac{7-p}{8}}\left(-dt^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_p^2\right) + H^{\frac{p+1}{8}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2\right), \tag{4.106}$$

$$e^{\phi} = H^{\frac{(3-p)}{4}}, \tag{4.107}$$

$$A_{p+1} = \left(H^{-1} - 1\right) dx^0 \wedge \ldots dx^p. \tag{4.108}$$

onde $dA_{p+1} = F_{p+2}$ e

$$H = 1 + \frac{Q_p}{r^{7-p}}, \qquad Q_p = \frac{|Q|}{7-p}. \tag{4.109}$$

4.2.2 Branas negras

Uma solução mais geral do que a que acabamos de obter pode ser obtida ao relaxarmos a condição de extremismo, cosiderando uma solução dependente de dois parâmetros, a chamada brana negra. Faremos uma dedução fortemente inspirada no cálculo anterior (caminho seguido também por [23]).

No caso extremo, estabelecemos que $BC^pF^{-1}G^{d-1} = 1$ (cf. eq. (4.92), com $B = C$ e $F = G$). Motivados pelo caso extremo, introduziremos a função:

$$BC^pF^{-1}G^{d-1} = f \tag{4.110}$$

(o extremismo significa, então, $f = 1$).

Também é conveniente definir:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2(D-2)} e^{-a\phi} F^2 G^{-2(d-1)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}. \tag{4.111}$$

Dessa forma, as eqs. (4.80) - (4.84) podem ser reescritas na forma:

$$(\ln B)'' + \frac{d-1}{r}(\ln B)' + (\ln B)'(\ln f)' = (d-2)\mathcal{S}^2, \tag{4.112}$$

$$(\ln C)'' + \frac{d-1}{r}(\ln C)' + (\ln C)'(\ln f)' = (d-2)\mathcal{S}^2, \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}(\ln f)'' + (\ln F)'' - (\ln F)'(\ln f)' - (\ln F)'^2 + (\ln B)'^2 + p(\ln C)'^2 + (d-1)(\ln G)'^2 \\ +2\frac{d-1}{r}(\ln G)' - \frac{d-1}{r}(\ln F)' + \frac{1}{2}\phi'^2 = (d-2)\mathcal{S}^2,\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}(\ln G)'' + \frac{d-1}{r}(\ln G)' + (\ln G)'(\ln f)' + \frac{1}{r}(\ln f)' + \frac{d-2}{r^2}\left(1 - \frac{F^2}{G^2}\right) \\ = -(p+1)\mathcal{S}^2,\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\phi'' + \frac{d-1}{r}\phi' + \phi'(\ln f)' = -a(D-2)\mathcal{S}^2. \tag{4.116}$$

Com uma nova mudança de variáveis, a saber

$$\ln B = \ln C + \ln \overline{B}, \qquad \ln F = \ln G + \ln \overline{F} \tag{4.117}$$

(que reduz-se ao caso extremo se $\overline{B} = \overline{C} = 1$), temos, de (4.112),

$$
\begin{aligned}
&(\ln B)'' + \frac{d-1}{r}(\ln B)' + (\ln B)'(\ln f)' = \\
&= (\ln C)'' + (\ln \overline{B})'' + \frac{d-1}{r}(\ln C)' + \frac{d-1}{r}(\ln \overline{B})' + (\ln C + \ln \overline{B})'(\ln f)' = \\
&= (\ln C)'' + (\ln \overline{B})'' + \frac{d-1}{r}(\ln C)' + \frac{d-1}{r}(\ln \overline{B})' + (\ln C)'(\ln f)' + (\ln \overline{B})'(\ln f)' = \\
&= \left[(\ln C)'' + \frac{d-1}{r}(\ln C)' + (\ln C)'(\ln f)'\right] + \left[(\ln \overline{B})'' + \frac{d-1}{r}(\ln \overline{B})' + \right. \\
&\qquad \left. + (\ln \overline{B})'(\ln f)'\right] = (d-2)\mathcal{S}^2
\end{aligned}
$$

e, usando (4.113):

$$(\ln \overline{B})'' + \frac{d-1}{r}(\ln \overline{B})' + (\ln \overline{B})'(\ln f)' = 0. \tag{4.118}$$

Além disso, observe que $\{(p+1)\times$ eq.(4.113) + $(d-2)\times$ eq.(4.115) $\}$ dá (usando que $\varphi = (p+1)\ln C + (d-2)\ln G$):

$$\varphi'' + \frac{d-1}{r}\varphi' + \varphi'(\ln f)' + \frac{(d-2)}{r}\left[(\ln f)' + \frac{(d-2)}{r}\left(1 - \bar{F}^2\right)\right] = 0, \tag{4.119}$$

onde usamos que $F = G\bar{F}$ (cf. eq. (4.117)).

Novamente guiados pelo caso extremo, tomamos $\varphi = 0$, o que relaciona C a G,

$$C^{p+1}G^{d-2} = 1, \tag{4.120}$$

e, como, ainda no caso extremo, tínhamos $\ln f = \ln \bar{B} = \ln \bar{F} = 0$, tomamos agora

$$\ln \bar{B} = c_B \ln f, \qquad \ln \bar{F} = c_F \ln f \tag{4.121}$$

onde c_B e c_F são constantes que se relacionam por

$$c_B - c_F = 1 \tag{4.122}$$

pois, devido a (4.110), temos:

$$\ln f = \ln \bar{B} + \varphi - \ln \bar{F} = \ln \bar{B} - \ln \bar{F}. \tag{4.123}$$

Escrevendo (4.118) em termos de $\ln f$, temos

$$(\ln f)'' + (\ln f)'^2 + \frac{d-1}{r}(\ln f)' = 0. \tag{4.124}$$

Para resolver esta equação, façamos a mudança $(\ln f)' = y(r)/r$. Assim,

$$\left(\frac{y'}{r} - \frac{y}{r^2}\right) + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{d-1}{r}\left(\frac{y}{r}\right) = 0$$

$$y' = -\frac{y^2 + (d-2)y}{r}$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+d-2} \right) dy = -(d-2) \int \frac{dr}{r}$$

$$y(r) = \frac{2\mu(d-2)}{r^{d-2} - 2\mu}$$

e, portanto,

$$f = 1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}} \tag{4.125}$$

onde μ é um parâmetro arbitrário não-relacionado com a carga Q que aparece em (4.111), ou seja, temos já dois parâmetros, o que justifica não termos introduzido a outra constante de integração que apareceria na equação de segunda ordem (4.124).

Usando que $\varphi = 0$ em (4.119), podemos calcular as constantes c_B e c_F:

$$\frac{d-2}{r} \left[(\ln f)' + \frac{d-2}{r} \left(1 - e^{2c_F \ln f} \right) \right] = 0$$

$$(\ln f)' + \frac{d-2}{r} \left(1 - f^{2c_F} \right) = 0$$

$$f' + \frac{d-2}{r} f - \frac{d-2}{r} f^{2c_F+1} = 0.$$

Logo, como

$$f' = (d-2) \frac{2\mu}{r^{d-1}} = \frac{d-2}{r}(1-f),$$

então, devido a (4.122),

$$c_F = -\frac{1}{2} \qquad e \qquad c_B = \frac{1}{2}. \tag{4.126}$$

Assim (ver eq. (4.121)),

$$\bar{B} = f^{\frac{1}{2}} \qquad e \qquad \bar{F} = f^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.127}$$

Observe que, para $f = 1$, a equação acima nos fornece $\bar{B} = \bar{F} = 1$, como esperávamos, por coerência com o limite extremo (cf. eqs. (4.110), (4.117) e (4.120)).

Lembrando que fixamos $\varphi = 0$, usamos (4.119) em (4.115) e obtemos

$$(\ln G)'' + \frac{d-1}{r}(\ln G)' + (\ln G)'(\ln f)' + \frac{1}{r} \left(-\frac{(d-2)}{r}(1 - \bar{F}^2) \right) + \frac{d-2}{r^2} \left(1 - \frac{F^2}{G^2} \right)$$
$$= -(p+1)\mathcal{S}^2,$$

ou seja,

$$\frac{(\ln G)''}{p+1} + \frac{d-1}{r} \frac{(\ln G)'}{p+1} + \frac{(\ln G)'}{p+1} (\ln f)' = -\mathcal{S}^2$$

que, comparada a eq. (4.116)

$$\frac{\phi''}{a(D-2)} + \frac{d-1}{r} \frac{\phi'}{a(D-2)} + \frac{\phi'}{a(D-2)} (\ln f)' = -\mathcal{S}^2,$$

sugere a igualdade (cf. eq. (4.96))

$$G = e^{\frac{p+1}{a(D-2)} \phi} \tag{4.128}$$

Para encontrar ϕ, observe que, usando (4.111) e (4.117), temos:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2(D-2)} e^{-a\phi} (G\bar{F})^2 G^{-2(d-1)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

que, usando (4.127), fica:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2(D-2)} e^{-a\phi} \left(\frac{1}{f}\right) G^{-2(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

usando agora (4.128),

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2f(D-2)} e^{-a\phi} e^{-\frac{2(d-2)(p+1)}{a(D-2)}\phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

que, finalmente, usando (4.98), nos dá:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2f(D-2)} e^{-\frac{2\Delta}{a(D-2)}\phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}.$$

Assim, a eq. (4.116) fica:

$$\phi'' + \frac{d-1}{r}\phi' + \phi'(\ln f)' = -\frac{a}{2f} e^{-\frac{2\Delta}{a(D-2)}\phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \tag{4.129}$$

Com um procedimento análogo para a equação (4.114) e usando (4.115), chegamos a:

$$\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi'^2 - \phi'(\ln f)' = \frac{a}{2f} e^{-\frac{2\Delta}{a(D-2)}\phi} \frac{Q^2}{r^{2(d-1)}} \tag{4.130}$$

que, somada à (4.129), fornece:

$$\phi'' + \frac{d-1}{r}\phi' + \frac{\Delta}{a(D-2)}\phi'^2 = 0 \tag{4.131}$$

ou seja,

$$\left(e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi}\right)'' + \frac{d-1}{r}\left(e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi}\right)' = 0 \tag{4.132}$$

que tem uma solução do tipo

$$e^{\frac{\Delta}{a(D-2)}\phi} = 1 + \frac{k^{d-2}}{r^{d-2}} \equiv K, \tag{4.133}$$

onde k^{d-2} é determinado a partir de (4.130), com o auxílio de (4.125):

$$\frac{\Delta}{a(D-2)}\left(\frac{a^2(D-2)^2}{\Delta^2}\frac{K'^2}{K^2}\right) - \frac{a(D-2)}{\Delta}\frac{K'}{K}\frac{f'}{f} = \frac{a}{2f}K^{-2}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

$$\frac{a(D-2)}{\Delta}\frac{(k^{d-2})^2(d-2)^2}{K^2 r^{2(d-1)}} + \frac{a(D-2)}{\Delta}\frac{(k^{d-2})(d-2)}{K r^{d-1}}\frac{2\mu(d-2)}{f r^{d-1}} = \frac{a}{2f}K^{-2}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

$$\frac{a(D-2)(d-2)^2}{\Delta r^{2(d-1)}}\left[\frac{(k^{d-2})^2}{K^2} + \frac{2\mu(k^{d-2})}{Kf}\right] = \frac{a}{2f}K^{-2}\frac{Q^2}{r^{2(d-1)}}$$

$$f(k^{d-2})^2 + 2\mu K(k^{d-2}) = \frac{Q^2\Delta}{2(D-2)(d-2)^2}$$

$$(k^{d-2})^2 + 2\mu(k^{d-2}) - \frac{Q^2\Delta}{2(D-2)(d-2)^2} = 0,$$

que é uma equação algébrica do segundo grau em k^{d-2}, cuja solução é:

$$(k^{d-2}) = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{\Delta}{2(D-2)(d-2)^2}Q^2}. \tag{4.134}$$

Observe que $(k^{d-2}) = (h^{d-2})$ quando $\mu = 0$ (cf. eq. (4.101)), ou seja, a solução negra reduz-se a solução extrema quando deixamos apenas o parâmetro Q, como era de se esperar.

A solução negra é, portanto,

$$e^{\phi} = K^{a\frac{D-2}{\Delta}}, \qquad F_{ty_1\ldots y_p r} = \frac{Q}{|Q|}\sqrt{\frac{2(D-2)}{\Delta}}\sqrt{1+\frac{2\mu}{k^{d-2}}}\left(K^{-1}\right)' \tag{4.135}$$

$$ds^2 = K^{-2\frac{d-2}{\Delta}}\left(-f dt^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_p^2\right) + K^{2\frac{p+1}{\Delta}}\left(f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2\right). \tag{4.136}$$

Novamente como esperado, a solução extrema surge quando $\mu = 0$ e $f = 1$.

4.2.3 Comentários a respeito das soluções.

Algo muito interessante ocorre quando exploramos o *background* devido à uma p-brana (4.106), (4.107) e (4.108) com o auxílio de uma outra brana, chamada *brana-teste*, para a qual supõe-se desprezíveis os campos gerados por ela própria. Sobre a brana-teste, há campos de calibre (F_{ab}) cuja dinâmica é ditada pelo *background* $G_{\mu\nu}$, A_{p+1} e Φ de acordo com a ação de Born-Dirac-Infeld:

$$S_{Dp} = -\tau_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi}\sqrt{\det(\hat{G}_{ab} + 2\pi l_s^2 F_{ab})} + \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} A_{p+1} \wedge e^{2\pi l_s^2 F}. \tag{4.137}$$

Usando o calibre estático, em que $y^a = \xi^a$ e $x^i = x^i(\xi^a)$, calculamos o *pull-back* da métrica extrema:

$$\hat{G}_{ab} = G_{ab} + G_{ij}\partial_a x^i \partial_b x^j, \tag{4.138}$$

de modo que a ação de baixas energias para os campos sobre a brana[5] é [14, 26]:

$$S_{Dp} \approx -\tau_p \frac{(2\pi l_s^2)^2}{2}\int d^{p+1}\xi \left\{\frac{1}{2}\partial^a\phi_i\partial_a\phi^i + \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab}\right\}. \tag{4.139}$$

A ação acima é idêntica à parte bosônica da cinemática de um campo de Super-Maxwell com 16 supercargas (portanto, metade da quantidade total de supercargas da Teoria de Supergravidade em 10 dimensões [6].):

$$S_{SM} = -\frac{1}{g_{Dp}^2}\int d^{p+1}\xi \left\{\frac{1}{2}\partial^a\phi_i\partial_a\phi^i + \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab}\right\} \tag{4.140}$$

com a identificação

$$g_{Dp}^2 = \frac{2}{(2\pi l_s^2)^2\tau_p}.$$

Este cálculo, que mostra como computar a constante de acoplamento de uma teoria de calibre em $(p+1)$-dimensões a partir de uma solução supergravitacional em 10 dimensões, apenas tem sentido graças à dupla natureza das branas. Observe que interpretamos a brana que cria o *background* como uma p-brana, uma solução extensa da supergravidade. Já a brana-teste, sobre a qual vivem os campos de calibre e escalares, é interpretada como uma D-brana (cf. seção 2.7).

A solução negra recebe este nome devido à semelhança com o buraco negro de Reissner-Nordstrom (RN), que também contém dois parâmetros: massa e carga. O buraco negro de Schwarzschild, que é um objeto pontual (e, portanto, tem uma linha-mundo unidimensional) é simplesmente um buraco negro de RN com carga nula. Vejamos, então o que encontramos fazendo $Q = 0$ (e, portanto, $k = 0$ e $K = 1$) em (4.136):

$$ds_{Sch}^2 = \left[-\left(1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r^{d-2}}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2\right] + dy_1^2 + \ldots + dy_p^2 \tag{4.141}$$

[5]Lembre que sobre a brana também propagam-se campos escalares que estão relacionados às coordenadas transversais ao volume-mundo da brana: $x^i \sim \phi^i$.

[6]Lembre-se que a solução extrema preserva apenas metade da supersimetria, por ser um objeto BPS.

em que usamos (4.125).

A métrica acima é interpretada como uma generalização do buraco negro de Schwarzschild, representando um objeto não mais pontual, mas espacialmente estendido em p direções, que deforma o espaço $(d+1)$-dimensional transversal a si de uma forma semelhante à métrica de Schwarzschild (o caso $\{p = 0; d = 3\}$ da métrica entre colchetes é exatamente a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein).

Capítulo 5

Considerações finais

Teorias que foram completamente formuladas em poucos anos (e.g., a gravitação de Newton e as relatividades de Einstein) demoraram alguns anos para serem aceitas sem resalvas pela maioria da comunidade científica. A Teoria de Cordas enfrenta um problema ainda mais sério frente ao ceticismo: não possui uma formulação completa, nem evidências experimentais. Entretanto, nos últimos 20 anos, a teoria amadureceu e hoje é um dos assuntos mais estudados em física teórica.

Muitos fatores explicam este interesse pela Teoria de Cordas. O mais direto deles é que a teoria proporciona um modo de quantizar a gravitação, realizando um feito há muito desejado pelos físicos teóricos: unir a Relatividade Geral e a Mecânia Quântica, os dois pilares da física moderna. Essa unificação é obtida de um modo fundamentalmente diferente do que é feito em Teoria Quântica de Campos. Em TQC, escrevemos a teoria clássica do campo que desejamos quantizar e aplicamos as relações de comutação, enquanto que na teoria de cordas, a teoria clássica não dá indícios de que estamos lidando com a gravidade ou mesmo com campos de calibre. É surpreendente que todas estes campos surjam quando as relações de comutação são impostas à corda. Vimos no capítulo dois como se dá este surgimento: interpretando os modos de oscilação da corda como partículas, uma delas terá propriedades semelhantes à do gráviton, a partícula portadora da força da gravidade.

Além disso, a teoria estreita os laços entre gravitação e os campos de calibre, que descrevem as demais interações (eletromagnetismo e forças nucleares fraca e forte). A relação entre esses dois tipos de campos não é trivial, já que no contexto de Teoria Quântica de Campos não há nenhuma relação profunda entre os dois: uma teoria de campos de calibre não inclui, necessariamente, a gravitação e vice-versa. Esse não é o caso nas teoria de cordas, que incluem, de um modo ou de outro, ambos: gravidade e campos de calibre.

Nesta relação, usualmente denominada *correspondência calibre/gravitação*, as branas desempenham um papel muito importante. Como vimos na última seção do capítulo anterior através de um exemplo simples, é possível obter informações de uma teoria de calibre a partir de uma solução gravitacional. Esta correspondência está intimamente ligada, como comentamos, à dupla interpretação dos objetos extendidos da teoria. A primeira interpretação é a de que estes são D-branas, hiperplanos onde as extremidades de uma corda aberta estão presas. Este objeto é necessário para que a teoria seja T-dual, pois a dualidade T transforma condições de contorno de Neumann em Dirichlet. Por outro lado, objetos extendidos também aparecem nas teorias do tipo II, em que os campos antissimétricos do setor de Ramond-Ramond devem ser acoplados com objetos extendidos (para que a ação seja um escalar, um potencial $C_{\mu_1 \dots \mu_n}$ deve acoplar-se com um volume-mundo de n dimensões). Estes objetos que carregariam as cargas dos campos de Ramond-Ramond são as p-branas que estudamos no capítulo anterior. Por serem introduzidos por razões diferentes, não há garantias de que D-branas e p-branas são o mesmo objeto (ver discussão em [14]). Entretanto, uma série de trabalhos a partir de 1995 [10] identificou as soluções solitônicas clássicas (p-branas) com os objetos não-perturbativos requeridos pela dualidade T (D-branas).

Apêndice A

Notação

Neste apêncice, colecionamos algumas expressões que variam de modo arbitrário pela literatura com o intuito de permitir uma rápida localização das convenções usadas.

Sistema de unidades e algumas grandezas

Usamos o sistema natural de unidades, em que $\hbar = c = 1$. Neste sistema, a tensão da corda T e o comprimento da mesma ℓ_s relacionam-se por:

$$T = \frac{1}{2\pi\ell_s^2} \tag{A.1}$$

Dimensões

Usualmente, consideramos a letra D para a dimensão do espaço-tempo e p para a dimensão espacial do volume-mundo de uma p-brana. Nos raros trechos em que uma confusão pode surgir (por exemplo, quando usamos a letra D para "Dirichlet"), usamos a letra N para a dimensão do espaço-tempo. Quando necessário dividir o espaço-tempo, usaremos d para indicar a dimensão do espaço fora do volume-mundo.

Letras com linhas, pontos, barras e chapéus

No capítulo 2 em geral, linhas e pontos representam derivadas com respeito a σ e τ, respectivamente. Entretanto, às vezes a linha é usada para representar derivadas com respeito ao argumento da função (como é o caso da eq. (2.77) e no capítulo 4).

Uma barra sobre a letra é usada pra indicar os modos "pra esquerda"e os operadores a eles relacionados. Também representamos com uma barra o complexo conjugado da carga supersimétrica. A operação de conjugação aparece representada por "$*$"e "$\dagger$".

Letras com chapéus estão relacionadas à teoria T-dual. Além disso, o chapéu sobre a letra indica o *pull-back* (veja eq. (2.84)). Não espera-se confusão entre estes dois usos, por serem os mesmos aplicados em contextos bem distintos.

Índices

Sempre que forem usadas coordenadas do cone-de-luz, os índices maiúsculos do meio do alfabeto latino representam as coordenadas deixadas intactas, ou seja, as coordenadas

$$x^I \to \{x^2, \dots, x^D\}.$$

As coordenadas x^0 e x^1, no cone-de-luz são substituídas por:

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \qquad e \qquad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \tag{A.2}$$

Nas seções 2.5 e 2.6, em que uma dimensão é compactificada, usamos índices minúsculos latinos para representar as direções não compactificadas.

Índices gregos cobrem todo o espaço-tempo:

$$\mu, \nu, \dots = 0, \dots, (D-1),$$

enquanto que as letras do meio da alfabeto latino percorrem o volume-mundo:

$$i, j, \ldots = 0, \ldots, p$$

(entretanto, quando fazemos uso das coordenadas do cone-de-luz $\{x^-, x^+, x^i\}$, i vai de 2 à p). Quando necessário, usaremos índices do início do alfabeto latino para percorrer as dimensões fora do volume-mundo:

$$a, b, \ldots = 1, \ldots, d.$$

Ao tratarmos espinores, usaremos índices do início do alfabeto grego para denotar as componentes do espinor de Weyl. Índices sem pontos transformam-se segundo a representação $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz e os índices com pontos, segundo a representação $(0, \frac{1}{2})$. O espinor de Dirac contém dois espinores de Weyl:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Em quatro dimensões, $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$.

A quantidade de geradores Q da superálgebra é denotada por $\mathcal{N}$ e índices maiúsculos do início do alfabeto latinos os rotulam:

$$A, B, \ldots = 1, \ldots, \mathcal{N}.$$

Espinores: convenções e relações úteis

Em geral, usaremos a notação de Weyl, como explicado acima. Os tensores antissimétricos $\varepsilon^{\alpha\beta}$

$$(\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1, \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0)$$

e $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$

$$(\varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1, \qquad \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = \varepsilon^{\dot{2}\dot{1}} = -1, \qquad \varepsilon_{\dot{1}\dot{1}} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{2}} = 0)$$

levantam e baixam os índices:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \qquad \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}_{\dot{\beta}}, \qquad \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}}, \tag{A.4}$$

em que a notação de soma de Einstein é subentendida nos índices repetidos. A supressão dos índices em contrações é feita de acordo com a convenção:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi; \\ \overline{\psi}\overline{\chi} &= \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\overline{\chi}_{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}\overline{\psi}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Note que $(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\chi}\overline{\psi}$.

As matrizes σ são definidas por:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}. \tag{A.7}$$

Mais sobre as matrizes sigma:

$$\overline{\sigma}^0 = \sigma^0, \qquad \overline{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3} \tag{A.8}$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_\mu = -2\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}. \tag{A.9}$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu) \tag{A.10}$$

$$\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk} = -i\sigma^i \tag{A.11}$$

Objetos geométricos
Adotamos a assinatura $(-++...+)$ para a métrica:

$$+(ds)^2 = -(dt)^2 + (dx^1)^2 + ... + (dx^{D-1})^2 \tag{A.12}$$

O tensor de curvatura (ou tensor de Riemann-Christoffel) é definido como:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} \tag{A.13}$$

em que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christoffel,

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right\}. \tag{A.14}$$

A equação de campo para a gravitação (ou equação de Einstein) é:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = +8\pi G T_{\mu\nu} \tag{A.15}$$

em que $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ é o tensor de Ricci e R é o escalar de Ricci, definido por $R = g^{\lambda\nu}R_{\lambda\nu}$, e G é a constante de Newton para a gravitação.

Apêndice B

Espinores em diversas dimensões

Um espinor é um objeto que, sob uma transformação de Lorentz, transforma-se de acordo com:

$$\psi'_\mu = \Sigma_\mu{}^\nu \psi_\nu, \tag{B.1}$$

em que $\Sigma^{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$ são geradores do grupo de Lorentz (i.e., satisfaz eq. (3.3)). A representação de Dirac é aquela na qual Γ^μ são representações irredutíveis da álgebra

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{B.2}$$

Esta álgebra é satisfeita por matrtizes $k \times k$, (k é *par*[1] e é chamado *dimensão da álgebra*). Mostraremos agora o seguinte: **Se a dimensão do espaço-tempo D for par[2], então a dimensão da representação irredutível de (B.2) é $k = 2^{D/2}$.**

A dimensão de uma representação é igual ao número de elementos de sua base. Para construir uma base para Γ^μ, notamos que a álgebra (B.2) pode ser escrita na forma familiar de operadores de criação/aniquilação: definimos $D/2$ operadores de criação e $D/2$ operadores de aniquilação:

$$\Gamma^{0\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma^1 \pm \Gamma^0) \tag{B.3}$$

$$\Gamma^{a\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm \Gamma^{2a+1}), \qquad a = 1, \ldots, \frac{D-2}{2.} \tag{B.4}$$

que satisfazem

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab}, \qquad \{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0.$$

Como sempre, definimos um estado que é aniquilado por todos os Γ^{a-}:

$$\Gamma^{a-}|\zeta\rangle$$

e os demais são construídos através de atuações de Γ^{a+}. Notando que $(\Gamma^{a+})^2 = 0$, vemos que o número de estados (elementos da base) é

$$k = \begin{pmatrix} D/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} D/2 \\ D/2 \end{pmatrix} = 2^{D/2} \qquad (C.Q.D).$$

---

[1] Para mostrar isto, observe que $\Gamma^0\Gamma^1 = -\Gamma^1\Gamma^0 = (-I)\Gamma^1\Gamma^0$, em que I é a matriz identidade com $k \times k$ componentes. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$, então k deve ser par:

$$\det(-I) = (-1)^k = 1 \qquad \therefore \qquad \frac{k}{2} \in Z.$$

[2] Neste apêndice, consideramos D sempre par, pois os casos de interesse para nós são $D = 2$ (folha-mundo da Supercorda), $D = 4$ (espaço-tempo segundo o senso comum) e $D = 10$ (espaço-tempo segundo a Teoria de Supercordas).

Portanto, se aumentarmos a dimensão de duas unidades, as matrizes Γ^μ dobram de tamanho: $2^{D+2/2} = 2 \times 2^{D/2}$. É possível construir uma representação em $D+2$ a partir de uma representação em D por meio de um produto direto:

- D=2:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

- D=4:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} -\gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix} = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 0, 1 \tag{B.6}$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} = I_{2\times 2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.7}$$

$$\Gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} = I_{2\times 2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

- D=2k+2:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, (D-3) \tag{B.9}$$

$$\Gamma^{(D-2)} = I_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^{(D-1)} = I_{2^k \times 2^k} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

O espinor de Dirac é definido em qualquer dimensão (em dimensões ímpares, este possui $2^{D-1/2}$ componentes complexas) e, embora represente irredutivelmente a álgebra (B.2), o mesmo não é, em geral, a representação mínima do grupo de Lorentz $SO(1, D-1)$. A notação que usamos no texto é a de Weyl que, em quatro dimensões, é uma representação irredutível de $SO(1, D-1)$. Espinores de Weyl possuem metade do número de componentes de um espinor de Dirac e podem ser construídos apenas em dimensões pares.

Uma outra representação é a de Majorana, em que uma condição de realidade é imposta a um espinor de Dirac. Esta imposição reduz à metade o número de componentes de um espinor de Dirac. Para ser possível definir um espinor real, é necessário que seja possível representar a álgebra (B.2) com matrizes Γ^μ puramente imaginárias (para que a ação de Dirac seja real). A contrução dessas matrizes imaginárias é possível nas dimensões de nosso interesse ($D =$ 2,4 e 10), mas não é possível, por exemplo, nas dimensões $D =$ 5,6 e 7.

A condição de realidade pode ser imposta também ao espinor de Weyl, dando origem a representação de Majorana-Weyl, que tem quatro vezes menos componentes do que a representação de Dirac. Esta construção é possível apenas em dimensão 2($mod.$8), ou seja, $D =$ 2, 10, 18, etc.

Apresentamos abaixo o número de componentes (o asterisco representa componentes complexas) de cada tipo de espinor e da representação irredutível do grupo de Lorentz $SO(1, D-1)$ nas dimensões de interesse (duas, quatro e dez dimensões).

D	Dirac	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	Rep. Mínima
2	2 (*)	2	1 (*)	1	1
4	4 (*)	4	2 (*)	-	4
10	32 (*)	32	16 (*)	16	16

Mais sobre espinores em várias dimensões pode ser encontrado no apêndice B de [10] (vol. II) e em [27, 28]. O último capítulo de [29] apresenta a supersimetria em dimensões arbitrárias e contém também um apêndice sobre espinores em várias dimensões.

Apêndice C

Uma brevíssima introdução às formas diferenciais

Definimos uma n-forma W_n por:

$$W_n = \frac{1}{n!} W_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \tag{C.1}$$

em que o produto "$\wedge$"satisfaz:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu, \qquad dx^\mu \wedge dx^\mu = 0, \tag{C.2}$$

e, portanto, o tensor covariante $W_{\mu_1 \dots \mu_n}$ é totalmente anti-simétrico. Em especial, uma 0-forma é simplesmente um escalar e a derivada (chamada *derivada exterior*) é uma 1-forma:

$$d = dx^\mu \partial_\mu. \tag{C.3}$$

Definida desta forma, é claro que

$$d^2 = 0, \tag{C.4}$$

pois $\partial_\mu \partial_\nu$ é simétrico e $dx^\mu \wedge dx^\nu$ é anti-simétrico. Assim, se uma n-forma H_n for tal que exista uma $(n-1)$-forma $C_{(n-1)}$ que satisfaça

$$H_n = dC_{(n-1)}, \tag{C.5}$$

então

$$dH_n = d^2 C_{(n-1)} = 0 \tag{C.6}$$

e $C_{(n-1)}$ é chamado *potencial* de H_n. Qualquer forma que possa ser escrita como a derivada exterior de um potencial, como em (C.5), é chamada de *exata*. E aquela para a qual a derivada exterior é nula, como em (C.6), é chamada *fechada*. Toda forma exata é fechada.

Uma n-forma W_n em D dimensões possui

$$C_p^D \equiv \begin{pmatrix} D \\ n \end{pmatrix} = \frac{D!}{n!(D-n)!}$$

componentes independentes, já que cada componente é obtida tomando n números diferentes do conjunto $(0, \dots, D-1)$. É interessante notar que uma $(D-n)$-forma, que denotaremos por ${}^*W_n$, possui a mesma quantidade de componentes independentes. Dizemos que ${}^*W_n$ é o *dual* de W_n. Estas estão relacionadas por um mapa, chamado de *dualidade Hodge*:

$${}^*W_n = \frac{\sqrt{-g}}{n!(D-n)!} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_{D-n} \mu_1 \dots \mu_n} W^{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{D-n}}, \tag{C.7}$$

em que $\varepsilon^{012\dots(D-1)} = -\varepsilon_{012\dots(D-1)} = +1$ e g é o determinante da métrica.

O livro [30] contém uma excelente introdução às formas diferenciais, com ênfase na interpretação geométrica. Uma discussão um pouco mais detalhada pode ser encontrada no livro [31].

Referências Bibliográficas

[1] C. Johnson, "D-Branes", *Cambridge*, (2003).

[2] STRINGS 95: Future Perspectives in String Theory, Los Angeles, California, 13-18 Mar 1995.

[3] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", *Adv. Theor. Math. Phys* **2**, 231 (1998), [ArXiv: hep-th/9711200].

[4] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri e Y. Oz "Large N Field Theories, String Theory and Gravity", [ArXiv: hep-th/9905111 v3].

[5] Chris Clarkson e Roy Maartens, "Gravity-wave detectors as probes of extra dimensions", [ArXiv: astro-ph/0505277 v1].

[6] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, "Superstring Theory - Vols 01 e 02", *Cambridge*, (1987).

[7] E. Kiritsis, "Introduction to Superstring Theory", [ArXiv: hep-th/9709062 v2].

[8] P.S Howe e K.S. Stelle, "The Ultraviolet Properties of Supersymmetric Field Theories", *Int. J. Mod. Phys. A* **4**, 1871 (1989).

[9] L. Smolin, "How Far Are We From the Quantum Theory of Gravity?", [ArXiv: hep-th/0303185 v2].

[10] J. Polchinski, "String Theory", *Cambridge*, (1998).

[11] B. Zwiebach, "A First Course in String Theory", *Cambridge*, (2004).

[12] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", *Addison-Wesley Pub. Co.*, (1959).

[13] A. M. Polyakov,"Quantum Geometry of Bosonic Strings", *Phys. Lett.* **B103**, 207, (1981); A. M. Polyakov, "Quantum Geometry of Fermionic Strings", *Phys. Lett.* **B103**, 211, (1981).

[14] E. Imeroni, "The Gauge/String Correspondence Towards Realistic Gauge Theories", [ArXiv: hep-th/0312070 v2].

[15] J. Wess e B. Zumino, "A Lagrangean Model Invariant under Supergauge Transformations", *Phys. Lett.* **49B**, 52, (1974).

[16] J. Wess e B. Zumino, "Supergauge Transformations in Four Dimensions", *Nucl. Phys.* **B70**, 39, (1974).

[17] H. J. W. Müller-Kirsten e A. Wiedemann, "SUPERSYMMETRY - An Introduction with Conceptual and Calculational Details", *World Scientific Publishing*, (1987).

[18] Wu-Ki Tung, "Group Theory in Physics", *World Scientific Publishing*, (1985).

[19] R. Haag, J. T. Lopouszanski e M. F. Sohnius, "All Possible generators of Supersymmetries of S-Matrix", Nucl. Phys. **B88**, 257, (1975).

[20] J. Wess e J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", *Princeton University Press*, (1992).

[21] Thomas Mohaupt, "Introduction to String Theory", [ArXiv: hep-th/0207249 v1]

[22] C. Bachas, "(Half) A Lecture On D-branes", [ArXiv: hep-th/9701019 v3]

[23] R. Argurio, "Brane Physics in M-Theory", [ArXiv: hep-th/9807171 v2]

[24] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", [ArXiv: hep-th/9510017].

[25] K. S. Stelle, "Lectures on supergravity p-branes", [hep-th/9701088].

[26] Jose D. Edelstein e Ruben Portugues, "Gauge/String Duality in Confining Theories", [hep-th/0602021]

[27] Martin F. Sohnius, "Introducing Supersymmetry", *Phys. Rep.* **128**, 39, (1985)

[28] Yoshiaki Tanii, "Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions", [hep-th/9802138 v1].

[29] Steven Weinberg, "The Quantm Theory of Fields - Volume III: Supersymmetry", *Cambridge*, (2000).

[30] Bernard Schutz, "Geometrical Methods of Mathematical Physics", *Cambridge*, (1980).

[31] Harley Flanders, "Differential Forms With Applications to the Physical Sciences", *Dover Publications*, (1989).