Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Um estudo hidrodinâmico do fluxo elíptico em colisões nucleares relativísticas

Rone Peterson Galvão de Andrade

Orientador: Prof. Yogiro Hama

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Yogiro Hama (USP)

Prof. Dr. Marcelo Gameiro Munhoz (USP)

Prof. Dr. Brett Vern Carlson (ITA)

São Paulo

2006

Agradecimentos

Ao Prof. Yogiro Hama, por ter me orientado.

À Profa. Frederique Grassi, pela intensa participação neste trabalho. Em especial, pelo grande apoio durante todos estes anos.

Ao Dr. Otavio Socolowski Jr., pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Ao Prof. Takeshi Kodama, pelas valiosas sugestões e discussões.

À Thays de Jesus Correia e Silva, pela paciência, incentivo, ajuda, compreensão...

À minha família.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação calculamos o parâmetro de fluxo elíptico v_2, em função da pseudorapidez η, do momento transversal p_t e da centralidade da colisão. Encontramos que v_2, em função de η, reproduz a forma característica dos dados experimentais, apresentando um máximo em $\eta = 0$ e diminuindo conforme $|\eta|$ aumenta. Obtivemos, também, que v_2, em função de p_t, cresce de forma, aproximadamente, linear, não apresentando a saturação observada nos dados experimentais, para $p_t > 1.5\,GeV$ (quando usamos a fórmula de Cooper-Frye). Usando o mecanismo de emissão contínua, há uma considerável redução do fluxo elíptico, na região de p_t grande. Entretanto, tal redução não caracteriza uma saturação. No caso de v_2, em função da centralidade, os resultados mostram-se consistentes com os dados experimentais. Verificamos, também, que os efeitos de uma equação de estado com ponto crítico é pouco significativo para o fluxo elíptico. Por outro lado, encontramos uma forte dependência de v_2 em relação ao tipo de condições iniciais adotado (condições iniciais médias ou condições iniciais flutuantes). Finalmente, propomos uma fórmula para cálculo de v_2, a partir de quantidades que podem ser medidas experimentalmente. O resultado obtido com esta fórmula mostra-se consistente com v_2 calculado de maneira teórica (em relação à direção do parâmetro de impacto).

Abstract

In this work, we calculate the elliptic flow parameter v_2, as a function of the pseudorapidity η, the transversal momentum p_t and the centrality of the collision. We found that v_2, as a function of η, reproduces the characteristic shape of the experimental data, with a maximum at $\eta = 0$ and decreasing as $|\eta|$ increases. We also observed that v_2, as a function of p_t, linearly increases, therefore it doesn't show the saturation observed in experimental data, for $p_t > 1.5\, GeV$ (when we use the Cooper-Frye prescription). Using the continuous emission mechanism, we observed a considerable reduction of the elliptical flow in the range of high p_t. However, such a reduction doesn't characterize a saturation. In the case of v_2, as a function of centrality, the results are consistent with the experimental data. We also verified that the effect of a equation of state with critical point is of little importance to the elliptical flow. On the other side, we found a strong dependence of v_2 on the type of initial conditions used (average or fluctuating initials conditions). Finally, we propose a prescription to calculate v_2 from quantities which can be experimentally measured. The result obtained with this prescription is consistent with the v_2 theoretically computed (using the impact parameter direction).

Sumário

1 Introdução **6**

2 Modelo hidrodinâmico **8**

2.1 Equações da hidrodinâmica relativística 9

2.2 Condições iniciais 11

2.3 Equações de estado 14

2.3.1 Fase hadrônica 16

2.3.2 Plasma de quarks e gluons 16

2.3.3 Diagrama de fases 18

2.3.4 Ponto crítico 20

2.4 Mecanismos de desacoplamento 24

2.4.1 Emissão com temperatura fixa 24

2.4.2 Emissão contínua 25

3 Métodos numéricos **27**

3.1 Distribuição de momento na representação SPH 35

4 Fluxo Elíptico **38**

5 Resultados **49**

5.1 Distribuições de partículas em função de η e p_t 49

5.2 $\langle v_2^b \rangle$ em função de η e da centralidade da colisão 55
5.3 $\langle v_2^b \rangle$ em função do momento transversal 58
5.4 Efeito da temperatura de desacoplamento 60
5.5 Efeito da presença de ponto crítico 62
5.6 Efeito do mecanismo de desacoplameto 65
5.7 Comparação entre $\langle v_2^b \rangle$, $\langle v_2^{obs} \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$ 67
5.8 Efeito do tipo de condições iniciais 70

6 Conclusões **72**

A Conservação da entropia **75**

B Limite de Boltzmann **77**

C Limite ultra-relativístico **79**

D Formulação variacional **82**

Referências Bibliográficas **85**

Capítulo 1

Introdução

Colisões nucleares de alta energia são de grande interesse, pois permitem o estudo das propriedades da matéria sob condições extremas de densidade e temperatura. Uma das possíveis ferramentas para estudar o sistema complexo criado nestas colisões é o modelo hidrodinâmico.

A aplicação deste modelo está fundamentada na hipótese de que este sistema atingirá, rapidamente, um estado de equilíbrio térmico local. No entanto, devemos enfatizar que tal hipótese não está garantida *a priori*. Esperamos que os estudos teóricos e experimentais de alguns observáveis apropriados possam confirmar a aplicabilidade do modelo. Nesta dissertação nos concentramos sobre o parâmetro de fluxo elíptico v_2.

Este observável é o segundo coeficiente da expansão de Fourier da distribuição de partículas observadas, em função do ângulo azimutal, e está relacionado à existência de anisotropia nesta distribuição. Do ponto de vista do modelo hidrodinâmico, esta anisotropia pode surgir se a matéria formada na colisão atingir um estado de equilíbrio térmico local e não for, azimutalmente, isotrópica. Portanto, a concordância entre v_2 previsto pelo modelo hidrodinâmico e os resultados experimentais pode estar, intimamente, relacionada com a validade da hipótese de termalização. Conseqüentemente, tal fato reforçaria a credibilidade

do modelo hidrodinâmico.

Esta dissertação apresenta um estudo teórico de v_2, em colisões Au+Au, com energia incidente de 200 A GeV. Os resultados teóricos foram comparados com os resultados experimentais da colaboração PHOBOS, no RHIC. Para fazermos os cálculos usamos o programa SPheRIO[1][1], com condições iniciais, para a hidrodinâmica, fornecidas pelo programa Nexus[2][2]. O programa SPheRIO tem sido desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa, nos últimos anos. Sua principal vantagem é a capacidade de incorporar qualquer geometria nas condições iniciais. Alguns resultados obtidos com este programa podem ser vistos em [3, 4, 5, 6, 7].

A seguir, apresentamos como esta dissertação está dividida. No capítulo 2 mostramos os aspectos básicos do modelo hidrodinâmico. No capítulo 3 discutimos o método numérico usado para resolver as equações da hidrodinâmica e que está implementado no programa SPheRIO. No capítulo 4 apresentamos os conceitos básicos do fluxo elíptico, que é o objeto de estudo deste trabalho. No capítulo 5 mostramos os resultados de v_2, em função da pseudorapidez, do momento transversal e da centralidade. Discutimos, também, os efeitos de diferentes equações de estado, mecanismos de desacoplamento e tipos de condições iniciais, sobre v_2. Finalmente, no capítulo 6, apresentamos as conclusões.

[1] **S**moothed **P**article **h**ydrodynamic **e**volution of **R**elativistic heavy **I**on **co**llisions.

[2] Denominaremos Nexus+SPheRIO o acoplamento entre o programa hidrodinâmico SPheRIO e o gerador de eventos Nexus.

Capítulo 2

Modelo hidrodinâmico

Numa colisão de dois núcleos pesados e altamente relativísticos, uma considerável fração da energia cinética dos núcleos incidentes é convertida em milhares de partículas observadas. Esse fenômeno, chamado de produção múltipla de partículas, ocorre de maneira extremamente complexa e é um tema de intenso estudo experimental e teórico.

Uma das possíveis descrições deste fenômeno é o modelo hidrodinâmico, proposto há cinqüenta anos por Landau[8, 9]. Segundo este modelo, o sistema inicial formado na colisão atingirá rapidamente um estado de equilíbrio térmico local, devido a várias interações iniciais entre as partículas incidentes. A partir deste instante, o sistema poderá ser considerado como um fluido, que se expandirá de acordo com as equações da hidrodinâmica relativística[1]. Num instante posterior, quando o livre caminho médio for suficientemente grande, de modo que não existam mais interações entre as partículas, o sistema entrará no estágio de desacoplamento e as partículas estarão livres para alcançar os detectores. Na versão mais moderna, se a energia dos núcleos incidentes for alta o suficiente, será esperada a criação de uma fase inicial de plasma de quarks e gluons, com posterior transição para uma fase hadrônica.

[1]Nesta descrição, as propriedades microscópicas da matéria se traduzem através de equações de estado.

Devemos enfatizar que os ingredientes básicos do modelo hidrodinâmico, isto é, condições iniciais, equação de estado e mecanismo de desacoplamento, não são bem conhecidos. Por conta disso, usamos alguns dados experimentais para escolher, entre algumas possibilidades, que tipo de condições inicias, equação de estado e mecanismo de desacoplamento, melhor os reproduzem.

Nas próximas seções apresentaremos uma breve descrição de cada ingrediente do modelo.

2.1 Equações da hidrodinâmica relativística

Se a matéria nuclear formada na colisão de dois íons pesados relativísticos alcançar um estado de equilíbrio térmico local, sua subseqüente evolução dinâmica será dada pelas equações da hidrodinâmica relativística[2]. Na versão mais simples destas equações, que descreve um fluido ideal[11, 10], temos:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

e

$$\partial_\nu \left(n_i u^\nu\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{2.2}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \left(\epsilon + p\right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

[2]A mecânica relativística dos meios contínuos está baseada na hipótese de existência de um único sistema de repouso onde as densidades de momento do tensor energia momento $T^{\mu\nu}$ são nulas[10].

é o tensor energia-momento do fluido ideal e $n_i u^\nu = j_i^\nu$ é a i-ésima corrente de carga conservada. A equação 2.1 representa a conservação da energia e do momento. As relações 2.1, 2.2 e 2.3, juntas, formam um conjunto de 4+N equações com 5+N incógnitas, portanto, para fechar o sitema devemos acrescentar mais uma equação. Esta é obtida por meio das equações de estado da matéria que forma o fluido (por exemplo, plasma de quarks e gluons ou matéria hadrônica). Por questões de dificuldade numérica na resolução das equações da hidrodinâmica[3], a única carga conservada que assumiremos será o número bariônico, assim,

$$\partial_\nu \left(n_B u^\nu \right) = 0. \tag{2.4}$$

Uma conseqüência importante das equações 2.1, 2.3 e 2.4 é a conservação da entropia durante a evolução dinâmica do fluido (veja apêndice A), então

$$\partial_\nu \left(s u^\nu \right) = 0 \tag{2.5}$$

onde s é a densidade de entropia própria.

No caso de um fluido ideal constituido de píons, podemos escrever que

$$\rho \approx \alpha s \tag{2.6}$$

onde ρ é a densidade de píons e α é uma constante[9][3]. Levando em conta a equação 2.5, vemos que, neste caso, o número de píons é, aproximadamente, conservado.

[3]Por exemplo, num gás ideal de píons sem massa $\alpha = 45\zeta\left(3\right)/2\pi^4 \approx 0.278$.

2.2 Condições iniciais

As condições iniciais para as equações da hidrodinâmica 2.1, 2.2 e 2.3 são dadas pelo tensor energia-momento e pelas correntes de cargas conservadas (por exemplo, carga elétrica, número bariônico, estranheza, etc.), todas essas grandezas calculadas no "tempo próprio" $\tau \sim 1fm$, quando supomos que a matéria alcançou um estado de equilíbrio térmico local.

Na abordagem hidrodinâmica é usual assumir que essas condições iniciais sejam simétricas e lisas, parametrizadas de forma conveniente, o que corresponderia a uma média das quantidades hidrodinâmicas iniciais, existentes em cada colisão. Neste procedimento, as grandezas observáveis são obtidas a partir de condições iniciais médias e não apresentam flutuações. Podemos representar essa idéia da seguinte forma[3]:

$$\frac{1}{N_{ev}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} (CI)_j \to f. \tag{2.7}$$

Na relação 2.7, N_{ev} é o número de eventos[4], $(CI)_j$[5] é a condição inicial do j-ésimo evento e f é alguma grandeza observável.

Uma vez que as dimensões do sistema criado na colisão são muito pequenas, é razoável esperar que as condições iniciais $(CI)_j$ sofram flutuações consideráveis a cada colisão, mesmo quando fixamos os parâmetros da colisão, como por exemplo, a energia incidente ou o parâmetro de impacto $\vec{b}$. Neste sentido, uma maneira alternativa e talvez mais próxima do procedimento experimental seja calcular o observável f a cada colisão e, posteriormente, tomarmos o seu valor médio. Esse procedimento pode ser representado como segue:

$$\frac{1}{N_{ev}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} (CI \to f)_j = \langle f \rangle . \tag{2.8}$$

[4]Neste texto um evento significa uma colisão entre dois núcleos.

[5]A condição inicial $(CI)_j$, associada ao j-ésimo evento, representa o estado inicial das grandezas hidrodinâmicas, tais como: densidade de energia, densidade bariônica, velocidade do fluido, etc.

Neste caso, $(CI \rightarrow f)_j$ é o valor do observável f calculado no j-ésimo evento e $\langle f \rangle$ é o seu valor médio. Note que, agora, podemos calcular o valor da dispersão de f.

Para obtermos as condições iniciais flutuantes $(CI)_j$ é necessário adotar algum modelo microscópico que dê conta das interações complexas entre as partículas que constituem a matéria nuclear formada na colisão. Um destes modelos é o NeXus[2]. Este gerador de eventos pode fornecer o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}(x)$, as densidades de corrente bariônica $j^{\mu}_{B}(x)$, de estranheza $j^{\mu}_{S}(x)$ e de carga $j^{\mu}_{Q}(x)$, em cada ponto do espaço, no "tempo próprio" $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ ~1 fm, para qualquer par de núcleos incidentes. Com a finalidade de ilustrar essa discussão, mostramos na figura 2.1 a densidade de energia na região central de rapidez, em colisões Au+Au, a uma energia incidente de 200 A GeV. Estes cálculos foram feitos por meio do gerador de eventos NeXus. O gráfico da esquerda é um exemplo de condição inicial associada a uma única colisão aleatória. Note a existência de picos de densidade de energia e pouca simetria. O gráfico da direita é um exemplo de condição inicial simétrica e lisa. Este foi obtido tomando-se o valor médio da densidade de energia em duas mil colisões aleatórias, com parâmetro de impacto variando de 5.86 fm a 7.56 fm.

Neste contexto, poderíamos nos perguntar se as grandezas observáveis obtidas por meio de condições iniciais médias (relação 2.7 e figura 2.1 (direita)) são compatíveis com aquelas obtidas por meio de condições iniciais flutuantes (relação 2.8 e figura 2.1 (esquerda)). Responderemos esta questão mais adiante quando dicutirmos os efeitos de ambos os tipos de condições iniciais nos observáveis: v_2 em função da pseudorapidez[6] (seção 5.8) e distribuição de partículas em função da pseudorapidez e momento transversal (seção 5.1).

Um fato que deve ser levado em conta é que, de modo geral, as condições iniciais geradas por um modelo microscópico não correspondem, necessariamente, a uma matéria localmente termalizada. No caso do Nexus, as quadrivelocidades correspondentes às den-

[6] A pseudorapidez η de uma partícula é uma função do ângulo θ, formado entre o momento da partícula e o eixo do feixe incidente. $\eta \equiv -ln\left[tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} ln\left(\frac{|\vec{p}|+p_z}{|\vec{p}|-p_z}\right)$.

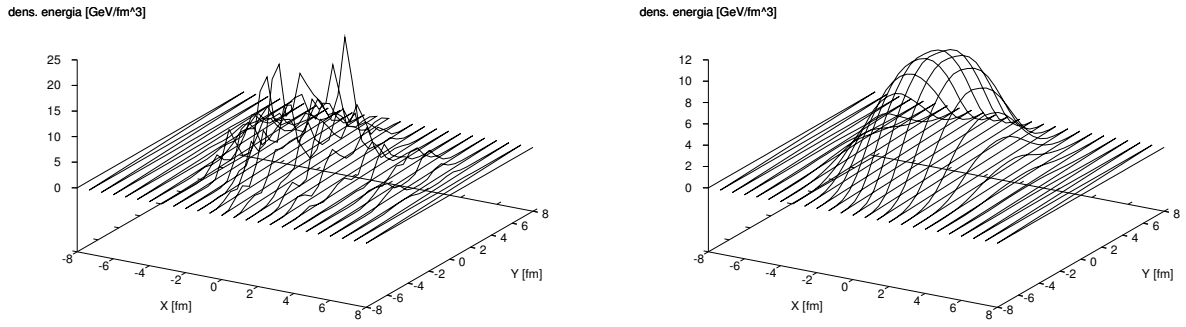

Figura 2.1: Exemplos de densidade de energia na região central de rapidez, em colisões Au+Au, a 200 A GeV. Estes gráficos foram obtidos por meio do gerador de eventos NeXus. O eixo vertical representa a densidade de energia em unidades de GeV/fm^3. O gráfico da esquerda corresponde a uma única colisão aleatória. O gráfico da direita corresponde ao valor médio de duas mil colisões aleatóias, com parâmetro de impacto variando de 5.86 fm a 7.56 fm.

sidades de corrente não coincidem entre si e também não coincidem com a velocidade do sistema onde $T^{\mu\nu}(x)$ é diagonal. Seguindo um procedimento proposto por Landau [11], podemos tratar este problema identificando o auto-vetor normalizado do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}(x)$ com a quadrivelocidade do fluido e o seu auto-valor com a densidade de energia,

$$T^{\mu}_{\nu} u^{\nu} = \epsilon u^{\mu}. \tag{2.9}$$

Usando essa quadrivelocidade, podemos calcular a densidade bariônica própria da seguinte forma:

$$n_B = j^{\mu}_B u_{\mu} \tag{2.10}$$

e, analogamente, as outras densidades. Por meio deste procedimento forçamos um estado de equilíbrio térmico local, conservando a densidade de energia própria do sistema.

2.3 Equações de estado

Nos dias atuais é amplamente aceita a exitência de uma fase de plasma de quarks e gluons em colisões nucleares de alta energia, como aquelas realizadas no RHIC. Em outras palavras, quando a matéria formada na colisão alcançar o estado de equilíbrio térmico local, parte dela estará na fase hadrônica e parte na fase de plasma de quarks e gluons. Conforme a matéria se expandir e se tornar mais fria, a fase de plasma sofrerá uma transição para a fase hadrônica (adotamos aqui uma transição de primeira ordem). Antes do fim do processo de expansão, toda a matéria estará na fase hadrônica. Diante deste quadro, vemos a necessidade de encontrar equações de estado para ambas as fases. Para isso, suporemos que cada fase é composta por uma mistura de gases ideais em equilíbrio térmico e químico[7]. Isso pode ser representado da seguinte forma:

$$p\left(T,\mu_B\right)=\sum_i p_i\left(T,\mu_i\right) \tag{2.11}$$

e

$$\mu_i=B_i\mu_B \tag{2.12}$$

onde $p\left(T,\mu_B\right)$ e μ_B são a pressão total e o potencial químico bariônico da mistura; $p_i\left(T,\mu_i\right)$, μ_i e B_i são, respectivamente, a pressão, o potencial químico e a carga bariônica da i-ésima componente da mistura.

No contexto do Ensemble Grande Canônico temos:

$$p_i\left(T,\mu_i\right)=\frac{\theta_i g_i}{\left(2\pi\right)^3\beta}\int ln\left(1+\theta_i e^{\beta\left(\mu_i-\varepsilon_i\left(\vec{k}\right)\right)}\right)d^3\vec{k} \tag{2.13}$$

e

[7] É feita também uma correção devido ao efeito de volume excluído[12, 13], análoga à correção de esfera dura de Van der Waals.

$$\varepsilon_i = \sqrt{k^2 + m_i^2} \tag{2.14}$$

onde $\hbar$=c=1, $\theta_i = \pm 1$ (+ para férmions, - para bósons), $\beta = \frac{1}{T}$ é o inverso da temperatura e g_i é o fator de degenerescência da i-ésima componente da mistura. É importante lembrar que, neste ensemble, a pressão como função da temperatura e do potencial químico é uma equação fundamental, ou seja, contem toda informação termodinâmica do sistema.

Para obtermos as equações de estado, devemos integrar 2.13 e usar as relações termodinâmicas:

$$n_i = \left(\frac{\partial p_i \left(T, \mu_i \right)}{\partial \mu_i} \right)_T , \tag{2.15}$$

$$\epsilon_i = - \left(\frac{\partial \left(\beta p_i \left(T, \mu_i \right) \right)}{\partial \beta} \right)_{\lambda_i} , \tag{2.16}$$

e

$$s_i = \beta \left(p_i + \epsilon_i - \mu_i n_i \right) . \tag{2.17}$$

Na relação 2.16, $\lambda_i = e^{\beta \mu_i}$ é chamada fugacidade.

Motivados pelas relações 2.11, 2.12 e 2.15 podemos definir a densidade bariônica da mistura como:

$$n_B \left(T, \mu_B \right) \equiv \frac{\partial p \left(T, \mu_B \right)}{\partial \mu_B} = \sum_i \frac{\partial p_i \left(T, \mu_i \right)}{\partial \mu_B} = \sum_i B_i \frac{\partial p_i \left(T, \mu_i \right)}{\partial \mu_i} = \sum_i B_i n_i \tag{2.18}$$

onde n_i é a densidade de partículas da i-ésima componente da mistura (relação 2.15).

Nas próximas seções integraremos 2.13 para a fase de plasma de quarks e gluons e para a fase hadrônica.

2.3.1 Fase hadrônica

Com exceção dos píons, a maioria das partículas hadrônicas e de ressonância[8] podem ser bem aproximadas pelo limite de Boltzmann (veja apêndice B). Neste caso temos:

$$p_i\left(T,\mu_i\right) \approx \frac{g_i}{2\pi^2} e^{\frac{\mu_i}{T}} T^2 m_i^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \tag{2.19}$$

onde K_2 é a função de Bessel modificada e m_i é a massa do i-ésimo tipo de partícula. A introdução das partículas de ressonância é entendida como um meio efetivo de levar em conta as interações entre os hadrons[3]. No caso de um gás de píons ($\theta_\pi = -1$ e $\mu_\pi = 0$), a integração de 2.13 leva à seguinte expressão[9]:

$$p_\pi\left(T\right) = \frac{g_\pi}{2\pi^2} T^2 m_\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\left(1+l\right)\right)}{\left(1+l\right)^2}. \tag{2.20}$$

Usando as relações 2.12, 2.19 e 2.20, a pressão da fase hadrônica é dada, aproximadamente, por:

$$p_H\left(T,\mu_B\right) \approx \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} e^{\frac{B_i\mu_B}{T}} T^2 m_i^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) + \frac{g_\pi}{2\pi^2} T^2 m_\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_2\left(\frac{m_\pi}{T}\left(1+l\right)\right)}{\left(1+l\right)^2}. \tag{2.21}$$

2.3.2 Plasma de quarks e gluons

Para introduzir as equações de estado do plasma de quarks e gluons usaremos o modelo de sacolas (MIT *Bag Models*). De acordo com ele, a pressão do gás de quarks e gluons é contrabalanceada pela pressão do vácuo B, ou seja,

[8] Partículas de ressonância são partículas que decaem por meio da interação forte[14]. Apresentam um tempo de vida tão curto $\left(\sim 10^{-23}s\right)$ que não podem ser observadas diretamente. A existência de tais partículas é deduzida a partir de ressonâncias na seção de choque dos hadrons em função da energia $\sigma_H\left(E\right)$.

$$p_{PQG}\left(T,\mu_B\right)=\sum_i p_i\left(T,\mu_i\right)-B. \tag{2.22}$$

Na somatória em 2.22 levaremos em conta apenas quarks u, d e gluons. Além disso, suporemos que a massa de repouso de cada quark seja desprezível, comparada à sua energia total[9]. Nestas condições, a pressão do plasma de quarks e gluons é dada, aproximadamente, por (veja apêndice C):

$$p_{PQG}\left(T,\mu_B\right)\approx\frac{\left(g_u\mu_u^4+g_d\mu_d^4\right)}{24\pi^2}+\frac{T^2\left(g_u\mu_u^2+g_d\mu_d^2\right)}{12}+\frac{7T^4\pi^2\left(g_u+g_d\right)}{360}+\frac{g_gT^4\pi^2}{90}-B. \tag{2.23}$$

As cargas bariônicas dos quarks u e d são iguais ($B_u=B_d=\frac{1}{3}$). Portanto, de acordo com a relação 2.12, vemos que

$$\mu_u=\mu_d=\frac{1}{3}\mu_B. \tag{2.24}$$

Além disso,

$$g_u=g_d=2\left(spin\right)\times3\left(cores\right) \tag{2.25}$$

e

$$g_g=2\left(spin\right)\times8\left(cores\right). \tag{2.26}$$

Substituindo 2.24, 2.25 e 2.26 em 2.23 encontramos, finalmente, que

$$p_{PQG}\left(T,\mu_B\right)\approx\frac{\mu_B^4}{162\pi^2}+\frac{T^2\mu_B^2}{9}+\frac{37}{90}\pi^2T^4-B. \tag{2.27}$$

[9]Quarks estranhos podem ser incluídos nesta fase mas, neste caso, não podemos desprezar sua massa de repouso.

2.3.3 Diagrama de fases

De modo geral, na região de coexistência das fases, devemos impor equilíbrio térmico, químico e mecânico[15]. Lembrando que as duas primeiras condições já estão satisfeitas em nosso tratamento, resta-nos impor a seguinte igualdade:

$$p_H\left(T,\mu_B\right) = p_{PQG}\left(T,\mu_B\right). \tag{2.28}$$

A equação 2.28 define uma curva que divide o plano (μ_B, T) em duas regiões, como pode ser visto na figura 2.2. A região onde $p_H\left(T,\mu_B\right) > p_{PQG}\left(T,\mu_B\right)$ é a fase hadrônica e a região onde $p_H\left(T,\mu_B\right) < p_{PQG}\left(T,\mu_B\right)$ é a fase de plasma. Neste diagrama, ambas as fases estão em contato através da curva de transição de fase 2.28.

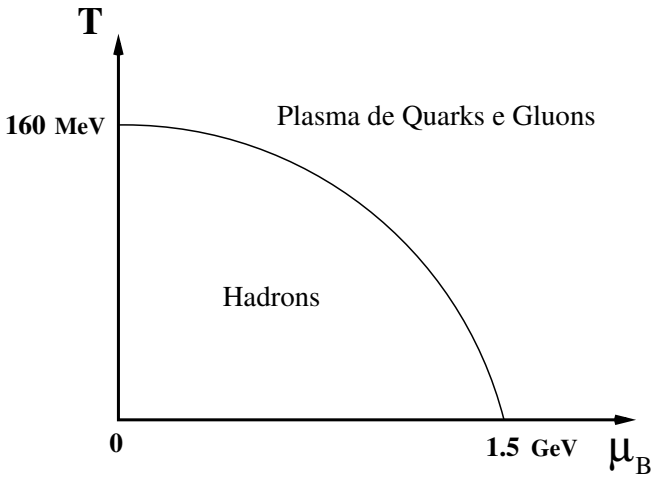

Figura 2.2: Ilustração do diagrama de fases no plano (μ_B, T).

Um outro diagrama pode ser construído se mapearmos o plano (μ_B, T) no plano (n_B, s) através das relações 2.12, 2.17 e 2.18[10]. Este diagrama encontra-se na figura 2.3. Neste caso, a fase hadrônica (região com pequenos valores de s e n_B) não está em contato com a

[10]Este mapeamento é necessário porque as relações 2.17 e 2.18 não são convenientes para fazermos cálculos em hidrodinâmica. De fato, as variáveis que utilizamos nos cálculos são densidade de entropia e número bariônico e não temperatura e potencial químico.

fase de plasma (região com grandes valores de s e n_B), existindo entre elas uma região não mapeada. Esta é denominada fase mista. Para determinarmos quantidades termodinâmicas na fase mista devemos observar que cada ponto (μ_B, T) sobre a curva de transição de fase corresponde a dois pontos no plano (n_B, s): um localizado sobre o contorno da fase hadrônica $\left(n_B^H, s^H\right)$ e o outro localizado sobre o contorno da fase de plasma $\left(n_B^Q, s^Q\right)$.

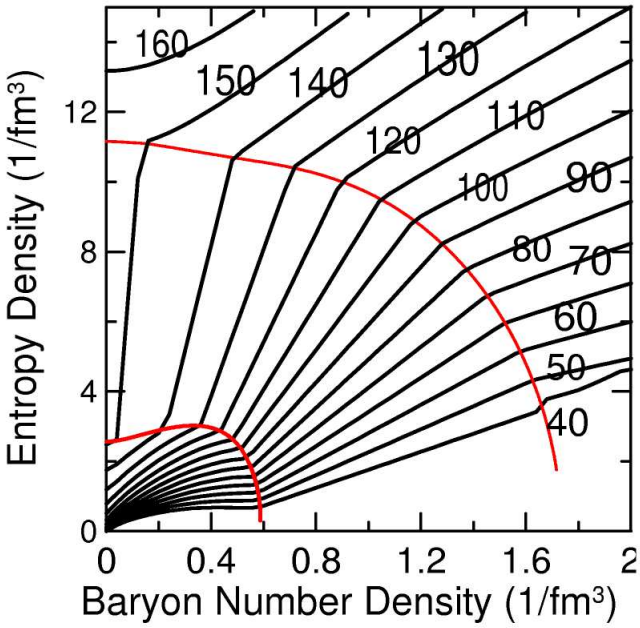

Figura 2.3: Diagrama de fases no plano (n_B, s)[3]. Algumas isotermas estão representadas com suas respectivas temperaturas. É possível ver a existência de três fases: fase hadrônica (região com pequenos valores de s e n_B), fase mista (região intermediária) e plasma de quarks e gluons (região com grandes valores de s e n_B).

Deste modo, para um ponto (n_B, s) na fase mista, definimos que:

$$s = \frac{s^Q - s^H}{n_B^Q - n_B^H}\left(n_B - n_B^H\right) + s^H. \tag{2.29}$$

A relação 2.29 estabelece um mapeamento da curva de transição de fase (localizada

no plano (μ_B, T)) na fase mista (localizada no plano (n_B, s)). Podemos generalizar esse procedimento para todas as densidades de grandezas extensivas, por exemplo, no caso da densidade de energia:

$$\epsilon = \frac{\epsilon^Q - \epsilon^H}{n_B^Q - n_B^H}\left(n_B - n_B^H\right) + \epsilon^H. \tag{2.30}$$

Nesta seção e nas anteriores, introduzimos os ingredientes necessários para a construção de uma equação de estado com transição de fase de primeira ordem, conectando a fase hadrônica com a fase de plasma de quarks e gluons. Esta equação, juntamente com as equações de conservação da energia e do momento 2.1 e do número bariônico 2.4, determinam a evolução dinâmica do fluido a partir de condições iniciais pré-estabelecidas.

2.3.4 Ponto crítico

Recentes estudos de QCD na rede mostram que a curva de transição de fase 2.28 tem um ponto crítico, de modo que, na região de pequeno número bariônico a transição é do tipo "crossover"[16] (veja a figura 2.4).

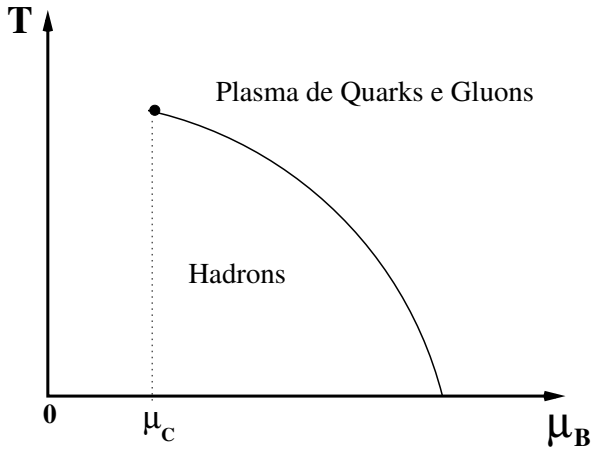

Figura 2.4: Ilustração do diagrama de fases no plano (μ_B, T) com ponto crítico.

Com a finalidade de estudar os efeitos da presença ou ausência de ponto crítico nas

equações da hidrodinâmica, introduzimos a seguinte equação de estado, simulando a presença de ponto crítico [5, 6]:

$$(P - P_Q)(P - P_H) = \delta(\mu_B) \tag{2.31}$$

onde

$$\delta(\mu_B) = \delta_0 \exp\left[-(\mu_B/\mu_c)^2\right]. \tag{2.32}$$

Na relação 2.31, P_Q é a pressão da fase de plasma e P_H é a pressão da fase hadrônica. Na relação 2.32, δ_0 é uma constante e μ_c é, aproximadamente, o potencial químico crítico. Resolvendo a equação 2.31 e usando as relações termodinâmicas 2.16, 2.17 e 2.18, temos:

$$P = \lambda P_H + (1-\lambda) P_Q + \frac{2\delta}{\sqrt{(P_Q - P_H)^2 + 4\delta}}, \tag{2.33}$$

$$n_B = \lambda n_H + (1-\lambda) n_Q - \frac{2(\mu_B/\mu_c^2)\delta}{\sqrt{(P_Q - P_H)^2 + 4\delta}}, \tag{2.34}$$

$$\epsilon = \lambda \epsilon_H + (1-\lambda)\epsilon_Q - \frac{2\left[1 + (\mu_B/\mu_c)^2\right]\delta}{\sqrt{(P_Q - P_H)^2 + 4\delta}} \tag{2.35}$$

e

$$s = \lambda s_H + (1-\lambda) s_Q \tag{2.36}$$

onde

$$\lambda \equiv \frac{1}{2}\left[1 - (P_Q - P_H)/\sqrt{(P_Q - P_H)^2 + 4\delta}\right]. \tag{2.37}$$

Na figura 2.5 encontramos a densidade de energia (relação 2.35), a densidade de entro-

pia (relação 2.36) e a pressão (relação 2.33), dadas em função da temperatura, para três valores de potencial químico. Os gráficos com linha pontilhada correspondem à equação de estado sem ponto crítico ($\delta_0 = 0$). Neste caso, as quantidades extensivas apresentam descontinuidade na temperatura de transição. Os gráficos com linha contínua correspodem à equação de estado com ponto crítico ($\delta_0 \neq 0$). Nestes, a transição é contínua e lisa na região de pequeno número bariônico ($\mu_B \approx 0$). Note que conforme o potencial químico aumenta e, portanto, $\delta \to 0$, recuperamos a transição de primeira ordem.

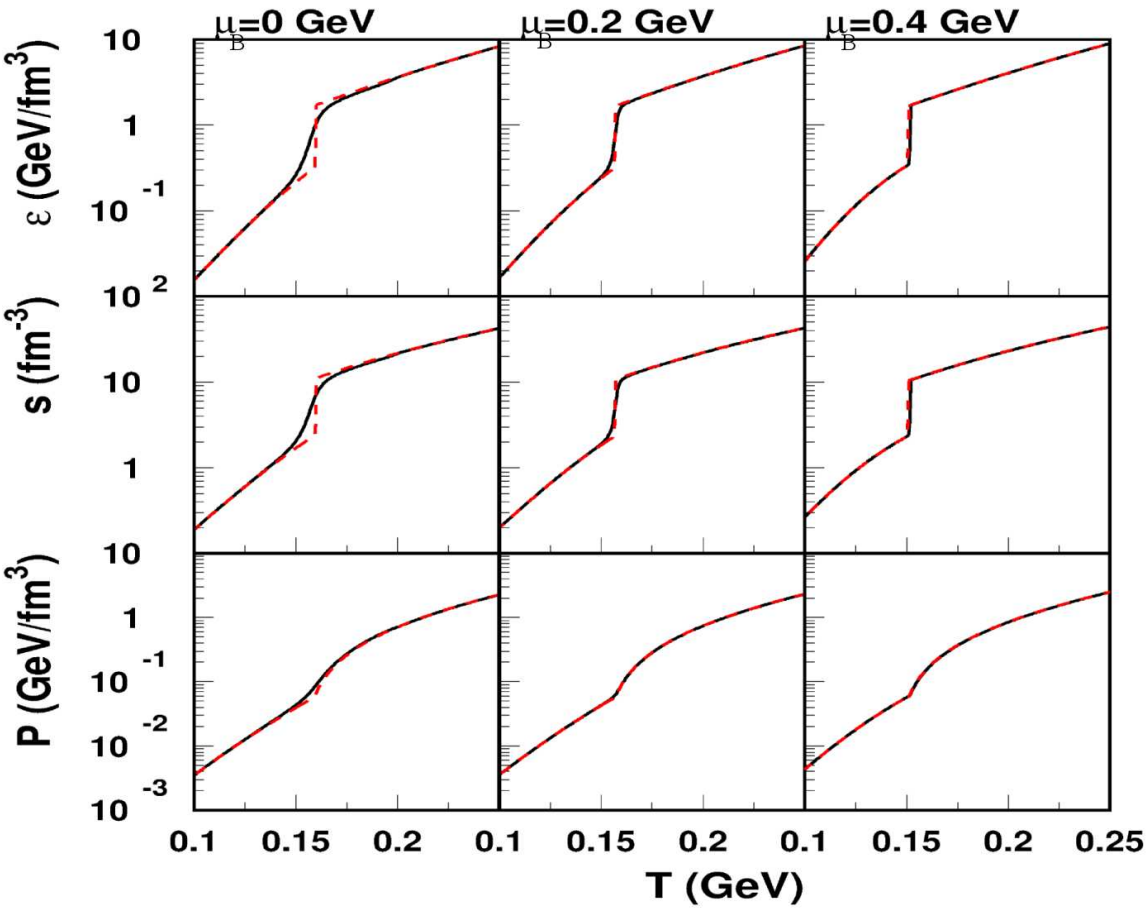

Figura 2.5: Gráficos de $\epsilon\,(T)$, $s\,(T)$ e $P\,(T)$ obtidos por meio da equação de estado com ponto crítico (linha contínua) e sem ponto crítico (linha pontilhada)[5, 6].

Na figura 2.6 mostramos a razão s/ϵ e a pressão, dadas em função da densidade de energia, para três valores de potencial químico. Vemos nesta figura que na região de potencial químico nulo ($\mu_B \approx 0$), a densidade de entropia fornecida pela equação de estado com ponto crítico é maior que a densidade de entropia fornecida pela equação de estado sem ponto crítico (para alguns valores de ϵ). Por conta disso, o uso da equação de estado com ponto crítico acarreta um aumento do número de partículas produzidas[11][6].

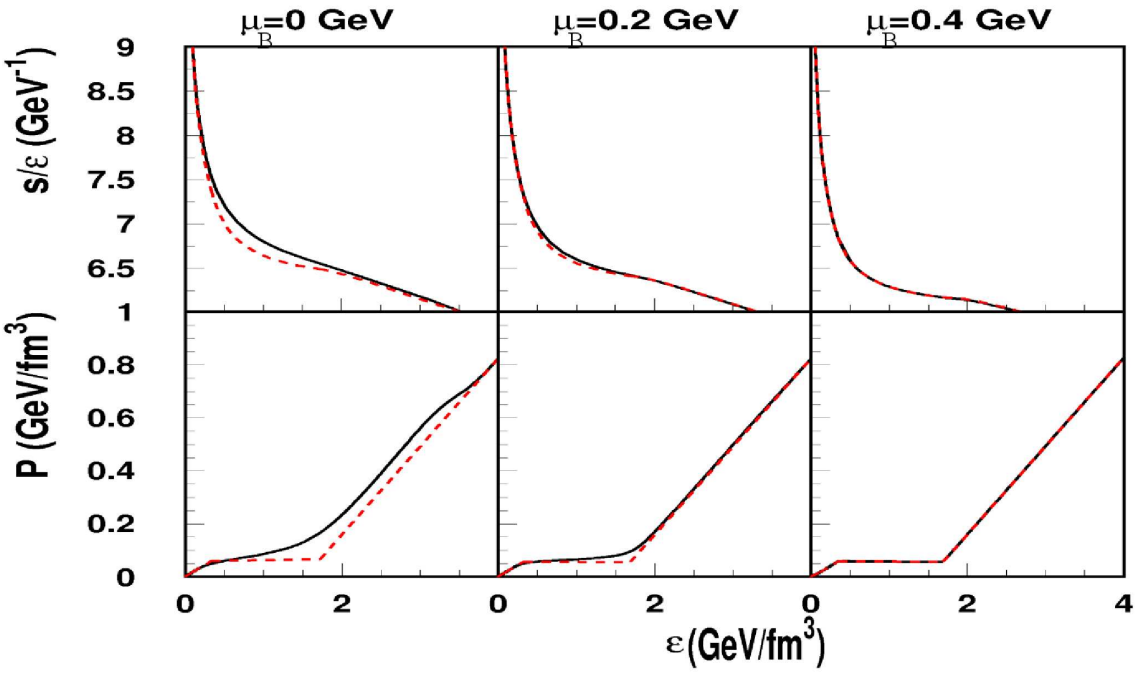

Figura 2.6: Gráficos de $\frac{s}{\epsilon}(\epsilon)$ e $P(\epsilon)$ obtidos por meio da equação de estado com ponto crítico (linha contínua) e sem ponto crítico (linha pontilhada)[5, 6]. Note que conforme o potencial químico aumenta as curvas tornam-se indistingüíveis.

Devemos observar também que, na região onde $\mu_B \approx 0$, a expansão do fluido é maior quando utilizamos a equação de estado com ponto crítico. Isso ocorre porque, nesta região, a pressão fornecida pela equação de estado com ponto crítico não é constante em nenhum

[11] Os píons correspondem a grande maioria das partículas criadas numa colisão nuclear relativística e, como mencionamos na seção 2.1, a densidade de píons é, aproximadamente, proporcional à densidade de entropia (relação 2.6).

intervalo de densidade de energia (figura 2.6 (linha contínua) e $\mu_B = 0$). Por conta disso, a expansão do fluido ocorre sempre de forma acelerada. Por outro lado, a pressão fornecida pela equação de estado sem ponto crítico é constante num certo intervalo de densidade de energia (linha pontilhada). Conseqüentemente, neste intervalo, a expansão do fluido ocorre com velocidade constante.

Na seção 5.5, veremos como a escolha da equação de estado, com ou sem ponto crítico, pode afetar o fluxo elíptico.

2.4 Mecanismos de desacoplamento

Até o momento, discutimos as condições iniciais e a evolução hidrodinâmica da matéria formada em colisões nucleares de alta energia. Nesta seção, discutiremos como as partículas são emitidas a partir do fluido em expansão, ou seja, o chamado processo de desacoplamento. A seguir, descreveremos dois mecanismos de desacoplamento: emissão com temperatura fixa e emissão contínua.

No capítulo 5 discutiremos como a escolha do mecanismo de desacoplamento afeta a distribuição de partículas em função do momento transversal (seção 5.1) e o fluxo elíptico (seção 5.6).

2.4.1 Emissão com temperatura fixa

Este mecanismo de desacoplamento é descrito pela fórmula de Cooper-Frye[17], que fornece a distribuição invariante de momento como sendo

$$E\frac{dN}{d^3\vec{k}} = \frac{g}{(2\pi)^3}\int_\Sigma \frac{k^\mu d\sigma_\mu}{\exp\left[\left(k^\mu u_\mu\left(x\right) - \mu\left(x\right)\right)/T\left(x\right)\right] \mp 1}. \tag{2.38}$$

Na fórmula 2.38, x é um ponto do espaço-tempo, Σ é uma hipersuperfície de tempera-

tura constante, $d\sigma_\mu$ é um elemento desta hipersuperfície e g é o fator de degenerescência da partícula em consideração. O sinal positivo está associado aos férmions e o negativo aos bósons. A hipersuperfície Σ é obtida através da condição:

$$T(x) = T_d \tag{2.39}$$

onde T_d é a temperatura de desacoplamento[12].

O ponto básico da abordagem de Cooper-Frye é que, antes de atravessar a hipersuperfície Σ, as partículas têm comportamento hidrodinâmico e depois de atravessá-la tornam-se repentinamente livres, viajando inercialmente até os detectores. Neste mecanismo, as partículas desacopladas carregam uma memória das condições do fluido, no ponto da hipersuperfície de onde foram emitidas.

2.4.2 Emissão contínua

Neste mecanismo de desacoplamento é assumido que, em cada ponto do espaço-tempo x, cada partícula do fluido tem uma probabilidade de escape, dada por[18, 19]:

$$\mathcal{P}(x,k) = \exp\left[-\int_\tau^\infty \rho\sigma v d\tau'\right], \tag{2.40}$$

onde ρ é a densidade de partículas do fluido, σ é a seção de choque da partícula em consideração e v é a velocidade média desta partícula em relação às partículas do meio. A integral em 2.40 está escrita no sistema próprio da partícula, com τ (e τ') indicando o tempo[13]. Com isso, a função de distribuição $f(x,k)$, do sistema em expansão, tem duas componentes, uma correspondendo à parte do fluido que já está livre e outra à parte que ainda interage, ou seja,

[12]Na referência [3] se discute como essa temperatura pode ser estimada.
[13]Na verdade, a probabilidade $\mathcal{P}(x,k)$ é um invariante e pode ser calculada em qualquer referencial.

$$f(x,k) = f_{livre}(x,k) + f_{int}(x,k). \tag{2.41}$$

Podemos escrever a parte livre da seguinte forma:

$$f_{livre}(x,k) = \mathcal{P} f(x,k) = \frac{\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}} f_{int}(x,k). \tag{2.42}$$

Supondo que todas as partículas interagentes estão termalizadas, temos

$$f_{int}(x,k) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\left(k^\mu u_\mu(x) - \mu(x)\right)/T(x)\right] \mp 1}, \tag{2.43}$$

onde o sinal positivo corresponde aos férmions e o negativo aos bósons.

A fórmula para o espectro de partícula livre é dada por:

$$E\frac{dN}{d^3\vec{k}} = \int_{\sigma_0} f_{livre}(x_0,k)\, k^\mu d\sigma_\mu + \int \partial_\mu \left[k^\mu f_{livre}(x,k)\right] d^4x, \tag{2.44}$$

onde a integral de superfície corresponde às partículas que já estavam livres no tempo inicial e a integral de volume deve ser calculada na região do espaço-tempo ocupada pelo fluido. A função de distribuição $f_{livre}(x,k)$ é obtida a partir das relações 2.42, 2.40 e 2.43.

Uma vez que as partículas podem ser emitidas em diferentes estágios da expansão do fluido, é razoável esperar que os observáveis, obtidos através da emissão contínua, apresentem diferenças em relação aqueles obtidos através da fórmula de Cooper-Frye. Neste último mecanismo, as partículas com grande momento transversal p_t são emitidas após uma longa aceleração do fluido. No caso da emissão contínua, muitas partículas com p_t grande são emitidas no início da expansão, quando a matéria está muito quente.

Na seção 3.1 discutiremos como ambos os mecanismos de desacoplamento são implementados no programa SPheRIO através do formalismo das partículas SPH.

Capítulo 3

Métodos numéricos

Encontrar soluções analíticas para as equações da hidrodinâmica tem se mostrado possível somente em casos onde existe alto grau de simetria aliado ao uso de uma equação de estado muito particular e limitada[3]. Conseqüentemente, dependemos de métodos numéricos quando estamos interessados no estudo de situações onde existe pouca simetria e grande riqueza de fenômenos, como é o caso das colisões nucleares de alta energia, realizadas no RHIC.

Como mencionado no capítulo anterior, os ingredientes básicos do modelo hidrodinâmico, isto é, condições iniciais, equação de estado e mecanismo de desacoplamento, não são bem conhecidos. Por conta disso, não procuramos soluções extremamente precisas para as equações da hidrodinâmica, mas soluções aproximadas que caracterizem suficientemente bem a dinâmica do fluido, dadas as condições iniciais e equação de estado. Um método numérico que satisfaz esse requisito é o método SPH[1]. Este método foi aplicado inicialmente em problemas de astrofísica [20]. Sua extensão a colisões nucleares de alta energia pode ser feita através da formulação lagrangiana da hidrodinâmica [1]. Tal formulação é dada pela ação [21]:

[1] Smoothed particle hydrodynamics

$$I = \int \left[-\epsilon \left(n_B, s\right)\right] d^4x \tag{3.1}$$

e pelas equações de vínculo:

$$\partial_\nu \left(n_B u^\nu\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$\partial_\nu \left(s u^\nu\right) = 0 \tag{3.3}$$

e

$$u^\nu u_\nu = 1. \tag{3.4}$$

Na equação 3.1, ϵ é a densidade de energia própria do fluido. As equações 3.2 e 3.3 representam, como sabemos, a conservação do número bariônico e da entropia. Na relação 3.4 temos a condição de normalização da quadrivelocidade do fluido. A aplicação do princípio variacional à ação 3.1, sob vínculos dados pelas equações 3.2, 3.3 e 3.4, leva às equações da hidrodinâmica 2.1 e 2.3 (veja apêndice D).

A idéia básica do método SPH é parametrizar a densidade das grandezas extensivas da seguinte forma[2]:

$$a^* \left(\vec{r}, t\right) = \sum_i \alpha_i W \left(\vec{r} - \vec{r}_i \left(t\right); h\right) \tag{3.5}$$

onde $a^* \left(\vec{r}, t\right)$ é a densidade de alguma grandeza extensiva, vista de um referencial fixo, α_i são constantes e $W \left(\vec{r} - \vec{r}_i \left(t\right); h\right)$ é uma função positiva[3] com as seguintes propriedades:

[2]As quantidades indicadas com (*) são dadas em relação a um referencial fixo.
[3]Em geral supomos que W é uma função par.

$$\int W\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right);h\right)d^3\vec{r}=1 \tag{3.6}$$

e

$$\lim_{h\to 0} W\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right);h\right)=\delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right)\right). \tag{3.7}$$

A quantidade total da grandeza extensiva A é obtida pela integração da equação 3.5 em todo o espaço, ou seja,

$$A^{(tot)}=\int a^*\left(\vec{r},t\right)d^3\vec{r}=\sum_i \alpha_i. \tag{3.8}$$

Olhando a relação 3.8, fica claro que trocamos o fluido contínuo por um conjunto de "partículas", onde cada uma delas carrega uma porção α_i da quantidade extensiva A. Chamaremos essas "partículas" de partículas SPH.

Outra propriedade importante da parametrização 3.5 é que ela implica na conservação de A. Para ver isso, note que

$$\frac{\partial}{\partial t}a^*\left(\vec{r},t\right)=-\sum_i \alpha_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\nabla W\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right);h\right)=-\nabla\cdot\sum_i \alpha_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}W\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right);h\right). \tag{3.9}$$

Identificando a velocidade da partícula SPH, $\vec{v_i}=\frac{d\vec{r}_i}{dt}$, com a velocidade do fluido no ponto $\vec{r}_i\left(t\right)$, podemos definir a densidade de corrente de A da seguinte forma:

$$\vec{J_A}=\sum_i \alpha_i\vec{v_i}W\left(\vec{r}-\vec{r}_i\left(t\right);h\right). \tag{3.10}$$

Deste modo, a equação 3.9 torna-se:

$$\frac{\partial a^*}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_A. \tag{3.11}$$

Em nosso tratamento de colisões nucleares de alta energia, as quantidades extensivas conservadas são número bariônico e entropia. Portanto, temos que

$$n_B^* (\vec{r}, t) = \sum_i \nu_i W (\vec{r} - \vec{r}_i (t) ; h) \tag{3.12}$$

e

$$s^* (\vec{r}, t) = \sum_i \beta_i W (\vec{r} - \vec{r}_i (t) ; h) \tag{3.13}$$

onde ν_i e β_i são as porções de número bariônico e de entropia, carregadas pela i-ésima partícula SPH. De acordo com a equação 3.11 as parametrizações 3.12 e 3.13 satisfazem às respectivas equações de conservação 3.2 e 3.3.

Definimos a quadrivelocidade da i-ésima partícula SPH da seguinte forma:

$$u_i = (\gamma_i, \gamma_i \vec{v_i}) \tag{3.14}$$

onde

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2}} \tag{3.15}$$

é o i-ésimo fator de Lorentz. Com isso a equação 3.4 é satisfeita no sentido que $(u^\nu u_\nu)_i = 1$.

Nosso próximo passo é parametrizar a densidade de energia própria ϵ. Isso pode ser feito da seguinte forma:

$$\epsilon (\vec{r}, t) = \sum_i \xi_i W (\vec{r} - \vec{r_i} (t) ; h) \tag{3.16}$$

onde

$$\xi_i = \frac{E_i}{\gamma_i}. \tag{3.17}$$

Na relação 3.17, E_i é a energia própria (ou energia interna) da i-ésima partícula SPH. De forma análoga a um elemento de fluido, a energia interna de uma partícula SPH não é constante no tempo. Sua variação é dada por:

$$\Delta E_i = -p_i \Delta V_i \tag{3.18}$$

onde

$$V_i \equiv \frac{\beta_i}{s_i} = \frac{\beta_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \tag{3.19}$$

e

$$s_i^* = \sum_j \beta_j W\left(\vec{r_i} - \vec{r_j}; h\right). \tag{3.20}$$

Na relação 3.18, p_i é a pressão e V_i é o "volume" da i-ésima partícula SPH. Na relação 3.20, s_i^* é a densidade de entropia calculada na posição $\vec{r_i}$. Note que a parametrização 3.16 não satisfaz à equação de continuidade 3.11, uma vez que, ξ_i não é constante no tempo. Este fato é razoável pois a energia interna de um fluido em movimento não é uma quantidade conservada. Somente a energia total é conservada.

Substituindo 3.16 em 3.1, encontramos que

$$I_{SPH} = -\int \sum_i \frac{E_i}{\gamma_i} dt. \tag{3.21}$$

O movimento das partículas SPH deve ser tal que a ação 3.21 seja um extremo. Portanto, as equações de movimento destas partículas são obtidas através da condição:

$$\delta I_{SPH} = 0. \tag{3.22}$$

Na equação 3.22, devemo-nos lembrar que as parametrizações 3.12 e 3.13 já satisfazem às equações de conservação. Conseqüentemente, não precisamos incorporar os vínculos ao procedimento variacional, como é feito no caso geral (veja apêndice D). Substituindo 3.21 em 3.22, temos:

$$\delta I_{SPH} = \int \sum_i \left[\frac{p_i \left(\delta V_i\right) \gamma_i + E_i \left(\delta \gamma_i\right)}{\gamma_i^2} \right] dt = 0 \tag{3.23}$$

onde usamos que $\delta E_i = -p_i \delta V_i$.

Levando em conta que

$$\delta \gamma_i = \vec{v_i} \cdot \delta \vec{v_i} \gamma_i^3 \tag{3.24}$$

e

$$\delta V_i = V_i \left(\frac{\delta \gamma_i}{\gamma_i} - \frac{\delta s_i^*}{s_i^*} \right) = -\frac{\beta_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \left\{ -\gamma_i^2 \vec{v_i} \cdot \delta \vec{v_i} + \frac{1}{s_i^*} \left[\sum_j \beta_j \left(\delta \vec{r_i} - \delta \vec{r_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \right\}, \tag{3.25}$$

onde

$$W_{ij} \equiv W \left(\vec{r_i} - \vec{r_j}; h \right), \tag{3.26}$$

a equação 3.23 torna-se:

$$\int \sum_i \vec{v_i} \cdot \delta \vec{v_i} \gamma_i \beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \right) dt - \int \sum_i \frac{\beta_i p_i}{\left(s_i^*\right)^2} \left[\sum_j \beta_j \left(\delta \vec{r_i} - \delta \vec{r_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] dt = 0. \tag{3.27}$$

A integral da esquerda pode ser feita por partes, assim temos:

$$\int \sum_i \vec{v_i} \cdot \delta\vec{v_i} \gamma_i \beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \right) dt = - \int \sum_i \frac{d}{dt} \left[\beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \right) \gamma_i \vec{v_i} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt. \tag{3.28}$$

No caso da integral da direita, em 3.27, procedemos da seguinte forma:

$$\int \sum_i \frac{\beta_i p_i}{(s_i^*)^2} \left[\sum_j \beta_j \left(\delta\vec{r_i} - \delta\vec{r_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] dt =$$

$$= \int \sum_i \left[\sum_j \frac{p_i \beta_i \beta_j}{(s_i^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt - \int \sum_i \sum_j \frac{p_i \beta_i \beta_j}{(s_i^*)^2} \left(\nabla_i W_{ij} \right) \cdot \delta\vec{r_j} dt \tag{3.29}$$

Usando o fato que $\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij}$, temos:

$$\int \sum_i \sum_j \frac{p_i \beta_i \beta_j}{(s_i^*)^2} \left(\nabla_i W_{ij} \right) \cdot \delta\vec{r_j} dt = - \int \sum_j \left[\sum_i \frac{p_i \beta_i \beta_j}{(s_i^*)^2} \nabla_j W_{ij} \right] \cdot \delta\vec{r_j} dt =$$

$$= - \int \sum_i \left[\sum_j \frac{p_j \beta_j \beta_i}{(s_j^*)^2} \nabla_i W_{ji} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt. \tag{3.30}$$

Substituindo 3.30 em 3.29 e impondo a condição $W_{ij} = W_{ji}$, encontramos que

$$\int \sum_i \frac{\beta_i p_i}{(s_i^*)^2} \left[\sum_j \beta_j \left(\delta\vec{r_i} - \delta\vec{r_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] dt =$$

$$= \int \sum_i \left[\sum_j \frac{p_i \beta_i \beta_j}{(s_i^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt + \int \sum_i \left[\sum_j \frac{p_j \beta_j \beta_i}{(s_j^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt =$$

$$\int \sum_i \left[\sum_j \beta_i \beta_j \left(\frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta\vec{r_i} dt. \tag{3.31}$$

Substituindo 3.28 e 3.31 em 3.27 temos que

$$\int \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \right) \gamma_i \vec{v_i} \right] + \sum_j \beta_i \beta_j \left(\frac{p_i}{\left(s_i^*\right)^2} + \frac{p_j}{\left(s_j^*\right)^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right\} \cdot \delta \vec{r_i} dt = 0. \quad (3.32)$$

Uma vez que as variações $\delta \vec{r_i}$ são arbitrárias, encontramos, finalmente, que:

$$\frac{d}{dt} \left[\beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{\gamma_i^{-1} s_i^*} \right) \gamma_i \vec{v_i} \right] = - \sum_j \beta_i \beta_j \left(\frac{p_i}{\left(s_i^*\right)^2} + \frac{p_j}{\left(s_j^*\right)^2} \right) \nabla_i W_{ij}. \quad (3.33)$$

Vemos, na equação 3.33, que trocamos um sistema de equações diferenciais parciais por um sistema de equações ordinárias.

Na apresentação do método SPH feita aqui, utilizamos a métrica de Minkowski $g^{\mu\nu} = diag\,(-1, 1, 1, 1)$. Entretanto, podemos estender o método a um sistema de coordenadas generalizado [1]. Em particular, o sistema de coordenadas conveniente para colisões nucleares de alta energia é dado por:

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (3.34)$$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{t + z}{t - z} \right) \quad (3.35)$$

e

$$\vec{r}_T = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Nestas coordenadas a equação 3.33 torna-se:

$$\frac{d}{d\tau} \vec{\pi}_i = - \frac{1}{\tau} \sum_j \beta_i \beta_j \left(\frac{p_i}{\left(s_i^*\right)^2} + \frac{p_j}{\left(s_j^*\right)^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (3.37)$$

onde

$$\vec{\pi} = \tau^2 \beta\gamma \left(\frac{p+\epsilon}{s}\right) \frac{d\eta_s}{d\tau} \hat{\eta_s} + \beta\gamma \left(\frac{p+\epsilon}{s}\right) \frac{d\vec{r}_T}{d\tau} \tag{3.38}$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_T^2 - \tau^2 v_{\eta_s}^2}}. \tag{3.39}$$

Na relação 3.38, $\hat{\eta_s}$ é o versor na direção η_s. Na referência [1] o método foi aplicado a situações em que a solução analítica é conhecida. Neste caso, apresentou resultados satisfatórios e eficiência com relação ao tempo de cálculo.

3.1 Distribuição de momento na representação SPH

Na representação SPH, a distribuição de momento 2.38 é dada por:

$$E\frac{dN}{d^3\vec{k}} = \sum_j \frac{\beta_j n_{j\mu} k^\mu}{s_j \left| n_{j\mu} u_j^\mu \right|} f\left(u_{j\mu} k^\mu, \mu_j\right), \tag{3.40}$$

onde a soma é feita sobre todas as partículas SPH, no ponto do espaço-tempo em que cada uma delas atravessa a hipersuperfície Σ, de temperatura constante. Na relação 3.40, $n_{j\mu}$ é a normal a essa hipersuperfície.

No caso do mecanismo de emissão contínua, existem algumas dificuldades, pois a probabilidade $\mathcal{P}$ depende do momento da partícula e das condições do fluido em tempos futuros, como pode ser visto na relação 2.40. Para implementar este mecanismo no programa SPheRIO, algumas aproximações são necessárias[3]. Primeiramente, tomamos $\mathcal{P}$ em média, isto é, $\mathcal{P}(x,k) \to \langle \mathcal{P}(x,k) \rangle \equiv \mathcal{P}(x)$. Deste modo $\mathcal{P}(x)$ pode ser pensado como a probabilidade de emissão de uma partícula SPH[4]. A partir da relação 2.40, temos que

[4]Quando dizemos que uma partícula SPH é emitida no ponto x_0 do espaço-tempo, isso significa que o

$$\mathcal{P}(x) = \exp\left[-\langle\sigma v\rangle \int_{\tau}^{\infty} \rho(\tau')\, d\tau'\right], \tag{3.41}$$

onde a integral é calculada na direção da velocidade da partícula SPH. Para as partículas SPH cuja velocidade aponta para fora do fluido, a densidade de partículas ρ, em função do tempo próprio, diminui rapidamente, conforme está ilustrado na figura 3.1.

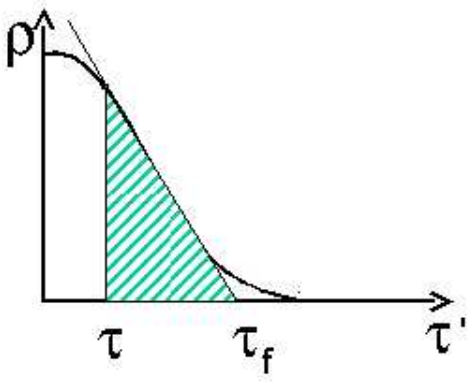

Figura 3.1: Densidade de partículas, em função do tempo próprio, para uma partícula SPH cuja velocidade aponta para fora do fluido.

Aproximando a integral em 3.41 pela área do triângulo (figura 3.1, região hachurada), temos:

$$\int_{\tau}^{\infty} \rho(\tau')\, d\tau' \approx \frac{1}{2}\frac{[\rho(\tau)]^2}{|d\rho/d\tau|}. \tag{3.42}$$

Usando a relação 2.6, podemos escrever que

$$\int_{\tau}^{\infty} \rho(\tau')\, d\tau' \approx \frac{1}{2}\alpha\frac{[s(\tau)]^2}{|ds/d\tau|}. \tag{3.43}$$

Substituindo 3.43 em 3.41, encontramos, finalmente, que

elemento de fluido localizado neste ponto emite suas partículas elementares de acordo com a distribuição térmica $f(u_\mu k^\mu(x_0), \mu(x_0), T(x_0))$. A cada ponto do espaço-tempo ocupado por uma partícula SPH está associado uma probabilidade de escape $\mathcal{P}(x)$.

$$\mathcal{P}(x,k) \rightarrow \mathcal{P}(x) = \exp\left[-\kappa \frac{[s(\tau)]^2}{|ds/d\tau|}\right] \tag{3.44}$$

onde

$$\kappa = \frac{1}{2}\alpha \langle \sigma v \rangle . \tag{3.45}$$

Embora aproximadamente, podemos calcular $\mathcal{P}$ em cada ponto do espaço-tempo. Note que quanto menor é o valor do parâmetro κ, maior a probabilidade de escape. Na seção 5.1, usaremos a distribuição de partículas em função do momento transversal para estimarmos este parâmetro.

A distribuição de momento 2.44, na representação SPH, é dada, também, pela relação 3.40, mas, neste caso, a soma é feita sobre as partículas SPH que são selecionadas de acordo com a probabilidade $\mathcal{P}$, dada pela relação 3.44. Aqui, a normal $n_{j\mu}$ aponta na direção do quadri-gradiente de $\mathcal{P}$. Este procedimento favorece a emissão de partículas SPH rápidas, cuja velocidade aponta para fora do fluido. Por conta disso, acreditamos que a principal característica do mecanismo de emissão contínua é preservada nesta aproximação.

Capítulo 4

Fluxo Elíptico

O parâmetro de fluxo elíptico v_2 é uma das medidas do comportamento coletivo da matéria criada em colisões nucleares de alta energia. Este observável pode ser pensado como um teste da hipótese de termalização da matéria. Para entendermos melhor o significado de v_2 devemos olhar a geometria da colisão. Na figura 4.1 (esquerda) temos uma ilustração idealizada de uma colisão aleatória de dois núcleos. Esta colisão ocorre com parâmetro de impacto $\vec{b}$ que está na direção do eixo Ox. O eixo da colisão é perpendicular ao plano da figura[1]. A região hachurada é a região de interpenetração dos núcleos e tem a forma espacial da matéria que é criada[2]. Nesta idealização suporemos que a distribuição inicial de matéria seja simétrica em relação ao plano de reação, como mostrado na figura 4.1 (esquerda). Suporemos, ainda, que o número de partículas criadas seja suficientemente grande, de modo que, a emissão de partículas ocorra, também, de forma simétrica em relação ao plano de reação da colisão. Com isso em mente, o ponto principal na discussão de v_2 pode ser colocado da seguinte forma: se o livre caminho médio entre as partículas que

[1]Define-se o plano de reação da colisão como o plano determinado pelo eixo da colisão (eixo z) e o parâmetro de impacto.

[2]Rigorosamente falando, os núcleos são compostos por um número finito de partículas. Conseqüentemente, a distribuição inicial de matéria formada em uma colisão aleatória não é, em geral, tão simétrica como aparece na figura 4.1 (esquerda). Veja, por exemplo, a figura 2.1 (esquerda). Na verdade, a figura apresentada é apenas uma idealização geométrica de uma colisão aleatória.

formam a matéria for suficientemente pequeno, podemos admitir um estado de equilíbrio térmico local. Deste modo, o gradiente de pressão entre os pontos O e A será maior que o gradiente de pressão entre os pontos O e B, ou seja, a força que impele a matéria a se expandir será maior na direção do parâmetro de impacto e menor na sua direção perpendicular (note que a distância $\overline{OA}$ é menor que a distância $\overline{OB}$ e a pressão em A é igual a pressão em B). Conseqüentemente, o número de partículas produzidas na direção do parâmetro de impacto será maior que o número de partículas produzidas na sua direção perpendicular. Na figura 4.1 (direita) mostramos um gráfico, em coordenadas polares, da distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ, que seria esperada nesta situação idealizada. Note que a coordenada radial ρ é $dN/d\phi$. Vemos que a distribuição é alongada na direção do parâmetro de impacto como conseqüência de dois fatores: (i) forma da distribuição inicial de matéria (figura 4.1 (esquerda), região hachurada), (ii) termalização desta matéria. Portanto, uma medida do alongamento de $dN/d\phi$, neste caso, em relação à direção do parâmetro de impacto, pode fornecer informação sobre a hipótese de existência de termalização. Uma medida deste alongamento pode ser feita expandindo $dN/d\phi$ em série de Fourier e verificando o peso da componente elíptica na expansão. Assim temos que

$$\frac{dN}{d\phi} = v_0 \left\{ 1 + \sum_n 2v_n^b \cos\left[n\left(\phi - \Phi_b\right)\right] + \sum_n 2v_n^{\prime b} \operatorname{sen}\left[n\left(\phi - \Phi_b\right)\right] \right\} \tag{4.1}$$

onde

$$v_n^b = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left[n\left(\phi - \Phi_b\right)\right] d\phi, \tag{4.2}$$

$$v_n^{\prime b} = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \operatorname{sen}\left[n\left(\phi - \Phi_b\right)\right] d\phi \tag{4.3}$$

e

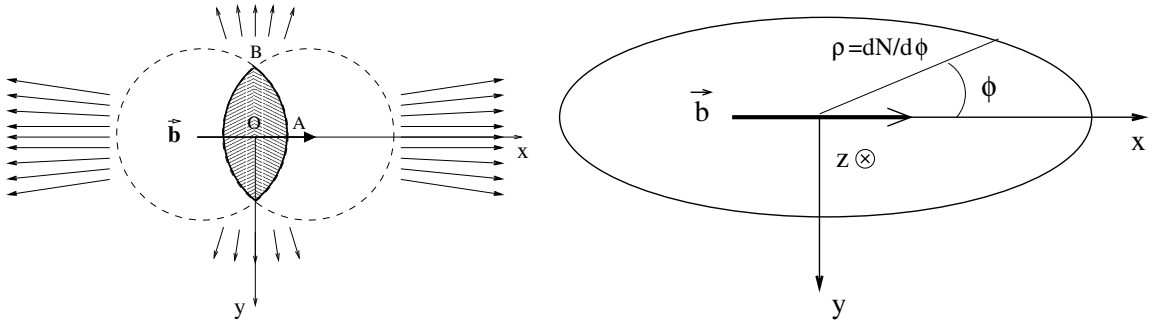

Figura 4.1: **[esquerda]** Ilustração de uma colisão aleatória de dois núcleos. O eixo da colisão é perpendicular ao plano da figura. A região hachurada é a região de interpenetração dos núcleos e tem a forma espacial da matéria criada. As setas indicam que o número de partículas criadas na direção do parâmetro de impacto é maior que o número de partículas criadas na sua direção perpendicular. **[direita]** Gráfico, em coordenadas polares, da distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ. A coordenada radial ρ é $dN/d\phi$. Se a matéria formada na colisão, que está ilustrada na figura da esquerda (região hachurada), atingir um estado de equilíbrio térmico local, então, $dN/d\phi$ terá uma forma alongada na direção do parâmetro de impacto, como está ilustrado no gráfico à direita.

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} d\phi = 2\pi v_0. \tag{4.4}$$

O índice b em v_n^b e $v_n^{'b}$ indica que a expansão 4.1 é feita em torno de Φ_b, que é o ângulo entre $\vec{b}$ e o eixo Ox (na figura 4.1 (esquerda) escolhemos $\Phi_b = 0$). Como supomos que as partículas são emitidas de forma simétrica em relação ao plano de reação, encontramos que $v_n^{'b} = 0$. A componente elíptica na expansão 4.1 é $v_2^b \cos\left[2\left(\phi - \Phi_b\right)\right]$, assim, definimos o parâmetro de fluxo elíptico v_2^b, a patir da relação 4.2, como sendo

$$v_2^b \equiv \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left[2\left(\phi - \Phi_b\right)\right] d\phi. \tag{4.5}$$

Em resumo, o parâmetro v_2^b dado em 4.5 é uma medida do alongamento de $dN/d\phi$ na direção do parâmetro de impacto.

Uma característica importante do fluxo elíptico é que ele depende fortemente da cen-

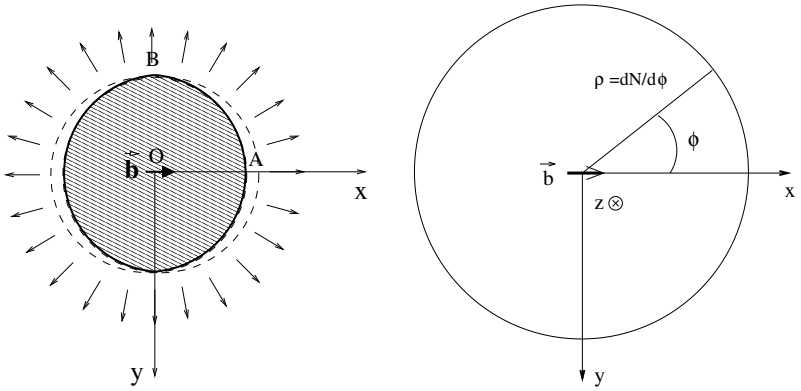

Figura 4.2: **[esquerda]** Ilustração de uma colisão central de dois núcleos ($b \approx 0$). O eixo de colisão é perpendicular ao plano da figura. As setas indicam que a distribuição azimutal de partículas é isotrópica. **[direita]** Gráfico, em coordenadas polares, de $dN/d\phi$ que seria consistente com a distribuição inicial de matéria (figura da esquerda, região hachurada).

tralidade da colisão[3]. Precisamente falando, quanto mais central for a colisão, menor será a intensidade do fluxo elíptico. Para entendermos isso, devemos olhar, novamente, a geometria da colisão. Na figura 4.2 (esquerda) temos uma ilustração de uma colisão central ($b \approx 0$). Neste caso, o gradiente de pressão entre os pontos O e A é igual ao gradiente de pressão entre os pontos O e B, ou melhor, o gradiente de pressão é isotrópico. Conseqüentemente, $dN/d\phi$ será também isotrópica, não apresentando, portanto, componente elíptica. Na figura 4.2 (direita) mostramos um gráfico de $dN/d\phi$ que seria esperado nesta situação.

Até o momento supomos uma situação idealizada em que a distribuição inicial de matéria tem uma forma simétrica em relação ao plano de reação, como mostrado nas figuras 4.1 (esquerda) e 4.2 (esquerda). Supomos, ainda, que o número de partículas criadas é suficientemente grande, de modo a garantir que a emissão de partículas é, também, simétrica em relação ao plano de reação da colisão. Entretanto, numa colisão realista de dois núcleos, ambas as hipóteses não são válidas. De fato, os núcleos são compostos por um

[3]A centralidade $\mathcal{C}$ da colisão é uma função de b. Usualmente estas grandezas estão relacionadas pela fórmula $\mathcal{C} = \frac{b^2}{4R^2}$, onde R é o raio do núcleo.

número finito de partículas. Conseqüentemente, a distribuição inicial de matéria não é, em geral, tão simétrica como aparece nas figuras 4.1 (esquerda) e 4.2 (esquerda). Além disso, os resultados experimentais do RHIC têm mostrado que o número de partículas criadas numa colisão típica de dois núcleos pesados é apenas da ordem de milhares. Portanto, numa situação realista não está garantido nenhum tipo de simetria em relação ao plano de reação da colisão. Outro fato relevante é que $dN/d\phi$ pode mudar de evento para evento, mesmo quando fixamos os parâmetros da colisão, como por exemplo, o parâmetro de impacto e a energia dos núcleos incidentes. Na figura 4.3 (esquerda) mostramos um gráfico de $dN/d\phi$ associado a uma colisão aleatória (periférica). Os cálculos foram feitos por meio do programa Nexus+SPheRIO. Nesta colisão usamos dois núcleos de ouro com energia incidente de 200 A GeV e parâmetro de impacto 8.84 fm. Note que $dN/d\phi$ apresenta uma forma alongada, de modo que, a densidade de partículas que escapam na direção do parâmetro de impacto é 60% maior que a densidade de partículas que escapam na sua direção perpendicular. Entretanto, como esperávamos, não existe simetria em relação ao plano de reação da colisão. Neste evento, o eixo de simetria está deslocado de um ângulo Ψ_2 em relação à direção do parâmetro de impacto[4]. Na figura 4.3 (direita) mostramos um gráfico de $dN/d\phi$ associado a uma colisão central. Nesta colisão utilizamos dois núcleos de ouro com energia incidente de 200 A GeV e parâmetro de impacto 0.15 fm. Note que, para este evento central, $dN/d\phi$ é aproximadamente isotrópica.

A simetria em relação ao plano de reação, discutida até o momento, pode ser recuperada se fizermos uma média de v_2^b sobre muitos eventos. Certamente, se fizermos várias colisões fixando a direção de $\vec{b}$ e tomarmos o valor médio de $dN/d\phi$ nestes eventos, então, a distribuição média obtida será simétrica em relação à direção de $\vec{b}$ que foi fixada. Com essa motivação escrevemos:

[4] Ψ_2 é o ângulo entre o eixo de simetria de $dN/d\phi$ (linha pontilhada) e o eixo Ox.

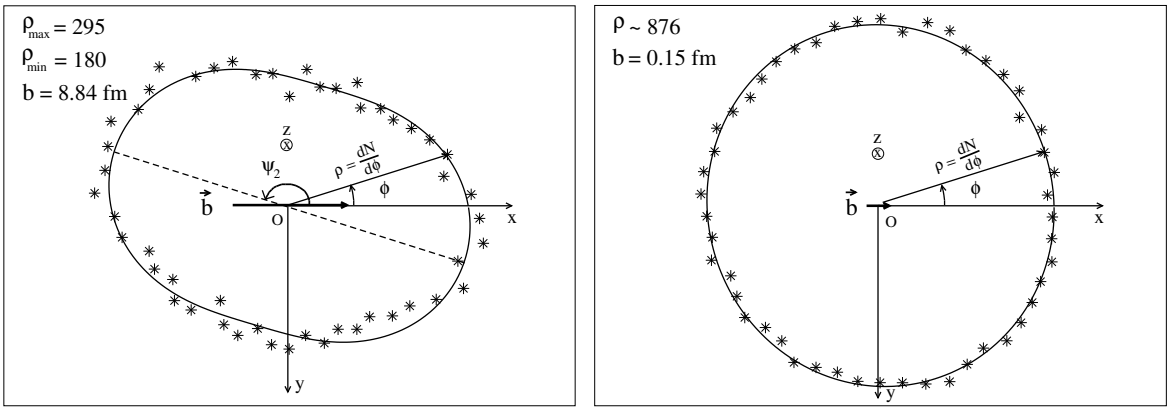

Figura 4.3: **[esquerda]** Gráfico, em coordenadas polares, de $dN/d\phi$ associado a uma colisão periférica (estrelas). Note que a coordenada radial ρ é $dN/d\phi$. Os cálculos foram feitos por meio do programa Nexus+SPheRIO. Nesta colisão utilizamos dois núcleos de ouro com energia incidente de $200\,A\,\mathrm{GeV}$ e parâmetro de impacto $8.84\,fm$, na direção do eixo Ox. A linha contínua é uma elipse ajustada aos pontos. **[direita]** Gráfico, em coordenadas polares, de $dN/d\phi$ associado a uma colisão central (estrelas). Utilizamos a mesma energia incidente e parâmetro de impacto de $0.15\,fm$. A linha contínua é uma circunferência ajustada aos pontos.

$$\left\langle \frac{dN}{d\phi} \right\rangle = \frac{1}{N_{ev}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j \tag{4.6}$$

onde

$$\left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j = (v_0)_j \left\{ 1 + \sum_n 2 \left(v_n^b \right)_j \cos\left[n \left(\phi - \Phi_b \right) \right] + \sum_n 2 \left(v_n'^b \right)_j \operatorname{sen}\left[n \left(\phi - \Phi_b \right) \right] \right\} \tag{4.7}$$

e N_{ev} é o número total de eventos. Substituindo 4.7 em 4.6 encontramos que

$$\left\langle \frac{dN}{d\phi} \right\rangle = \langle v_0 \rangle \left\{ 1 + \sum_n 2 \left\langle v_n^b \right\rangle \cos\left[n \left(\phi - \Phi_b \right) \right] + \sum_n 2 \left\langle v_n'^b \right\rangle \operatorname{sen}\left[n \left(\phi - \Phi_b \right) \right] \right\} \tag{4.8}$$

onde

$$\langle v_0 \rangle = \frac{1}{2\pi N_{ev}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j, \tag{4.9}$$

$$\left\langle v_n^b \right\rangle = \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \left(v_n^b \right)_j, \tag{4.10}$$

$$\left\langle v_n'^b \right\rangle = \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \left(v_n'^b \right)_j \tag{4.11}$$

e

$$N_j = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j d\phi. \tag{4.12}$$

Uma vez que $\langle dN/d\phi \rangle$ é simétrica em relação à direção do parâmetro de impacto, encontramos que $\left\langle v_n'^b \right\rangle = 0$ em 4.11. Como estamos interessados na componente elíptica da expansão, definimos, a partir das relações 4.5 e 4.10, o parâmetro de fluxo elíptico médio $\left\langle v_2^b \right\rangle$ como segue:

$$\left\langle v_2^b \right\rangle \equiv \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j \cos\left[2\left(\phi - \Phi_b \right) \right] d\phi. \tag{4.13}$$

A fórmula 4.13 pode ser usada como uma medida do alongamento médio de $dN/d\phi$ em relação à direção do parâmetro de impacto. Entretanto, existe um inconveniente, ou seja, ela não pode ser usada pelos experimentalistas. De fato, numa colisão de dois núcleos, o parâmetro de impacto e, portanto, Φ_b, é uma quantidade que não pode ser medida experimentalmente. Portanto, a fórmula 4.13 tem apenas utilidade teórica.

Os experimentalistas fazem a expansão de $dN/d\phi$ para cada evento da seguinte forma:

$$\frac{dN}{d\phi} = v_0 \left\{ 1 + \sum_n 2v_n^{obs} \cos\left[n\left(\phi - \Psi_n\right)\right] \right\} \tag{4.14}$$

onde

$$v_0 = \frac{N}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} d\phi, \tag{4.15}$$

$$v_n^{obs} = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left[n\left(\phi - \Psi_n\right)\right] d\phi \tag{4.16}$$

e

$$\Psi_n = \frac{1}{n} \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \operatorname{sen}\left(n\phi\right) d\phi}{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left(n\phi\right) d\phi} \right]. \tag{4.17}$$

Na relação 4.14, o segundo termo da série fornece a componente elíptica de $dN/d\phi$. Deste modo, definimos, a partir da relação 4.16, a quantidade v_2^{obs} (fluxo elíptico observado) da seguinte forma:

$$v_2^{obs} \equiv \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left[2\left(\phi - \Psi_2\right)\right] d\phi \tag{4.18}$$

onde

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \operatorname{sen}\left(2\phi\right) d\phi}{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos\left(2\phi\right) d\phi} \right]. \tag{4.19}$$

O ângulo Ψ_2, na relação 4.19, define o eixo de simetria indicado na figura 4.3 (esquerda), linha pontilhada. Este ângulo pode ser pensado como uma aproximação do ângulo Φ_b. Na prática, os experimentalistas tentam estimar $\left\langle v_2^b \right\rangle$ através do valor de $\left\langle v_2^{obs} \right\rangle$ que é a quantidade que eles podem medir experimentalmente. Analogamente à relação 4.13, definimos:

$$\left\langle v_2^{obs} \right\rangle \equiv \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j \cos\left[2\left(\phi - (\Psi_2)_j \right) \right] d\phi. \tag{4.20}$$

Nosso objetivo, agora, é propor uma maneira de estimar $\left\langle v_2^b \right\rangle$ a partir de $\left\langle v_2^{obs} \right\rangle$. Através das expansões 4.1 e 4.14, podemos escrever a seguinte relação:

$$v_2^b = v_2^{obs} \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right]. \tag{4.21}$$

Tomando o valor médio em ambos os lados de 4.21, temos:

$$\left\langle v_2^b \right\rangle = \left\langle v_2^{obs} \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] \right\rangle. \tag{4.22}$$

Vamos considerar que v_2^{obs} é, aproximadamente, independente do ângulo $(\Psi_2 - \Phi_b)$. Deste modo, podemos escrever que:

$$\left\langle v_2^b \right\rangle \approx \left\langle v_2^{obs} \right\rangle \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] \right\rangle. \tag{4.23}$$

A quantidade $\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] \right\rangle$ é positiva, uma vez que, $\cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] > 0$ para a grande maioria dos eventos. Com isso, temos que:

$$\left\langle v_2^b \right\rangle \leq \left\langle v_2^{obs} \right\rangle. \tag{4.24}$$

Para que os experimentalistas usem a fórmula 4.23, devemos trocar o fator $\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] \right\rangle$ por alguma quantidade que possa ser medida experimentalmente. Para isso, fazemos a seguinte aproximação:

$$\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b \right) \right] \right\rangle \approx \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b \right) \right] \right\rangle = \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b \right) \right] \right\rangle. \tag{4.25}$$

O ângulo $\Psi_2^{\eta>0}$, introduzido em 4.25, é obtido através de uma fórmula análoga à 4.19. A diferença é que consideramos apenas as partículas com $\eta > 0$ em $dN/d\phi$. No caso do ângulo $\Psi_2^{\eta<0}$ o procedimento é similar. Na relação 4.25 supomos que os ângulos $\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)$ e $\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)$ são independentes. A partir desta relação podemos escrever que

$$\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b\right)\right]\rangle^2 \approx \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle . \tag{4.26}$$

Notando que

$$\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Psi_2^{\eta<0}\right)\right]\right\rangle = \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \text{sen}\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle \left\langle \text{sen}\left[2\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle \tag{4.27}$$

e usando novamente a hipótese que os ângulos $\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)$ e $\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)$ são independentes, temos que:

$$\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Psi_2^{\eta<0}\right)\right]\right\rangle = \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle \left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta<0} - \Phi_b\right)\right]\right\rangle . \tag{4.28}$$

Substituindo 4.28 em 4.26, temos:

$$\langle \cos\left[2\left(\Psi_2 - \Phi_b\right)\right]\rangle \approx \sqrt{\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Psi_2^{\eta<0}\right)\right]\right\rangle}. \tag{4.29}$$

Finalmente, a relação 4.23 torna-se:

$$\left\langle v_2^b \right\rangle \approx \left\langle v_2^{obs} \right\rangle \sqrt{\left\langle \cos\left[2\left(\Psi_2^{\eta>0} - \Psi_2^{\eta<0}\right)\right]\right\rangle}. \tag{4.30}$$

Na relação 4.30 todas as grandezas do lado direito podem ser medidas experimental-

mente. Chamaremos esta quantidade de $\langle v_2^{rec} \rangle$ (fluxo elíptico reconstruído), assim:

$$\langle v_2^{rec} \rangle \equiv \langle v_2^{obs} \rangle \sqrt{\langle \cos \left[2 \left(\Psi_2^{\eta>0} - \Psi_2^{\eta<0} \right) \right] \rangle}. \tag{4.31}$$

Usando o programa Nexus+SPheRIO podemos calcular $\langle v_2^b \rangle$ (relação 4.13) e $\langle v_2^{rec} \rangle$ (relação 4.31), uma vez que o programa fornece o parâmetro de impacto e $dN/d\phi$, a cada evento. Deste modo, podemos testar a fórmula 4.30 (ver seção 5.7).

Capítulo 5

Resultados

5.1 Distribuições de partículas em função de η e p_t

Como já mencionado, os ingredientes básicos do modelo hidrodinâmico são: condições iniciais, equação de estado e mecanismo de desacoplamento. Em nossa abordagem temos as seguintes opções: condições iniciais lisas ou flutuantes, equação de estado com ou sem ponto crítico e emissão com temperatura fixa ou emissão contínua. Como todo modelo, cada opção citada depende de um conjunto de parâmetros, por exemplo, a equação de estado com ponto crítico depende do potencial químico crítico[6], a emissão com temperatura fixa depende da temperatura de desacoplamento[3], etc. Deste modo, devemos encontrar meios para estimar o valor destes parâmetros. Em alguns casos, isso pode ser feito através do resultado experimental de alguns observáveis, isto é, ajusta-se os parâmetros do modelo de modo que esses observáveis sejam reproduzidos. De posse desses parâmetros "calibrados" podemos calcular os demais observáveis. Esta idéia foi utilizada neste trabalho no seguinte sentido: os parâmetros do modelo devem ser ajustados de modo a reproduzir os observáveis mais simples[1], como por exemplo, a multiplicidade de partículas, a distribuição

[1]Entendemos como observáveis simples aqueles que são medidos experimentalmente de forma relativamente direta, como é o caso de dN/dp_t e $dN/d\eta$. Note que η, por exemplo, é uma função apenas do ângulo

de partículas em função da pseudorapidez η e do momento transversal p_t, etc. Precisamente falando, usamos $dN/d\eta$ para ajustar a densidade de energia inicial fornecida pelo Nexus[2] e dN/dp_t para estimarmos a temperatura de desacoplamento, no caso de emissão com temperatura fixa, e o parâmetro κ, no caso de emissão contínua (fórmula 3.44).

Na figura 5.1 mostramos um gráfico de $dN/d\eta$ para partículas carregadas (distribuição média) na janela de centralidade de 15% a 25%. Os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes[3], equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. A linha contínua é o resultado teórico obtido através do programa Nexus+SPheRIO, as barras hachuradas representam a dispersão teórica de $dN/d\eta$ e os quadrados, com as respectivas barras de incerteza, são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[22]. Devemos mencionar que a densidade de energia inicial fornecida pelo Nexus foi ajustada de modo a reproduzir os dados experimentais.

Na figura 5.2 mostramos a distribuição de partículas carregadas em função de p_t (distribuição média), na mesma janela de centralidade e para três temperaturas de desacoplamento. Note que conforme a temperatura aumenta, a inclinação da curva também aumenta. Isso ocorre porque quanto maior a temperatura de desacoplamento menor é a expansão do fluido. Deste modo, a expansão transversal também diminui, ocasionando a diminuição do número de partículas emitidas com momento transversal grande. Neste gráfico, a curva que melhor reproduz os dados experimentais corresponde à maior temperatura, isto é, $150\,MeV$. Uma vez que a temperatura de transição de fase, na região de potencial químico nulo, é da ordem de $160\,MeV$, não devemos aumentar mais a temperatura de desacoplamento, com a intenção de melhorar o ajuste, pois não pode haver emissão de partículas na fase de plasma. Na figura 5.3 mostramos, através das barras hachuradas, a dispersão teórica da distribuição de partículas em função de p_t.

θ entre a velocidade da partícula e o eixo da colisão ($\eta \equiv -\ln[\tan(\theta/2)]$).

[2]Em colisões de núcleos pesados com energia incidente de 200 A GeV, o programa Nexus tem apresentado uma discrepância na distribuição de partículas carregadas em função de η.

[3]Neste caso o valor médio do observável é dado pela relação 2.8.

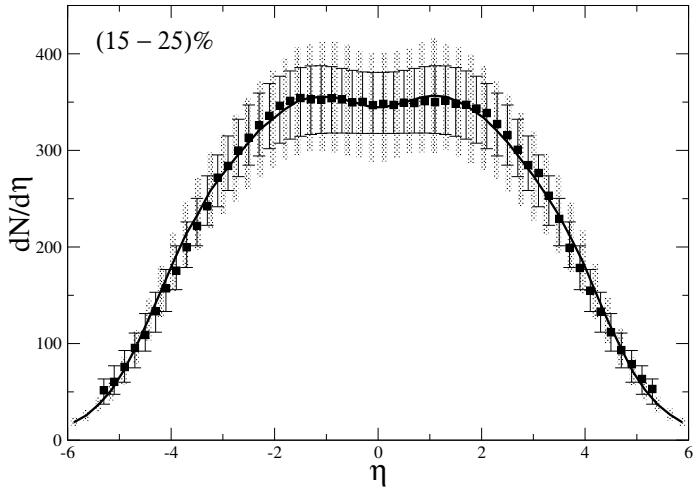

Figura 5.1: Distribuição de partículas carregadas em função de η, na janela de centralidade de 15% a 25%. A linha contínua representa o cálculo teórico, as barras hachuradas representam a dispersão teórica e os quadrados, com as respectivas barras de incerteza, são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[22]. Nos cálculos usamos condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. A média foi feita sobre 200 eventos.

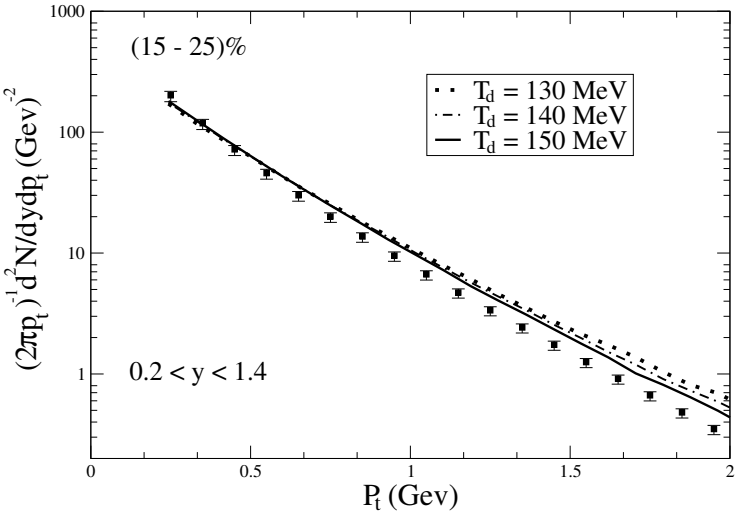

Figura 5.2: Distribuição de partículas carregadas em função de p_t. A janela de centralidade é de 15% a 25%. Apresentamos três curvas, cada uma delas está associada a uma temperatura de desacoplamento. Para todas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[23].

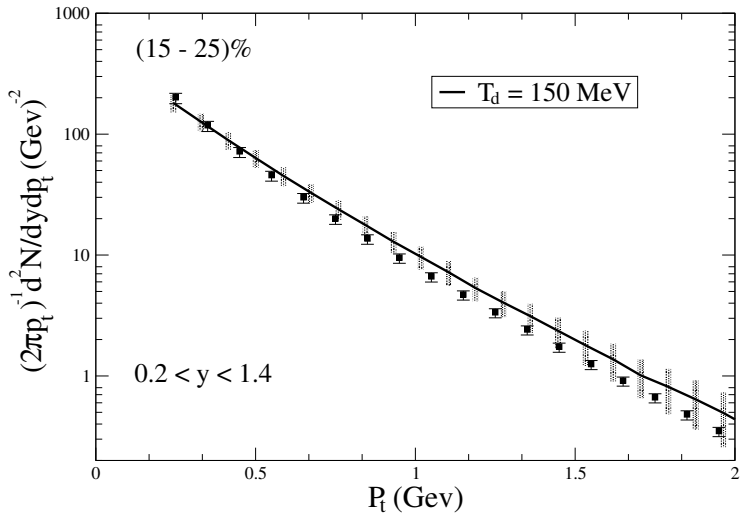

Figura 5.3: Distribuição de partículas carregadas em função de p_t (linha contínua). Esta curva é a mesma que está apresentada na figura 5.2 ($T_d = 150\,MeV$). Aqui, mostramos a dispersão teórica através das barras hachuradas. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[23].

Na figura 5.4 mostramos o efeito do tipo de condições iniciais na distribuição de partículas em função de p_t. A curva contínua foi obtida através de condições iniciais médias (veja a figura 2.1 (direita) e a relação 2.7) e as demais foram obtidas através de condições iniciais flutuantes (veja a figura 2.1 (esquerda) e a relação 2.8). Vemos que utilizando condições iniciais médias, os dados experimentais são melhor reproduzidos na temperatura de desacoplamento de $135\,MeV$, mais baixa que o valor encontrado no caso de condições iniciais flutuantes. Isso ocorre porque a expansão do fluido é mais violenta no caso de condições iniciais flutuantes, devido à presença de picos de densidade de energia.

Na figura 5.5 mostramos um gráfico análogo ao gráfico apresentado na figura 5.2. Neste caso, o mecanismo de desacoplamento é a emissão contínua e o parâmetro que estamos ajustando é κ (veja relação 3.44). Devemos lembrar que quanto menor o valor de κ, maior é a probabilidade de emissão de partículas. Note que diminuindo o valor de κ, a inclinação da curva aumenta.

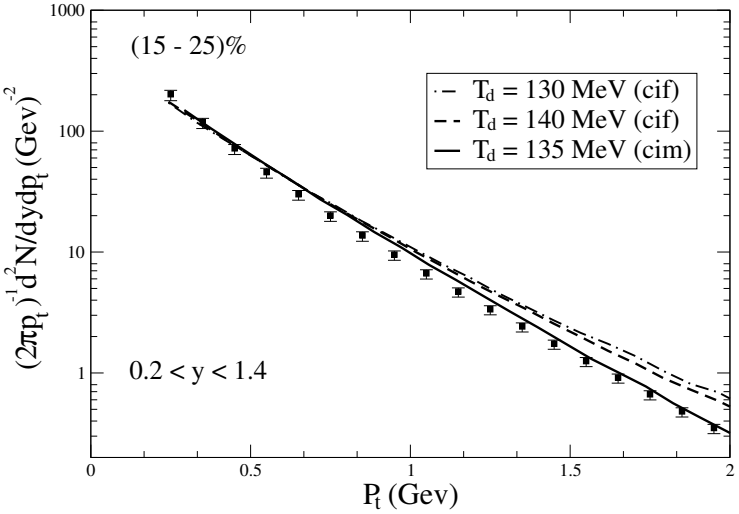

Figura 5.4: Distribuição de partículas carregadas em função de p_t. A curva contínua foi obtida usando condições iniciais médias. As demais foram obtidas através de condições iniciais flutuantes. Para todas as curvas, os cálculos foram feitos usando a equação de estado sem ponto crítico. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[23].

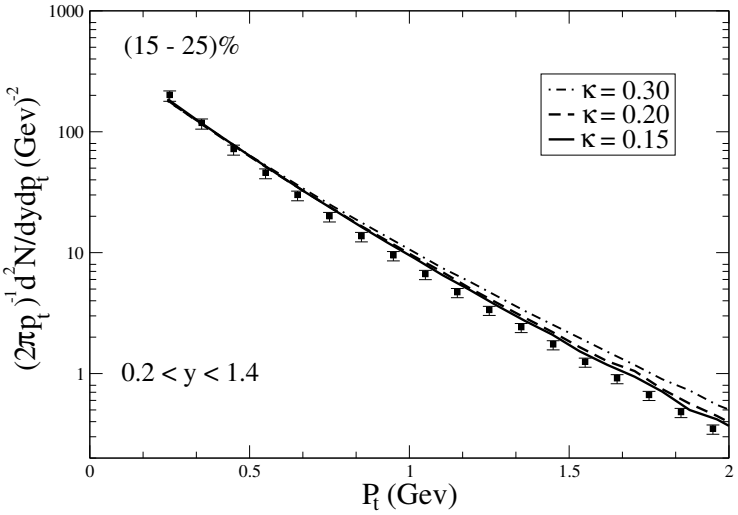

Figura 5.5: Distribuição de partículas carregadas em função de p_t, calculada com emissão contínua. Apresentamos três curvas, cada uma delas está associada a um valor do parâmetro κ. Para todas as curvas, o cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[23].

Podemos explicar isso da seguinte forma: se κ é pequeno, muitas partículas podem ser

emitidas precocemente, ou seja, antes que a expansão transversal seja grande. Conseqüentemente, essas partículas são emitidas, em média, com momento transversal pequeno.

Nesta seção usamos os resultados experimentais de alguns observáveis para ajustar um conjunto de parâmetros. Nas próximas seções utilizaremos esses parâmetros para calcular o fluxo elíptico.

5.2 $\langle v_2^b \rangle$ em função de η e da centralidade da colisão

Na figura 5.6 apresentamos os resultados de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, em três janelas de centralidade. Os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. Neste gráfico, as curvas são os resultados teóricos obtidos através da relação 4.13 (fórmula teórica)[4], onde $dN/d\phi$ é fornecida pelo programa Nexus+SPheRIO. Os círculos (centralidade de 3% a 15%), triângulos (de 15% a 25%) e quadrados (de 25% a 50%) são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24]. Na tabela 5.1 mostramos os intervalos, em parâmetro de impacto, que utilizamos para selecionar os eventos.

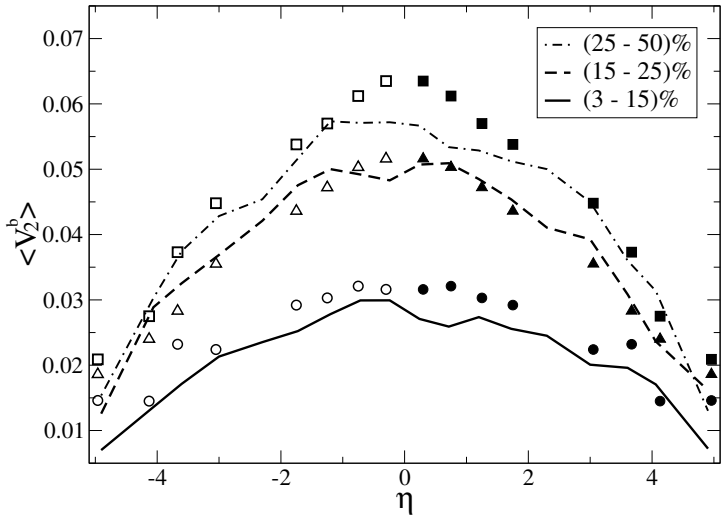

Figura 5.6: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, em três janelas de centralidade. Os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. As curvas são os resultados teóricos e os círculos (3%-15%), triângulos (15%-25%) e quadrados (25%-50%) são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Vemos na figura 5.6 que $\langle v_2^b \rangle$ diminui conforme a centralidade da colisão aumenta, como discutimos no capítulo 4. Além disso, para cada janela de centralidade, $\langle v_2^b \rangle$ diminui se

[4]Note que $\frac{dN}{d\phi}$ deve ser entendida como $\frac{dN}{d\phi}(\eta)$, ou seja, devemos considerar apenas as partículas com pseudorapidez η' pertencente ao intervalo $\eta \pm \delta\eta$.

janela	centralidade	$b_i\ (fm)$	$b_f\,(fm)$
central	3% – 15%	2.62	5.86
meio central	15% – 25%	5.86	7.56
periférica	25% – 50%	7.56	10.70

Tabela 5.1: Janelas de centralidade. A relação entre a centralidade $\mathcal{C}$ e o parâmetro de impacto b é dada pela fórmula $b = 2R\sqrt{\mathcal{C}}$, onde $R \approx 1.3A^{\frac{1}{3}}\ fm$ é o raio do núcleo.

$|\eta|$ aumenta. De fato, a temperatura inicial do fluido é mais baixa em regiões onde $|\eta|$ é grande. Por conta disso, a expansão nestas regiões é menos intensa, ocasionando uma diminuição do fluxo elíptico[5].

Finalmente, nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostramos a dispersão teórica de v_2^b em função de η (barras hachuradas). As curvas de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η são as mesmas que estão apresentadas na figura 5.6.

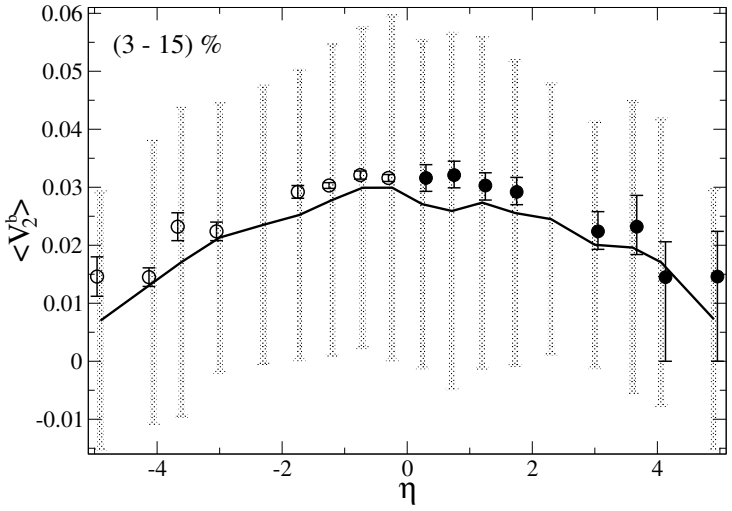

Figura 5.7: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 3% a 15% (linha contínua). A média foi calculada sobre 267 eventos. As barras hachuradas representam a dispersão teórica de v_2^b. Os círculos são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

[5]Devemos ter em mente que a anisotropia nas condições iniciais (figura 4.1 (esquerda)) é convertida em anisotropia na distribuição azimutal de partículas (figura 4.1 (direita)) através do processo de expansão do fluido. Deste modo, qualquer mecanismo que diminua a expansão estará diminuindo o fluxo elíptico.

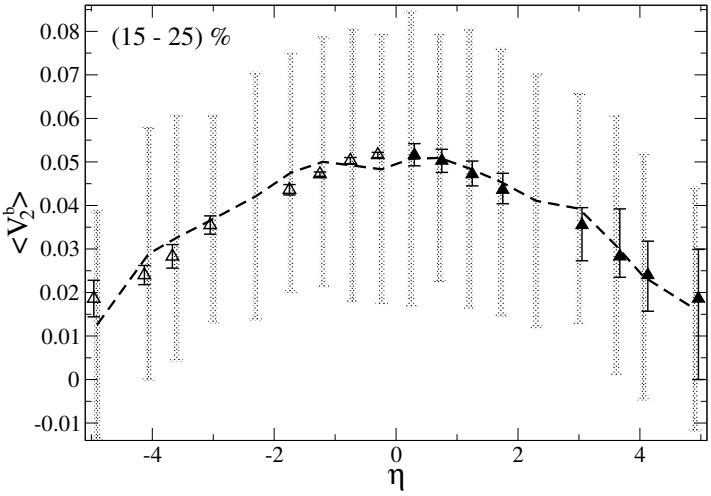

Figura 5.8: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25% (linha tracejada). A média foi calculada sobre 200 eventos. As barras hachuradas representam a dispersão teórica de v_2^b. Os triângulos são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

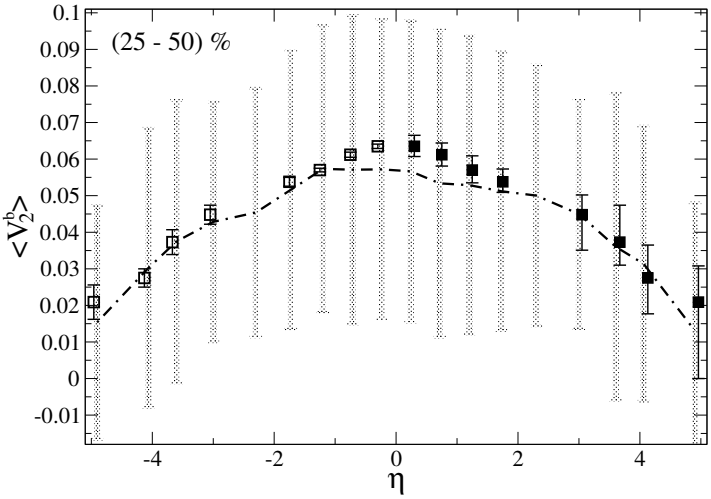

Figura 5.9: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 25% a 50% (linha ponto-traço). A média foi calculada sobre 500 eventos. As barras hachuradas representam a dispersão teórica de v_2^b. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Nas próximas seções, apresentaremos os gráficos do fluxo elíptico em função de η apenas na janela de centralidade de 15% a 25%, pois os resultados nas demais janelas são análogos.

5.3 $\langle v_2^b \rangle$ em função do momento transversal

Na figura 5.10 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 0% a 50%. Os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. Neste gráfico, a curva contínua é o resultado teórico obtido através da relação 4.13, onde $dN/d\phi$ é fornecida pelo programa Nexus+SPheRIO. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

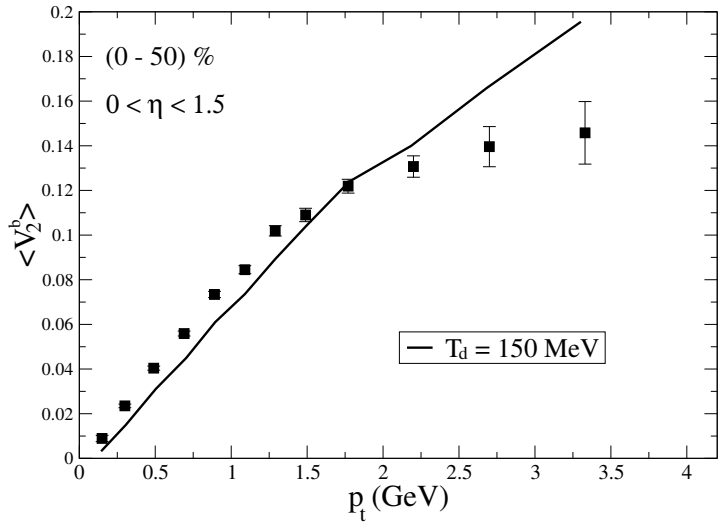

Figura 5.10: $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 0% a 50% (linha contínua). A média foi calculada sobre 1000 eventos. Os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de 150 MeV. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Vemos nesta figura que $\langle v_2^b \rangle$ é uma função crescente em relação a p_t (de forma aproximadamente linear). Este comportamento pode ser entendido se observarmos os seguintes pontos: (i) as partículas com p_t grande se originam, principalmente, de regiões do fluido onde existe grande expansão transversal, (ii) se existe anisotropia nas condições iniciais[6] e

[6]Note que na janela de centralidade de 0% a 50% a maioria das colisões são não centrais. Estas contribuem para a anisotropia nas condições iniciais.

grande expansão transversal, o fluxo elíptico é grande.

Um fato notável na figura 5.10 é a discrepância entre os cálculos hidrodinâmicos, aqui descritos, e os dados experimentais na região de p_t grande ($p_t > 2\,GeV$)[7]. Note que os dados experimentais indicam uma saturação do fluxo elíptico para $p_t > 1.5\,GeV$. Na seção 5.6 veremos que o mecanismo de emissão contínua pode fornecer melhores resultados para o fluxo elíptico na região de p_t grande.

Finalmente, na figura 5.11 mostramos a dispersão teórica de v_2^b em função de p_t (barras hachuradas). Vemos que a dispersão teórica é uma função crescente em relação a p_t. Isso se deve ao fato de que o número de partículas diminui de forma muito rápida conforme p_t aumenta (para $p_t > 2\,GeV$ temos, em média, menos que dez partículas por colisão [23]).

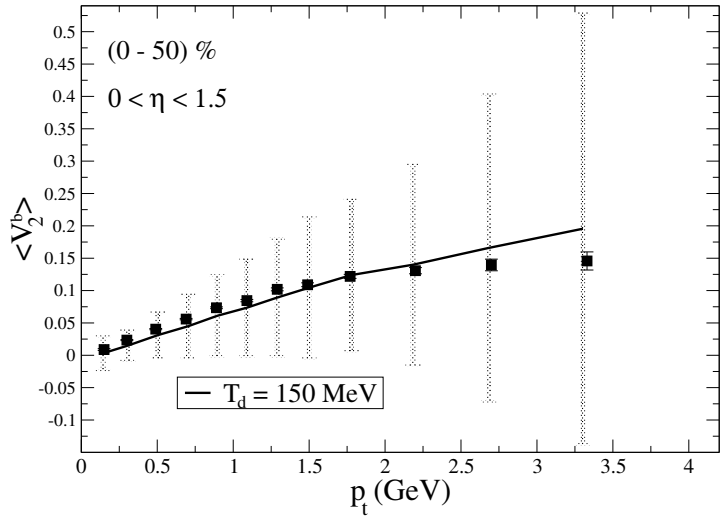

Figura 5.11: $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t (linha contínua). Esta curva é a mesma que está apresentada na figura 5.10. Aqui, mostramos a dispersão teórica através das barras hachuradas. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

[7]Esta discrepância pode ser vista também em outros cálculos hidrodinâmicos[25].

5.4 Efeito da temperatura de desacoplamento

Na seção 5.1 vimos que a temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$ é a que melhor reproduz a distribuição de partículas em função de p_t (veja figura 5.2). Na seção 5.2 usamos esta temperatura de desacoplamento para calcular $\langle v_2^b \rangle$. Nesta seção, o objetivo é verificar se $\langle v_2^b \rangle$ muda, apreciavelmente, quando usamos uma temperatura de desacoplamento um pouco mais baixa.

Na figura 5.12 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para as temperaturas de desacoplamento de $140\,MeV$ (linha tracejada) e $150\,MeV$ (linha contínua). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. Vemos que abaixando a temperatura, $\langle v_2^b \rangle$ aumenta. Note que em alguns pontos a diferença chega a 20%. Este comportamento está de acordo com o esperado, uma vez que, abaixando a temperatura de desacoplamento, aumentamos a expansão do fluido.

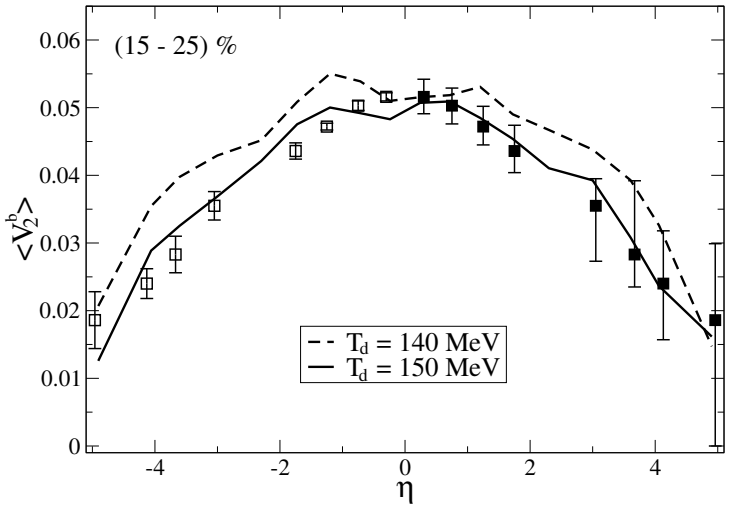

Figura 5.12: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25%. Duas temperaturas de desacoplamento foram usadas: $150\,MeV$ (linha contínua) e $140\,MeV$ (linha tracejada). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Na figura 5.13 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para as mesmas temperaturas de desacoplamento. Vemos, nesta figura, que as conclusões são as mesmas, exceto na região de p_t grande ($p_t > 2\,GeV$). Devemos lembrar que o número de partículas emitidas nesta região é muito pequeno (temos, em média, menos que dez partículas por colisão). Este fato inviabiliza qualquer tipo de explicação qualitativa baseada no movimento coletivo do fluido.

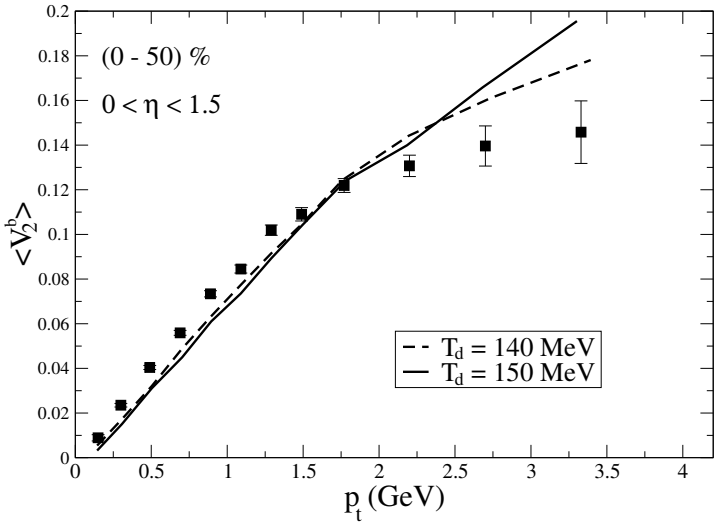

Figura 5.13: $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 0% a 50%. Duas temperaturas de desacoplamento foram usadas: $150\,MeV$ (linha contínua) e $140\,MeV$ (linha tracejada). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 1000 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

5.5 Efeito da presença de ponto crítico

Na seção 2.3.4 vimos que, usando a equação de estado com ponto crítico, a matéria com baixa densidade bariônica ($\mu_B \approx 0$) expandirá sempre de forma acelerada, enquanto que a matéria com alta densidade bariônica expandirá com velocidade constante, durante o tempo em que estiver ocorrendo a transição de fase. Diante deste quadro, vemos que a equação de estado com ponto crítico favorece a aceleração em regiões do fluido onde a densidade bariônica é baixa. Nesta seção, vamos verificar se este fato tem alguma conseqüência para o fluxo elíptico.

Antes de apresentarmos os resultados, devemos observar que as partículas com η pequeno ($|\eta| < 1$) são emitidas, principalmente, da região de rapidez nula[8], onde a densidade bariônica é baixa. Deste modo, esperamos que o fluxo elíptico, calculado com a equação de estado com ponto crítico, apresente um aumento, que deve ser observado, principalmente, na região onde $|\eta| < 1$. Para grandes valores de η, esperamos que o aumento do fluxo elíptico, discutido acima, seja desprezível.

Na figura 5.14 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para a equação de estado com ponto crítico (linha contínua) e sem ponto crítico (linha tracejada). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. Na figura 5.15 mostramos um gráfico análogo. Neste, usamos a temperatura de desacoplamento de $140\,MeV$.

[8]Se considerarmos que os núcleos colidem na origem do eixo de colisão, a região de rapidez nula está associada à matéria que é criada nas proximidades da origem. Esta matéria possui baixa densidade bariônica, pois, após a colisão, os núcleos incidentes se afastam da origem, carregando consigo grande parte no número bariônico.

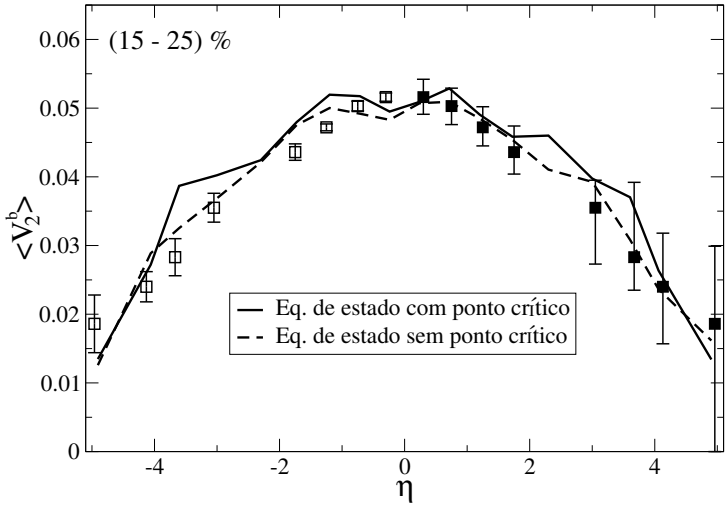

Figura 5.14: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25%. Duas equações de estado foram usadas: com ponto crítico (linha contínua) e sem ponto crítico (linha tracejada). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Vemos na figura 5.14 que, à exceção de algumas flutuações, o efeito da equação de estado com ponto crítico é pequeno, quando usamos a temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. No entanto, na figura 5.15, onde usamos uma temperatura de desacoplamento mais baixa ($140\,MeV$), o comportamento é próximo do esperado. Provavelmente o que está ocorrendo é o seguinte: quando usamos a temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$, o tempo de expansão do fluido não é suficientemente grande, para que o comportamento distinto das regiões de alta e baixa densidade bariônica, possa ser observado com clareza.

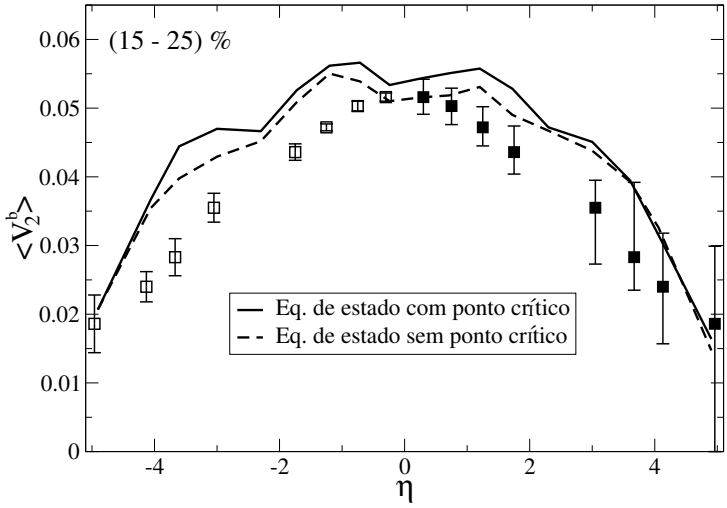

Figura 5.15: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η. Duas equações de estado foram usadas: com ponto crítico (linha contínua) e sem ponto crítico (linha tracejada). Aqui usamos a temperatura de desacoplamento de $140\,MeV$. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

5.6 Efeito do mecanismo de desacoplameto

Na figura 5.16 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η. Dois mecanismos de desacoplamento foram usados: emissão com temperatura fixa (linha tracejada) e emissão contínua (linha contínua). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. Para a emissão com temperatura fixa, usamos $T_d = 150\,MeV$ e para emissão contínua, usamos $\kappa = 0.15$. Ambos os parâmetros ajustam bem a distribuição de partículas em função do momento transversal (veja figuras 5.2 e 5.5).

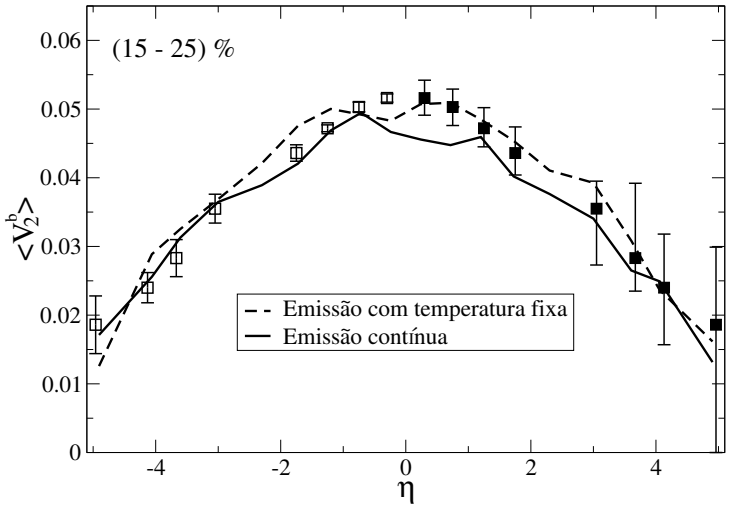

Figura 5.16: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25%. Dois mecanismos de desacoplamento foram usados: emissão com temperatura fixa ($T_d = 150\,MeV$, linha tracejada) e emissão contínua ($\kappa = 0.15$, linha contínua). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Vemos na figura 5.16 que o uso do mecanismo de emissão contínua acarreta uma redução do fluxo elíptico, à exceção de algumas flutuações na região de η grande. Isso ocorre porque, neste mecanismo, algumas partículas são emitidas precocemente[9], ou seja, antes

[9]Neste caso, muitas partículas podem ser emitidas de um elemento de fluido antes que ele atinja a

que a expansão transversal do fluido seja grande. Conseqüentemente, a distribuição destas partículas em função do ângulo azimutal é mais isotrópica.

Na figura 5.17 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para emissão com temperatura fixa (linha tracejada) e emissão contínua (linha contínua). Vemos nesta figura que o uso do mecanismo de emissão contínua acarreta uma considerável redução do fluxo elíptico na região de p_t grande ($p_t > 1.5\,GeV$). Isso ocorre porque as partículas com p_t grande têm maior probabilidade de serem emitidas precocemente.

Devemos observar que, mesmo usando o mecanismo de emissão contínua, o cálculo do fluxo elíptico não apresentou a saturação na região de p_t grande. Como mencionado na seção 3.1, este mecanismo está implementado de forma aproximada no programa SPheRIO. Acreditamos que uma implementação mais realista possa apresentar melhores resultados.

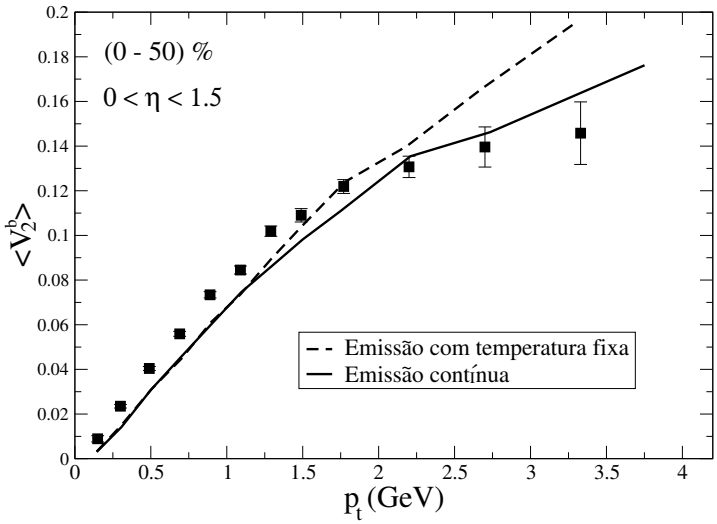

Figura 5.17: $\langle v_2^b \rangle$ em função de p_t, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 0% a 50%. Dois mecanismos de desacoplamento foram usados: emissão com temperatura fixa ($T_d = 150\,MeV$, linha tracejada) e emissão contínua ($\kappa = 0.15$, linha contínua). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes e equação de estado sem ponto crítico. A média foi feita sobre 1000 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

temperatura de desacoplamento.

5.7 Comparação entre $\langle v_2^b \rangle$, $\langle v_2^{obs} \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$

No capítulo 4 vimos que a fórmula 4.13 para o fluxo elíptico, não pode ser usada pelos experimentalistas. Por conta disso, propusemos, através da relação 4.30, uma maneira de estimar $\langle v_2^b \rangle$ a partir de quantidades que podem ser medidas experimentalmente. Nesta seção usaremos o programa Nexus+SPheRIO para verificar se esta relação é consistente.

Na figura 5.18 mostramos uma comparação entre $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{obs} \rangle$, dados em função de η, na janela de centralidade de 15% a 25%. Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. Vemos que o resultado é consistente com a relação 4.24. Na figura 5.20, onde $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{obs} \rangle$ são dados em função de p_t, encontramos um resultado análogo.

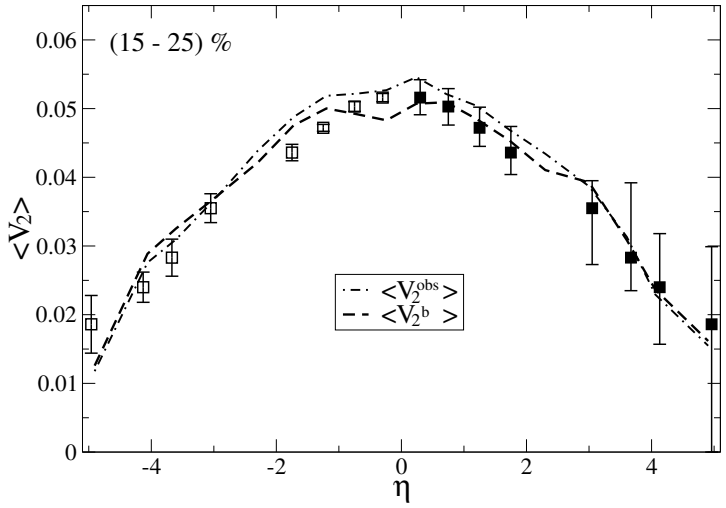

Figura 5.18: $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{obs} \rangle$, em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25%. Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. A média foi feita sobre 200 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Na figura 5.19 mostramos uma comparação entre $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$, dados em função de η.

Podemos ver que ambas as grandezas são compatíveis. Note que a concordância é melhor na região onde $|\eta| < 2$. Fora desta região, as curvas apresentam uma ligeira discrepância (para $\eta = 1$, a diferença é de 4% e para $\eta = 4.5$, é de 12%). Isso se deve ao fato de que a aproximação 4.25 não é boa na região onde $|\eta| > 2$ (para calcularmos $\Psi_2^{\eta>0}$ usamos o intervalo $0.1 < \eta < 2$ e para calcularmos $\Psi_2^{\eta<0}$ usamos $-2 < \eta < -0.1$). Na figura 5.20 podemos ver que $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$ concordam bem na região onde $p_t < 2\,GeV$, o que corresponde a considerar a grande maioria das partículas. Isso ocorre porque, neste gráfico, estamos considerando apenas as partículas com η pertencente ao intervalo $[0, 1.5]$.

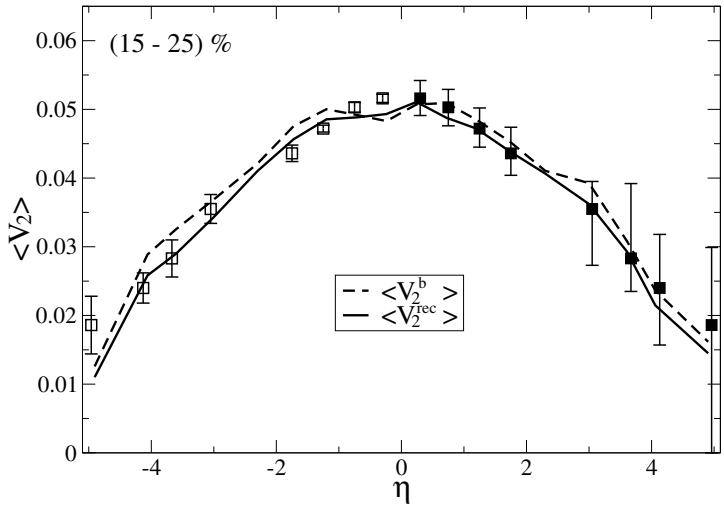

Figura 5.19: $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$, em função de η. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

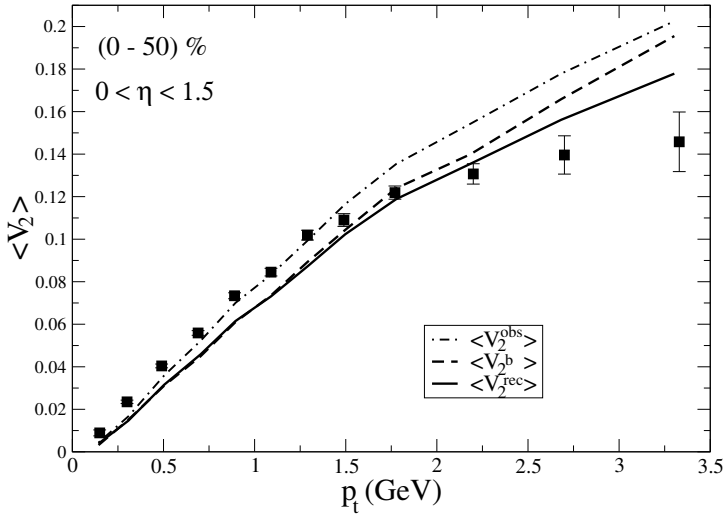

Figura 5.20: $\langle v_2^b \rangle$, $\langle v_2^{obs} \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$, em função de p_t, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 0% a 50%. Para todas as curvas, os cálculos foram feitos usando condições iniciais flutuantes, equação de estado sem ponto crítico e temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. A média foi feita sobre 1000 eventos. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

5.8 Efeito do tipo de condições iniciais

Em hidrodinâmica é comum o uso de condições iniciais simétricas e lisas. Entretanto, acreditamos que usar condições iniciais flutuantes seja um procedimento mais realista. Nesta seção mostraremos que v_2 dependerá, fortemente, do tipo de condição inicial adotada.

Na figura 5.21 mostramos um gráfico de $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para os dois tipos de condições iniciais. A curva tracejada foi calculada por meio da fórmula 4.5, onde $dN/d\phi$ foi obtida a partir de condições iniciais médias (veja a figura 2.1 (direita)). A curva contínua foi calculada por meio da fórmula 4.13, onde $(dN/d\phi)_j$ foi obtida a partir de condições iniciais flutuantes (veja a figura 2.1 (esquerda)). Para ambas as curvas, os cálculos foram feitos usando a equação de estado sem ponto crítico. Para condições iniciais médias, usamos $T_d = 135\,MeV$ e para condições iniciais flutuantes, usamos $T_d = 150\,MeV$. Ambos os parâmetros ajustam bem a distribuição de partículas em função de p_t (veja as figuras 5.2 e 5.4).

Vemos na figura 5.21 que $\langle v_2^b \rangle$, obtido através de condições iniciais médias, é consideravelmente maior que o obtido através de condições iniciais flutuantes[10]. Isso ocorre, provavelmente, porque o tempo de expansão é maior quando usamos condições iniciais médias, o que acarreta um aumento do fluxo elíptico (note que a temperatura de desacoplamento é mais baixa quando usamos condições iniciais médias). Por outro lado, os picos de densidade de energia, característicos das condições iniciais flutuantes, expandem, por algum tempo, de maneira isotrópica, ocasionando uma redução do fluxo elíptico quando usamos este tipo de condições iniciais.

Outro fato notável na figura 5.21 é a presença de três regiões de grande discrepância. O pico central (linha tracejada) corresponde à matéria criada na região central de rapidez e os picos laterais correspondem, provavelmente, aos núcleos que se afastam após a colisão.

[10] Outros cálculos usando condições iniciais lisas podem ser vistos em [25].

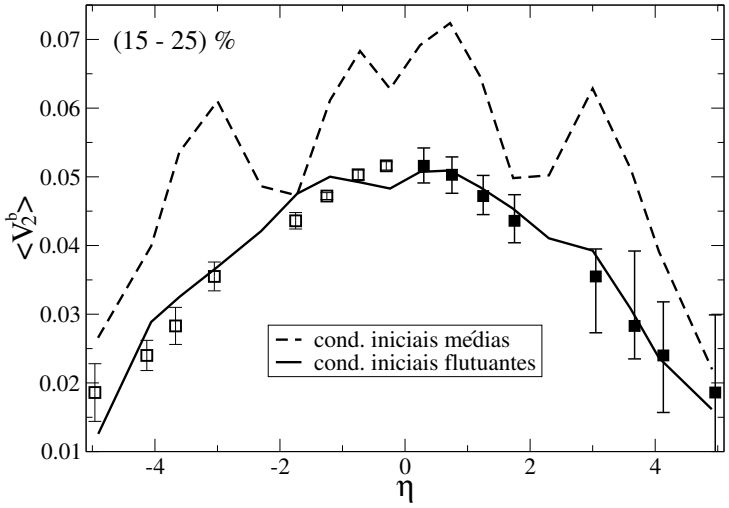

Figura 5.21: $\langle v_2^b \rangle$ em função de η, para partículas carregadas, na janela de centralidade de 15% a 25%. Dois tipos de condições iniciais foram usadas: condições iniciais médias (linha tracejada) e condições iniciais flutuantes (linha contínua). Para ambas as curvas, usamos a equação de estado sem ponto crítico. Para condições iniciais médias, usamos $T_d = 135\,MeV$ e para condições iniciais flutuantes, usamos $T_d = 150\,MeV$. Os quadrados são os dados experimentais da colaboração PHOBOS[24].

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação, apresentamos um estudo teórico do parâmetro de fluxo elíptico v_2, dando ênfase sobre: (i) o cálculo de v_2 em função da pseudorapidez, do momento transversal e da centralidade; (ii) os efeitos de diferentes equações de estado, mecanismos de desacoplamento e tipos de condições iniciais, sobre v_2 e (iii) a proposição de uma fórmula para cálculo de v_2 a partir de quantidades que podem ser obtidas experimentalmente.

Na seção 5.1 usamos a distribuição de partículas, em função de η, para ajustar a densidade de energia inicial, fornecida pelo programa Nexus. Usamos, também, a distribuição de partículas, em função do momento transversal, para ajustar a temperatura de desacoplamento, no caso de emissão com temperatura fixa, e o parâmetro κ, no caso de emissão contínua. Encontramos os seguintes valores: $T_d = 150\,MeV$ (condições iniciais flutuantes), $T_d = 135\,MeV$ (condições iniciais médias) e $\kappa = 0.15$ (condições iniciais flutuantes).

Na seção 5.2 apresentamos os cálculos de $\langle v_2^b \rangle$, em função de η. Verificamos que a forma característica dos dados experimentais é reproduzida, ou seja, $\langle v_2^b \rangle$ apresenta um máximo em $\eta = 0$ e diminui conforme $|\eta|$ aumenta. Nas três janelas de centralidade observa-se o mesmo comportamento. Verificamos, também, que aumentando a centralidade da colisão, $\langle v_2^b \rangle$ diminui. Em algumas regiões, esta redução ocorre na mesma proporção que os dados

experimentais.

Na seção 5.3 apresentamos os cálculos de $\langle v_2^b \rangle$, em função de p_t, usando a temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$. Verificamos que $\langle v_2^b \rangle$ cresce de forma, aproximadamente, linear, não apresentando a saturação observada nos dados experimentais, para $p_t > 1.5GeV$. Acreditamos que este problema se deve, pelo menos em parte, ao próprio mecanismo de emissão com temperatura fixa, pois, neste mecanismo, as partículas são emitidas somente quando o elemento de fluido atingir a temperatura de desacoplamento. No entanto, é razoável, que uma fração considerável das partículas com grande momento transversal possam escapar antes.

Na seção 5.4, substituímos o valor da temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$ por um valor ligeiramente menor ($140\,MeV$), para avaliarmos a sensibilidade de $\langle v_2^b \rangle$ em relação a este parâmetro. De modo geral, verificamos que $\langle v_2^b \rangle$ aumenta. No caso de $\langle v_2^b \rangle$, em função de η, a diferença chega a 20%, em alguns pontos. No caso de $\langle v_2^b \rangle$, em função de p_t, a diferença chega a 4% (note que, no gráfico 5.13, $0 < \eta < 1.5$).

Na seção 5.5 apresentamos os cálculos de $\langle v_2^b \rangle$, em função de η, usando a equação de estado com ponto crítico. Verificamos que, para a temperatura de desacoplamento de $150\,MeV$, o efeito da equação de estado com ponto crítico mostra-se pouco significativo. No entanto, para uma temperatura de desacoplamento um pouco menor ($140\,MeV$), verificamos um comportamento próximo do esperado, ou seja, um aumento de $\langle v_2^b \rangle$ na região de η nulo.

Na seção 5.6, substituímos o mecanismo de emissão com temperatura fixa pelo mecanismo de emissão contínua. Verificamos que $\langle v_2^b \rangle$, em função de η, apresenta uma redução, que chega a 13% em alguns pontos. No caso de $\langle v_2^b \rangle$, em função de p_t, a redução ocorre, principalmente, na região de p_t grande ($p_t > 1.5\,GeV$). Entretanto, esta redução ainda não caracteriza a saturação observada nos dados experimentais. Para valores menores de p_t, encontramos o mesmo comportamento linear, obtido através do mecanismo de emissão

com temperatura fixa.

É importante mencionar que a implementação da emissão contínua, em sua totalidade, no programa SPheRIO, apresenta muitas dificuldades numéricas e, por este motivo, tal mecanismo encontra-se implementado de maneira aproximada, na versão atual do programa. Esperamos que uma aproximação mais realista possa reproduzir melhor os resultados experimentais.

No capítulo 4, propomos, através da relação 4.30, uma maneira de estimar $\langle v_2^b \rangle$, a partir de quantidades que podem ser medidas experimentalmente. Na seção 5.7 verificamos que esta relação é consistente, através da comparação entre $\langle v_2^b \rangle$ e $\langle v_2^{rec} \rangle$, em função de η e p_t.

Na seção 5.8 apresentamos uma comparação entre $\langle v_2^b \rangle$ obtido através de condições iniciais médias e $\langle v_2^b \rangle$ obtido através de condições iniciais flutuantes. Verificamos que o primeiro é, consideravelmente, maior. Por exemplo, no gráfico de $\langle v_2^b \rangle$, em função de η, encontramos uma diferença de 35% na região de η nulo.

Dentre as discussões acima, gostaríamos de chamar a atenção para dois aspectos extremamente importantes: o uso de condições iniciais flutuantes e o uso do mecanismo de emissão contínua. Ambos apresentam resultados muito interessantes. Do nosso ponto de vista, estes modelos descrevem de forma mais realista os fenômenos físicos.

Atualmente, estamos trabalhando na melhoria do mecanismo de emissão contínua que, como vimos, mostrou-se uma ferramenta promissora para descrever o processo complexo de emissão de partículas.

Acreditamos que os resultados apresentados nesta dissertação representam uma pequena contribuição para o estabelecimento do modelo hidrodinâmico como uma ferramenta importante no estudo de colisões nucleares de alta energia.

Apêndice A

Conservação da entropia

Considerando $g_{\mu\nu} = diag\,(1,-1,-1,-1)$, $(x^{\circ}, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ e c=1 o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \omega u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu} p, \tag{A.1}$$

onde $\omega = \epsilon + p$. Tomando a divergência de A.1 e multiplicando ambos os lados por u_{μ} temos,

$$\omega u^{\nu} u_{\mu} \partial_{\nu} u^{\mu} + u_{\mu} u^{\mu} \partial_{\nu} \left(\omega u^{\nu}\right) - u_{\mu} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} p = 0. \tag{A.2}$$

Na equação A.2 usamos o fato que $\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$. Uma vez que $u_{\mu} u^{\mu} = 1$, $u^{\nu} = u_{\mu} g^{\mu\nu}$ e $u_{\mu} \partial_{\nu} u^{\mu} = 0$ esta equação se torna

$$\partial_{\nu} \left(\omega u^{\nu}\right) - u^{\nu} \partial_{\nu} p = 0. \tag{A.3}$$

A equação A.3 pode ser escrita ainda da seguinte forma

$$\partial_{\nu} \left(\frac{\omega}{n_B} n_B u^{\nu}\right) - \frac{1}{n_B} n_B u^{\nu} \partial_{\nu} p = 0 \tag{A.4}$$

ou

$$n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{\omega}{n_B}\right) + \frac{\omega}{n_B}\partial_\nu \left(n_B u^\nu\right) - \frac{1}{n_B} n_B u^\nu \partial_\nu p = 0. \tag{A.5}$$

Se o número bariônico é uma grandeza conservada, então $\partial_\nu \left(n_B u^\nu\right) = 0$ e a equação A.5 fica

$$n_B u^\nu \left[\partial_\nu \left(\frac{\omega}{n_B}\right) - \frac{1}{n_B}\partial_\nu p\right] = 0. \tag{A.6}$$

Usando a relação termodinâmica $d\left(\frac{\omega}{n_B}\right) - \frac{1}{n_B} dp = T d\left(\frac{s}{n_B}\right)$, onde T é a temperatura, encontramos que

$$T n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B}\right) = 0. \tag{A.7}$$

Notando que

$$\partial_\nu \left(s u^\nu\right) = \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B} n_B u^\nu\right) = n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B}\right) + \frac{s}{n_B}\partial_\nu \left(n_B u^\nu\right) = n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B}\right), \tag{A.8}$$

chegamos, finalmente, à conservação da entropia, ou seja,

$$\partial_\nu \left(s u^\nu\right) = 0. \tag{A.9}$$

Apêndice B

Limite de Boltzmann

A relação 2.14 apresenta simetria esférica, assim, 2.13 pode ser dada como (omitindo o índice i):

$$p\left(T,\mu\right)=\frac{\theta g}{\left(2\pi\right)^{3}\beta}4\pi\int_{0}^{\infty}k^{2}ln\left(1+\theta e^{\beta\left(\mu-\sqrt{k^{2}+m^{2}}\right)}\right)dk. \tag{B.1}$$

Integrando B.1 por partes encontramos que:

$$p\left(T,\mu\right)=\frac{g}{6\pi^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{k^{4}}{\sqrt{k^{2}+m^{2}}}\frac{1}{e^{\beta\left(\sqrt{k^{2}+m^{2}}-\mu\right)}+\theta}dk. \tag{B.2}$$

No limite de Boltzmann, temos para férmions:

$$\frac{1}{e^{\beta\left(\sqrt{k^{2}+m^{2}}-\mu\right)}+1}\approx e^{-\beta\left(\sqrt{k^{2}+m^{2}}-\mu\right)} \tag{B.3}$$

onde $\beta\left(\sqrt{k^{2}+m^{2}}-\mu\right)\gg1$ e para bósons:

$$\frac{1}{e^{\beta\sqrt{k^{2}+m^{2}}}-1}\approx e^{-\beta\sqrt{k^{2}+m^{2}}} \tag{B.4}$$

onde $\beta\sqrt{k^{2}+m^{2}}\gg1$. Substituindo B.3 em B.2 temos:

$$p\left(T,\mu\right) \approx \frac{g}{6\pi^2} e^{\beta\mu} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2+m^2}} e^{-\beta\sqrt{k^2+m^2}} dk. \tag{B.5}$$

Por conveniência, escreveremos a integral em B.5 da seguinte forma:

$$I = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty -\frac{\beta k^4}{\sqrt{k^2+m^2}} e^{-\beta\sqrt{k^2+m^2}} dk. \tag{B.6}$$

Integrando B.6 por partes encontramos que:

$$I = \frac{3}{\beta} \int_0^\infty k^2 e^{-\beta\sqrt{k^2+m^2}} dk. \tag{B.7}$$

Fazendo a substituição $\beta\sqrt{k^2+m^2} = x$ e, novamente, integrando por partes temos:

$$I = \frac{1}{\beta^4} \int_{\beta m}^\infty \left(x^2 - (\beta m)^2\right)^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx. \tag{B.8}$$

A solução da integral dada em B.8 tem a forma geral[26]:

$$\int_u^\infty \left(x^2-u^2\right)^{\nu-1} e^{-x\alpha} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2u}{\alpha}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu\right) K_{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(u\alpha\right) \tag{B.9}$$

desde que $u > 0$, $Re\left(\alpha\right) > 0$ e $Re\left(\nu\right) > 0$. Portanto

$$I = \frac{4m^2}{\beta^2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) K_2\left(\beta m\right). \tag{B.10}$$

Substituindo B.10 em B.5 encontramos, finalmente, que:

$$p\left(T,\mu\right) \approx \frac{g}{2\pi^2} e^{\frac{\mu}{T}} T^2 m^2 K_2\left(\frac{m}{T}\right). \tag{B.11}$$

No caso de bósons, basta tomarmos $\mu = 0$ em B.11 (veja relações B.3 e B.4).

Apêndice C

Limite ultra-relativístico

No limite ultra-relativístico, o espectro de energia de um gás ideal é dado por:

$$\varepsilon\left(\vec{k}\right) = k \tag{C.1}$$

uma vez que, neste limite, a massa de repouso das partículas pode ser desprezada. Substituindo C.1 em 2.13 encontramos a seguinte expressão (omitindo o índice i):

$$p\left(T,\mu\right) = \frac{\theta g}{2\pi^2\beta}\int_0^\infty k^2 ln\left(1+\theta e^{\beta(\mu-k)}\right)dk. \tag{C.2}$$

Note que C.1 apresenta simetria esférica. Integrando C.2 por partes temos:

$$p\left(T,\mu\right) = \frac{g}{6\pi^2}\int_0^\infty k^3\frac{1}{e^{\beta(k-\mu)}+\theta}dk. \tag{C.3}$$

De acordo com C.3 a pressão de um gás de quarks ($\theta = 1$) é dada por:

$$p_q\left(T,\mu\right) = \frac{g_q}{6\pi^2}\int_0^\infty k^3\frac{1}{e^{\beta(k-\mu)}+1}dk. \tag{C.4}$$

Para obtermos a pressão de um gás de anti-quarks, basta trocarmos μ por $-\mu$ em C.4,

assim

$$p_{\bar{q}}\left(T,\mu\right)=\frac{g_{\bar{q}}}{6\pi^2}\int_0^\infty k^3\frac{1}{e^{\beta(k+\mu)}+1}dk. \tag{C.5}$$

No caso de um gás de gluons $\mu=0$ e $\theta=-1$, então

$$p_g\left(T,\mu\right)=\frac{g_g}{6\pi^2}\int_0^\infty k^3\frac{1}{e^{\beta k}-1}dk. \tag{C.6}$$

Usando as relações C.4, C.5 e C.6, podemos escrever a pressão do gás de quarks e gluons da seguinte forma:

$$p\left(T,\mu\right)=\frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty k^3\left(\frac{g_q}{e^{\beta(k-\mu)}+1}+\frac{g_{\bar{q}}}{e^{\beta(k+\mu)}+1}+\frac{g_g}{e^{\beta k}-1}\right)dk. \tag{C.7}$$

Expandindo em série de potências a função de distribuição de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, temos:

$$\frac{1}{e^{\beta(k-\mu)}+1}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-1\right)^j e^{j\beta(k-\mu)}\quad se\ \ \beta\left(k-\mu\right)<0, \tag{C.8}$$

$$\frac{1}{e^{\beta(k-\mu)}+1}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(-1\right)^{j+1} e^{j\beta(\mu-k)}\quad se\ \ \beta\left(\mu-k\right)<0, \tag{C.9}$$

$$\frac{1}{e^{\beta(k+\mu)}+1}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(-1\right)^{j+1} e^{-j\beta(k+\mu)}\quad se\ \ \beta\left(k+\mu\right)>0 \tag{C.10}$$

e

$$\frac{1}{e^{\beta k}-1}=\sum_{j=1}^{\infty}e^{-j\beta k}\quad se\ \ \beta k>0. \tag{C.11}$$

Substituindo as séries C.8, C.9, C.10 e C.11 em C.7 e integrando termo a termo, encontramos que

$$p\left(T,\mu\right)=\frac{g}{6\pi^2}\left(\frac{\mu^4}{4}+6T^2\mu^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}+12T^4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^4}\right)+\frac{g_gT^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4} \tag{C.12}$$

onde consideramos $g_q=g_{\bar{q}}=g$. Os valores das séries numéricas são dados por[26]:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}=\frac{\pi^2}{12}, \tag{C.13}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^4}=\frac{7\pi^4}{720}, \tag{C.14}$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{C.15}$$

Finalmente, substituindo o valor das séries numéricas C.13, C.14 e C.15 na relação C.12, encontramos a pressão de um gás de quarks e gluons no regime ultra-relativístico, ou seja,

$$p\left(T,\mu\right)=\frac{g\mu^4}{24\pi^2}+\frac{gT^2\mu^2}{12}+\frac{7gT^4\pi^2}{360}+\frac{g_gT^4\pi^2}{90}. \tag{C.16}$$

Apêndice D

Formulação variacional

Aplicando o princípio variacional à ação 3.1, sob vínculos dados pelas equações 3.2, 3.3 e 3.4, temos:

$$\delta A = \delta \int \left[-\epsilon \left(n_B, s \right) + \lambda \partial_\nu \left(n_B u^\nu \right) + \zeta \partial_\nu \left(s u^\nu \right) - \frac{1}{2} \omega \left(u^\nu u_\nu - 1 \right) \right] d^4 x = 0 \tag{D.1}$$

onde λ, ζ e ω são multiplicadores de Lagrange e funções arbitrárias de x. A partir da equação D.1 obtemos as equações de Lagrange:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial \left(\partial_\nu \eta_j \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial \eta_j} = 0 \tag{D.2}$$

onde

$$\mathcal{L}_{ef} \left(\vec{\eta} \right) = -\epsilon \left(n_B, s \right) + \lambda \partial_\nu \left(n_B u^\nu \right) + \zeta \partial_\nu \left(s u^\nu \right) - \frac{1}{2} \omega \left(u^\nu u_\nu - 1 \right) \tag{D.3}$$

e

$$\vec{\eta} = \left(n_B, s, u^\nu, \lambda, \zeta, \omega \right). \tag{D.4}$$

Na relação D.3, $\mathcal{L}_{ef}$ é denominada densidade de lagrangiana efetiva e as variáveis $n_B, s, u^\nu, \lambda, \zeta$ e ω são consideradas independentes[1]. As equações de Lagrange; associadas às coordenadas λ, ζ e ω; são as equações de vínculo 3.2, 3.3 e 3.4. No caso das variáveis n_B, s e u^ν temos, respectivamente, as seguintes equações:

$$\mu + u^\nu \partial_\nu \lambda = 0, \tag{D.5}$$

$$T + u^\nu \partial_\nu \zeta = 0 \tag{D.6}$$

e

$$n_B \partial_\nu \lambda + s \partial_\nu \zeta + \omega u_\nu = 0. \tag{D.7}$$

Nas equações D.5 e D.6 utilizamos as relações termodinâmicas $\mu = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_B}\right)_s$ e $T = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s}\right)_{n_B}$. Multiplicando ambos os lados de D.7 por u^ν e usando as relações 3.4, D.5 e D.6 encontramos que

$$\omega = n_B \mu + sT = \epsilon + p \tag{D.8}$$

onde p é a pressão. Vemos em D.8 que ω é a densidade de entalpia. Multiplicando D.7 por u_σ, temos:

$$\omega u_\sigma u_\nu = -n_B u_\sigma \left(\partial_\nu \lambda\right) - s u_\sigma \left(\partial_\nu \zeta\right). \tag{D.9}$$

Tomando a divergência em D.9 e usando as relações 3.2 e 3.3, chegamos à seguinte expressão:

[1] Devemos considerar também que $\delta \vec{\eta} = 0$ na região de contorno.

$$\partial^{\sigma}\left(\omega u_{\sigma}u_{\nu}\right)=-n_{B}u_{\sigma}\left(\partial^{\sigma}\partial_{\nu}\lambda\right)-su_{\sigma}\left(\partial^{\sigma}\partial_{\nu}\zeta\right). \tag{D.10}$$

Vemos, ainda, que:

$$n_{B}u_{\sigma}\left(\partial^{\sigma}\partial_{\nu}\lambda\right)=n_{B}\partial_{\nu}\left(u_{\sigma}\partial^{\sigma}\lambda\right)-n_{B}\left(\partial^{\sigma}\lambda\right)\left(\partial_{\nu}u_{\sigma}\right)=-n_{B}\partial_{\nu}\mu-n_{B}\left(\partial^{\sigma}\lambda\right)\left(\partial_{\nu}u_{\sigma}\right) \tag{D.11}$$

e

$$su_{\sigma}\left(\partial^{\sigma}\partial_{\nu}\zeta\right)=-s\partial_{\nu}T-s\left(\partial^{\sigma}\zeta\right)\left(\partial_{\nu}u_{\sigma}\right). \tag{D.12}$$

Portanto, podemos escrever D.10 da seguinte forma:

$$\partial^{\sigma}\left(\omega u_{\sigma}u_{\nu}\right)=n_{B}\partial_{\nu}\mu+s\partial_{\nu}T-\left(\partial_{\nu}u_{\sigma}\right)u^{\sigma}\omega. \tag{D.13}$$

Usando a relação de Gibbs-Duhem, $dp=sdT+n_{B}d\mu$, e notando que $\left(\partial_{\nu}u_{\sigma}\right)u^{\sigma}=0$, encontramos, finalmente, que

$$\partial^{\sigma}\left(\omega u_{\sigma}u_{\nu}\right)=\partial_{\nu}p, \tag{D.14}$$

ou seja,

$$\partial^{\sigma}T_{\sigma\nu}=0 \tag{D.15}$$

onde

$$T_{\sigma\nu}=\omega u_{\sigma}u_{\nu}-g_{\sigma\nu}p \tag{D.16}$$

é o tensor energia-momento do fluido ideal.

Referências Bibliográficas

[1] C. E. Aguiar, T. Kodama, T. Osada, and Y. Hama, J. Phys. **G27**, 75 (2001).

[2] H. J. Drescher, S. Ostapchenko, T. Pierog, and K. Werner, Phys. Rev. **C65**, 054902 (2002).

[3] Y. Hama, T. Kodama, and J. Socolowski, O., Braz. J. Phys. **35**, 24 (2005).

[4] J. Socolowski, O., F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. **93**, 182301 (2004).

[5] Y. Hama *et al.*, Nucl. Phys. **A774**, 169 (2006).

[6] Y. Hama *et al.*, AIP Conf. Proc. **828**, 485 (2006).

[7] R. Andrade *et al.*, (2005), nucl-th/0511021.

[8] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. **17**, 51 (1953).

[9] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955), veja em 'Collected papers of L. D. Landau' (ed. D. Ter-Haar, Pergamon, Oxford, 1965) pag. 665.

[10] W. Rindler, *Introduction to Special Relativity* (Oxford University Press Inc., 1991), second ed.

[11] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press Ltd., 1959), first ed.

[12] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stoecker, and W. Greiner, Z. Phys. **C51**, 485 (1991).

[13] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner, and S.-N. Yang, Phys. Rev. **C56**, 2210 (1997).

[14] P. A. Tipler and R. A. Llewellyn, *Física Moderna* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2001).

[15] J. Sollfrank and U. W. Heinz, (1995), nucl-th/9505004.

[16] Z. Fodor and S. D. Katz, JHEP **03**, 014 (2002).

[17] F. Cooper and G. Frye, Phys. Rev. **D10**, 186 (1974).

[18] F. Grassi, Braz. J. Phys. **35**, 52 (2005).

[19] F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Lett. **B355**, 9 (1995).

[20] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **181**, 375 (1977).

[21] H.-T. Elze, Y. Hama, T. Kodama, M. Makler, and J. Rafelski, J. Phys. **G25**, 1935 (1999).

[22] B. B. Back *et al.*, Braz. J. Phys. **34**, 829 (2004).

[23] PHOBOS, B. B. Back *et al.*, Phys. Lett. **B578**, 297 (2004).

[24] PHOBOS, B. B. Back *et al.*, Phys. Rev. **C72**, 051901 (2005).

[25] T. Hirano and K. Tsuda, Phys. Rev. **C66**, 054905 (2002).

[26] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (ed. Alan Jeffrey, 1994).