

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

TEMPO DE RETORNO EM SISTEMAS DINÂMICOS

Eduardo Goldani Altmann

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Físicas.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê L. Caldas (IF-USP)

Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar (IFGW-UNICAMP)

Prof. Dr. Ricardo L. Viana (Dep. Física-UFPR)

São Paulo

2004

Para meu avô Friedhold Altmann,
que também apreciava física.
E para minha irmã Julia,
que também sofre com matemática.

Agradecimentos

Ao Iberê pela orientação no trabalho e na minha carreira, pela autonomia dispensada, pelo respeito às minhas opiniões e pela amizade.

Ao instituto de física da USP, pelo ambiente diversificado. À FAPESP (processo número 01/10920-2) e à sociedade paulista e brasileira pelo financiamento.

Aos funcionários do departamento de física aplicada, pela ajuda e ambiente amistoso.

Aos professores Nelson F. Ferrara, pela indicação, Celso Grebogi, por uma oportunidade e George Morales (UCLA) pela atenção e pelos dados experimentais concedidos (ainda que não constem na dissertação).

A todos colegas caóticos, especialmente os da sala 232 do edifício Basilio Jafet, pela agradável convivência, pelo interesse no meu trabalho, pelas discussões (nem sempre de física) e pela ajuda nas mais diversas questões: Alberto, Elton, Gisele, Gustavo, Jefferson, Murilo, Renê, Sílvio. Ao André Ferreira, pelos dados experimentais do TCABR e pelas explicações pacientes. Ao Fábio Palladino por passar o bastão. Ao Rafael, por compartilharmos o melhor e o pior da vida acadêmica.

Aos meus colegas que vêm contribuindo de forma marcante para minha formação desde a graduação: Daniel, Gabriel, Gustavo, Priscilla, Regina, Ricardo e Urbano.

Aos enxadrezistas do FICS (<http://www.freechess.org>), pelos melhores momentos do dia.

À comunidade desenvolvedora do software livre, por tornarem minhas horas em frente ao computador mais toleráveis.

Aos meus pais Werner e Ana Maria pelo apoio. Ao meu irmão Ricardo, pela paciência e pelas discussões que marcaram nossa convivência.

À Gabi, pelo companheirismo e pelos bons momentos ao longo desses anos.

Por fim, e especialmente, ao Elton C. da Silva cuja participação no trabalho é, ao mesmo tempo, de co-autor e co-orientador. Já que os créditos desse trabalho não são possíveis, fica registrado o meu reconhecimento e minha gratidão.

E no curso de cada vida humana haverá sempre uma hora em que, primeiro a um, depois a muitos e depois a todos, lhes iluminará a idéia mais poderosa de todas, a idéia do eterno retorno de todas as coisas: essa será para a humanidade a hora do meio dia.

Friedrich Nietzsche, *O Eterno Retorno* (1881).

Resumo

Altmann, E. G. Tempo de retorno em sistemas dinâmicos, Dissertação (Mestrado), Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

Estudamos nesta dissertação o tempo de recorrência em sistemas dinâmicos, concentrando-nos na estatística do tempo de retorno. Calculamos numericamente a distribuição de tempo de retorno a uma região específica do espaço de fases de sistemas caóticos e comparamos com a distribuição binomial, deduzida para um processo aleatório. Os principais resultados obtidos foram: surgimento do efeito que denominamos memória de curto alcance, típico de sistemas determinísticos e associado à distribuição das órbitas periódicas instáveis; a distribuição de tempo de retorno caracteriza as principais propriedades temporais no caso de sistemas intermitentes. As conexões do tempo de retorno com regimes de transporte anômalo foram apresentadas, ressaltando suas limitações. O tempo de retorno foi utilizado ainda para analisar séries temporais, obtidas tanto de um modelo de mistura de um contaminante escalar passivo, como experimentalmente no plasma confinado magneticamente. No primeiro caso constatamos que os retornos da série temporal assemelham-se às recorrências no espaço de fases do sistema dinâmico responsável pela mistura do contaminante: o mapa padrão com fase aleatória. Constatamos o surgimento de caudas de lei de potência na distribuição de tempo de retorno e calculamos sua dependência com o aumento da não linearidade e da aleatoriedade do sistema. Destacamos o efeito de múltiplas caudas de lei de potência, ausente no caso das distribuições obtidas no espaço de fases. Às séries obtidas em Tokamaks aplicamos o modelo de cascata log-normal para explicar sua função densidade de probabilidade. A distribuição de tempo de retorno destas séries mostrou estar diretamente relacionada com a correlação de curto e longo alcance presente na série.

Palavras chaves: tempo de recorrência de Poincaré, estatística de tempo de retorno, sistemas caóticos, séries temporais, turbulência em plasma.

Abstract

Altmann, E. G. Return time in dynamical systems, Dissertation (Master), Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

We study the recurrence time in dynamical systems. The statistics of the recurrence time to a specific region of the phase space of chaotic dynamical systems were obtained numerically and compared with the binomial-like distribution, deduced for a random process. The main results are: the presence of the so called short time memory effect, typical for deterministic systems and related to the distribution of the unstable periodic orbits; the return time distribution captures the main temporal properties of intermittent systems. The possible connections of the recurrence time statistics to the anomalous transport were presented, with special attention to their limitations. The return time statistics was applied to analyze time series obtained from an Hamiltonian model and from magnetically confined plasma. In the first case we noticed that the recurrences of the series were similar to the recurrences obtained in the phase space of the Hamiltonian dynamical system: the standard map with a random phase. We analyze the dependence of the power-law tails of the distributions with the non-linearity and with the randomness of the system. One effect that appears only in the time series case is the multiple power law tails. We apply the log-normal cascade model to explain the probability density function of the series obtained in Tokamaks. The recurrence time statistics of the series is closely related to the short and long time correlation present on the series.

Keywords: Poincaré recurrence time, return time statistics, chaotic systems, temporal series, turbulence in plasma.

Lista de Siglas

bin	-	canal do histograma
DTR	-	Distribuição de tempo de retorno
EFP	-	Equação de Fokker-Planck
FDP	-	Função densidade de probabilidade
K41 e K62	-	Teorias de A. N. Kolmogorov para a turbulência, desenvolvidas em 1941 e 1962.
MC	-	Matsumoto-Chua
TA	-	Transporte anômalo
TCABR	-	Tokamak Chauffage Alfvén Bresilién
TextUp	-	Texas Tokamak Upgrade
Tokamak	-	Máquina toroidal de confinamento magnético do plasma
TR	-	tempo de retorno
TRP	-	tempo de retorno de Poincaré

Conteúdo

1	Introdução	13
1.1	Panorama	13
1.1.1	Sistemas dinâmicos caóticos	13
1.1.2	Da termodinâmica à mecânica estatística	14
1.1.3	Fusão e confinamento magnético do plasma	15
1.2	A dissertação	17
1.2.1	Motivações e resultados anteriores	17
1.2.2	Desenvolvimentos	18
1.2.3	Ordenamento dos capítulos	18
2	O tempo de recorrência de Poincaré	19
2.1	Recorrências	19
2.1.1	Teorema da recorrência de Poincaré	20
2.1.2	Tempo de retorno	20
2.1.3	O lema de Kac	21
2.2	Distribuição de tempo de retorno	23
2.2.1	A distribuição do tipo binomial	23
2.2.2	Exemplo: série aleatória Gaussiana	25
2.2.3	Dependência do TR médio com o intervalo	25
3	Distribuição de tempo de retorno em sistemas caóticos	29
3.1	Distribuição binomial e memória de curto alcance	29
3.1.1	Resultados para o mapa logístico	30
3.1.2	Órbitas periódicas instáveis	32
3.1.3	Efeito de δ pequeno	34
3.1.4	Validade da distribuição binomial	36
3.2	Atratores estranhos	38
3.2.1	O mapa de Hénon	39
3.2.2	Circuito de Matsumoto-Chua	40
3.3	Sistemas intermitentes	46
3.3.1	Intermitência de Pomeau-Manneville	46
3.3.2	Intermitência induzida por crise	50
3.3.3	Intermitência em sistemas Hamiltonianos	54
4	Conexão entre o tempo de retorno de Poincaré e o transporte anômalo	61
4.1	Mapa padrão com fase aleatória	61
4.1.1	Origens e motivações	61
4.1.2	Caracterização do modelo	64
4.2	Transporte no modelo	65

4.2.1	Transporte difusivo	65
4.2.2	Transporte anômalo	68
4.2.3	Explorando o modelo	69
4.2.4	Modos balísticos	72
4.3	Sistemas em que o TR caracteriza o TA	75
4.3.1	Ilhas fractais	76
4.3.2	Aprisionamento na rede	78
4.3.3	Passeios aleatórios e vôos de Lévy	78
4.3.4	Discussões finais	79
5	Tempo de retorno em séries temporais	83
5.1	Série temporal no modelo	83
5.1.1	Contaminante escalar passivo	84
5.1.2	Obtenção da série temporal no modelo	86
5.2	Análises preliminares	87
5.2.1	Espectro de Fourier	87
5.2.2	Função de autocorrelação	89
5.2.3	Função densidade de probabilidades	90
5.2.4	Medida do intervalo de retorno	91
5.3	Distribuição de tempo de retorno	93
5.3.1	Distribuição de TR em séries temporais	94
5.3.2	A distribuição de TR típica	96
5.3.3	A dependência da distribuição de TR com os parâmetros	97
5.4	Analogia com o TR no espaço de fases	101
5.4.1	Regiões de retorno no espaço de fases	102
5.4.2	Movimento no espaço de fases	103
5.4.3	Múltiplas caudas	105
5.5	Considerações finais	109
5.5.1	Comparação entre as distribuições de TR	109
5.5.2	Reinterpretação dos resultados	111
6	Análise no plasma	113
6.1	Validade e limitações do modelo para o Tokamak	113
6.1.1	Mapa padrão com fase aleatória	113
6.1.2	Transporte e aprisionamento	115
6.1.3	Séries analisadas	116
6.2	Dados experimentais do TextUp	116
6.3	Dados experimentais do TCABR	119
6.3.1	Descrição geral dos dados	119
6.3.2	Potencial flutuante	122
6.3.3	Densidade	126
7	Conclusões	129
7.1	Tempo de retorno em sistemas caóticos	129
7.2	Análise de séries temporais	129
7.2.1	Visão inicial sobre o problema do TR	130
7.2.2	Resultados para a série de contaminante	130
7.2.3	Resultados obtidos para séries do plasma	131
7.3	Áreas correlatas e complementações	131

7.3.1	Outras quantificações temporais	132
7.3.2	Mapas <i>non twist</i>	133
7.3.3	Processos estocásticos	133
7.3.4	Mistura de contaminante	133
7.3.5	Análise de séries temporais	134
Apêndices		135
A Função densidade de probabilidade de sistemas caóticos		137
A.1	Mapa padrão no regime de alta estocasticidade	137
A.2	Mapa logístico	138
B Distribuição Poisson para o tempo de retorno		139
C Modelo log-normal para a FDP de sistemas turbulentos		142
C.1	A teoria de Kolmogorov para a turbulência	142
C.2	O modelo log-normal	144
C.3	Análise dos dados do TCABR	147
Bibliografia		151

Capítulo 1

Introdução

A presente dissertação consiste em um estudo das recorrências em sistemas dinâmicos. Por recorrência pensamos o retorno do estado de um sistema físico, ou o valor de uma série temporal, a uma determinada configuração pré-estabelecida após um intervalo de tempo. Ainda que o tema da dissertação seja colocado nesta forma restrita, as motivações iniciais, bem como os resultados finais, relacionam-se com áreas amplas da física. A contextualização deste trabalho, que pretendemos realizar neste capítulo introdutório, passa por estabelecer tanto as linhas gerais das áreas da física relacionadas com o estudo como pela descrição dos resultados anteriores que motivaram este problema específico.

1.1 Panorama

Afim de fornecer um panorama introdutório das teorias física relacionadas ao nosso trabalho, descreveremos a seguir sucintamente o surgimento do caos determinístico, a passagem da termodinâmica à mecânica estatística e o problema do confinamento magnético do plasma. Os dois primeiros tópicos relacionam-se de forma imediata com os sistemas dinâmicos que estudamos e com a motivação do problema. Já a física de plasma aparece como exemplo de aplicação, tanto devido a obtenção de sistemas dinâmicos de interesse como pelas séries temporais experimentais que analisamos.

1.1.1 Sistemas dinâmicos caóticos

A partir do advento da mecânica clássica, tornou-se dominante a descrição dos fenômenos físicos e astronômicos por sistemas dinâmicos determinísticos. Tais sistemas têm suas trajetórias univocamente estabelecidas, fixada sua condição inicial, uma vez que a regra de evolução é fixa. A resolução do problema de Kepler (dois corpos submetidos à atração gravitacional) a partir da lei da gravitação universal de Newton pareceu dar uma interpretação mais fundamental para as órbitas planetárias, estabelecendo-se assim a primazia da descrição dinâmica sobre a geométrica não só nos fenômenos do céu como também nos da terra. É interessante notar, no entanto, que muitas das propriedades dos sistemas dinâmicos que utilizaremos neste trabalho permaneceram ignoradas até meados do século XX, ainda que estivessem contidas em equações diferenciais conhecidas desde há três séculos. Isso se deve à dificuldade de um tratamento analítico das equações não lineares que, segundo a nomenclatura atual, descrevem propriedades caóticas.

Os trabalhos de Poincaré no famoso problema de três corpos (1892-1898) anteciparam muitas das características inovadoras da teoria do caos [Ruelle, 1991]. Os desenvolvimentos na primeira

metade do século XX também são inegáveis, especialmente na fundamentação matemática.¹ Em 1890, pouco antes de abordar o problema de três corpos, Poincaré enunciou seu famoso teorema da recorrência (veja item 2.1.1 a seguir), marco inicial do estudo da recorrência em sistemas dinâmicos, tema desta dissertação. Notamos assim a proximidade histórica do surgimento do caos determinístico e do estudo da recorrência, que certamente não é fortuita.

No entanto, do ponto de vista do desenvolvimento do caos determinístico, é somente a partir da integração numérica de equações diferenciais não lineares, possibilitada pelo desenvolvimento dos modernos computadores (por exemplo, no trabalho pioneiro de [Lorenz, 1963] em meteorologia), que pôde ficar claro o quanto eram surpreendentes, dramáticas e gerais as consequências das não linearidades. Os vigorosos trabalhos da década de 1970 vieram concretizar o surgimento da área que hoje denominamos caos determinístico e que ampliou a compreensão da ciência moderna [Grebogi e Yorke, 1997].

Além da divergência de trajetórias semelhantes devido à sensibilidade às condições iniciais, que limita em grande parte as consequências do determinismo, uma das características mais inovadoras explicitadas pela teoria do caos é a obtenção de comportamentos bastante “complicados” e ricos a partir de sistemas dinâmicos extremamente simples. Características que eram atribuídas a processos aleatórios (estocásticos) ou à sistemas complicados surgiram em sistemas determinísticos de baixa dimensão. Uma analogia imediata desses sistemas foi buscada com sistemas turbulentos, por exemplo com Landau e Hopf, antes mesmo do estabelecimento da teoria do caos [Ferrara e do Prado, 1994]. Hoje está claro que os fenômenos caóticos desempenham um papel fundamental na turbulência, ainda que esta seja mais complexa, e de difícil classificação, sendo sistemas caóticos com poucos graus de liberdade insuficientes para a descrição de toda fenomenologia da turbulência [Bergé et al., 1984, Grebogi e Yorke, 1997].

Ainda que originalmente as primeiras descobertas teóricas e experimentais tenham sido feitas em áreas da física (ou correlatas, como a meteorologia, astronomia, etc...) foram necessários poucos anos para que os instrumentos da teoria do Caos fossem aplicados, teórica e experimentalmente, à química, biologia, engenharia, psicologia, medicina, economia, entre outras áreas [Grebogi e Yorke, 1997, Nussenzveig, 1999].

1.1.2 Da termodinâmica à mecânica estatística

Apesar do estudo da recorrência ter sua origem próxima aos primórdios da teoria do caos, ela se popularizou a partir do debate sobre os fundamentos da mecânica estatística. Uma distinção importante entre os sistemas estudados pela teoria do caos e pela mecânica estatística refere-se ao número de graus de liberdade. Enquanto que a primeira lida com um número pequeno (dificilmente maior que uma dezena) a segunda trabalha com um número muito grande (limite termodinâmico²).

Ao longo do século XIX os estudos sobre os processos de troca de calor, transição de fase e rendimento de máquinas térmicas haviam adquirido um acúmulo de conhecimentos e um grau de sofisticação que tornava claro que a física já dispunha de uma nova teoria, a termodinâmica. Na segunda metade desse mesmo século, é desenvolvida a mecânica estatística, que procura estabelecer uma explicação microscópica mecanicista para os fenômenos macroscópicos descritos pela termodinâmica. A partir de uma hipótese atomística simplificada que, a rigor, pouco diferia das hipóteses dos gregos antigos, a mecânica estatística foi capaz de explicar, e até mesmo prever com uma precisão incrível, diversos resultados macroscópicos [Lebowitz, 1999].

¹Um bom exemplo desses trabalhos, que muitas vezes pareceu esquecido, são os da escola russa [Bergé et al., 1995].

²O limite termodinâmico caracteriza-se pelos limites do número de partículas $\rightarrow \infty$, volume $\rightarrow \infty$ mas com a razão entre essas grandezas constante.

Um dos problemas de compatibilizar a mecânica estatística à termodinâmica, que foi motivo de diversos questionamentos e paradoxos aparentes ainda no século XIX, envolvia a questão da irreversibilidade. A termodinâmica tem como uma de suas leis básicas (a segunda) o crescimento monotônico da entropia com o tempo, enquanto as leis da mecânica são invariantes pela reversão temporal. Este conflito, no entanto, é suavizado se levarmos em conta que na realidade a termodinâmica não se reduz à mecânica estatística. Os resultados principais passam a ter uma nova interpretação estatística. No caso da entropia, por exemplo, esta passa a ter uma probabilidade muito pequena de diminuir com o tempo. As disputas e discussões sobre os fundamentos da mecânica estatística permanecem até hoje e invariavelmente envolvem a questão da reversibilidade dos processos dinâmicos. Neste contexto, a recorrência em sistemas termodinâmicos passa a ser importante uma vez que retornos a uma determinada posição do espaço de fases resultam em retornos no valor da entropia, o que violaria a segunda lei da termodinâmica³. Neste trabalho, o problema da irreversibilidade é colocado de forma implícita no capítulo 4, quando aplicamos equações cinéticas (de difusão ou de Fokker-Planck), que apresentam uma direção temporal preferencial, a um sistema Hamiltoniano, invariante por reversão temporal.

É interessante notar que, tanto o desenvolvimento da teoria do caos, mencionados acima, quanto as controvérsias sobre os fundamentos da mecânica estatística possuem uma considerável independência em relação à mecânica quântica, desenvolvida nas primeiras décadas do século XX. No caso da mecânica estatística, onde efeitos quânticos são fundamentais na maioria dos fenômenos, nenhuma modificação importante em sua estrutura formal foi necessária para acomodá-los. Já aplicação da teoria do caos aos casos quânticos (área denominada também de caos quântico) é mais difícil uma vez que o conceito de trajetória, tão caro ao caos determinístico, inexistente nos fenômenos quânticos. Pretendemos argumentar assim que não há nenhuma simplificação ou menor interesse pelos estudos aqui desenvolvidos pelo fato dos sistemas serem perfeitamente clássicos (no sentido de não serem quânticos).

1.1.3 Fusão e confinamento magnético do plasma

A física de plasma tem se desenvolvido desde a década de 1950 estimulada (e financiada) pela perspectiva da geração de energia a partir da fusão termonuclear controlada. O processo de fusão, ao contrário da fissão nuclear utilizadas nas atuais usinas, consiste na formação de um núcleo atômico pesado a partir da junção de dois núcleos mais leves. Quando a diferença de massas entre o estado final e inicial for negativa, existe a emissão de energia ($E = mc^2$). A reação de fusão que requer menor temperatura e libera maior quantidade de energia é a que envolve os isótopos do Hidrogênio, deutério (D) e trítio (T) [Gross, 1984]:



Esse mecanismo de geração de energia é o mesmo que ocorre nas estrelas e na bomba de Hidrogênio. No entanto, sua aplicação para fins pacíficos requer que o processo ocorra de forma controlada. Um reator projetado para a produção de 1 GW requer uma temperatura dos íons de $T = 1,2 \times 10^{11} K$, e o produto da densidade com o tempo de confinamento da energia do plasma (número de Lawson) da ordem de $\eta \cdot \tau_e \approx 2 \cdot 10^{20} \frac{s}{m^3}$. As indicações são que dessa forma seria possível a geração de energia de forma não poluente a partir de matéria prima abundante. Apesar dessa perspectiva tentadora para um mundo crescentemente industrializado e urbano, uma série de dificuldades inesperadas, de natureza tanto técnica quanto básica, vêm adiando sua concretização desde a década de 1950. Ainda que a geração comercial de energia pela fusão permaneça longe de ser alcançada, a tentativa de superação das dificuldades surgidas resultou em importantes descobertas e desenvolvimentos da física. Os avanços mais notáveis possivelmente se

³Este é o paradoxo de Zermelo que será discutido em mais detalhe no item 2.1.2.

encontram na física de plasmas, estado da matéria obtido a temperaturas e densidades elevadas e que compõe a imensa maioria da matéria bariônica do universo.

Ao contrário das estrelas, que mantém o plasma confinado graças à sua própria força gravitacional, o confinamento do plasma em laboratório têm sido realizado a partir de dois métodos principais: inerciais e magnéticos. Nos concentramos na análise do segundo caso, relacionado aos nossos estudos. Diversos mecanismos de confinamento magnético têm sido propostos [Ferrara e Nascimento, 1987], e a máquina que mais têm alimentado as esperanças de atingir uma reação auto sustentada ($E^{(produzida)} \geq E^{(injetada)}$) é o Tokamak⁴, ilustrado na figura 1.1.

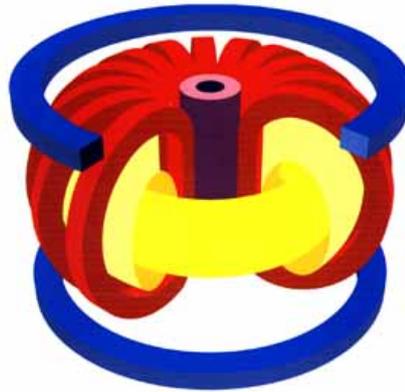


Figura 1.1: Desenho ilustrativo de um Tokamak, máquina toroidal de confinamento magnético do plasma. O plasma, no centro, é confinado e controlado a partir de campos magnéticos gerados por correntes nas espiras e pela corrente de plasma.

No caso do Tokamak, importantes limitações para o confinamento do plasma são: o surgimento de instabilidades no plasma e um transporte de partículas contra a parede do Tokamak, fazendo assim com que o plasma perca energia e esfrie [Callen et al., 1992]. Ainda que a compreensão teórica dos processos dinâmicos do plasma não esteja em um nível satisfatório, recentes estudos mostram que a turbulência na borda de plasmas confinados em Tokamaks desempenham um papel importante para a determinação do tempo de aprisionamento e o transporte das partículas [Wootton et al., 1990]. As medidas de transporte de partículas para fora da área de confinamento mostram que ele é consideravelmente maior do que o indicado pelas teorias neo-clássicas, que levam em conta apenas as interações coulombianas entre as partículas.

Estamos portanto particularmente interessados no estudo do plasma na borda do plasma, onde ocorre a perda de partículas energéticas e onde as informações experimentais são mais acessíveis, inclusive através de séries temporais da densidade e dos campos \vec{E} e \vec{B} obtidos a partir de sondas. É também nesse domínio que valem os modelos de sistemas dinâmicos Hamiltonianos que têm sido propostos para descrever as linhas de campo magnéticos na borda do plasma, aos quais as partículas seguem em primeira aproximação.

O estudo do transporte de partículas no plasma confinado magneticamente permanece um problema de grande interesse. Duas maneiras distintas de abordá-lo têm predominado, sendo que a segunda é a que está subjacente aos trabalhos com mapas simpléticos (conservativos, Hamiltonianos) nos quais nos baseamos:

- (i) As linhas de campo magnético possuem uma forma simples (integrável) mas o movimento das partículas é complexo.

⁴O nome Tokamak deriva do termo russo que designa câmara magnética toroidal.

- (ii) As linhas de campo magnético apresentam uma forma complexa (caótica) e das partículas seguem aproximadamente essas linhas.

Parece claro que uma descrição adequada do plasma teria que conter componentes das duas abordagens, dependendo do regime de operação do Tokamak e das partículas que queremos descrever. A segunda delas, por exemplo, aplica-se mais naturalmente às partículas leves (elétrons) e rápidas uma vez que nesse caso o tempo entre colisões de partículas é menor que o tempo típico de órbita em torno do toróide.

É a partir de modelos Hamiltonianos não lineares para as linhas de campo magnético no Tokamak (como o do limitador ergódico⁵) que o problema do confinamento de partículas do plasma se conecta aos tópicos descritos anteriormente. Na realidade o movimento do plasma no Tokamak é, em muitos casos, turbulento sendo válidos os comentários realizados acima sobre as limitações de um modelo caótico para descrever tal situação. O problema da turbulência consiste em um dos mais persistentes da física e está longe de ser compreendido. A abordagem tradicional está relacionada aos trabalhos clássicos de Kolmogorov [Frisch, 1995] mas aparecerá nesta dissertação de forma marginal quando tratamos das séries experimentais no apêndice C, onde encontra-se uma introdução ao problema.

1.2 A dissertação

Nos concentramos agora nos trabalhos realizados especificamente nesta dissertação. A compreensão dos resultados obtidos passa necessariamente por uma explicação dos objetivos que este estudo se propunha inicialmente. Para realizar esta contextualização parece ser necessário apresentar os resultados obtidos anteriormente em nosso grupo.

1.2.1 Motivações e resultados anteriores

O presente trabalho dá continuidade aos trabalhos que vêm sendo desenvolvido em nosso grupo nos últimos anos. Um dos interesses centrais do grupo é a análise teórica e experimental das oscilações do plasma confinado magneticamente.

Um trabalho que está sendo realizado há vários anos diz respeito à obtenção de um mapa simplético (Hamiltoniano) que descreva as linhas de campo magnético no Tokamak com limitador ergódico (veja o trabalho de revisão [Caldas et al., 2002]). Ainda que os sistemas utilizados nesta dissertação sejam mais simples, é importante ressaltar que de forma subjacente pensamos na conexão entre os sistemas Hamiltonianos e as linhas de campo magnético no Tokamak.

Mais recentemente dois trabalhos serviram de motivação direta ao projeto aqui desenvolvido. Em um outro estudo de mestrado [Palladino, 1998] foi abordado o problema da mistura de um contaminante escalar passivo sob ação do mapa padrão com fase aleatória (veja seções 4.1 e 5.1.1 a seguir). Por outro lado, uma série de estudos concentraram-se na análise das recorrências em séries temporais do plasma [Baptista et al., 2001a, Baptista et al., 2001b], do mercado financeiro [Baptista e Caldas, 2000, Baptista e Caldas, 2002] entre outras [Baptista et al., 2000].

O primeiro objetivo a que este mestrado se propunha era relacionar esses dois estudos através da comparação das recorrências de uma série temporal obtida no modelo estudado em [Városi et al., 1991, Palladino, 1998] com os resultados obtidos dos dados experimentais. Um segundo passo previsto seria a utilização de mapas simpléticos mais realistas ao qual seria feito uma abordagem semelhante à realizada no mapa padrão: introdução de uma fase aleatória e estudo das recorrências. Tinha-se em mente ainda, a possibilidade da associação da estatística de tempo de retorno com propriedades de transporte, como sugerido em [Zaslavsky e Tippet, 1991].

⁵Dispositivo utilizado para aumentar o confinamento do plasma [Caldas et al., 2002] que será abordado em mais detalhes no capítulo 6.

1.2.2 Desenvolvimentos

Os cálculos relativos à estatística de tempo de retorno para o modelo escolhido foram feitos com sucesso e estão descritos integralmente no capítulo 5. A tentativa de realizar uma comparação com os resultados experimentais, bem como de tentar uma associação com os regimes de transporte, levaram-nos a um estudo mais aprofundado do significado do tempo de retorno de um sistema dinâmico. Este estudo provocou uma alteração da interpretação dos resultados anteriores e uma mudança nos rumos da dissertação.

Acreditamos que uma das principais contribuições deste trabalho tenha sido o de esclarecer alguns pontos acerca do estudo do tempo de retorno em sistemas dinâmicos caóticos bem como da interpretação dos cálculos realizados para séries temporais experimentais. É por isso que a dissertação versa sobre o tempo de retorno em sistemas dinâmicos enquanto que os aspectos relacionados à física de plasma aparecem somente no final (capítulo 6), após uma série de considerações sobre o significado da aplicação da estatística de tempo de retorno à séries temporais. As respostas que obtivemos aos questionamentos mencionados acima serão retomadas somente na conclusão (item 7.2.1).

Apesar de abordarmos de forma direta ou indireta os pontos acima mencionados, tomamos como ponto de referência para a redação desta dissertação o tempo de recorrência. Enfatizamos as origens do seu estudo bem como os principais resultados matemáticos, com especial atenção para a estatística de tempo de retorno. Ao calcularmos numericamente a distribuição de tempo de retorno em diferentes sistemas caóticos foi possível compreender os diferentes efeitos surgidos bem como seus significados em cada um dos casos. Discutimos ainda uma das características de grande interesse no cálculo do tempo de retorno, sua conexão com o transporte anômalo. Somente nos últimos capítulos da dissertação tratamos de nos aproximar novamente das situações experimentalmente factíveis quando voltamos a nos aproximar do projeto inicial. Calculamos assim o tempo de retorno no modelo escolhido bem como em séries temporais experimentais do plasma.

1.2.3 Ordenamento dos capítulos

Em termos dos capítulos temos inicialmente (capítulo 2) os resultados matemáticos e definições relacionados ao problema da recorrência. No capítulo 3 as distribuições de tempo de retorno de diversos sistemas dinâmicos caóticos são comparadas. As conexões entre o tempo de retorno e o transporte anômalo são exploradas no capítulo 4, após o estudo do mapa padrão com fase aleatória. Esta é a dinâmica subjacente ao modelo que nos propomos a estudar inicialmente e que é finalizado no capítulo 5, quando introduzimos um contaminante escalar passivo e calculamos em detalhe os tempos de retorno da série temporal obtida. Do ponto de vista do estudo das recorrências a função deste capítulo é permitir-nos a comparação entre o tempo de retorno calculado no espaço de fases e aquele obtido em séries temporais. Por fim, capítulo 6, calculamos a distribuição de tempo de retorno no caso de séries temporais obtidas no plasma. As conclusões do trabalho, bem como possíveis continuações, são indicadas no capítulo 7.

Do corpo central da dissertação (capítulos 2-6) os capítulos 2 e 4 apresentam majoritariamente a interpretação e reprodução de resultados já conhecidos na literatura, enquanto que nos capítulos 3 e 5 predominam resultados originais. No capítulo 6, bem como no apêndice C, aplicamos métodos conhecidos para a análise de dados experimentais. A ordem escolhida para a apresentação dos resultados, que priorizou os aspectos ligados ao problema do tempo de retorno, não prejudica a leitura fragmentada da dissertação. Acreditamos que, após a leitura do capítulo 2 os demais capítulos podem ser lidos separadamente (especialmente o 5 e o 6).

Capítulo 2

O tempo de recorrência de Poincaré

Apresentamos neste capítulo os resultados matemáticos e as definições nos quais nos basearemos: teorema da recorrência de Poincaré, o lema de Kac sobre o tempo médio de recorrência e a definição de distribuição de tempo de retorno, deduzida para um processo estocástico sem memória. Por fim exemplificamos a obtenção da distribuição de tempo de recorrência. Considerações sobre as implicações desses resultados na física permeiam as seções.

2.1 Recorrências

Assim como diversos ramos da física, matemática e filosofia da ciência, a idéia de estudar as recorrências de um sistema dinâmico deve-se ao francês Henri Poincaré (1854-1912). A observação da evolução temporal das trajetórias de um sistema dinâmico¹ é feita no espaço de fases já que um ponto deste espaço descreve univocamente o estado do sistema. A idéia de Poincaré, ilustrada didaticamente na Figura 2.1 para o caso de um espaço de fases bi-dimensional, foi observar as recorrências (ou retornos) das trajetórias a uma mesma configuração, isto é, a um mesmo ponto (ou região I) no espaço de fases.

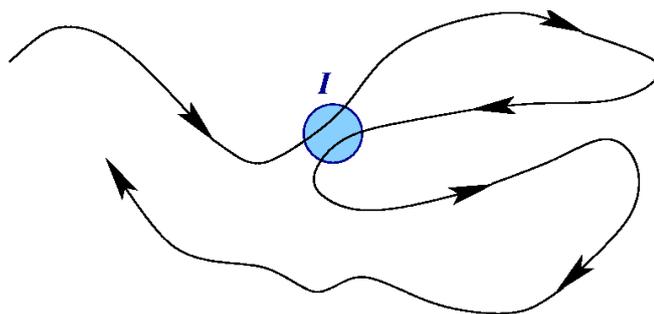


Figura 2.1: Ilustração da recorrência de uma trajetória ao intervalo I do espaço de fases.

O sentido estrito de recorrência é satisfeito dentre os sistemas determinísticos somente no caso de trajetórias periódicas, uma vez que, sendo a regra de evolução fixa e unívoca, um mesmo ponto evolui sempre da mesma forma. Entretanto, o sentido da recorrência de Poincaré é que a trajetória retorna a um ponto δ -próximo à condição inicial. Assim, a trajetória de um sistema é dita recorrente a um intervalo I_δ se, uma vez iniciada no ponto $\vec{X}_0 \in I_\delta$, para $\forall \delta$ existir um

¹ De forma geral um sistema dinâmico é composto por uma regra de evolução, não necessariamente determinística, e uma condição inicial.

tempo t^* tal que, após t^* , a trajetória encontra-se a uma distância $|\vec{X}_{t^*} - \vec{X}_0| \leq \delta$, ou seja, $\vec{X}_{t^*} \in I_\delta$. Neste sentido, Poincaré demonstrou que a recorrência não se restringe aos casos triviais de sistemas periódicos e quasi-periódicos. A partir dessa definição podemos distinguir também uma *recorrência* de uma *recorrência de Poincaré*, sendo que esta última está associada ao retorno a um intervalo infinitesimal no espaço de fases enquanto que a primeira refere-se a uma região arbitrária não necessariamente do espaço de fases do sistema.

2.1.1 Teorema da recorrência de Poincaré

O estudo do tempo de recorrência têm início portanto a partir do teorema da recorrência de Poincaré de 1890, que enunciamos em linguagem moderna a seguir [Kac, 1959] [Cornfeld et al., 1982].

Teorema da Recorrência de Poincaré: Em um conjunto Ω define-se uma medida² positiva μ , com $\mu(\Omega) < \infty$ (por simplicidade adotaremos $\mu(\Omega) = 1$). Suponha que exista um conjunto de transformações ζ_t , um para um de Ω nele mesmo, que preserve a medida. Seja $I \in \Omega$ um subconjunto, tal que $\mu(I) > 0$. Então para quase todo (a menos de um conjunto de medida μ nula) $w \in I$ existe um tempo t tal que $\zeta_t w \in I$.

É possível enfraquecer a condição sobre ζ para que ele seja um *endomorfismo*, isto é, um mapa (não necessariamente um para um) de Ω em si mesmo tal que para qualquer $A \in \Omega$ temos que $\zeta^{-1}A \in \Omega$ e $\mu(A) = \mu(\zeta^{-1}A)$.

No caso de sistemas dinâmicos podemos pensar em Ω como sendo o espaço de fases (ou uma superfície de energia) e ζ como sendo a dinâmica que age neste espaço. O intervalo de recorrência I será definido genericamente pelo conjunto de pontos δ -próximos a um ponto $X_c \in \Omega$. Apesar de demonstrado inicialmente para sistemas Hamiltonianos (que conservam energia) é importante ressaltar, conforme o enunciado acima, sua validade para um conjunto grande de sistemas dinâmicos confinados. No caso dos conjuntos atratores esta propriedade nada mais é que sua própria definição.

2.1.2 Tempo de retorno

O teorema da recorrência de Poincaré garante que, para um conjunto grande de sistemas dinâmicos confinados, as trajetórias retornam infinitas vezes arbitrariamente próximas a quase todos pontos iniciais (a menos de um conjunto de medida- μ nula), formando um conjunto infinito de instantes de retorno. O tempo entre dois retornos consecutivos é definido como o tempo de primeiro retorno. De forma geral o **tempo de r -ésimo retorno** T_i nada mais é que o tempo entre o i -ésimo instante de recorrência e o instante $i+r$ -ésimo (ilustrado para o caso $r = 1$ na Figura 2.2). Um tempo de r -ésimo retorno é apenas um de uma coleção infinita $T_i : i = 1, 2, \dots, \infty$ (o que nos permite denominar cada um desses tempos genericamente de T , omitindo o índice i). Consistentemente com a definição de recorrência de Poincaré, denominaremos *tempo de retorno de Poincaré (TRP)* o tempo de retorno (TR) a um intervalo infinitesimal I do espaço de fases.

O interesse no TRP de um sistema físico foi particularmente despertado pelos debates gerados após o surgimento da mecânica estatística, que pretensamente abrangeria toda a termodinâmica. A essência das objeções levantadas ao projeto de Boltzmann derivavam da assimetria temporal inexistente na mecânica e presente na termodinâmica, explicitada por sua segunda lei que afirma que a entropia cresce monotonicamente com o tempo [Nicolis e Prigogine, 1989, Kac, 1959].

²Utilizaremos sempre a medida natural do sistema, que pode ser pensada como a frequência de visitação da região [Alligood et al., 1996].

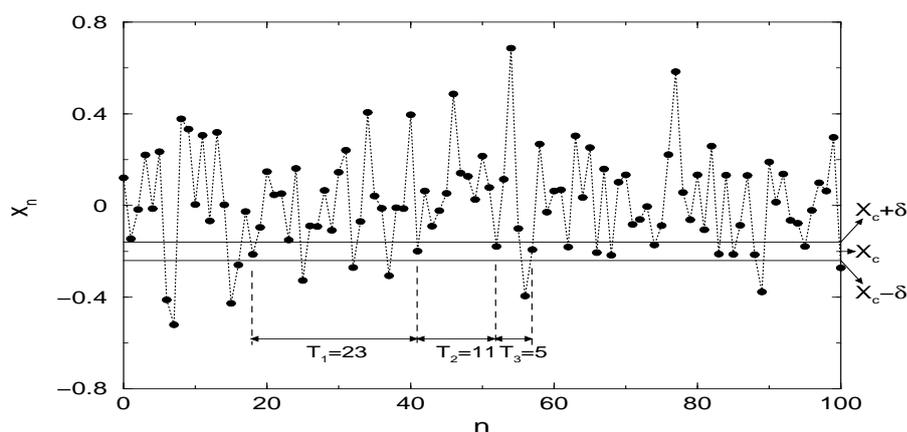


Figura 2.2: Exemplo para o caso unidimensional do *tempo de primeiro retorno* ao intervalo $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$ com $X_c = -0,2$ e $\delta = 0,01$. O sistema utilizado para ilustração é uma série de pontos aleatórios distribuídos de forma Gaussiana

Um dos primeiros paradoxos levantado por Loschmidt sugeria que se todas as velocidades das partículas fossem invertidas, a entropia teria que diminuir, contradizendo a termodinâmica. A aplicação do Teorema da Recorrência de Poincaré a um sistema de interesse da mecânica estatística, realizado por Zermelo, leva a um aparente *paradoxo* similar: se o sistema volta infinitamente a um ponto do espaço de fase o valor da entropia, definido exclusivamente a partir de variáveis dinâmicas do sistema, também irá retornar infinitas vezes a qualquer valor possível [Kac, 1959, Zaslavsky, 1999].

Boltzmann sustentou suas posições argumentando pela impossibilidade prática da reversão das velocidades das moléculas e mostrando que o tempo médio de recorrência para um sistema termodinâmico (muitas partículas) será enorme (muitas vezes maior do que a idade do universo) [Lebowitz, 1999]. A solução de Boltzmann admite portanto a violação da segunda lei da termodinâmica, mas argumenta que estatisticamente ela é muito improvável, ressaltando assim a importância do cálculo do tempo médio de recorrência.

2.1.3 O lema de Kac

A obtenção do tempo médio de primeiro retorno ($r = 1$) para um determinado estado de um sistema dinâmico pode ser feita através do lema de Kac. Este resultado, originalmente publicado em [Kac, 1947], parece ser o mais relevante obtido no estudo das recorrências entre os debates do fim do século XIX e as últimas décadas do século XX.

Inspirados no artigo original de Kac, vamos enunciar o seu lema de duas maneiras distintas. A primeira delas é formulada a partir de um processo estocástico que supõe a existência de dois tipos de eventos: retornos (a) e não retornos (\tilde{a}). A probabilidade de termos uma sequência de n eventos determinados será denominada W_n e a probabilidade condicional como P_n . Assim, a probabilidade de termos dois não retornos é dada por $W_2(\tilde{a}, \tilde{a})$ e a probabilidade de termos dois não retornos, após um retorno, é dada por $P_3(a|\tilde{a}, \tilde{a})$. Se os eventos são amostrados a tempos constantes τ definimos o primeiro TR médio como sendo

$$\theta_a = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\tau P_{k+2}(a|\tilde{a}, \dots, \tilde{a}, a)$$

Lema de Kac (1): Se $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\tilde{a}, \tilde{a}, \dots, \tilde{a}) = 0$, ou seja, a probabilidade de

haver um retorno é 1, então

$$\theta_a = \frac{\tau}{W(a)}. \quad (2.1)$$

A segunda versão, essencialmente igual à primeira, pode ser enunciada em uma linguagem mais próxima da utilizada na seção anterior. Sob as mesmas hipóteses do Teorema da Recorrência de Poincaré teremos que o tempo médio de retorno $\langle T \rangle$ a um intervalo $I \in \Omega$, obtido a partir da média do conjunto T_i , é dado por

Lema de Kac (2):

$$\langle T \rangle = \frac{\tau}{\mu(I)} \quad (2.2)$$

A aplicação do Lema de Kac para o caso de sistemas contínuos requer algumas modificações. Se tomarmos o limite $\tau \rightarrow 0$ para o tempo de amostragem, a Eq.(2.2) fornece-nos como resultado correto, mas trivial, o tempo de retorno médio como sendo nulo. Isso se deve ao fato de estarmos levando em consideração falsos retornos, isto é, pontos que permanecem no intervalo I após τ por não terem saído deste intervalo. Este problema foi contornado por Kac, seguindo resultados anteriores de Smoluchowski [Kac, 1959], que faz com que o Lema de Kac para tempos contínuos seja reescrito como

$$\langle T \rangle = \tau \frac{1 - \mu(I)}{\mu(I) - \mu(I_\tau)}, \quad (2.3)$$

onde $I_\tau \in I$ é o conjunto de pontos que permanece em I após o tempo τ . Note que para a Eq.(2.3), o limite $\tau \rightarrow 0$ não acarreta em um resultado trivial.

Uma forma intuitiva de entender o Lema de Kac é encarar a medida do intervalo (ou a probabilidade de retorno) como sendo

$$\mu \equiv \frac{\# \text{ pontos no intervalo } I}{\# \text{ pontos total}}. \quad (2.4)$$

A partir da figura 2.2, vê-se que a soma de todos os tempos de retorno nada mais é que o tempo total de amostragem da série, ou seja, se há um ponto amostrado a cada unidade de tempo teremos o número total de pontos. Podemos então escrever

$$\langle T \rangle \equiv \frac{\sum_1^N T_i}{N} = \frac{\# \text{ pontos total}}{\# \text{ pontos no intervalo } I} \equiv \frac{1}{\mu}.$$

É interessante notar ainda que, com essa justificação do lema de Kac, não estamos supondo a aleatoriedade do processo, uma vez que o resultado se mantém ainda que a série temporal seja embaralhada de forma arbitrária modificando a ordem e o tamanho dos tempos de retorno.

Baseado no lema de Kac, a série dos tempos de recorrência foi recentemente utilizada em análises fractais e multi-fractais [Afraimovich e Zaslavsky, 1997, Afraimovich, 1997] [Hadyn et al., 2002]. Esses casos baseiam-se na relação entre o tempo médio e o raio δ da hiper-esfera de retorno I . No caso da densidade de pontos do sistema ser contínua, teremos que $\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle} \propto \delta^{-D}$, onde D é a dimensão do espaço de fases do sistema ou então a dimensão ocupada pelo atrator. É fácil perceber, portanto, que nos casos em que a dinâmica faz com que a densidade de pontos no espaço de fases se distribua de forma fractal teremos que a medida do intervalo, que pode ser vista nesse caso como o número de pontos dentro do intervalo, crescerá não mais de acordo com a dimensão do espaço de fases mas com a dimensão de informação D_1 que mede a fractalidade local. O tempo médio de retorno, que pode ser obtido da série de tempos de retorno, relaciona-se com δ como

$$\langle T \rangle \propto \delta^{-D_1}, \quad (2.5)$$

para $\delta \rightarrow 0$. Variando o raio δ da hipersfera de retorno obtém-se D_1 . Este método está ilustrado na Figura 3.25 a seguir.

2.2 Distribuição de tempo de retorno

No final do século XX, além dos estudos da fractalidade do sistema obtida através da análise da série de retornos [Afraimovich, 1997, Afraimovich e Zaslavsky, 1997, Hadyn et al., 2002], a distribuição de tempos de retorno (DTR) de Poincaré passa a ser utilizada no estudo do transporte anômalo dos sistemas Hamiltonianos [Zaslavsky, 2002b, Zaslavsky e Tippett, 1991] e para análise de séries temporais [Baptista et al., 2001a, Baptista e Caldas, 2002, Gao, 1999].

Se por um lado o lema de Kac possibilita uma série de aplicações utilizando a série de tempos de retorno, por outro lado ele fixa o valor do tempo médio de retorno como sendo a medida do intervalo. Buscaremos aqui outras informações das propriedades temporais de sistemas dinâmicos através da **distribuição de tempos de retorno (DTR)** do conjunto T_i , ou seja, o cálculo da probabilidade de termos um retorno de tamanho T .³

A DTR de um processo aleatório pode ser obtida de forma bastante simples e, como veremos, servirá como base para o estudo das DTR em sistemas caóticos. Por simplicidade trataremos inicialmente do caso de tempos discretos em que o sistema é observado a intervalos de tempo constantes $\tau = 1$. O caso contínuo será discutido na seção 3.2 e pequenos ajustes são necessários [Kac, 1947, Balakrishnan et al., 2000, Gao, 1999].

2.2.1 A distribuição do tipo binomial

Tratando-se o sistema de um processo aleatório podemos pensar que a cada iteração há uma probabilidade fixa μ da trajetória se encontrar na região de retorno I e, portanto, uma probabilidade $1 - \mu$ dela não estar em I . Considerando que a trajetória parte de I , um r -ésimo tempo de retorno ocorre no tempo T quando ocorrerem $r - 1$ retornos nos $T - 1$ tempos após sua saída de I e no tempo T ocorra um retorno. Na ilustração abaixo denotamos cada observação do sistema por um \square , que recebe um X no caso de haver um retorno.

$$\begin{array}{c} \boxtimes \quad \underbrace{\square \square \boxtimes \square \dots \boxtimes}_{T \text{ caixas } \square \text{ e } r \text{ eventos X}} \end{array}$$

A probabilidade de termos r retornos \boxtimes e $T - r$ não retornos \square é dada por $\mu^r (1 - \mu)^{T-r}$. Considerando que a última iteração deve obrigatoriamente ser um retorno, temos

$$\frac{(T - 1)!}{(T - r)!(r - 1)!}$$

possibilidades de termos $(r - 1)$ retornos em $(T - 1)$ observações. Ou, de outra forma, esta é a probabilidade de distribuímos $(r - 1)$ eventos X em $(T - 1)$ caixas \square . Obtemos assim uma distribuição do tipo Binomial para o r -ésimo tempo de retorno (TR)

$$P_B(T; r, \mu) = \frac{(T - 1)!}{(T - r)!(r - 1)!} \mu^r (1 - \mu)^{T-r}, \quad (2.6)$$

que está ilustrada na Fig. 2.3 para $\mu = 0,05$.

Para sistemas dinâmicos com uma medida invariante e com cada passo independente dos anteriores, a equação Eq. (2.6) fornece-nos a distribuição do r -ésimo TR, sendo válida a analogia da

³É importante ressaltar que estamos interessados na estatística da série de tempos de retorno fixado o valor de r ao contrário do realizado em [Balakrishnan et al., 2000, Balakrishnan et al., 2001]

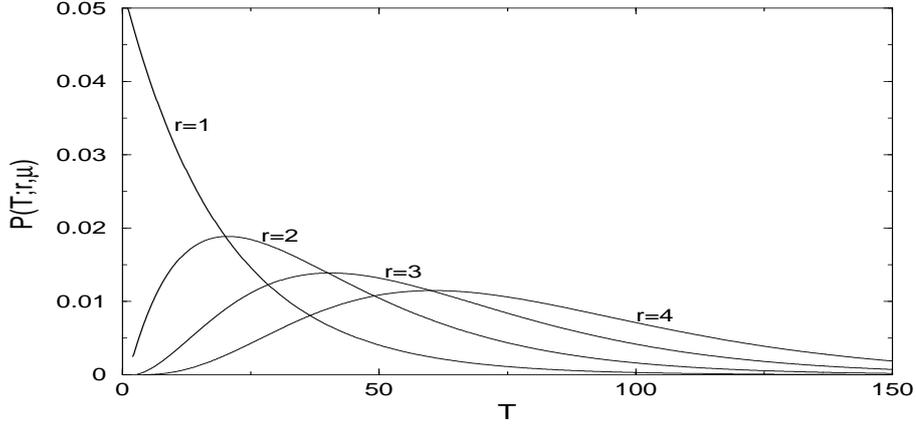


Figura 2.3: Ilustração das distribuições do tipo Binomial para o r -ésimo tempo de retorno.

probabilidade μ , utilizada na obtenção da Eq. (2.6), com a medida invariante do intervalo $\mu(I)$, conforme a Eq. (2.4). Calculando explicitamente para a Eq. (2.6) o TR médio,

$$\langle T \rangle = \sum_{T=1}^{\infty} T P_B(T; r, \mu) = \frac{r}{\mu}, \quad (2.7)$$

verificamos a validade do lema de Kac (Eq. (2.2)) no caso $r = 1$.

Condições que toda distribuição de probabilidade devem satisfazer são a positividade ($P(T) > 0, \forall T$), que é evidente no caso da Eq. 2.6, e a normalização, ou seja,

$$\sum_{T=1}^{\infty} P(T_B; r, \mu) = 1, \quad (2.8)$$

que é verificado para a Eq. (2.6).

Em geral estamos interessados na distribuição de primeiro retorno. Substituindo $r = 1$ na Eq. (2.6) obtemos

$$P_B(T; 1, \mu) = \mu(1 - \mu)^{T-1}, \quad (2.9)$$

que pode ser reescrita como

$$P_B(T; 1, \mu) = \frac{\mu}{1 - \mu} e^{\ln(1-\mu)T},$$

que, em primeira aproximação no limite $\mu \rightarrow 0$, se reduz à distribuição de Poisson

$$P_P(T; 1, \mu) = \mu e^{-\mu T}. \quad (2.10)$$

É importante ressaltar que o tempo de retorno de Poincaré (TRP) é definido precisamente neste limite. A distribuição do tipo Binomial parece descrever, de forma mais geral, a solução para problemas de tempo de recorrência e se reduz à distribuição de Poisson no caso de tempos de recorrência de Poincaré.

No apêndice B é apresentada uma dedução para distribuição do tipo Poisson de r -ésimo retorno. É bem sabido [Feller, 1950, Vanin e Guffon, 1996] que esta distribuição pode ser obtida a partir da distribuição Binomial no limite de $T \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow 0$ mantendo o produto μT constante. É interessante notar, no entanto, que para a obtenção da estatística de primeiro retorno (Eq. 2.10) somente o limite $\mu \rightarrow 0$ foi necessário.

2.2.2 Exemplo: série aleatória Gaussiana

Como exemplificação do cálculo da DTR tomamos uma série (sistema unidimensional) aleatória de pontos (x_i) distribuídos de acordo com uma densidade de probabilidade Gaussiana

$$\rho_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.11)$$

onde $\langle x \rangle = 0$ e $\sigma = 0,2$ (veja Fig. 2.4). A probabilidade de retorno para um intervalo $I(X_c, \delta)$,

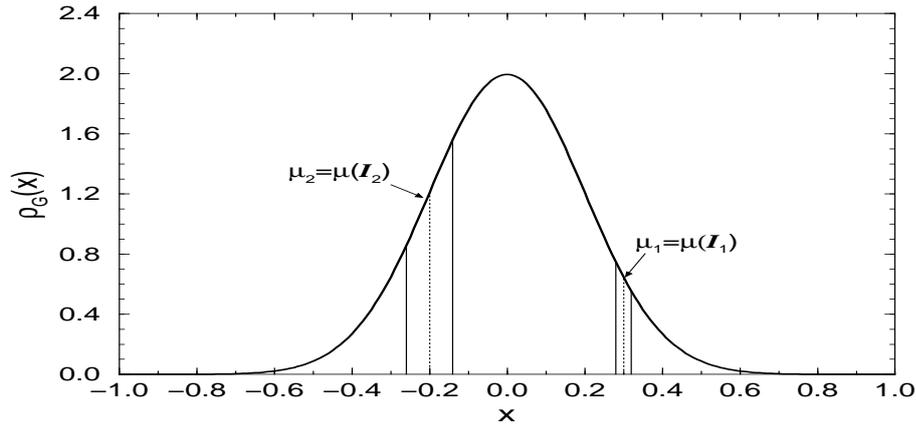


Figura 2.4: Função densidade de probabilidade Gaussiana com $\langle x \rangle = 0$ e $\sigma = 0,2$. A probabilidade de retorno para as regiões I_1 e I_2 , designadas como μ_1 e μ_2 , estão representadas pela área abaixo da curva.

$\mu(I(X_c, \delta))$ (a área abaixo da curva $\rho(x)$ referente ao intervalo I), é obtida como sendo

$$\mu(I(X_c, \delta)) = \int_{X_c - \delta}^{X_c + \delta} \rho_G(x) dx, \quad (2.12)$$

Em particular, utilizaremos nos cálculos numéricos a seguir os intervalos I_1 e I_2 , ilustrados na Fig 2.4, e definidos como $(X_{c1} = 0,3, \delta_1 = 0,02)$ e $(X_{c2} = -0,2, \delta_2 = 0,06)$, respectivamente (vide Fig. 2.2). Suas probabilidades, calculadas a partir da Eq. (2.12), são $\mu(I_1) = 0,02596$ e $\mu(I_2) = 0,09679$. Procedemos então o cálculo numérico da série de tempos de retorno para esses intervalos e na figura 2.5, verificamos a distribuição (2.6) para a série temporal Gaussiana, testando nossos algoritmos e comprovando a validade da distribuição (2.6) para processos aleatórios. Note a utilização de uma escala logarítmica no eixo y da Fig. 2.5, diferentemente da Fig. 2.3, que torna a distribuição de primeiro retorno uma reta. Estamos particularmente interessados nesta distribuição de retorno $r = 1$, dado o maior destaque a esta estatística na literatura e a facilidade de visualização. Podemos considerar em geral, ainda que possam haver excessões, a equivalência entre a estatística do caso $r = 1$ com a dos valores de $r > 1$.

2.2.3 Dependência do TR médio com o intervalo

As relações entre o tempo médio de retorno $\langle T \rangle$ e a posição do intervalo de retorno X_c e a largura δ foram calculadas em diversos artigos para séries temporais experimentais: série do mercado financeiro [Baptista e Caldas, 2000, Baptista e Caldas, 2002], séries do plasma [Baptista et al., 2001a, Baptista et al., 2001b, Ferreira et al., 2002, Baptista et al., 2002] entre outras [Baptista et al., 2000]. Nesses artigos é colocada ainda uma relação entre a distribuição de tempo de retorno de Poincaré e suas variações relativas. Nesta dissertação não calculamos

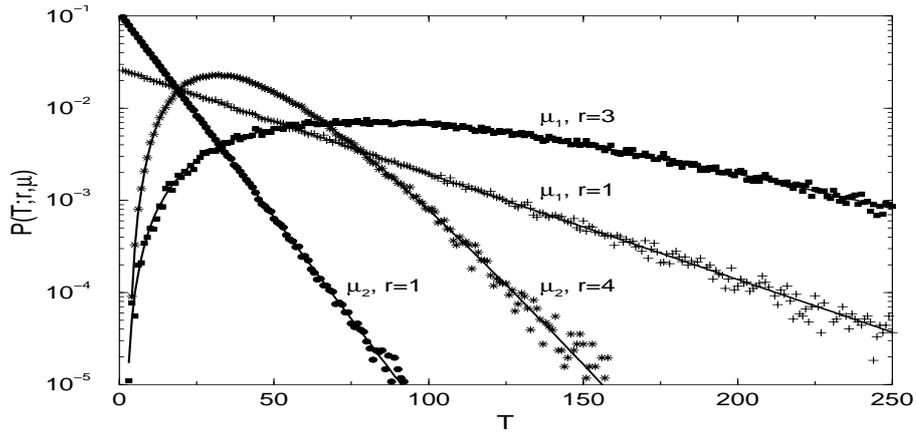


Figura 2.5: Distribuição de r -ésimo retorno para uma série aleatória Gaussiana. As linhas cheias são a distribuição (2.6) para os valores analíticos de $\mu(I)$ e r especificados.

estas relações por termos uma visão distinta de seu significado. Pretendemos argumentar a seguir que nenhuma informação relevante sobre a dinâmica do sistema, que não esteja presente na função densidade de probabilidade dos dados, é obtida através do cálculo dessas relações.

Considerando o lema de Kac, a dependência do TR médio com o intervalo de retorno (tanto X_c como δ) se dá exclusivamente em termos da medida do intervalo, $\mu(I)$. Alterando-se a posição e a largura do intervalo de retorno alteramos o valor de sua medida (área abaixo da curva $\rho(x)$) e, uma vez que $\langle T \rangle = \frac{1}{\mu}$, o tempo médio será alterado da mesma forma. A obtenção da dependência explícita de $\langle T \rangle$ com X_c e δ ocorre através da integral explicitada pela Eq. (2.12) no caso de densidade Gaussiana. A resolução analítica desta integral pode não ser trivial. No caso da Eq. (3.10) a seguir, foi possível resolvê-la e comparar o resultado analítico com simulações numéricas na Figura 3.5.

Quando calculamos a dependência do TR médio com o intervalo de retorno I , outro ponto importante a ser considerado é a distinção entre o tempo de retorno no espaço de fases do tempo de retorno em uma série temporal. Quando tomamos uma série experimental estamos, em geral, tratando de uma projeção de um espaço de fases de muitas dimensões. Uma recorrência da série temporal não significa uma configuração similar do sistema fazendo com que a interpretação de recorrência original seja significativamente alterada. Ainda que no espaço de fases geral a trajetória esteja confinada a uma dimensão fractal, ao projetarmos todas as dimensões para apenas uma (aquela observada em forma de série temporal), esta informação não mais é obtida a partir da relação (2.5). Se desejarmos calcular a dimensão fractal local, D_1 , é necessário reconstruir o espaço de fases original [Takens, 1981, Ferrara e do Prado, 1994]⁴ para então proceder ao cálculo do TRP no espaço de fases reconstruído (ou então aplicar outros algoritmos). O cálculo da escala do TR médio $\langle T \rangle$ com a largura do intervalo δ

$$\langle T \rangle = A\delta^{-\sigma}.$$

para séries temporais seria $\sigma = D_1$ somente quando a série está restrita a um domínio fractal *no espaço*, ou seja, quando a densidade de pontos da série se distribui de forma fractal. Nos casos de séries temporais com uma densidade de pontos suave o valor de $\langle T \rangle = 1/\mu(I)$ é obtido pela integração da densidade de pontos (Eq. (2.12)). Para $\delta \rightarrow 0$, sendo a distribuição de pontos $\rho(x)$ suave, podemos expandir o resultado desta integral, em primeira ordem em δ , em torno do

⁴ Notamos que o método de reconstrução do espaço de fases de Takens é eficiente somente em sistemas de baixa dimensão e com pouco ruído.

intervalo de retorno $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$ o que tornará a dependência do tempo médio linear com δ . Pensando de outra forma podemos aproximar em torno de X_c a curva $\rho(x)$ pela sua reta tangente. O cálculo da medida, que nada mais é do que a área abaixo da curva de $\rho(x)$, será o valor médio da reta $\rho(X_c)$ multiplicado pela largura do intervalo 2δ . Ou seja

$$\mu(I) = 2\rho(X_c)\delta,$$

para $\delta \rightarrow 0$. Comparando com a relação anterior vemos que os valores obtidos serão sempre $A = 2\rho(X_c)$ e $\sigma = 1$ justificando o valor de σ calculado em diversos casos nos artigos mencionados acima como valores próximos a um e contrariando suas conjecturas que relacionavam σ ao grau de mistura presente no sistema. Mais detalhes sobre a dependência do TR médio com o intervalo serão discutidos no item [5.2.3](#).

Capítulo 3

Distribuição de tempo de retorno em sistemas caóticos

Neste capítulo calculamos a distribuição de tempo de retorno em diferentes sistemas caóticos. Iniciamos investigando a validade da distribuição Binomial (2.6) no caso do mapa logístico com caos completo. Delimitamos seu domínio de validade e apresentamos o efeito de memória de curto alcance relacionado com a distribuição de órbitas periódicas. Analisamos então sistemas dinâmicos que apresentam atratores estranhos, onde constatamos a generalidade dos efeitos de memória de curto alcance. Por fim, passamos a discutir os sistemas que, de forma ampla, denominamos intermitentes. Entre eles incluem-se, além daqueles usualmente classificados por Pomeau-Manneville, a intermitência induzida por crise e os sistemas dinâmicos conservativos no caos incompleto. Notamos que a estatística de tempo de retorno de Poincaré captura as principais características do comportamento temporal destes sistemas.

3.1 Distribuição binomial e memória de curto alcance

As relações binomial (2.6) e Poisson (2.10) para a distribuição de tempo de retorno (DTR), deduzidas na seção 2.2, se aplicam a sistemas cujos retornos estão completamente decorrelacionados. Esta condição é bastante forte quando pensamos em sistemas dinâmicos determinísticos. Por outro lado, sabemos que sistemas caóticos, inclusive de baixa dimensão, tornam-se decorrelacionados rapidamente apresentando muitas das características de um sistema aleatório. Iniciamos a investigação da DTR em sistemas determinísticos pelos sistemas caóticos com caos bem desenvolvido, onde podemos tomar a distribuição binomial como referência.

Na literatura a distribuição de Poisson (2.10) é aplicada a um grande número de sistemas caóticos. Usualmente, essas referências afirmam que a distribuição do tipo Poisson (2.10) aplica-se a sistemas *suficientemente caóticos*, ou então, com *propriedades fortes de mistura* [Zaslavsky et al., 1997, Panouiu, 2000, Zaslavsky, 1995, Aquino et al., 2001], não ficando claro a que sistemas se referem. Parece-nos importante, portanto, procurar compreender mais precisamente a quais sistemas dinâmicos aplicam-se estas distribuições. Para esclarecer este ponto procuramos as justificativas e deduções dessa distribuição. Em geral, como por exemplo em [Gao, 1999, Zaslavsky e Tippett, 1991, Zaslavsky, 1995], as justificativas para a estatística do tipo Poisson não são claras. Referências para uma dedução são obtidas em [Zaslavsky et al., 1997, Afraimovich e Zaslavsky, 1997, Zaslavsky, 2002b], mas infelizmente não são acessíveis.¹ Resulta-

¹Em geral referem-se aos artigos em russo de G.A. Margulis em Funkts. Anal. i Prilozh. número 3 p. 80 de

tados matemáticos conseguem demonstrar a estatística de Poisson para o tempo de retorno de Poincaré em sistemas uniformemente hiperbólicos [Hirata, 1993].

Prosseguimos então nossos estudos através de experimentos numéricos aplicados a sistemas caóticos. Constatamos e exploramos as origens e consequências dos desvios provocados em tempos curtos. É importante notar que, assim como em qualquer aplicação prática, trabalhamos necessariamente com intervalos de retorno finitos o que faz com que seja necessário discutir a validade deste efeito para intervalos pequenos bem como no limite formal $\delta \rightarrow 0$.

3.1.1 Resultados para o mapa logístico

Após o cálculo da DTR em sistemas aleatórios sem memória passaremos a estudar um sistema determinístico com caos bem desenvolvido. Escolhemos inicialmente o mapa logístico com $b = 4$, ou seja,

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1 - x_n). \tag{3.1}$$

A escolha desse sistema deve-se, além de ser um exemplo conhecido de caos bem desenvolvido [May, 1976, Ferrara e do Prado, 1994, Alligood et al., 1996], à possibilidade (somente no caso $b = 4$) de obtermos uma expressão analítica para a densidade invariante de pontos (deduzida no apêndice A)

$$\rho_L(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}. \tag{3.2}$$

Assim podemos obter analiticamente os valores das medidas dos intervalos I_1 ($X_{c1} = 0,9, \delta_1 = 0,01$) e I_2 ($X_{c2} = 0,648, \delta_2 = 0,01$), como sendo $\mu(I_1) = 0,02124$ e $\mu(I_2) = 0,01333$, respectivamente. Esses intervalos serão utilizados nas simulações nesta seção e podem ser vistos, assim como a distribuição (3.2), na figura 3.1.

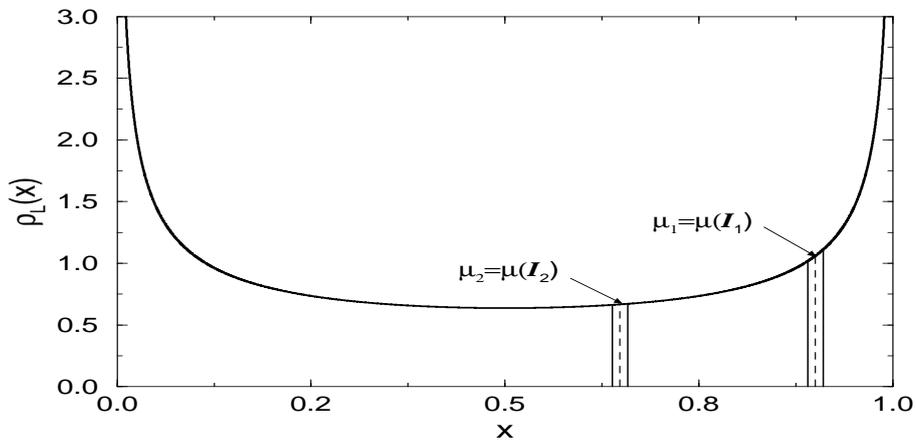


Figura 3.1: Densidade de probabilidade invariante para o mapa logístico (Eq. (3.2)). As marcações μ_1 e μ_2 , representam a medida dos intervalos $I_1(X_{c1} = 0,9, \delta_1 = 0,01)$ e $I_2(X_{c2} = 0,648, \delta_2 = 0,01)$, respectivamente.

Mapa logístico $f^{10}(x)$

Como ficará claro a seguir, a iteração do mapa logístico por si só não é suficiente para garantir as hipóteses de probabilidade fixa e independente da iteração utilizadas para a obtenção da estatística Binomial (Eq. (2.6)). Para nos aproximarmos dessas condições, e assim verificarmos

a validade da distribuição Binomial também em sistemas determinísticos, tomamos a composição de m mapas logísticos definida como

$$f^m(x) \equiv \underbrace{f(f(\dots f(f(x))))}_{m \text{ vezes}},$$

O resultado para a distribuição de tempo de retorno para o caso $m = 10$ aparece na figura 3.2 explicitando que sistemas *suficientemente* caóticos e os aleatórios são indistinguíveis do ponto de vista da DTR², ao menos para intervalos de retorno desta magnitude.

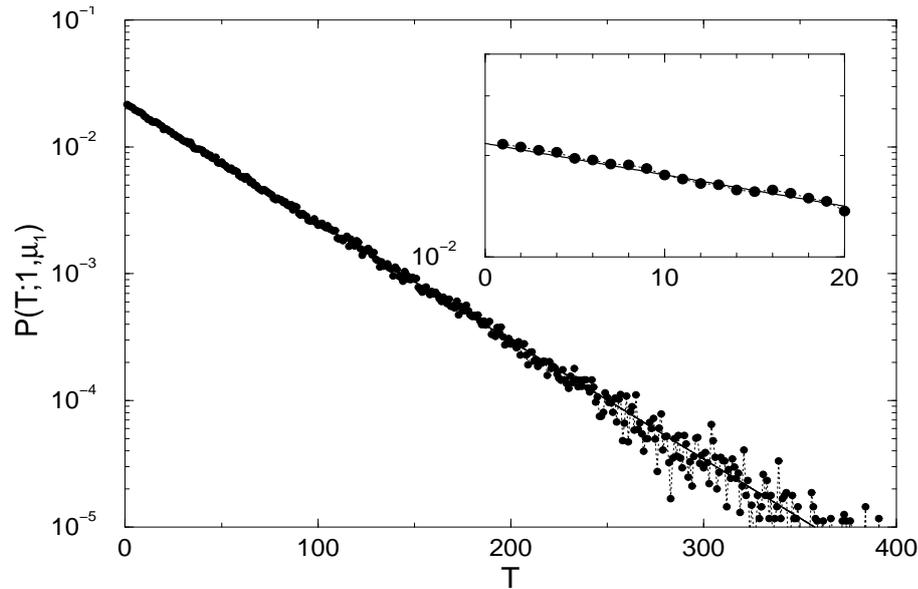


Figura 3.2: Distribuição de tempo de retorno para o mapa $f^m(x)$ com $m = 10$, $I_1 = [X_{c1} = 0,9, \delta_1 = 0,01]$, e $N = 10^8$ pontos da série temporal. A linha cheia representa a distribuição Binomial com $\mu(I_1) = 0,02124$. No detalhe a ampliação da região de tempos de retorno curtos.

Mapa logístico $f^1(x)$

Repetimos os mesmos procedimentos realizados na seção anterior agora para o caso $m = 1$ e apresentamos o resultado na figura 3.3. Notamos que DTR possui um decaimento exponencial por quase todo o intervalo. No entanto, a inclinação deste decaimento não coincide com a inclinação da distribuição Binomial que, no caso de δ pequeno, nada mais é que a medida do intervalo de retorno $\mu(I)$.

O desvio da DTR em relação à Binomial é provocado pela existência de uma *memória de curto alcance*³ que faz com que o sistema guarde informação de sua origem (e de seus retornos) por um número de iterações, violando a hipótese de probabilidade fixa e independente da iteração. Na figura 3.3, podemos notar que os retornos para $T < n^*$ (com $n^* \approx 10$ para o mapa logístico) possuem um desvio significativo do caso Binomial, enquanto que para $T \geq n^*$ todos os pontos parecem coincidir com uma queda exponencial. Estudaremos a seguir as origens e propriedades dessa *memória de curto alcance* e veremos que, apesar de somente um número

²O motivo da escolha de $m = 10$ ficará claro na próxima seção e está relacionado como valor da memória de curto alcance (n^*), típico para intervalos desta magnitude.

³Usamos este termo em contraposição à memória de longo alcance que pode provocar um desvio do tipo cauda de lei de potência na DTR.

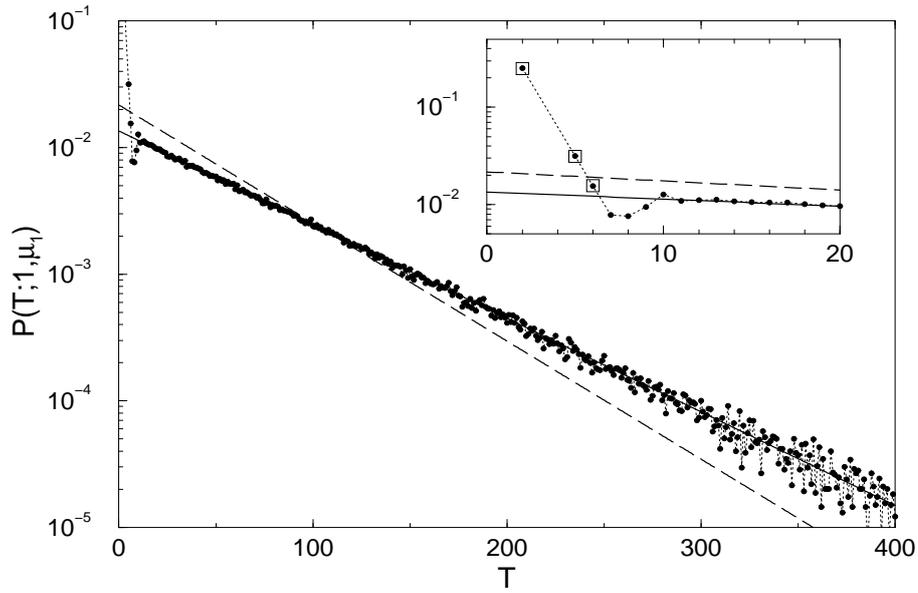


Figura 3.3: Distribuição de tempo de retorno para o mapa $f^m(x)$ com $m = 1$, $I_1([X_{c1} = 0, 9, \delta_1 = 0, 01])$, e $N = 10^8$ pontos da série temporal. A linha tracejada representa a distribuição Binomial com $\mu(I_1) = 0,02124$ e a linha cheia o cálculo da exponencial obtida analiticamente descontando os 10 primeiros pontos. No detalhe a ampliação da região de tempos de retorno curtos. Os quadrados que envolvem os pontos são cálculos analíticos (Eq. (3.3))

pequeno de tempos de retorno desviar do comportamento exponencial, isto é suficiente para alterar toda a distribuição de tempos de retorno.

3.1.2 Órbitas periódicas instáveis

Tomaremos proveito da simplicidade do mapa padrão para calcular explicitamente a probabilidade de retorno para tempos curtos e compreender a origem da memória de curto alcance.

Retornos Curtos

O procedimento para o cálculo da probabilidade de retorno de um tempo $T = n$, ilustrado na Fig. 3.4, consiste em notar que os pontos do subconjunto $R_n \subset I$ que retornam a I após n iterações do mapa $f(x)$ é equivalente ao conjunto de pontos de I que retorna a I após 1 iteração do mapa $f^n(x)$. Uma pequena dificuldade deste procedimento, que na prática impossibilita o cálculo de retornos para tempos grandes ($T \gg 10$), é o fato de estarmos interessados no primeiro retorno. Notamos assim que, se $R_n \cap R_m \neq \emptyset$ para $m < n$, os pontos desta intersecção retornarão a I em m , e não n , iterações. Para evitar este erro, definimos um novo intervalo $\bar{R}_n = R_n - (R_n \cap R_m)$ para todo $m < n$. A probabilidade de primeiro retorno para um tempo $T = n$ é dada por:

$$P_1(T = n) = \frac{\mu(\bar{R}_n)}{\mu(I)}. \tag{3.3}$$

Através desse procedimento, foi possível traçar os quadrados da figura 3.3 em perfeito acordo com os resultados numéricos. A origem da memória de curto alcance pode ser entendida notando, a partir da figura 3.4, que a existência da região R_n está ligada a existência de uma órbita periódica de período n na região (ou próximo a região) I e que o tamanho de cada uma das sub-regiões de R_n está relacionado com a derivada do mapa f^n .

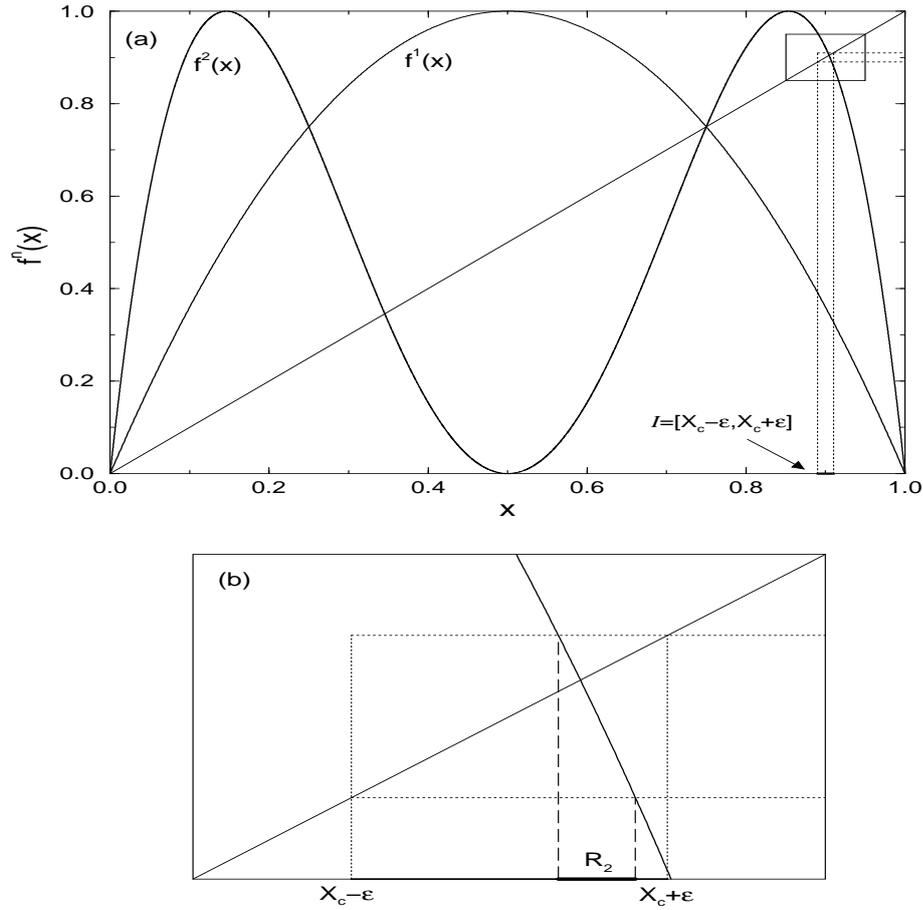


Figura 3.4: Ilustração do cálculo da probabilidade de retorno para $T = 2$ à região I_1 do mapa logístico. A região R_2 representa os pontos de I que retornam a I depois de duas iterações do mapa. Vemos ainda que $R_1 = \emptyset$.

É possível ainda compreender, baseado neste mesmo tipo de argumento, por que os retornos voltam a decair exponencialmente após um tempo $T > n^*$. Quando n cresce, a região R_n passa a ser a união de um conjunto grande, N , de sub-regiões disjuntas R_n^i do intervalo I que se tornam progressivamente pequenas

$$R_n = \bigcup_{i=1}^N R_n^i, \quad \text{quando} \quad \mu(R_n) = \sum_{i=1}^N \mu(R_n^i). \quad (3.4)$$

O número dessas sub-regiões pode ser estimado levando-se em conta que $f^n(x)$ é um polinômio de ordem 2^n . Portanto 2^n sub-regiões no intervalo $[0, 1]$ distribuídas de acordo com a medida invariante $\rho_L(x)$ (Eq. (3.2)). As sub-regiões, R_n^i , são justamente aquelas que ficam dentro do intervalo I . Para n grande podemos estimar $N \approx 2^n \mu(I)$ sub-regiões no intervalo I , cada uma delas com uma medida

$$\mu(R_n^i) = \frac{\mu(I)}{2^n}. \quad (3.5)$$

A probabilidade de termos um retorno ao intervalo I no tempo $T = n$ é

$$P(T = n) = \frac{\mu(R_n)}{\mu(I)}. \quad (3.6)$$

Substituindo as Eqs. (3.4) e (3.5) na Eq. (3.6), obtemos uma probabilidade de recorrência, $P(T = n) \approx \mu(I)$, independente de n para n grande, que é a mesma hipótese assumida para a dedução da equação Binomial na seção 2.2. Note que $P(T)$, dado pela Eq. (3.6), não é a probabilidade de *primeiro* retorno a I no tempo $T = n$. Esta é dada pela Eq. (3.3), com \bar{R}_n , ao invés de R_n . É no cálculo de \bar{R}_n que a memória de curto alcance atua uma vez que para os tempos curtos a aproximação $N \approx 2^n \mu(I)$ não é válida para $n < n^*$. De forma geral, em um sistema hiperbólico caótico o número de sub-regiões de recorrência deve crescer com o número de órbitas periódicas, ou seja, como e^{hT} , onde h é a entropia topológica.

Cálculo Analítico da exponencial

É interessante notar as imposições que a condição de normalização (Eq. (2.8)) e o lema de Kac (Eq. (2.2)) nos impõe. Uma vez escolhido o intervalo de retorno I a probabilidade $\mu(I)$ passa a estar fixa. Se temos uma distribuição exponencial, que representa de forma geral um decaimento linear no gráfico linear X logarítmico,

$$P_{exp}(T) = N e^{-\beta T} \tag{3.7}$$

durante todo intervalo $T \in [0, \infty[$, a normalização nos impõe que $N = \beta$ e para satisfazer o lema de Kac devemos ter ($N = \beta = \mu(I)$) resultando na distribuição do tipo Poisson (Eq. (2.10)).

No caso de efeitos de memória (ou de correlação como veremos na seção 3.2.2) atuarem até o tempo $T = n^*$, uma exponencial (Eq. (3.7)) valerá somente para $T > n^*$. Os valores de N e β podem ser então determinados, uma vez conhecidos (de forma analítica como na Eq. (3.7) ou numérica) os valores dos retornos para $T \leq n^*$, impondo a normalização

$$\sum_{T=1}^{n^*-1} P_1(T) + \sum_{T=n^*}^{\infty} P_{exp}(T) = 1, \tag{3.8}$$

e o lema de Kac

$$\sum_{T=1}^{n^*-1} T P_1(T) + \sum_{T=n^*}^{\infty} T P_{exp}(T) = \frac{1}{\mu(I)}. \tag{3.9}$$

O acordo entre esta espécie de *ajuste analítico* e os resultados numéricos pode ser comprovados nas figuras 3.3 e 3.9 e demonstra que o desvio da distribuição Binomial é provocado unicamente pelos tempos de retorno curtos ($T < n^*$).

3.1.3 Efeito de δ pequeno

A partir do coeficiente β calculado acima (Eq. 3.7) torna-se claro que mesmo uma distribuição que apresentar um decaimento do tipo exponencial durante quase todo o intervalo de retorno pode estar bastante longe de uma distribuição do tipo Poisson ($\beta \neq \mu(I)$). Passamos agora a verificar a dependência do expoente β da exponencial (3.7), ajustada numericamente à DTR do mapa logístico, com a largura δ do intervalo de retorno. Sabemos que, no caso da estatística ser do tipo Poisson, este expoente é dado simplesmente por $\mu(I)$ enquanto que o caso Binomial, que generaliza o Poisson, é dado por $\ln(1 - \mu(I))$. A dependência de μ com δ é obtida a partir da integração da densidade invariante (Eq. (3.2))

$$\begin{aligned} \mu(X_c, \delta) &= \int_{X_c - \delta}^{X_c + \delta} \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} (\arcsin(2(X_c + \delta) - 1) - \arcsin(2(X_c - \delta) - 1)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Utilizaremos a comparação de β com $\mu(I)$ como quantificador da memória de curto alcance. Na figura 3.5 utilizamos esta relação para verificar a validade do lema de Kac para o caso do mapa logístico $f^1(x)$ na região da Fig. 3.3. Assim, nessa figura vemos que $\langle T \rangle^{-1}$ calculado numericamente é igual ao valor de $\mu(I)$ obtido analiticamente na Eq. (3.10).

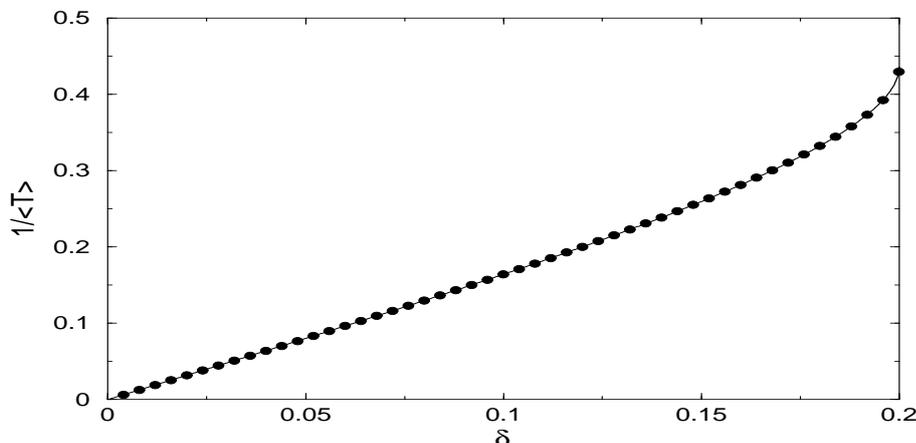


Figura 3.5: O inverso do tempo de retorno médio para o mapa logístico Eq. (3.1), como função de δ . A linha cheia é $\mu(X_c, \delta)$ obtido da substituição de $X_c = 0,8$ na Eq. (3.10). O símbolo \bullet indica o valor correspondente de $\langle T \rangle^{-1}$ para cada valor de δ .

Afim de explorar o limite de validade dos efeitos de memória mostramos na figura 3.6 que a diferença entre um ajuste numérico e os resultados das distribuições “esperadas”, apesar de significativamente maiores para δ grande, permanecem mesmo para valores pequenos de δ . No que se refere às distribuições binomial e Poisson, confirmamos a concordância para o limite de intervalo do tempo de retorno pequeno e verificamos a generalidade da primeira para o caso do tempo de retorno de um sistema com memória desprezível mesmo para δ grande. Podemos ver ainda o bom acordo entre o cálculo analítico de β (símbolos \diamond), obtido a partir da combinação das Eqs. (3.8), (3.9) e (3.7), com o resultado numérico. Os *plateaus* da Fig. 3.6 estão relacionados com a presença de pontos periódicos de períodos pequenos dentro do intervalo I . Por exemplo, o *plateau* entre $\delta = 0,1$ e $\delta = 0,15$ aparece devido ao ponto periódico analisado na figura 3.4.

A partir da Figura 3.6 vemos que no limite $\delta \rightarrow 0$ o coeficiente da exponencial obtida $\beta \rightarrow 0$. Para verificarmos se há uma convergência para a distribuição de Poisson calculamos na figura 3.7 a distância relativa entre o coeficiente obtido (β) e o da distribuição Poisson ($\mu = 1/\langle T \rangle$), ou seja, $\beta - 1/\langle T \rangle = \beta \langle T \rangle - 1$. Dessa vez escolhemos um intervalo de retorno aleatoriamente $X_c = 0.582$. Notamos que os resultados numéricos parecem convergir, dentro das incertezas de ajuste, a partir do limite numérico de $\delta < 10^{-4}$. Este resultado indica que no limite de Poincaré ($\delta \rightarrow 0$) a exponencial obtida para TR grandes aproxima-se da DTR de Poisson. No entanto, o valor de δ para o qual isto ocorre está além da convergência da distribuição binomial em Poisson, indicando assim que o efeito de memória de curto alcance persiste para intervalos pequenos, mas finitos.

De forma complementar à figura 3.7 investigamos na figura 3.8 a dependência da memória de curto alcance com a posição do intervalo de retorno (X_c). Nesta figura mostramos a reta ajustada ao regime exponencial da DTR dos mil intervalos de retorno de medida $\mu = 0,001$ comparada com o resultado binomial. Vemos assim que os efeitos de memória de curto alcance ocorrem para todos os intervalos de retorno, havendo tipicamente uma maior probabilidade de obtermos expoentes maiores que o resultado binomial. Os pontos que sobressaem com um desvio negativo do expoente β podem ser associados à posição das órbitas periódicas de período mais

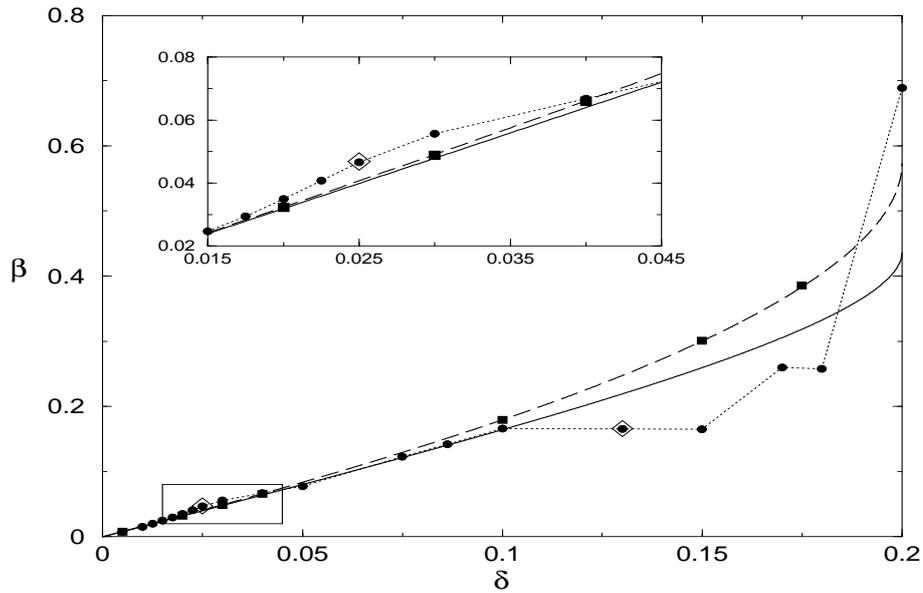


Figura 3.6: Os símbolos \bullet representam o coeficiente, β , ajustado para a parte linear (em um gráfico linear-log) da distribuição de tempo de retorno como função de δ ($X_c = 0,8$) para o mapa logístico, $f(x)$. Os símbolos \blacksquare representam o mesmo coeficiente, para o mapa $f^{10}(x)$, e os símbolos \diamond os coeficientes, β , obtido para $P_{exp}(T)$ levando em conta $n^* = 10$. As linhas contínua e tracejada são os coeficientes esperados para a distribuição do tipo binomial e Poisson, respectivamente. No detalhe uma ampliação do gráfico maior. As incertezas são menores que os tamanhos dos pontos em todos os casos.

baixo. Por exemplo, os pontos associados às órbitas de período 1 do mapa logístico (próximos a $x = 0$ e $x = 0,75$) apresentam um grande desvio negativo em relação à binomial (inclusive fora da escala).

Quando diminuimos muito o valor de δ temos, como tendência, uma diminuição do número de pontos fixos de período baixo dentro da região I . É possível imaginar, olhando a figura 3.3, que é a presença de órbitas periódicas de período baixo que provoca o desvio em relação à distribuição de Poisson e que, portanto, este desvio se anularia no limite $\delta \rightarrow 0$. Entretanto a situação não é tão simples. Na figura 3.9 apresentamos a distribuição de tempo de retorno para a região I_2 , onde a órbita periódica de período 7 é a de período mais baixo (lembre-se que temos $2^7 = 128$ órbitas periódicas de período $p \leq 7$ no intervalo $[0, 1]$). Quando diminuimos o valor de δ algo similar é esperado, pois os tempos de retorno curtos não irão ocorrer já que não haverá órbitas periódicas de período baixo dentro do intervalo I . Notamos, no entanto, que ainda para este caso o desvio em relação à distribuição de Poisson é evidente na figura 3.9. Este resultado não é surpreendente se pensarmos em termos do *ajuste analítico* realizado no item anterior: a ausência de retornos de período baixo faz com que esta probabilidade de retornos tenha que se distribuir para retornos maiores, de maneira a satisfazer o lema de Kac e a normalização. Notamos portanto que tanto a presença *como a ausência* de órbitas periódicas de período baixo no intervalo I do mapa logístico provocam efeitos de memória de curto alcance.

3.1.4 Validade da distribuição binomial

A distribuição de tempo de retorno do tipo binomial mostrou-se válida para sistemas dinâmicos aleatórios e determinísticos com memória desprezível. Desta forma, concluímos que toda informação sobre a dinâmica determinística de um sistema dinâmico presente na DTR, a menos da propriedade de mistura forte, está contida nos desvios em relação a esta distribuição.

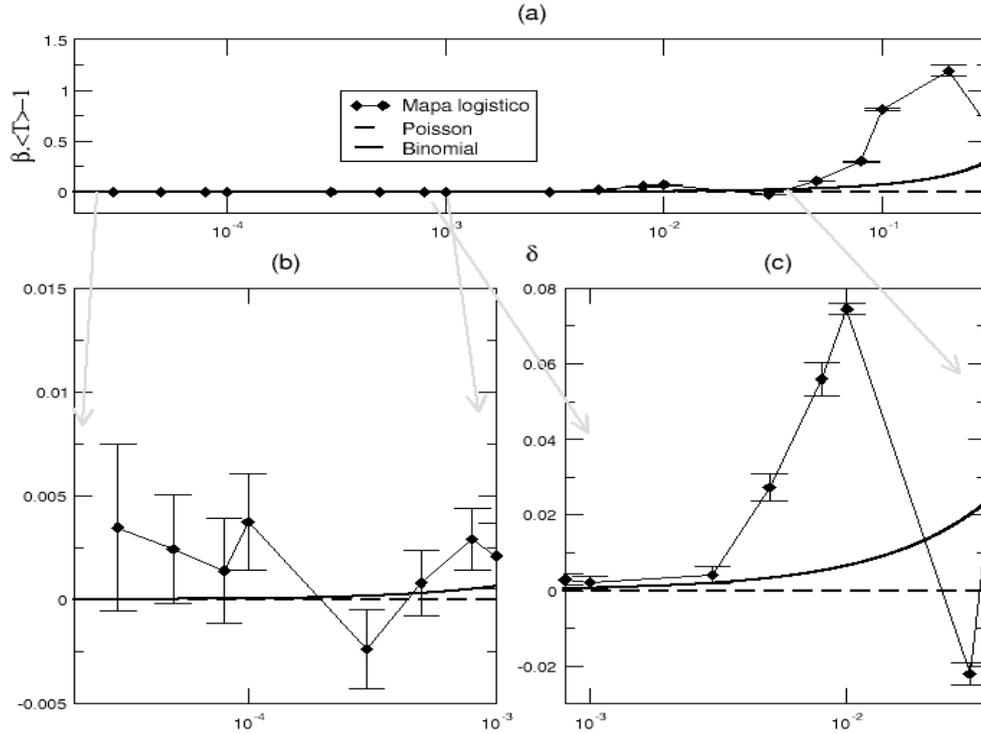


Figura 3.7: (a) Comportamento da relação entre o desvio do coeficiente da exponencial β ajustada à DTR e o coeficiente da binomial ($\beta\langle T \rangle - 1$) como função de δ ($X_c = 0,8$) para o mapa logístico, $f(x)$. As linhas tracejadas e contínuas são os coeficientes esperados para a distribuição do tipo Poisson e binomial, respectivamente. Para possibilitar um melhor estatística, evitando a periodicidade provocada pela precisão finita dos cálculos numéricos, ao invés de uma única trajetória foram sorteadas aleatoriamente condições iniciais dentro do intervalo I e iteradas cada uma 10^6 vezes. As incertezas devem-se ao ajuste numérico dos pontos. Os gráficos (b) e (c) são ampliações do gráfico (a). O intervalo foi escolhido de forma aleatória $X_c = 0.582$.

Exploramos um tipo de desvio para tempos curtos associado com a distribuição de órbitas periódicas instáveis. É interessante ressaltar que o tempo de atuação deste desvio $n^* \approx 10$ permaneceu aproximadamente constante independente da posição dos intervalos de retorno I utilizados⁴. É claro que ao variarmos o valor δ teremos valores distintos de n^* já que a probabilidade de termos órbitas de período baixo dentro do intervalo irá diminuir. Para o mapa logístico com $b = 4$ o expoente de Lyapunov é $\lambda_L = \ln(2)$ e o tempo típico de divergência de condições iniciais próximas (tempo de Lyapunov) é da ordem de $\frac{1}{\ln(2)} \approx 1.4$. Notamos portanto que $n^* \gg \frac{1}{\lambda}$ e, nesse sentido, podemos pensar que o valor de n^* guarda informações novas sobre as propriedades de mistura do sistema.

Podemos finalmente reavaliar as afirmações sobre a generalidade da aplicação da estatística de Poisson para sistemas caóticos. A partir dos artigos [Hirata et al., 1999, Kurka et al., 2002, Hirata, 1993] podemos ver que sistemas com propriedades fortes de mistura, como os sistemas do tipo axioma A ou Anosov (subconjunto dos sistemas axioma A) [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Devaney, 1987] satisfazem as condições da DTR do tipo Poisson. Tais resultados têm sido expandidos recentemente e parecem valer também para mapas unimodais como o mapa logístico [Bruin e Vienti, 2003]. Estes resultados são válidos *no limite formal de* $\delta \rightarrow 0$. Para qualquer finalidade prática ($\delta \neq 0$) os efeitos de memória de curto alcance serão muito impor-

⁴Este fato motivou-nos a utilizar o valor de $m = 10$ na seção 3.1.1. Notamos que para intervalos de retorno muito pequenos esperamos notar a memória de curto alcance também nesse mapa.

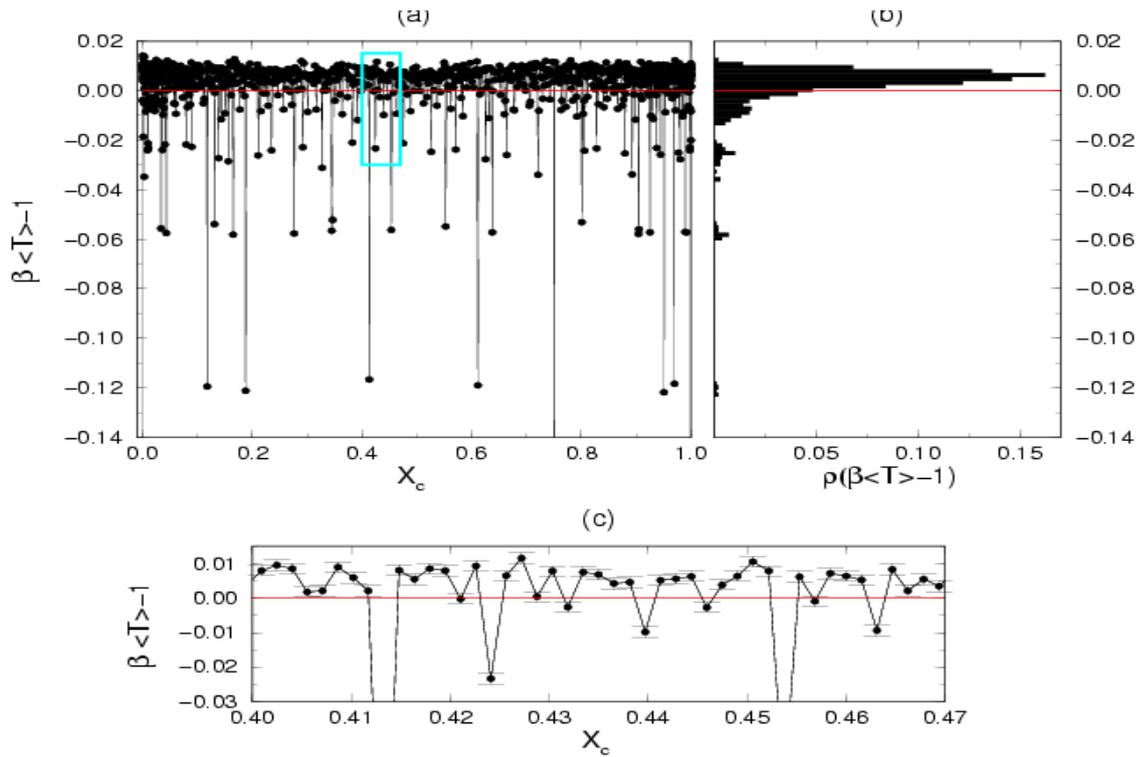


Figura 3.8: Desvio do coeficiente da exponencial em relação ao resultado binomial ($\beta\langle T \rangle - 1$) como função da posição do intervalo (X_c). Em (a) apresentamos o resultado numérico para os mil intervalos de medida $\mu = 10^{-3}$ do mapa logístico. A linha contínua (em $\beta\langle T \rangle - 1 = 0$) representa o resultado esperado para uma distribuição binomial. Em (b) o histograma dos resultados de (a). Em (c) uma ampliação de (a) na região indicada, onde evidencia-se o tamanho típico das incertezas obtidas no ajuste numérico.

tantes e permanecem mesmo para intervalos de retorno pequenos. Podemos afirmar assim que os efeitos de memória de curto alcance podem surgir na DTR de um sistema, ainda que desapareça no caso do TRP, quando $\delta \rightarrow 0$. Enfatizamos que este limite ocorre, na prática, muito após a convergência da distribuição Poisson na binomial, como ilustra a figura 3.7. Veremos na sequência do trabalho que este tipo de efeito surge também em sistemas caóticos mais complexos.

É importante alertar ainda para uma outra consequência do efeito de memória de curto alcance: a possibilidade de erros na análise da distribuição. Como vimos, somente um pequeno número de pontos da DTR destoam de um decaimento exponencial. Um procedimento típico para melhorar a visualização dessas distribuições, que utilizaremos freqüentemente nas próximas seções, é a utilização de um canal do histograma (bin) grande. Nesse caso, é possível que toda a distribuição, a menos de um único ponto, esteja perfeitamente alinhada. Ainda assim a distribuição é significativamente diferente de uma Poisson. O expoente β , por exemplo, é distinto do inverso do tempo médio $1/\langle T \rangle$ e da medida do intervalo $\mu(I)$, o que seria contraditório com o lema de Kac no caso da estatística de Poisson.

3.2 Atratores estranhos

Inúmeros sistemas não lineares dissipativos possuem atratores no espaço de fase que apresentam uma dimensão fractal. Nesta seção exploramos a distribuição de tempo de retorno sobre esses atratores denominados estranhos. Examinamos sistemas com duas e três dimensões do espaço de fases bem como sistemas de tempo contínuo e discreto. Constatamos dessa maneira

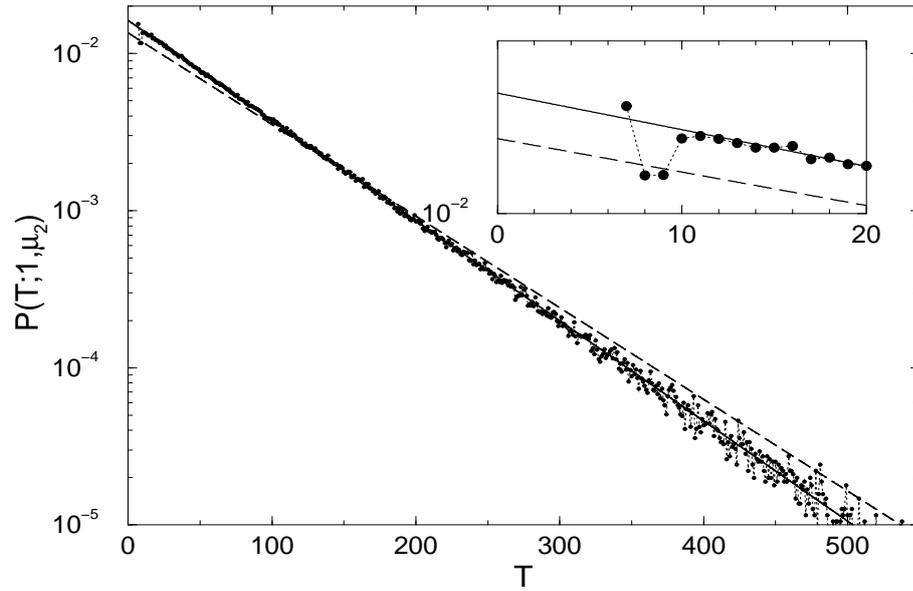


Figura 3.9: Distribuição de tempo de primeiro retorno de Poincaré para o intervalo $I_2([X_{c2} = 0,648, \delta_2 = 0,01])$ do mapa logístico, 10^8 iterações do mapa. A linha tracejada é distribuição Binomial com $\mu(I_2) = 0,01333$. A linha cheia é a expressão dada pela Eq. (3.7) com $T > n^*$ e $n^* = 9$. O gráfico menor é uma ampliação da região de retornos curtos.

a generalidade do efeito de memória de curto alcance para intervalos de retorno finitos. Os procedimentos necessários para o estudo destes sistemas mais gerais também são discutidos.

Ressaltamos que os sistemas estudados (mapa de Hénon e circuito de Matsumoto-Chua) foram escolhidos como casos típicos de mapas e equações diferenciais ordinárias que apresentam caos (atratores estranhos). Não estamos interessados na motivação física que levaram a estes sistemas e tampouco na sua caracterização detalhada, o que pode ser obtido na literatura indicada.

3.2.1 O mapa de Hénon

Trabalharemos inicialmente com um sistema bi-dimensional, o mapa de Hénon definido aqui como

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - 1,4x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= 0,3x_n, \end{aligned} \quad (3.11)$$

que, com estes parâmetros, resulta no famoso atrator de Hénon [Henon, 1976, Alligood et al., 1996, Ferrara e do Prado, 1994]. Afim de escolhermos um intervalo de retorno, $I(X_c, \delta)$, de forma arbitrária no atrator, iteramos o mapa (3.11) 10^3 vezes e tomamos o último ponto como valor de X_c . Escolhemos o valor de $\delta = 0,01$. Ressaltamos que, neste caso, X_c é um vetor de duas componentes e o intervalo é definido como um círculo de raio δ em torno de X_c . O resultado da DTR está expresso na figura 3.10 e apresenta o mesmo tipo de desvio que obtivemos para o caso do mapa logístico. O valor de $n^* \approx 35$ nesse caso também é muito maior que o inverso do expoente de Lyapunov $\frac{1}{\lambda} \approx 2.3$.

Ao analisarmos sistemas caóticos típicos, como o sistema de Hénon, devemos notar que apesar de existir uma medida positiva em qualquer região do atrator, não temos uma expressão para descrever a densidade de pontos em termos das coordenadas (x, y) . O cálculo da medida

do intervalo, que no caso de sistemas bi-dimensionais seria

$$\mu(I) = \int_I \int_I \rho(x, y) dx dy ,$$

não pode ser feito de forma analítica. Para compararmos a distribuição de tempos de retorno da Fig. 3.10 com a distribuição binomial utilizamos o lema de Kac e calculamos o valor de μ a partir do inverso do tempo médio de retorno (obtido do cálculo numérico da série de tempos de retorno).

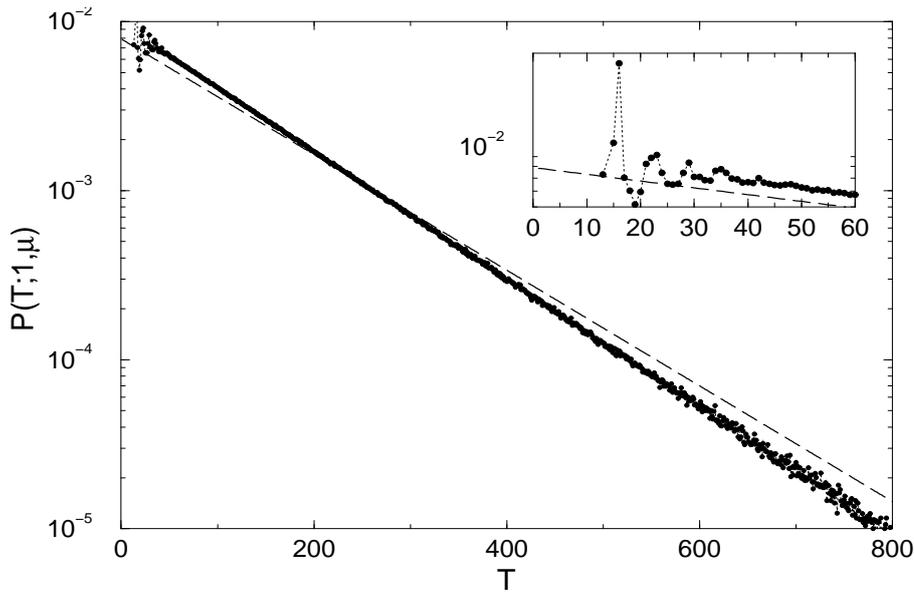


Figura 3.10: Distribuição de tempo de retorno para o mapa de Hénon. O intervalo de retorno $I(X_c, \delta)$ foi escolhido de forma casual após a eliminação do transiente: $X_c = (0, 304, 0, 210)$ e $\delta = 10^{-2}$. A curva pontilhada é a distribuição binomial com $\mu(I) = \langle T \rangle^{-1} = 0,00785$. O gráfico interno é uma ampliação que mostra a memória de curto alcance.

3.2.2 Circuito de Matsumoto-Chua

Passamos a tratar agora do famoso circuito de Matsumoto-Chua (MC). A escolha deste sistema de tempo contínuo deve-se a:

- (i) sua simplicidade; ele possui o menor número de graus (3) de liberdade necessários para que um sistema de equações diferenciais de primeira ordem seja caótico.
- (ii) numerosa literatura a respeito [Madan, 1993, Anishchenko et al., 1994].
- (iii) possibilidade de estudar neste mesmo sistema a intermitência induzida por crise (intermitência caos-caos) (seção 3.3).

O circuito elétrico de MC é composto por dois capacitores, um indutor, um resistor linear e um resistor linear por partes (onde está contida a não linearidade do sistema). As variáveis do sistema são proporcionais às tensões nos capacitores (x, y) e a corrente no indutor (z). Trataremos aqui com uma versão equivalente mais apropriada das equações [Medrano-Torricos, 2004a,

[Medrano-Torricos, 2004b]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha * (y - x - k(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta * y,\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde $k(x)$ contém toda a não linearidade do sistema e é definido como sendo

$$k(x) = \begin{cases} bx + (a - b) & \text{se } x \geq 1 \\ bx - (a - b) & \text{se } x \leq -1 \\ ax & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

As constantes do sistema (α, β) estão associadas aos valores das capacitâncias, resistência linear e indutância enquanto que as constantes (a, b) estão associadas à inclinação das retas na curva característica da resistência linear por partes. Em nossos estudos numéricos manteremos fixos $(\beta = 20, a = -1,1428571, b = -0,71428571)$ e utilizaremos α como parâmetro de controle. Nessas condições o sistema tende ao caos através da rota de Feigenbaum via duplicação de período [Alligood et al., 1996, Ferrara e do Prado, 1994] de $\alpha = 9,5$ (período 1) a $\alpha = 11,1$ (caos) [Medrano-Torricos, 2004a]. Para esses parâmetros coexistem dois atratores do tipo Rössler (Fig. 3.12a) com suas respectivas bacias de atração. Aumentando ainda mais o parâmetro de controle o tamanho dos atratores cresce até a ocorrência de uma crise de bacia (em $\alpha = 11,2834$) que provoca a fusão dos dois atratores dando origem ao atrator do tipo duplo rolo (Fig. 3.12b).

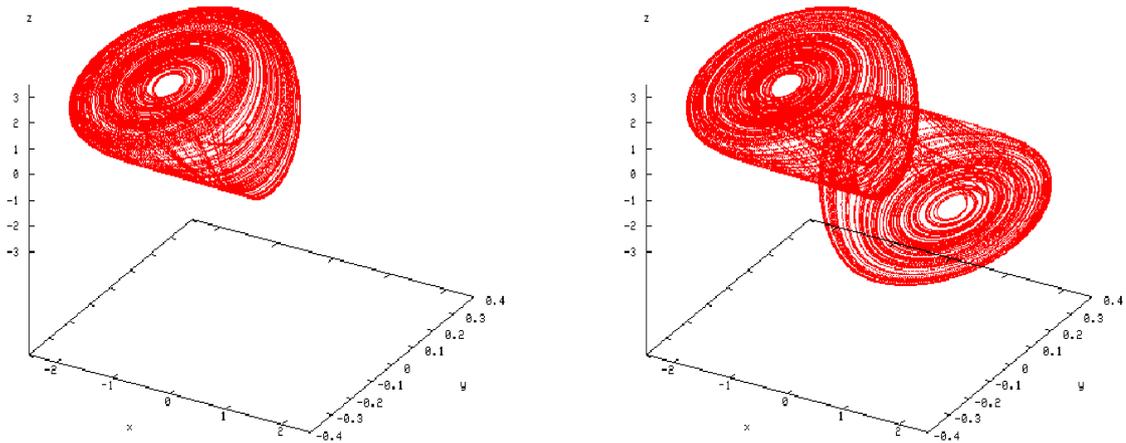


Figura 3.11: Atrator de Rössler e atrator duplo-rolo.

Além das considerações envolvendo o lema de Kac [Kac, 1947, Kac, 1959] levantadas no final do item 2.1.3, as mudanças necessárias devido ao fato de estarmos trabalhando com sistemas contínuos, ao calcularmos a distribuição de tempo de retorno são essencialmente duas:

Definição de retorno. Uma vez que, na prática, estamos tratando de regiões de retorno I finitas no espaço de fases, é natural que após a entrada da trajetória em I ela demore um tempo até sair. Uma vez que os métodos de integração numéricos inevitavelmente discretizam o tempo em passos (no caso utilizado, método de Runge-Kutta de quarta ordem [Press, 1995], passos fixos de tamanho $h \approx 0,005$), se aplicarmos inadvertidamente os métodos desenvolvidos

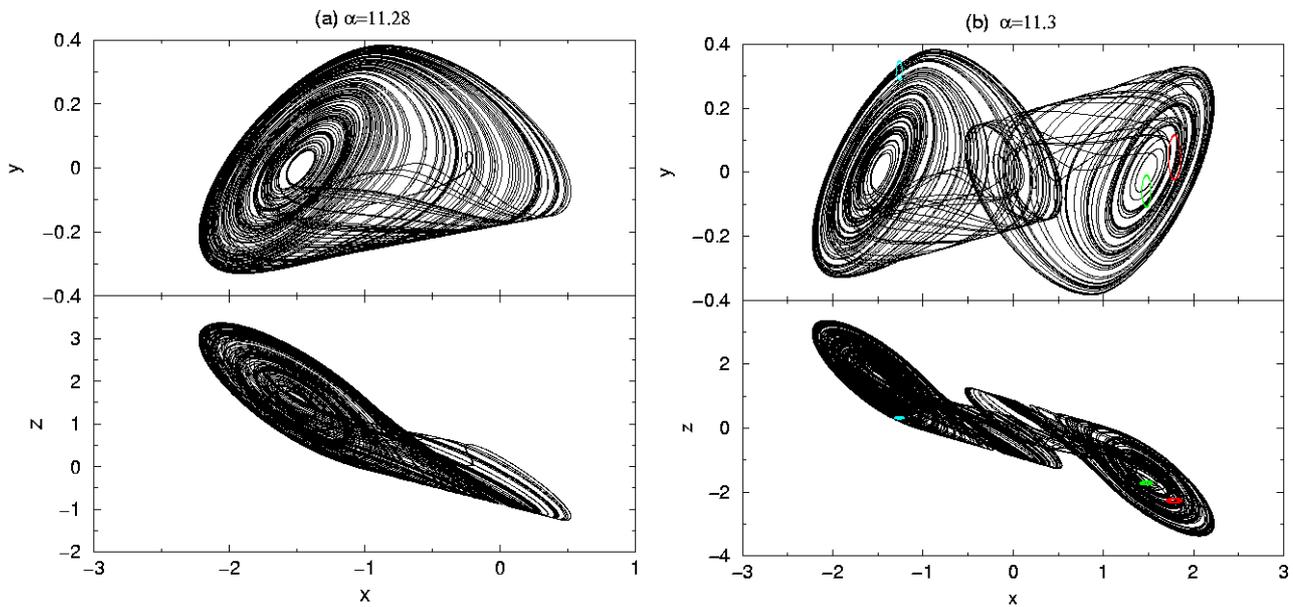


Figura 3.12: Atratores do circuito de MC projetados nos planos xy e xz . (a) Atrator de Rössler e (b) Atrator duplo-roló com regiões de retorno utilizadas em destaque.

para sistemas discretos teremos um conjunto grande de falsos retornos de tamanho h (Fig. 3.13). Ignoramos assim os falsos retornos de tempo h e adotamos como um tempo de retorno o tempo entre duas entradas na região I [Gao, 1999], conforme ilustrado na figura 3.13. Ressaltamos que este tipo de *falsos retornos* podem surgir também na análise de dados obtidos experimentalmente e não deve ser confundido com a memória de curto alcance discutida anteriormente.

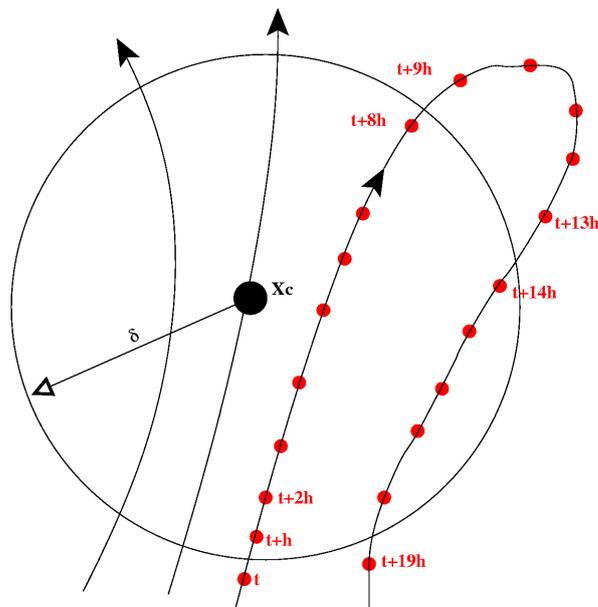


Figura 3.13: Ilustração da análise numérica de um sistema dinâmico de tempo contínuo. Na trajetória da direita ressaltamos os pontos obtidos pela integração numérica. Nesse caso o tempo de retorno computado é de $T = t + 14h - t + 2h = 13h$.

Definição do canal do histograma. Um segundo ponto importante é a escolha do tamanho do canal de histogramação (bin) para a montagem da distribuição de retornos. No caso discreto um bin grande é um recurso para o caso de pouca estatística que pode provocar, no entanto, uma suavização da distribuição inclusive acobertando efeitos de memória de curto alcance. Para evitar este tipo de desvio utilizamos bin=1 e iteramos o sistema muitas vezes (o que pode não ser factível em uma situação mais realista). Uma possibilidade similar a ser adotada no caso de sistemas contínuos é a utilização do bin mínimo, ou seja, do tamanho do passo h . No entanto este procedimento mostra-se inviável, uma vez que seria necessário um tempo muito grande de integração, e inadequado, uma vez que este parâmetro está relacionado com a precisão do algoritmo de integração, podendo ser inclusive variável e arbitrariamente pequeno. Na prática adotamos um bin que seja suficientemente grande para termos uma boa estatística considerando as limitações computacionais (ou do tamanho dos dados analisados), tomando o cuidado de verificar o surgimento de efeitos (especialmente de tempos curtos) resolvidos somente com bins menores.

Tomadas essas precauções, analisamos o sistema de MC escolhendo inicialmente uma situação de caos bastante desenvolvido ($\alpha = 11,28$ próximo a $\alpha_c = 11,2834$) para analisarmos o tempo de retorno no atrator de Rössler. O resultado é apresentado na figura 3.14 e confirma o mesmo tipo de efeito para tempos curtos.

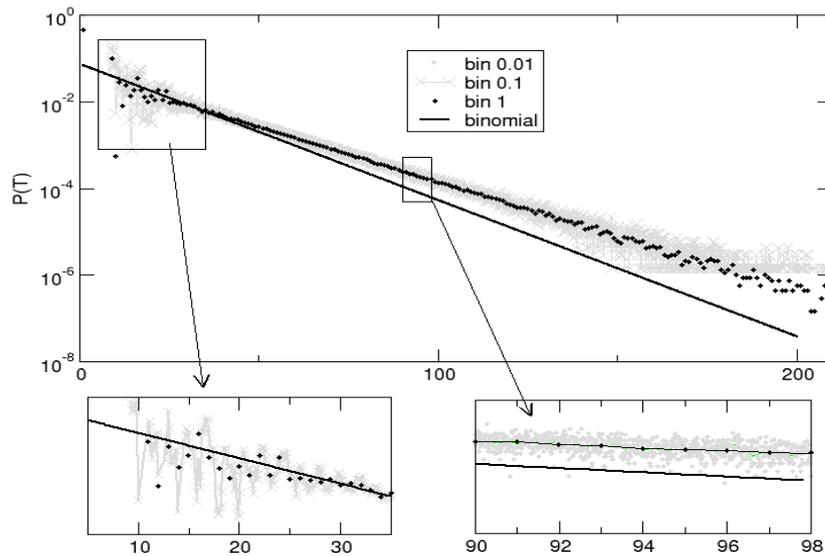


Figura 3.14: Distribuição de tempo de retorno para o atrator de Rössler ($\alpha = 11,28$). Notamos o desvio da distribuição binomial devido ao desvio dos tempos curtos (relacionado à distribuição de órbitas periódicas e a correlação) $\langle T \rangle = 14,3$.

A análise do comportamento do tempo de retorno da figura 3.14 pode ser relacionada agora com outras medidas tais como a autocorrelação e o espectro de Fourier do sistema. Para tanto escolhemos uma série temporal para a variável z da equação 3.12 e na figura 3.15 apresentamos sua função de autocorrelação e o espectro como função do tempo.

A transformada de Fourier de uma função do tempo $f(t)$ é dada por

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (3.13)$$

No caso discreto, como o obtido pela integração numérica do sistema, a transformada de Fourier fica sendo [Bergé et al., 1984]

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j \exp[-i \frac{2\pi j k}{n}]. \quad (3.14)$$

Graficando $|\hat{x}|^2$ por cada uma das freqüências $f = \frac{1}{n\Delta t}$ obtemos o espectro de potência de uma determinada freqüência. O espectro de séries temporais, obtido a partir do quadrado do módulo da transformada de Fourier do sinal, nos indica qual o peso com que cada uma das freqüência (ou o seu inverso, o período) comparece nas oscilações.

Notamos que o espectro apresentado na figura 3.15 possui um pico acentuado em torno de $t \approx 1.8$. Esse é o tempo associado a uma rotação em torno do ponto fixo instável (veja Fig. 3.12a superior) e, uma vez que a região de retorno abrange um pequeno intervalo do atrator, esperamos que esse tempo de retorno seja bastante freqüente. De fato, com atenção é possível perceber na distribuição de tempo de retorno (Fig. 3.14) a existência de uma probabilidade de retorno bastante grande por volta deste tempo seguida de uma probabilidade nula para tempos menores ou maiores.

Já a função de autocorrelação é definida no caso discreto como

$$C_m = \frac{1}{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} x_j x_{j+m}, \quad (3.15)$$

onde $C_m = C_m(t) = C(m\Delta t)$. Essa função indica a memória que o sinal guarda de seu valor m pontos antes. Sinais periódicos terão uma função de autocorrelação periódica, enquanto para sinais caóticos ou aleatórios ela decairá a zero rapidamente. A associação da autocorrelação com o tempo de retorno também é bastante imediata. Após um retorno, podemos imaginar que um tempo de retorno de tamanho $T = \tau$ é mais provável (improvável) quando o sistema é correlacionado (anti-correlacionado) no tempo τ . As oscilações que notamos no detalhe da figura 3.14, após o efeito de memória de curto alcance, são similares às que observamos para a autocorrelação de z na figura 3.15.

Existem algumas semelhanças e distinções entre os efeitos da autocorrelação e da memória de curto alcance na DTR que devem ser ressaltadas. A função de autocorrelação em sistemas caóticos tem um decaimento exponencial a zero fazendo com que seu efeito na distribuição de tempo de retorno também tenda a zero, com eventuais oscilações. Assim, esperamos que a autocorrelação tenha conseqüências similares às descritas no ítem 3.1.3 para o efeito de órbitas periódicas: desvio do comportamento binomial no tempo curto que pode ter efeitos sobre toda distribuição e pode ser mascarado com a utilização de um bin muito grande. No entanto, a origem dos efeitos parece ser bastante distinta assim como o tempo de atuação (geralmente maiores para a autocorrelação). Efeitos típicos da memória de curto alcance, ausentes no caso da autocorrelação, são a ausência de retornos de um tempo curto e uma distribuição irregular de retornos de tempo curto.

Reduzindo ainda mais o parâmetro de controle, no sentido do atrator periódico, podemos obter uma situação ainda mais drástica (Fig. 3.16). Nesse caso os retornos ficam restritos aos múltiplos da freqüência característica para tempos indefinidamente longos na forma de uma quasi-periodicidade⁵. Conseqüentemente, o desvio em relação à binomial também é drástico.

Notamos assim que a DTR em sistemas caóticos de tempo contínuo, como o circuito de MC tratado aqui, é também essencialmente exponencial. Notamos no entanto que, além da memória

⁵Note a partir da ampliação da figura 3.16 que entre dois picos a probabilidade de retorno é nula por um intervalo de tempo.

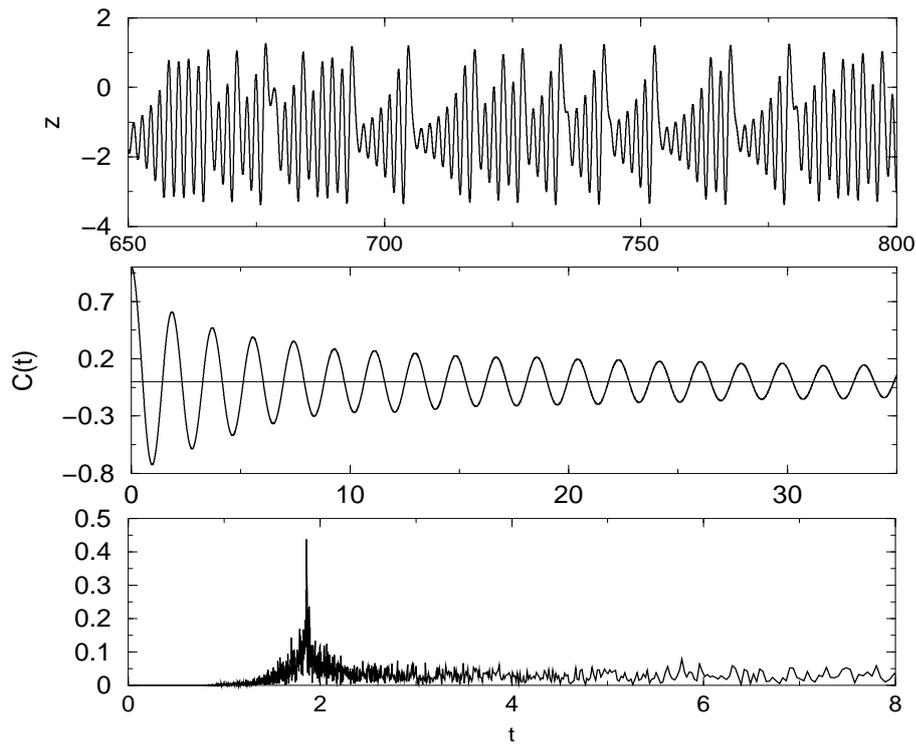


Figura 3.15: Análise da série temporal $z(t)$ para os mesmos parâmetros da Fig. 3.14. De cima para baixo uma amostra da série, a função de autocorrelação e o espectro em função do período.

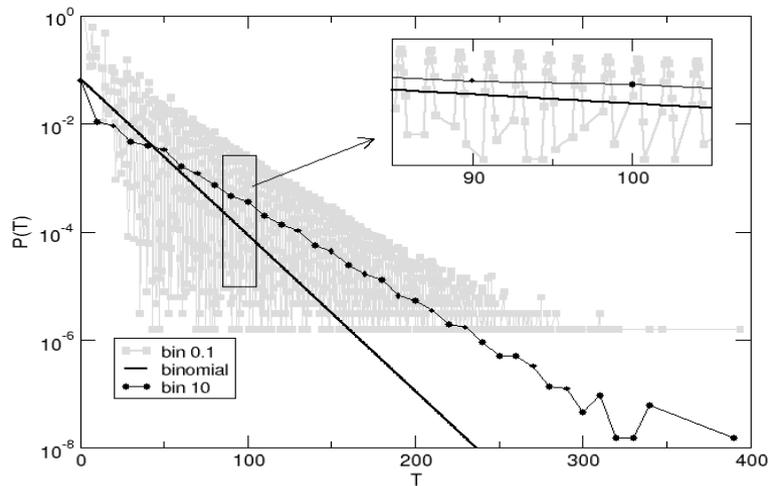


Figura 3.16: Distribuição de tempo de retorno para o atrator de Rössler ($\alpha = 11$). Notamos que o desvio do comportamento exponencial devido a autocorrelação se estende para todos os tempos.

de curto alcance relatada anteriormente, a presença de correlação no sistema, bem como de períodos característicos, possuem uma influência direta na DTR. Dependendo dos parâmetros de controle o sistema pode se aproximar de um regime quasi-periódico e nesse casos esses efeitos não ficarão restrito aos TR curtos.

3.3 Sistemas intermitentes

Até o momento obtivemos a distribuição de tempo de retorno (DTR) para os sistemas caóticos paradigmáticos, que foram sistematicamente comparadas com a distribuição binomial (Eq.(2.6)). Calculamos agora a distribuição de tempo de retorno para sistemas intermitentes. Abordamos três casos de intermitência: intermitência do tipo II (no sentido de Pomeau-Manneville [Bergé et al., 1984]), intermitência induzida por crise e intermitência em sistemas Hamiltonianos. Para cada uma das intermitências apresentamos uma sucinta análise teórica centrada nas suas propriedades temporais e simulações numéricas da DTR para um sistema particular. Ao contrário das DTR que tratamos até o momento vemos surgir DTR completamente distintas da binomial.

3.3.1 Intermitência de Pomeau-Manneville

Teoria

A denominação intermitente parece derivada do estudo da dinâmica de fluidos e da turbulência. Apesar de não ser possível precisar uma definição, o termo está ligado a uma mudança brusca e repentina no comportamento de uma grandeza que passa a alternar entre duas ou mais situações distintas. Em sua versão mais simplificada, podemos pensar em um fenômeno intermitente como consistindo de um comportamento regular ou *laminar* do sistema durante um longo período de tempo, interrompido por um *estouro* caótico. O comportamento imprevisível do sistema reside não apenas na região do estouro, mas também na duração das regiões laminares.

Dentro do estudo de sistemas caóticos o termo intermitência associa-se à rota para o caos de Pomeau-Manneville via intermitência [Pomeau e Manneville, 1980, Bergé et al., 1984] [Ferrara e do Prado, 1994] que, conjuntamente com a rota de Feigenbaum via duplicação de período e de Ruelle-Takens via quasi-periodicidade, consistem nas maneiras paradigmáticas de perda de estabilidade estrutural de um sistema ao variarmos um parâmetro de controle. Trataremos agora dos principais aspectos desta teoria, ressaltando as propriedades temporais da região laminar.

Dentro da abordagem de Pomeau-Manneville, os sistemas intermitentes são resultados de bifurcações que provocam a perda da estabilidade de um ponto fixo. Realizando o procedimento usual para determinar a estabilidade do ponto fixo, linearização e cálculo dos autovalores λ_i da matriz de Floquet, notamos que no caso de mapas intermitentes a órbita periódica passa de estável ($\lambda_i < 1$) para instável ($\lambda_i > 1$) a medida que variamos um parâmetro de controle $\varepsilon = \alpha - \alpha_c$. Os sistemas intermitentes são então classificados em tipo *I*, *II* e *III* segundo a forma como os autovalores cruzam o círculo de raio unitário: pelo +1, complexo conjugado com $Im(\lambda) \neq 0$ e -1 respectivamente (veja figura 3.17). Imediatamente após a perda da estabilidade o mapa de retorno forma uma espécie de canal que aprisiona a trajetória em um movimento aproximadamente regular durante um longo período de tempo (figura 3.18).

Entre muitas características compartilhadas pelos sistemas intermitentes de mesmo tipo uma delas é a distribuição do tempo de duração da região laminar, resultado utilizado inclusive para sua classificação. Faremos uma descrição sucinta desses resultados indicando a referência onde pode-se encontrar uma discussão mais detalhada⁶. Em geral estamos interessados em saber, para um determinado ε , a distribuição das regiões laminares de tamanho τ : $P(\tau, \varepsilon)$. Como veremos, a distribuição de tempos de retorno reproduzirá essencialmente esta distribuição.

Tipo I: Este tipo de intermitência caracteriza-se pelo fato do tamanho das regiões laminares se concentrar em valores da ordem de $\tau = 1/\varepsilon$, não sendo encontradas regiões laminares longas.

⁶Para manter a coerência da notação desta seção com a aplicação que será realizada a seguir adotamos como parâmetro de controle ε um valor que é a metade do valor utilizado usualmente na literatura.

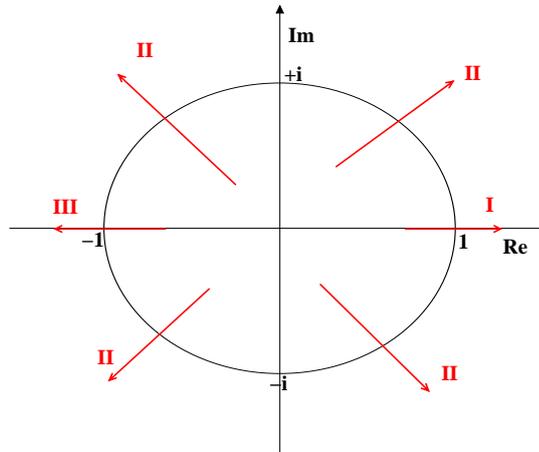


Figura 3.17: Ilustração da perda da estabilidade de uma órbita periódica para cada um dos tipos de intermitência: *I, II e III*. As setas no plano complexo representam direções em que o autovalor do ponto fixo cruza o círculo de raio unitário no parâmetro $\alpha = \alpha_c$, tornando-se instáveis

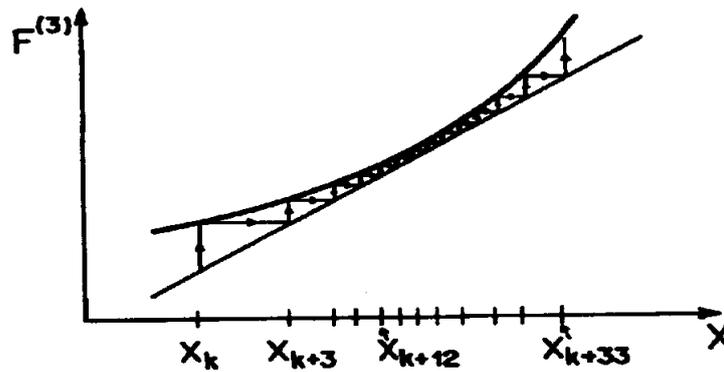


Figura 3.18: Ilustração da formação do canal de intermitência imediatamente após a perda de estabilidade da órbita de período 3. A medida que variamos ε de negativo a positivo a curva cruza a reta dando origem a um canal. Essa figura corresponde ao mapa logístico [Ferrara e do Prado, 1994].

Tipo II: No caso de intermitência do tipo *II* a distribuição das regiões laminares é [Bergé et al., 1984, Huang e Kim, 1987]

$$P_{II}(\tau, \varepsilon) \propto \frac{\varepsilon^2 e^{-\varepsilon\tau}}{(1 - e^{-\varepsilon\tau})^2}. \quad (3.16)$$

É interessante destacar os dois regimes característicos desta distribuição

$$P_{II} \propto \begin{cases} \frac{1}{\tau^2} & \text{quando } 1 \ll \tau \ll \varepsilon^{-1} \\ e^{-\varepsilon\tau} & \text{quando } \tau \gg \varepsilon^{-1} \end{cases} \quad (3.17)$$

Tipo III: Para sistemas que apresentam a intermitência do tipo *III*, encontramos [Bergé et al., 1984]

$$P_{III}(\tau, \varepsilon) \propto \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{(1 - e^{-4\varepsilon\tau})^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.18)$$

de onde destacamos os regimes

$$P_{III} \propto \begin{cases} \frac{1}{\tau^{3/2}} & \text{quando } 1 \ll \tau \ll \varepsilon^{-1} \\ e^{-\varepsilon\tau} & \text{quando } \tau \gg \varepsilon^{-1} \end{cases} \quad (3.19)$$

Mais recentemente um novo tipo de intermitência vêm sendo investigada, a intermitência *on-off* [Heagy et al., 1994]. Ao contrário da intermitência no sentido de Pomeau-Manneville, a intermitência *on-off* é criada a partir da variação de um dos parâmetros de controle de um sistema caótico. A flutuação desse parâmetro ao redor de um ponto de bifurcação faz com que o sistema alterne intermitentemente entre o comportamento anterior e o posterior à bifurcação. Apesar da origem distinta da intermitência, a distribuição dos tempos da região laminar apresenta os mesmos limites apresentados na equação (3.19) para a intermitência do tipo III [Heagy et al., 1994]. A cauda exponencial está associada ao ruído ou aleatoriedade no sistema, quando este é o mecanismo responsável pela variação do parâmetro de controle. Esperamos que as conclusões que estabelecemos aqui para a intermitência de Pomeau-Manneville se apliquem igualmente a este tipo de intermitência.

Exemplificaremos a aplicação do tempo de retorno de Poincaré em um sistema intermitente do tipo *II* a seguir. Antes porém convém introduzir um novo tipo de distribuição de TR característico de sistemas intermitentes. Conforme sugere-nos o primeiro regime das equações (3.17) e (3.19) dizemos que uma distribuição é do tipo lei de potência quando

$$P_{pot}(T) = aT^{-\gamma} . \quad (3.20)$$

Para melhor visualizar a distribuição de lei de potência apresentaremos os resultados sempre em um gráfico log-log, onde ela apresenta-se como uma reta.

Note que para sistemas onde é possível definir uma medida positiva e finita, o lema de Kac (Eq. 2.2) impõe-nos que o TR médio é finito e portanto, quando a distribuição (3.20) aplica-se no limite $T \rightarrow \infty$ têm-se $\gamma > 2$. Este resultado é violado nos casos da intermitência *II* e *III* quando $\varepsilon = 0$ uma vez que nesses casos a medida de todo intervalo também é divergente. No entanto, para ε ligeiramente superior a 0 deixa de valer o limite $T \rightarrow \infty$ para a lei de potência e o TR médio volta a ser finito.

Aplicação para o mapa de Manneville

Um caso típico de sistema intermitente de tipo *II* é o mapa de Manneville⁷. [Manneville, 1980]

$$x_{n+1} = f_\varepsilon(x_n) = (1 + \varepsilon)x_n + (1 - \varepsilon)x_n^2 \pmod{1} . \quad (3.21)$$

A medida que variamos o parâmetro ε de 0 a 1 passamos de um sistema completamente intermitente (conforme Fig. 3.20) até o Bernoulli-shift, um sistema de caos completo. No caso intermitente, o comportamento das trajetórias se distingue em duas regiões: laminar e caótica. Para este sistema, a região laminar consiste em um crescimento lento e monotônico ao longo do canal ilustrado na figura 3.19. Após a saída do canal ocorre um estouro caótico até que finalmente a trajetória é reinjetada. Quanto mais próximo à origem (ponto fixo instável) a trajetória for reinjetada, maior será o tempo da região laminar. O canal é criado pois o gráfico de $f_\varepsilon(x)$ é tangente à reta $y = x$ na origem quando $\varepsilon = 0$. De fato,

$$\left. \frac{df_\varepsilon}{dx} \right|_{x=0} = 1 + \varepsilon ,$$

⁷Não confundir com outros mapas também denominados de Manneville, como em [de S. Cavalcante e Leite, 2002]

indicando que com ε crescente, o canal torna-se cada vez menos efetivo. Este efeito pode ser verificado a partir da figura 3.20 e ilustra o resultado destacado na relação (3.17)⁸.

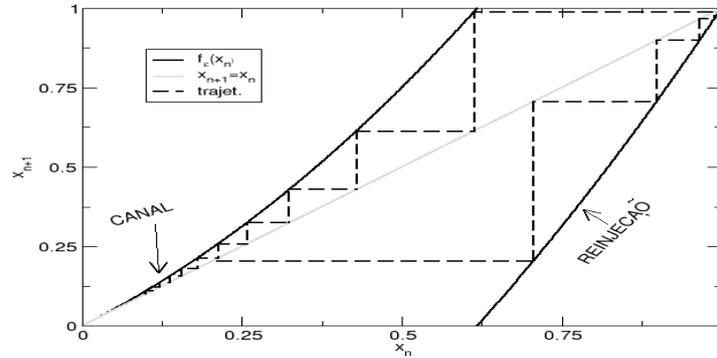


Figura 3.19: Mapa de retorno f_ε dado pela Eq. (3.21) ($\varepsilon = 0$) com ilustração de uma trajetória com condição inicial dentro do canal $x_0 = 0, 1$.

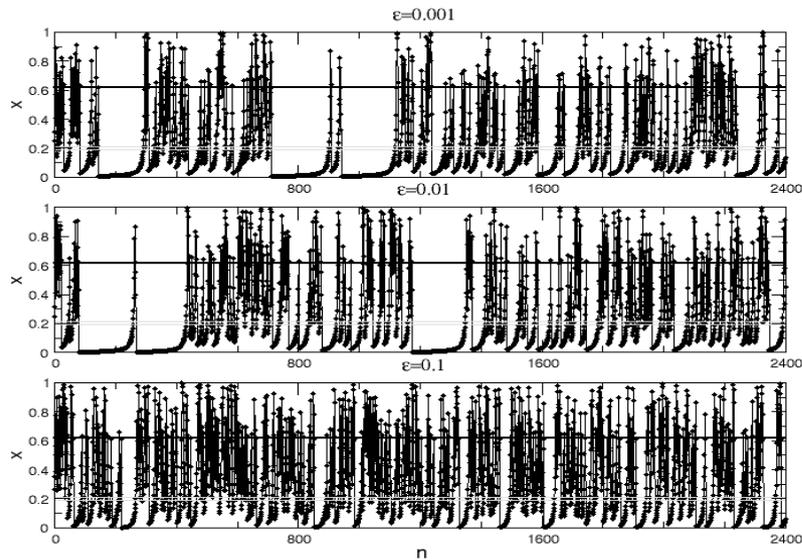


Figura 3.20: Exemplo de três séries de pontos do mapa de Manneville (Eq. 3.21) para diferentes valores de ε . A reta preta indica o local do fim do canal $f_\varepsilon(x) = 1$ e as duas cinzas a região de retorno $I(X_c = 0, 2, \delta = 0, 01)$ utilizada na Fig (3.21).

Na figura 3.21 apresentamos uma distribuição de tempo de retorno para o mapa de Manneville no caso de $\varepsilon = 0$. Observamos um comportamento descrito por lei de potência (Eq. (3.20))

⁸ A distribuição de tempo das regiões laminares deste sistema obedece a Eq. 3.16. No entanto, em [Manneville, 1980] a relação apresentada é para número $N(\tau > \tau_0, \epsilon)$ de regiões laminares maiores que τ . Esta distribuição é obtida de $P(\tau, \epsilon)$

$$N(\tau \geq \tau_0) = \int_{\tau_0}^{\infty} P(\tau, \epsilon) d\tau .$$

com $\gamma = 2$. Vemos que este resultado reflete a distribuição das regiões laminares (Eq.(3.16)). Se tomamos um caso típico, com $\epsilon \neq 0$ obtemos um decaimento com lei de potência até o tempo $T \approx 1/\epsilon$ e um decaimento exponencial para $T > 1/\epsilon$, precisamente como previsto em 3.17. Ressaltamos que neste último caso a lei de Potência ajustada ao regime intermediário levou-nos a um valor de γ superior a 2, o que deve ser resultado do fato do limite $1 \ll \tau \ll \epsilon^{-1}$ da Eq. (3.18) não se aplicar a contento. Já o comportamento exponencial levou-nos a um valor do expoente $b = 0,00098 \pm 0,00004 \approx 0,001 = \epsilon$ conforme previsto pela relação (3.17).

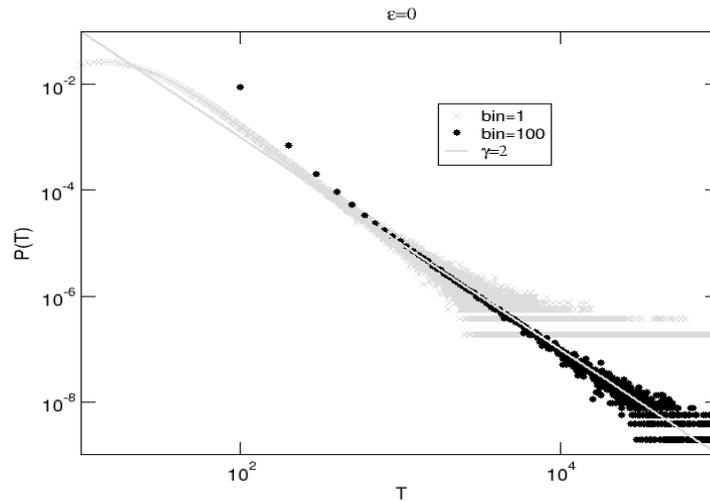


Figura 3.21: Distribuição de tempo de retorno para o mapa de Manneville com $\epsilon = 0$ e $X_c = 0,2, \delta = 0,01$ mostrando um comportamento do tipo lei de potência com expoente $\gamma = 2$.

3.3.2 Intermitência induzida por crise

Teoria

Um tipo de intermitência presente em atratores caóticos, também provocada pela variação de um parâmetro de controle α , é a intermitência induzida por crise (*crisis-induced intermittency* [Grebogi et al., 1987]). A medida que aumentamos o parâmetro de controle α o atrator sofre uma crise (mudança repentina e descontínua no atrator caótico) em um determinado parâmetro de controle $\alpha = \alpha_c$ [Grebogi et al., 1982]. A intermitência é observada no sistema logo após uma crise $\alpha \gtrsim \alpha_c$. Seguindo [Grebogi et al., 1987], listamos os três principais tipos de crise que um atrator pode sofrer e enfatizamos as definições de tempo característicos τ utilizadas para caracterizar cada um dos casos.

- i **Destruição do atrator.** Após a crise o atrator estranho deixa de existir podendo dar origem a um transiente caótico (sobre o antigo atrator) bastante longo [Grebogi et al., 1986]. O tempo característico τ é dado pelo tempo médio que a trajetória leva para sair do *antigo* atrator caótico considerando um conjunto de condições iniciais.
- ii **Aumento do atrator.** O atrator estranho sofre um aumento de tamanho depois da crise. O tempo característico τ é definido como o tempo médio que a trajetória leva para visitar a *nova* região.

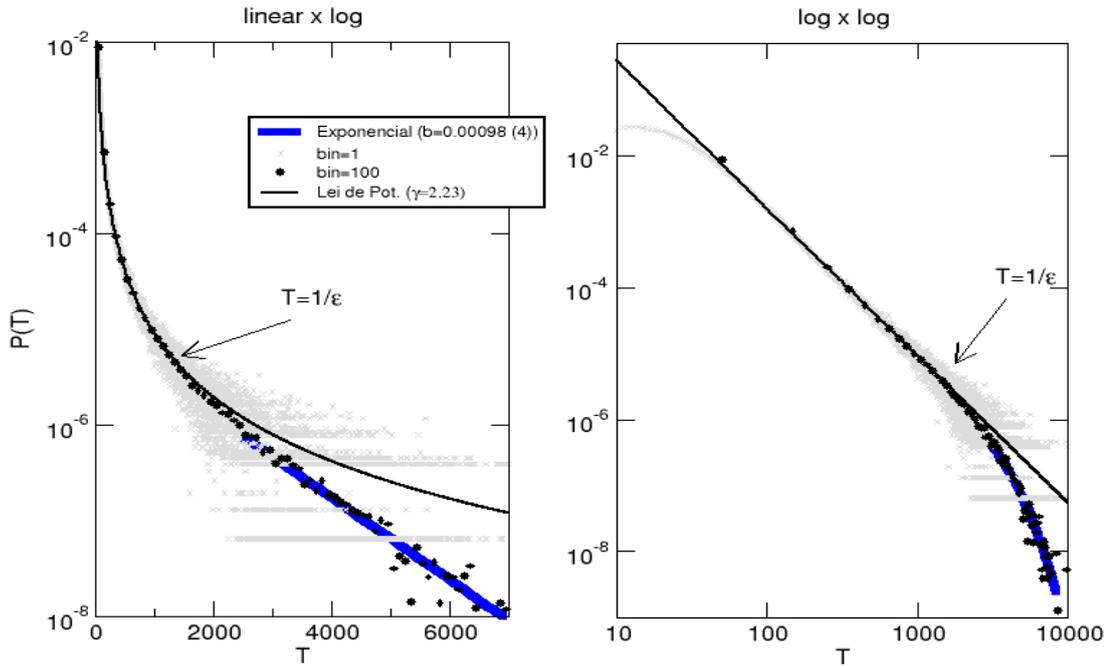


Figura 3.22: Distribuição de tempo de retorno para o mapa de Manneville com $\varepsilon = 0.001$ e $X_c = 0, 2$, $\delta = 0, 01$ mostrando um comportamento do tipo lei de potência até retornos da ordem de $\frac{1}{\varepsilon}$, a partir de onde volta a predominar um decaimento exponencial.

iii **Fusão de atratores.** Os dois atratores crescem com o aumento de α , e em $\alpha = \alpha_c$ os dois tocam simultaneamente a bacia de atração do outro atrator. A trajetória passa então a visitar os dois atratores sendo que o tempo de permanência médio em cada atrator é definido como τ .

No que se refere aos dois últimos casos listados acima, o termo intermitência é justificado pela analogia com o caso de Pomeau-Manneville (item 3.3.1):

$$\begin{aligned} \text{Intermitência de Pomeau-Manneville: } & \text{caos} \rightarrow \text{regular} \rightarrow \text{caos} \rightarrow \text{regular} \rightarrow \dots \\ \text{Intermitência induzida por crise: } & \text{caos}_1 \rightarrow \text{caos}_2 \rightarrow \text{caos}_1 \rightarrow \text{caos}_2 \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

O principal resultado demonstrado em [Grebogi et al., 1987] para os três casos acima diz respeito ao comportamento do tempo característico τ em função do parâmetro de controle α

$$\tau \sim (\alpha - \alpha_c)^{-\lambda}. \quad (3.23)$$

A dedução da relação (3.23), bem como uma dedução analítica do expoente λ , requerem uma compreensão sobre o processo responsável pela crise. Os processos de crise estudados são decorrentes de um cruzamento das variedades estável e instável de pontos fixos instáveis (selas). No valor do parâmetro crítico α_c a variedade estável tangencia a variedade instável do mesmo ponto fixo (*tangência homoclínica*) ou de um outro ponto fixo de mesmo período (*tangência heteroclínica*). O parâmetro λ da Eq. (3.23) pode ser obtido como função dos autovalores do ponto fixo instável cuja variedade instável sofre uma tangência. No caso de mapas bi-dimensionais teremos dois autovalores β_1, β_2 (um associado à variedade instável ($|\beta_1| > 1$) e

outro à variedade estável ($|\beta_2| < 1$) e o parâmetro λ pode ser obtido como

$$\lambda^1 = \frac{1}{2} + \frac{\ln|\beta_1|}{|\ln|\beta_2||}, \quad (3.24)$$

para o caso heteroclínico, e

$$\lambda^2 = \frac{\ln|\beta_2|}{(\ln|\beta_1\beta_2|^2)}, \quad (3.25)$$

para o caso homoclínico [Grebogi et al., 1987]. No caso de contração forte $\beta_2 \rightarrow 0$ temos $\gamma = \frac{1}{2}$ em ambos os casos, que é o resultado para mapas unidimensionais com um máximo quadrático.

Aplicação ao circuito de Matsumoto-Chua

Para verificar o comportamento da distribuição de tempo de retorno (TR) em sistemas intermitentes gerados por crise retornamos ao circuito de Matsumoto-Chua, Eq. (3.12), e passamos a estudar a distribuição de TR para o atrator de duplo-roló próximo à bifurcação - **Rössler**→**duplo-roló** - que ocorre para $\alpha_c = 11,2834$. Essa situação é análoga ao caso iii (fusão de atratores) discutido acima, sendo este caso um sistemas tridimensional com tempo contínuo. O sistema costuma permanecer um longo tempo confinado em um dos rolos, ou seja, em um dos remanescentes atratores de Rössler, até passar para o outro atrator caótico, configurando uma intermitência também denominada caos-caos [Anishchenko et al., 1994].

A figura 3.23 mostra a distribuição de TR para o sistema de MC para $\alpha = 11,285$, regime intermitente. Algumas semelhanças com os casos vistos anteriormente são notórias: decaimento exponencial com autocorrelação e memória de curto alcance. Como novidade ressalta-se o surgimento de um segundo regime de decaimento exponencial na distribuição de TR. Podemos associar cada um dos regimes de decaimento exponencial com o movimento em cada uma das partes do atrator. O primeiro regime está associado ao atrator onde se encontra o intervalo de retorno I a exemplo do atrator de Rössler. Já o segundo regime exponencial refere-se a trajetórias que saíram do primeiro atrator, passam um tempo (distribuído também exponencialmente) no segundo atrator, e finalmente retornam ao primeiro atrator e ao intervalo I . Denominamos o tempo entre os dois regimes como sendo o tempo crítico T^* que pode ser obtido, conforme ilustrado na figura 3.23 (a partir do ajuste de exponenciais a cada um dos regimes) e observando sua intersecção e caracteriza um tempo típico de permanência em um dos atratores. Como veremos, este tempo T^* também representa um tempo característico do sistema, ou seja, é uma definição análoga ao tempo de residência médio τ em um atrator utilizado em [Grebogi et al., 1987].

A dependência de T^* com o parâmetro α pode ser entendida de forma qualitativa. A medida que diminuimos o parâmetro de controle, aproximando-nos do valor da bifurcação $\alpha \rightarrow \alpha_c$, esperamos que o movimento fique cada vez mais confinado em um dos atratores e que, portanto, $T^* \rightarrow \infty$. No limite oposto, $\alpha \rightarrow \infty$, o atrator do tipo duplo-roló tende a se consolidar e a distinção em dois atratores distintos a ser artificial fazendo com que $T^* \rightarrow 0$. Na figura 3.24 apresentamos os resultados obtidos para a dependência de T^* com o parâmetro α das três regiões de retornos marcadas na figura 3.12. A curva ajustada *para cada sequência de pontos* é da forma da Eq. 3.23 (com N sendo a constante de proporcionalidade) mostrando que este tempo crítico apresenta um comportamento coerente com a teoria descrita no item anterior.

Neste caso o valor de λ não é universal, ou seja, depende da região de retorno utilizada. Esta dependência de T^* com o ponto de retorno pode ser explicada parcialmente como uma função da medida do intervalo I . Passamos a estudar em detalhe a dependência da medida $\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle}$ e de T^* para um ponto de retorno fixo (X_c fixo), variando δ . Os resultados se encontram na figura 3.25, sendo que o primeiro gráfico apresenta o cálculo de D_1 como expoente da dependência

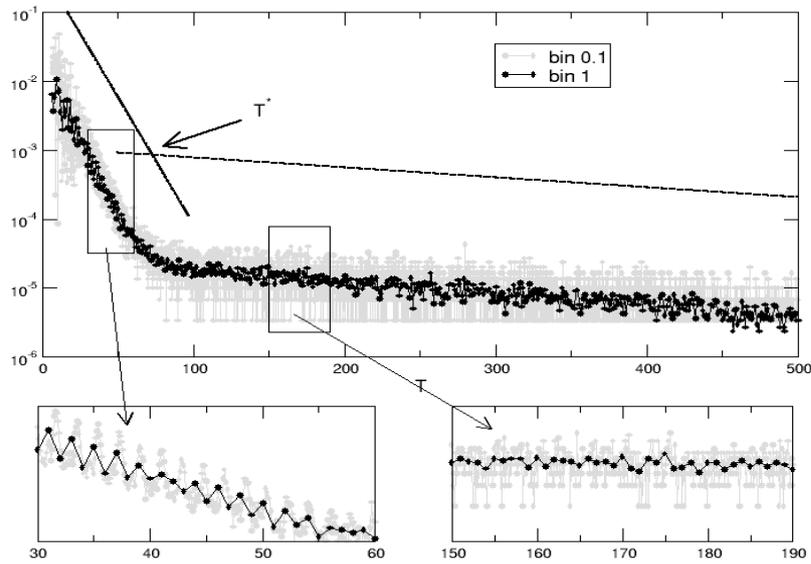


Figura 3.23: Distribuição de tempo de retorno para o atrator de duplo rolo ($\alpha = 11,285$) próximo à bifurcação. Notamos o aparecimento de dois regimes de decaimento exponencial dos tempos de retorno. As retas em azul são os ajustes para cada uma das regiões e enfatizam o tempo característico T^* . As retas foram multiplicados por um fator 50 para melhor visualização. [$X_c = (1,790657, 0,046032, -2,262724)$, $\delta = 0,07$, $\langle T \rangle = 36,5$].

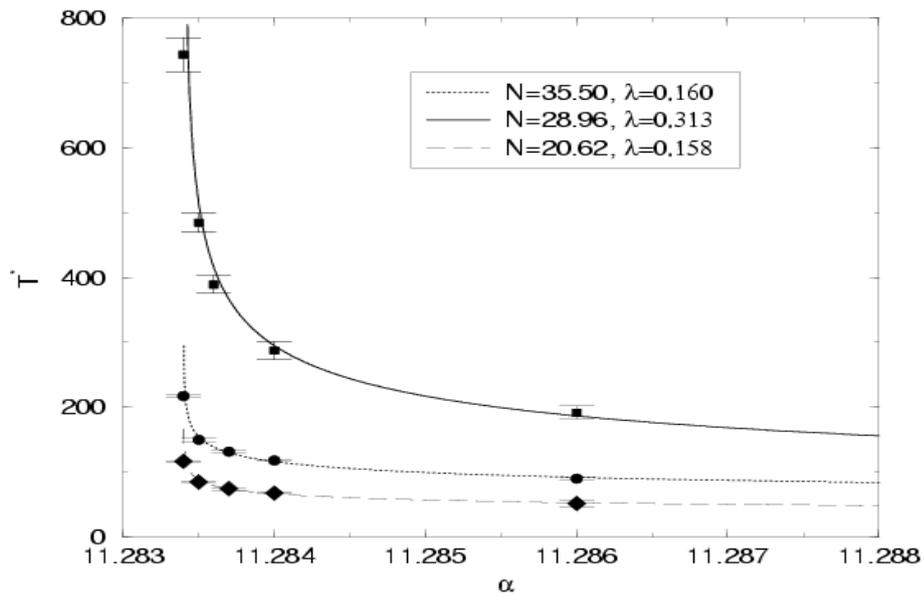


Figura 3.24: Dependência do tempo tempo crítico T^* com o parâmetro de controle α para as três regiões distintas de retorno assinaladas na Fig. 3.12b. As curvas contínuas representam ajuste da Eq. (3.23), onde N é a constante de proporcionalidade.

de $\log(\mu) \times \log(\delta)$. Além de exemplificar o método sugerido no ítem 3.1.2 indica os pontos adequados para que no segundo gráfico fique clara dependência exponencial de T^* com δ .

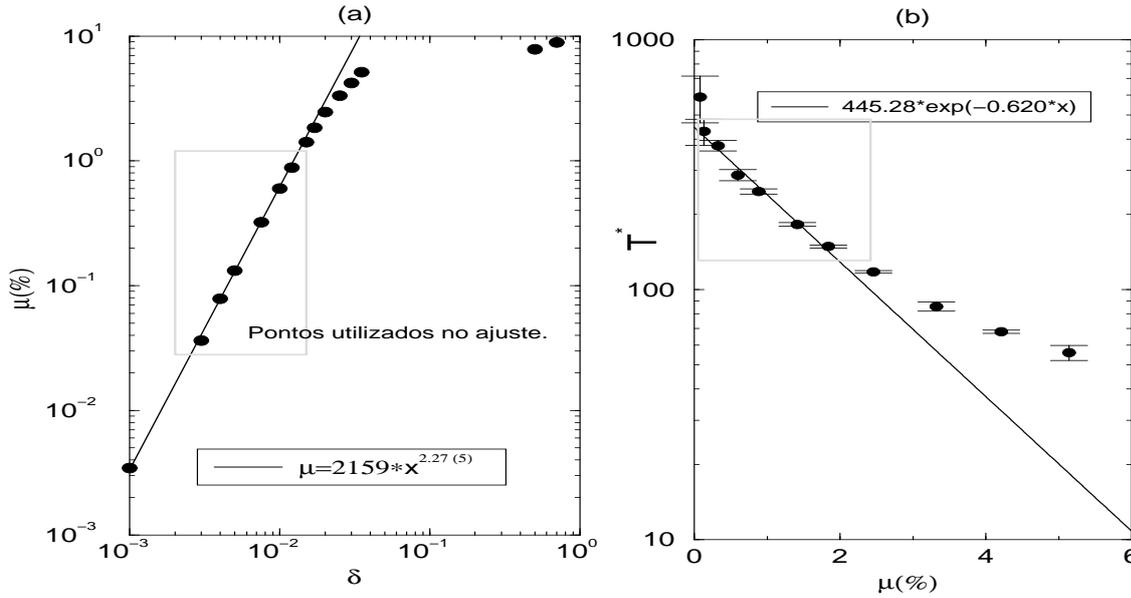


Figura 3.25: (a) Medida do intervalo de retorno $\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle}$ para diferentes valores de δ com $X_c = (-1, 261882, 0, 317816, 2, 198729)$ indicando que $D_1 = 2,27 \pm 0,05$. (b) Dependência exponencial do tempo de retorno crítico T^* com δ para o mesmo X_c quando $\delta \rightarrow 0$.

3.3.3 Intermitência em sistemas Hamiltonianos

Teoria

Estamos interessados agora em sistemas dinâmicos conservativos, isto é, sistemas onde a energia é conservada. Neste caso a dinâmica é descrita pela Hamiltoniana $H(\vec{x}; t)$. Os sistemas Hamiltonianos mais simples que apresentam caos são os quase-integráveis, isto é, sistemas descritos por uma Hamiltoniana integrável sujeita a uma perturbação dependente do ângulo e eventualmente do tempo

$$H(\mathbf{I}, \theta; t) = H(\mathbf{I}) + \epsilon V(\mathbf{I}, \theta, t). \quad (3.26)$$

Os sistemas quase-integráveis descrevem uma grande quantidade de fenômenos Físicos e podem ser explorados a partir de métodos perturbativos e da teoria KAM [Zaslavsky, 1991, Lichtenberg e Lieberman, 1983, Walker e Ford, 1969]. No próximo capítulo discutiremos alguns desses aspectos em mais detalhes.

A medida que aumentamos o valor do parâmetro ϵ passamos de uma situação integrável (trajetórias periódicas e quase-periódicas) para um regime onde coexistem regiões caóticas (mar estocástico) com regiões regulares (ilhas). Este cenário é bastante conhecido da mecânica clássica e recentemente teve exploradas suas conexões com o transporte anômalo, o que apresentaremos no capítulo seguinte.

O movimento de uma trajetória iniciada em uma região caótica do espaço de fases de um sistema quase-integrável é bastante complexo. Apesar da trajetória não penetrar nas regiões regulares (ilhas) perceberemos que a presença de algumas dessas estruturas afeta de maneira decisiva o comportamento das trajetórias. De fato, graças à presença de *cantori* (toroides de dimensão fractal) e de um labirinto de cadeias de ilhas dentro de cadeias de ilhas, geradas por ressonâncias, trajetórias do mar estocástico podem ser aprisionadas em regiões estreitas próximas às ilhas, permanecendo um tempo muito longo até escapar novamente para o mar estocástico. Podemos destacar portanto dois tipos de movimento, ressaltando os aspectos temporais:

- **Mar estocástico.** A trajetória realiza um movimento errático similar a um movimento Browniano (passeio aleatório), possuindo uma estatística do tipo Poisson para os retornos (visitações).
- **Próximo às Ilhas.** A trajetória fica confinada por um longo tempo próximo às ilhas em um processo de aprisionamento (*trapping*). Durante esse tempo o movimento é aproximadamente regular. O tempo de aprisionamento típico é da forma de uma lei de Potência, isto é, para uma trajetória presa a distribuição do tempo que ela permanece próxima da ilha é

$$\rho_{apri}(T) \propto T^{-\gamma_{apri}} . \quad (3.27)$$

Uma vez a trajetória iniciada em uma região caótica, ela alterna entre estes dois regimes de movimento indefinidamente, dizemos assim que se trata de um movimento intermitente. Apesar da alternância ser entre regimes regulares e caóticos essa intermitência se distingue do conceito usual pois o movimento caótico não se dá na forma de um estouro.

A distribuição de TR em um sistema deste tipo refletirá a presença desses dois processos. Para TR curtos esperamos uma queda exponencial (movimento no mar estocástico) como na Eq. (2.10). Já para TR longos esperamos que os aprisionamentos nas ilhas predomine provocando uma distribuição do tipo lei de potência como na Eq. (3.20)⁹

$$P(T) \propto \begin{cases} e^{-bT} & \text{tempos "curtos"} \\ T^{-\gamma} & \text{tempos "longos"} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ressaltamos, como veremos a seguir, a possibilidade da existência de mais de um regime de lei de potência com $\gamma_1 \neq \gamma_2$ tanto devido à presença de mais de uma ilha no espaço de fases quanto devido a multi-fractalidade de uma única ilha. Pelo lema de Kac, o tempo médio deve ser finito e portanto o valor de γ_∞ (quando $t \rightarrow \infty$) deve ser $\gamma_\infty > 2$.

A relação entre o expoente γ da equação (3.20) (retorno) e o expoente γ_{apri} da equação (3.27) (aprisionamento) pode ser obtida considerando que o tempo que a trajetória leva para retornar ao intervalo de retorno I , após libertar-se de seu aprisionamento, é muito menor que o tempo típico de aprisionamento. Isto é, para tempos grandes a exponencial tende a zero muito mais rápido que uma lei de potência. Considerando que a trajetória fica aprisionada na ilha, a probabilidade de termos um retorno em $T = \tau$ é proporcional a probabilidade da trajetória ter saído do aprisionamento até o tempo $T = \tau$, que por sua vez é dado por

$$P_{retorno} \propto \int_0^\tau \rho_{apri}(T) dT.$$

Calculando explicitamente para o caso da Eq. (3.27) e comparando com a Eq. (3.20) obtemos a relação

$$\gamma = \gamma_{apri} + 1 , \quad (3.29)$$

que relaciona o expoente de aprisionamento γ_{apri} com o expoente do tempo de retorno γ .

Exemplo: mapa padrão

Passamos agora ao estudo numérico de sistemas dinâmicos conservativos no cenário de caos incompleto. Tomaremos aqui o mapa padrão no torus (com duplo mod (1)) como sistema quase-integrável típico

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - K \operatorname{sen}(2\pi x_n) \quad \operatorname{mod}(1), \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \quad \operatorname{mod}(1), \end{aligned} \quad (3.30)$$

⁹Existem diversas funções na literatura que possuem estes mesmos limites (Mittag-Leffler [Klafter et al., 1996], q-exponencias, etc...) no entanto parece-nos mais adequado manter a divisão da função uma vez que os processos que geram cada um dos regimes é proveniente de efeitos distintos.

onde K é o parâmetro de controle e o $\text{mod}(1)$ na primeira equação foi tomado, levando em conta sua simetria, para mantermos o sistema confinado. A dedução e as caracterizações detalhadas deste sistema serão feitas no próximo capítulo. Passamos a ilustrar as características descritas na seção anterior e ao cálculo do TR.

Espaço de Fases

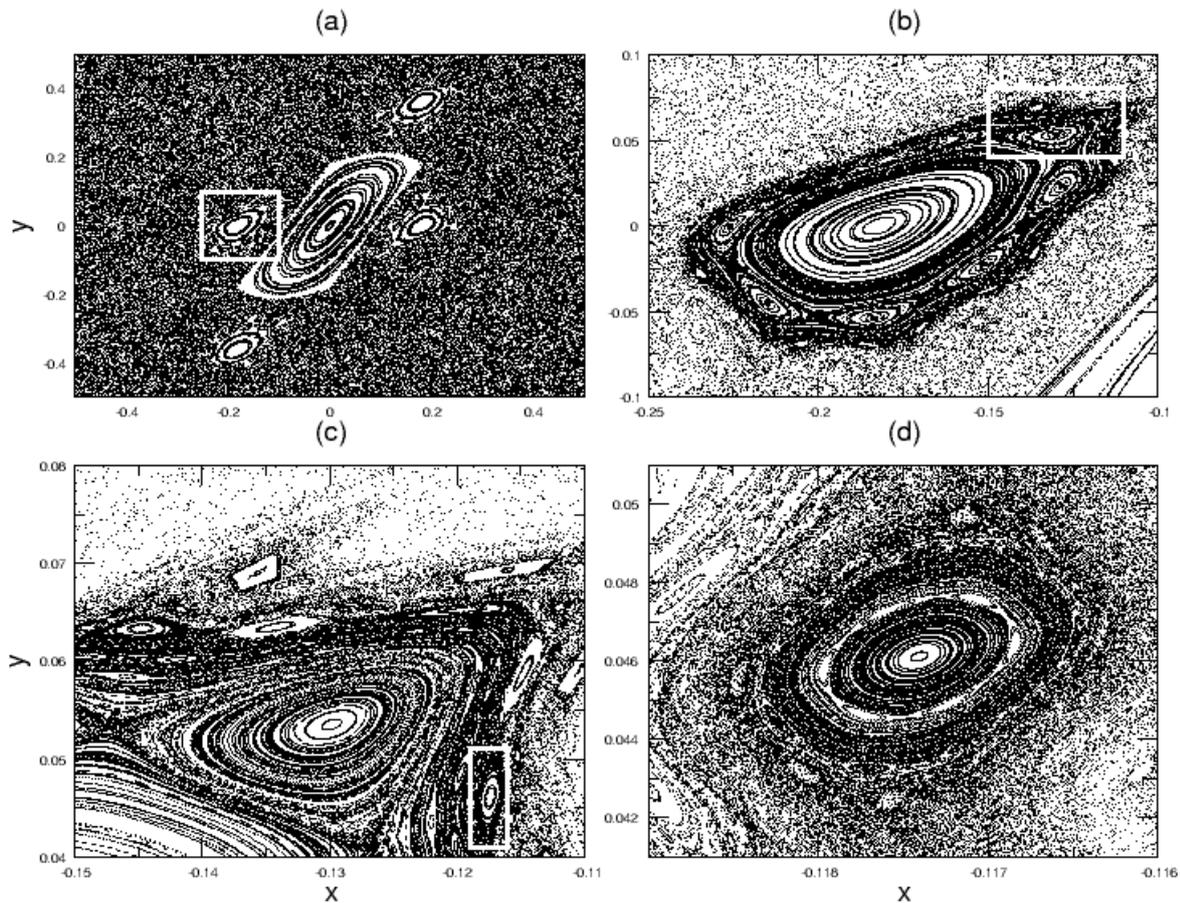


Figura 3.26: Retrato de fases do mapa padrão (Eq. (3.30)) para $K = 0,4$. As figuras (b), (c) e (d) são as ampliações marcadas nos mapas (a), (b) e (c) respectivamente. Condições iniciais escolhidas de forma aleatória.

Iniciamos nosso estudo fixando o parâmetro de controle em um valor intermediário $K = 0,4$, isto é, acima do valor crítico $K_c = 0,15464\dots$, onde surge o caos global mas suficientemente baixo para preservar estruturas. A figura 3.26a mostra o retrato de fases do mapa padrão para esse caso onde nota-se a presença de uma ilha de período 1 com uma cadeia de período 4 ao redor. Na figura 3.26 apresentamos ainda sucessivas ampliações em uma ilha mostrando o caráter recorrente de ilhas dentro de ilhas. Este caráter fractal do espaço de fases na fronteira com o mar estocástico (veja especialmente a figura 3.26c) é o responsável pelo aprisionamento das trajetórias. Além deste labirinto de ilhas a presença de cantorus¹⁰ também é responsável por

¹⁰Quando uma superfície toroidal irracional é rompida pela perturbação ela deixa de ser contínua e pode passar a ter uma estrutura similar a um conjunto de cantor [Alligood et al., 1996]. Essas estruturas toroidais com

barreiras no espaço de fases que dificultam a passagem das trajetórias e diminuem o expoente de Lyapunov, valores positivos mas muito próximos a zero, nas regiões próximas às ilhas.

Afim de quantificar o tempo de aprisionamento e retorno, apresentamos na figura 3.27 o retrato de fases do mapa padrão com $K = 0,4$ junto com as regiões utilizadas para o aprisionamento e o retorno.

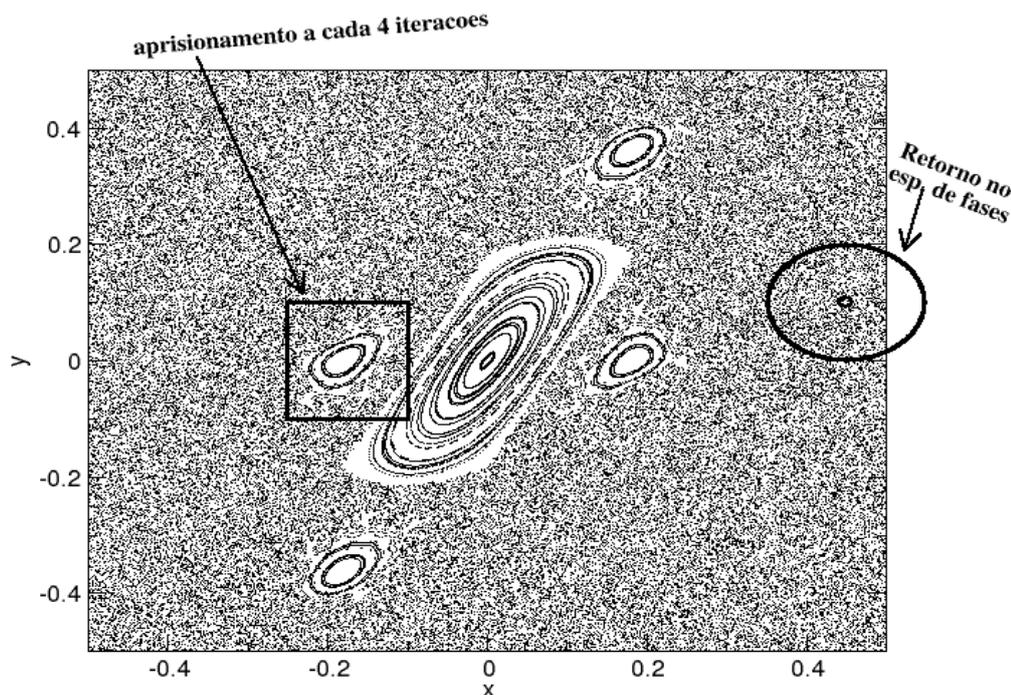


Figura 3.27: Retrato de fases do mapa padrão Eq. (3.30) com $K = 0,4$. A região quadrada foi considerada para o aprisionamento. As regiões circulares foram consideradas para o tempo de retorno (a região que extrapola o gráfico deve ser entendida como sendo completada em x negativo).

Aprisionamento

Para quantificarmos o aprisionamento ao redor de uma ilha, definimos o quadrado vermelho na figura 3.27 e observamos a evolução de uma única trajetória iniciada no mar estocástico. Quando a trajetória entrava na região delimitada, observamos se após 4 iterações do mapa (período da ilha) a trajetória permanecia na região. Enquanto esta condição era satisfeita repetíamos o procedimento. Uma vez que esta condição não era satisfeita obtínhamos o tempo de aprisionamento como o tempo entre a entrada e a saída na região mencionada. Iterando uma única trajetória $n = 10^{11}$ vezes montamos o gráfico da Fig. 3.28. Conforme ressaltamos na introdução teórica, o comportamento é do tipo lei de potência e deve ser contrastado com uma distribuição exponencial, que tende muito mais rapidamente a zero, que seria obtida se não houvessem estruturas no espaço de fases. O comportamento de multi-escala, isto é, mais de uma inclinação da lei de potência, está relacionado com a multi-fractalidade das ilhas e será discutido no item 4.3.1.

dimensão fractal são denominadas cantori.

Historicamente o aprisionamento das trajetórias próximo às ilhas são conhecidos há mais de vinte anos [Chirikov, 1979, Lichtenberg e Leiberman, 1983]. O mapa padrão tem sido utilizado para ilustrar essas propriedades graças a sua simplicidade e ao fato dele poder ser utilizado como aproximação local de sistemas Hamiltonianos genéricos, como discutiremos no capítulo 4. As propriedades do aprisionamento das trajetórias, bem como seus efeitos sobre diferentes grandezas, têm sido discutidas. Em [Karney, 1983, Chirikov e Shepelyansky, 1984] abordou-se a correlação, em [Grassberger e Kantz, 1985, Kantz e Grassberger, 1987] o expoente de Lyapunov e em [Geisel et al., 1987] o espectro de Fourier de trajetórias do mapa padrão. Seus efeitos sobre o transporte vem sendo explorado mais recentemente [Ichikawa et al., 1987, Zaslavsky, 2002b] e será discutido em detalhe na seção 4.2. De maneira geral fica claro que a estatística do tempo de retorno de Poincaré é um instrumento adequado para explorar o efeito de aprisionamento das trajetórias no espaço de fases do caos incompleto [Chirikov e Shepelyansky, 1999].

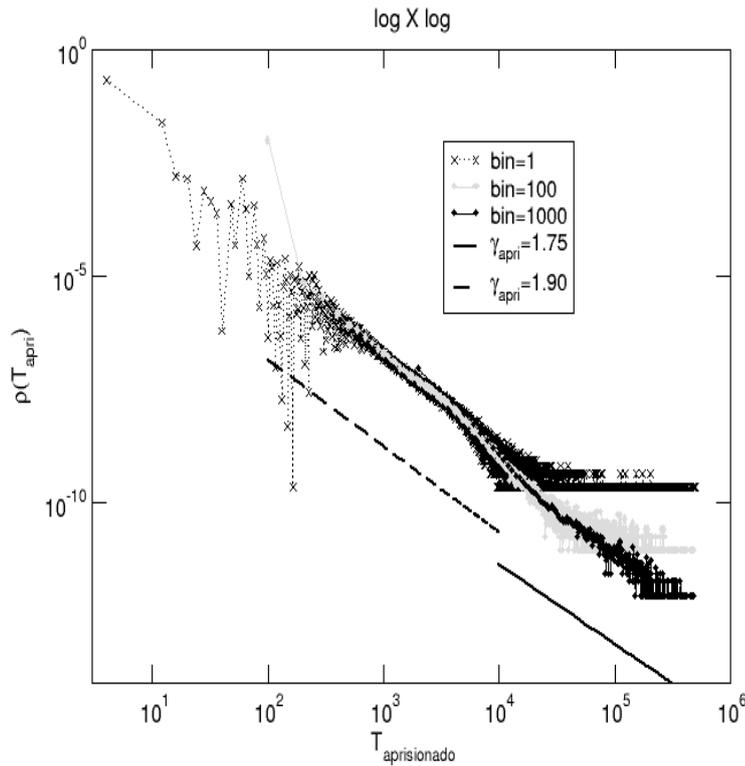


Figura 3.28: Distribuição do tempo de aprisionamento nas ilhas do mapa padrão com $K = 0,4$. A região de aprisionamento é o quadrado da Fig. 3.27. Notamos um comportamento geral do tipo lei de potência e apresentamos dois intervalos de tempo com coeficiente distintos, reflexo da multi-escala do sistema. As retas em azul e vermelho foram divididas por um fator 100 para efeito de visualização. $[N_{it} = 10^{11}]$

Tempo de Retorno

Passamos, finalmente, para a estatística de tempo de retorno (TR). Tomamos o cuidado de escolher a região de retorno no mar estocástico (círculos na figura 3.27) fixando $\vec{X}c = (0, 4, 0, 1)$.

Na Fig. 3.29 apresentamos a estatística de tempo de retorno utilizando $\delta = 0,01$. O com-

portamento geral é bem descrito pela relação (3.28), ou seja, um comportamento exponencial para tempos curtos (relacionado a trajetórias do mar estocástico) e um comportamento do tipo lei de potência para tempos longos (relacionado a trajetórias aprisionadas nas ilhas). Notamos, a partir do detalhe da figura que a memória de curto alcance também age neste sistema conservativo. No que se refere à cauda de lei de potência, a Fig. 3.29 nos mostra que, apesar de termos iterados o mapa 10^{11} vezes¹¹ a estatística de tempos longos é muito baixa, sendo necessária a utilização de valores grandes de bins para caracterizar a cauda. Comparando os regimes de tempo da Fig. 3.29 com os do aprisionamento na Fig. 3.28 notamos que mesmo em tempos em que o aprisionamento é claramente uma lei de potência, vemos um comportamento exponencial no TR. Isto se deve ao fato órbitas não aprisionadas poderem levar um tempo longo para retornar ao intervalo, uma vez que este é bastante pequeno.

Uma possível solução tanto para a pouca estatística como para uma melhor visualização da cauda é aumentar o tamanho da região de retorno. Baseados nas deduções da relação binomial na seção 2.2 vemos que o expoente da exponencial deve ser proporcional à medida do intervalo $b \propto \mu(I)$. Na figura 3.30 apresentamos a distribuição de tempo de retorno com $\delta = 0,1$, isto é, 10 vezes maior que na figura 3.29. Dessa forma a área de retorno tornou-se 100 vezes maior e notamos que a exponencial decai mais rapidamente a zero permitindo que a cauda de lei de potência surja aproximadamente em um tempo 100 vezes menor ($T \approx 4 \times 10^2$ para $\delta = 0,1$ e $T \approx 4 \cdot 10^4$ para $\delta = 0,1$). Notamos assim que o efeito de aumentarmos δ neste tipo de sistema (garantindo que região de retorno permaneça inteiramente no mar estocástico) é permitir que a cauda de lei de potência se torne mais visível. Notamos ainda que, apesar de iterarmos o mapa

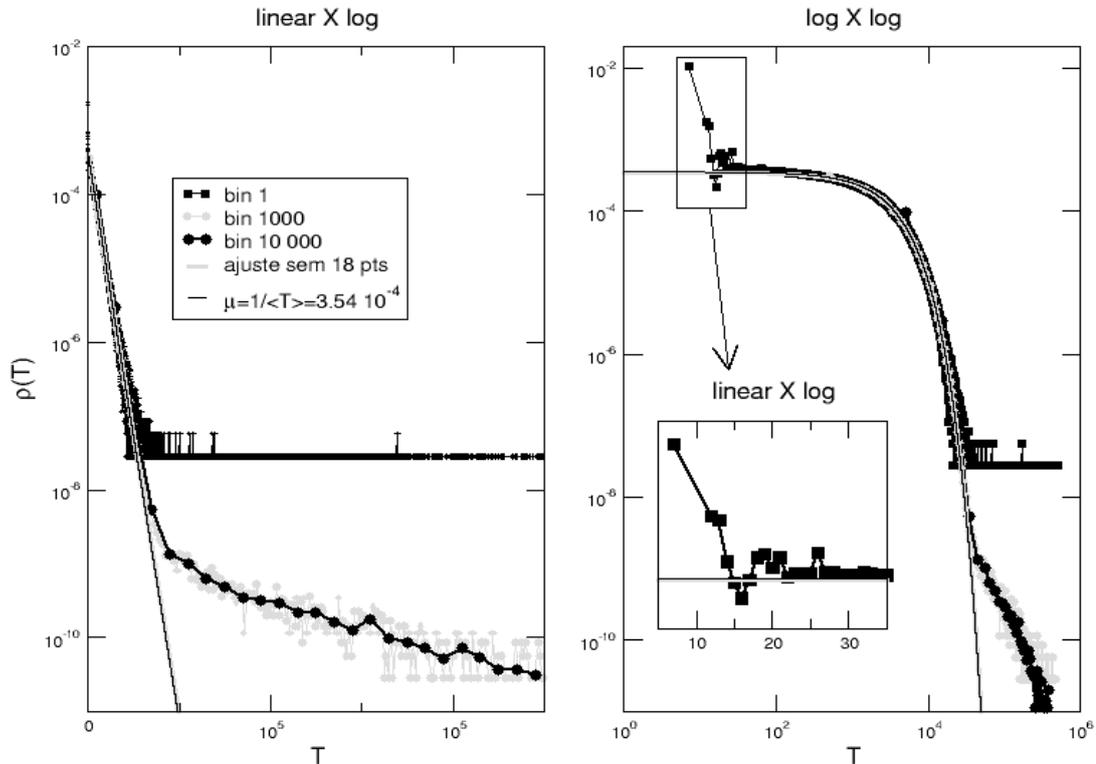


Figura 3.29: Distribuição de tempo de retorno para o mapa padrão com $K = 0,4$. $[\vec{X}c = (0, 4, 0, 01), \delta = 0, 01, N_{it} = 10^{11}]$

¹¹Esse procedimento nos tomou cerca de 10 horas em um computador intel-pentium 4.

dez vezes menos na Fig. 3.30 do que na Fig. 3.29, a estatística tornou-se melhor permitindo que comparássemos as caudas da distribuição de retorno com as de aprisionamento. Ressaltamos que a comparação para os expoentes da lei de potência são bastante sensíveis e suscetíveis a variações. Ainda assim, podemos notar a semelhança da cauda da distribuição de tempos de retorno com a de tempo de aprisionamento (figura 3.28) confirmando assim numericamente a relação (3.29) entre os expoentes de aprisionamento e retorno. Concluimos assim que a DTR obtida para os sistemas Hamiltonianos no regime de caos incompleto caracteriza bem o movimento das trajetórias explicitando nas caudas de lei de potência o aprisionamento das trajetórias próximo às ilhas.

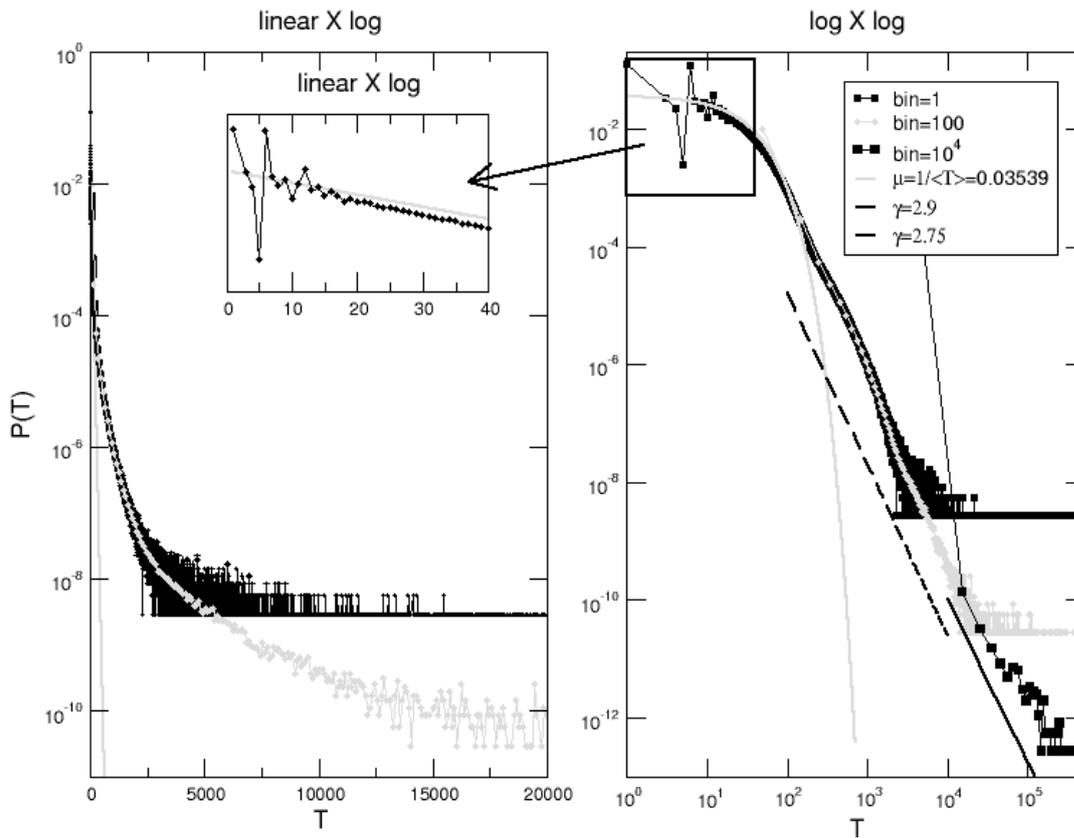


Figura 3.30: Distribuição de tempo de retorno para o mapa padrão com $K = 0,4$. As leis de potência com $\gamma_1 = 2,9$ e $\gamma_2 = 2,75$ foram baseadas nos ajustes da figura 3.28 e levando em conta a relação (3.29). $[\vec{X}c = (0, 4, 0, 1), \delta = 0, 1, N_{it} = 10^{10}]$

Capítulo 4

Conexão entre o tempo de retorno de Poincaré e o transporte anômalo

O objetivo deste capítulo é abordar as conexões entre o tempo de retorno de Poincaré e o transporte anômalo. Para tanto, construiremos inicialmente um modelo dinâmico em que esta conexão pode ser feita de forma explícita: o mapa padrão com fase aleatória. Este modelo será estudado em detalhe por estar relacionado com o problema inicial da mistura do contaminante escalar passivo (veja as motivações iniciais no item 1.2.1) que será descrito no capítulo 5. As origens físicas deste modelo e suas características principais são descritas na seção 4.1. Os regimes de transporte difusivo e anômalo são caracterizados na seção 4.2, onde são exploradas ainda as propriedades dos modos balísticos, responsáveis pelo transporte anômalo. Aos leitores familiarizados com os processos de difusão do mapa padrão recomendamos que passem diretamente à seção 4.3, quando as relações entre a distribuição de tempo de retorno e o transporte anômalo são finalmente estabelecidas.

4.1 Mapa padrão com fase aleatória

4.1.1 Origens e motivações

O conjunto de sistemas Hamiltonianos divide-se entre os casos integráveis e não integráveis. No primeiro caso, um sistema de dimensão n possui n constantes de movimento. Dessa forma é possível, ainda que muitas vezes seja uma tarefa difícil, encontrar coordenadas canônicas (I, θ) que possuem uma dependência temporal trivial, apresentado a seguir no caso bi-dimensional

$$\begin{aligned} I &= I_0, \\ \theta &= \theta_0 + \frac{dH_0(I)}{dI}t, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde H_0 é a Hamiltoniana do sistema integrável.

Já nos sistemas não integráveis (que são necessariamente não lineares), essas constantes de movimento não existem e o movimento **pode ser** caótico em regiões do espaço de fases. A obtenção explícita da dependência temporal das variáveis é impossível de ser obtida e outros métodos de análise são necessários. Uma abordagem para esses sistemas é estudar o caso dos sistemas quase-integráveis, ou seja, quando à Hamiltoniana H_0 aplica-se uma perturbação ϵH_1 . Nesse caso, escrevemos a Hamiltoniana de um sistema quase-integrável genérico da forma

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}, t) = H_0(\vec{I}) + \epsilon H_1(\vec{I}, \vec{\theta}, t). \tag{4.2}$$

Para os sistemas descritos pela equação (4.2), uma série de métodos perturbativos de análise estão disponíveis assim como a aplicação da Teoria KAM.¹

O mapa padrão

No caso de sistemas dinâmicos com tempo discreto² o sistema bi-dimensional integrável mais simples, onde a Hamiltoniana é proporcional ao quadrado da ação (caso típico relacionado à energia cinética) fornecendo-nos $\frac{dH_0}{dI} = I$, que aplicado em (4.1) resulta em

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se perturbarmos a ação I acima com uma função senoidal do ângulo θ e de intensidade K , obtemos o mapa padrão, deduzido pela primeira vez em [Chirikov, 1979], e que é um dos paradigmas de sistemas quase-integráveis [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Zaslavsky, 1991]

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n - K \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A facilidade de manuseio numérico de mapas, inclusive para tempos bastante longos, é uma de nossas principais motivações para sua utilização. Além disso, como também será visto na seção 6.1, muitas das propriedades e estruturas presentes nos sistemas Hamiltonianos quase-integráveis mais complexos podem ser aqui obtidas. Esse mapa é obtido também como solução de uma série de sistemas da mecânica clássica e Quântica sendo o mais famoso deles o rotor sujeito a uma força impulsiva, que descrevemos a seguir [Zaslavsky, 1991].

O rotor impulsionado

Suponha que sobre uma mesa horizontal uma massa m esteja amarrada a um fio de comprimento l e sofra uma força impulsiva na direção horizontal (\vec{i}) de módulo constante (K) a intervalos de tempo (τ) constantes. Podemos escrever a força resultante como sendo

$$\vec{F} = K \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau) \vec{i}$$

A sua energia potencial é obtida a partir da integração da expressão acima

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = K \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau) \int \text{sen}(\theta) l d\theta = -Kl \cos(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau)$$

Dessa forma podemos escrever a Hamiltoniana do sistema (que devido à força externa não é uma constante do movimento)

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - Kl \cos(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau), \quad (4.5)$$

¹O nome KAM refere-se aos matemáticos russos Kolmogorov, Arnold e ao suíço Moser que nos meados do século XX demonstraram o famoso Teorema KAM que assegura a existência de um ϵ suficientemente pequeno para o qual o sistema permanece quase todo inalterado (integrável) [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Walker e Ford, 1969].

²Esses sistemas, também denominados como mapas, difeomorfismos ou equações a diferenças, podem ser interpretados ainda como uma seção de Poincaré de um sistema contínuo.

e as equações de Hamilton como

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\mathcal{K} \text{sen}(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p\theta}{ml^2}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Afim de discretizar o sistema vamos analisar o que ocorre com o momento e o ângulo na equação acima no intervalo entre os impulsos e no intervalo em que a força impulsiva ocorre. Devido ao sucesso dessas integrações esse sistema é considerado quase-integrável.

No intervalo entre impulsos, vemos que o momento (p) imediatamente depois do impulso j é igual ao momento p imediatamente anterior ao impulso $j + 1$: $p_{j+1}^* = p_j$. Já no caso do ângulo notamos que $\theta_{j+1}^* = \theta_j + \frac{\tau}{ml^2} p_j$.

Por outro lado integrando a equação (4.6) no intervalo que envolve o impulso, e lembrando que $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = 1$ obtemos que $\theta_j = \theta_j^*$ e $p_j = p_j^* - \mathcal{K} \text{sen}(\theta_j^*)$. Combinando os resultados advindos dessas duas análises podemos escrever a dependência do momento angular e do ângulo, por exemplo no instante imediatamente posterior ao impulso, como sendo

$$\begin{aligned}p_{j+1}^* &= p_j^* - \mathcal{K} \text{sen}(\theta_j^*) \\ \theta_{j+1}^* &= \theta_j^* + \frac{\tau}{ml^2} p_{j+1}^*\end{aligned}\quad (4.7)$$

Comparando os sistemas (4.4) e (4.7) vemos que, tomando $\frac{\tau}{ml^2} = 1$ no segundo, ele reduz-se ao primeiro. Cabe ressaltar que se tomarmos os valores (p, θ) antes da força impulsiva o mapa obtido terá uma expressão distinta mas será completamente equivalente, fato este que faz com que diferentes mapas padrões apareçam na literatura.

Introdução da fase aleatória

Procurando avaliar o papel da aleatoriedade em nossa dinâmica introduzimos ainda uma alteração ao mapa (4.4), conforme [Városi et al., 1991]. Este artigo trata de modelos hidrodinâmicos e o seguinte campo de velocidades é proposto com a intenção de deduzir o mapa padrão modificado

$$\vec{v}(x, y, t) = v_1 y \hat{x} + v_2 \text{sen}[\phi(t) + x] \delta_T(t) \hat{y}, \quad (4.8)$$

onde $\delta_T(t) = T \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta(t - nT)$ é uma função impulsiva periódica e a função $\phi(t)$ não é periódica, fazendo com que o mapa resultante dependa da iteração n . Uma integração análoga ao procedimento que nos levou ao mapa (4.7) leva-nos ao mapa padrão que, no entanto, apresentará uma dependência temporal na fase da perturbação senoidal devido à função $\phi(t)$. Supondo que essa função tenha uma dependência complexa no tempo e que os valores de $\phi(nT)$ não estejam correlacionados, podemos tomá-la como uma dependência aleatória.

A exemplo do que foi feito em [Palladino, 1998], estamos interessados em poder variar continuamente a influência dessa variável aleatória em nosso sistema. Escrevemos explicitamente essa fase no mapa padrão da equação (4.4) e obtemos assim o modelo para a dinâmica a ser utilizada em nossos estudos numéricos:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n - K \text{sen}(2\pi x_n + R\delta_n) \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \text{ mod}(1).\end{aligned}\quad (4.9)$$

A fase foi escrita como $\phi_n = R\delta_n$, onde δ_n é um número aleatório entre $[0, 2\pi]$ e $R \in [0, 1]$ é o parâmetro de controle da aleatoriedade que, a exemplo do parâmetro de controle não linear (K), será variado em nossos estudos. A partir da inclusão dessa fase aleatória pretendemos simular a influência de outros graus de liberdade em nosso sistema. Note que não se trata de um ruído, já que quando $R \rightarrow 1$ sua influência é determinante, mas de uma componente de nosso modelo. Por

conveniência podemos considerar o mapa (4.9) como sendo o mesmo que o mapa (4.4) dividido por 2π , tendo como alteração após a redefinição das variáveis, a periodicidade dos eixos e o valor do parâmetro $K = \mathcal{K}/2\pi$.

4.1.2 Caracterização do modelo

Como ilustra o cálculo da sua matriz Jacobiana [Lichtenberg e Lieberman, 1983], o nosso modelo (4.9) é de fato conservativo apesar da aleatoriedade introduzida, isto é, a energia se conserva assim como a área no espaço de fases (teorema de Liouville)

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -K \cos(x_n + R\delta_n) \\ 1 & 1 - K \cos(x_n + R\delta_n) \end{pmatrix} = 1. \quad (4.10)$$

Outra característica que será importante nos nossos estudos é o fato do mapa (4.9) ser inversível (como pode ser trivialmente verificado e é apresentado na Eq. (5.13) a seguir), ou seja, tanto iterações positivas como negativas a partir de um determinado ponto (x_0, y_0) levam-nos univocamente a novos pontos.

No que se refere aos intervalos dos eixos, o eixo x , segundo a própria construção, deve ser tomado mod(1), uma vez que trata-se de uma coordenada angular de período um. Já o eixo y do mapa padrão apresenta uma peculiaridade especial em relação à outros mapas. Uma vez que a segunda equação de (4.4) depende exclusivamente de $x \in [0, 1]$ e da função seno, que também é periódica de período um, vemos que também a coordenada y é periódica de período um. Graças a esta periodicidade o mapa adquire uma propriedade que tem importantes consequências para a difusão das trajetórias do sistema e será tratada mais adiante: a existência de **modos aceleradores** [Lichtenberg e Lieberman, 1983] (Para uma ilustração da periodicidade do mapa no eixo y veja a figura 4.7 adiante).

Retrato de fases

Afim de ilustrar a dinâmica do modelo escolhido, ilustramos nas figuras 4.1 a 4.3 o retrato de fases para diferentes valores dos parâmetros de controle (K, R) . O retrato de fases é construído a partir da escolha de um conjunto de diferentes condições iniciais, aqui igualmente espaçadas sobre o eixo y , que são iteradas sucessivamente marcando no espaço de fases com um ponto as posições visitadas.

Começamos analisando o caso trivial, isto é, $K = 0$ representado na figura 4.1. Nesse caso vemos a partir da Eq. (4.9) que a variável y não se altera à medida que iteramos o sistema. Como estamos tomando condições iniciais $x_0 = 0$, caso escolhamos uma condição inicial em y racional ($y_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$) veremos q pontos marcados no retrato de fases. Enquanto que se y_0 for irracional veremos uma linha completa. Uma vez que interpretamos esse mapa como uma seção de Poincaré de um toroide (veja figura 6.1 a seguir), denominamos essas trajetórias também como superfícies toroidais racionais e superfícies toroidais irracionais, sendo que estas últimas preenchem um *torus* completo.

Notamos, a partir do primeiro gráfico da figura 4.2, que a medida que aumentamos a perturbação não linear, partindo de um regime integrável, criam-se ilhas em torno das superfícies de fluxo toroidais racionais, surgindo pontos de equilíbrio elípticos e hiperbólicos. Isso se deve à ressonância provocada entre a frequência de perturbação e a frequência natural dessas superfícies. Já as superfícies irracionais são rompidas passando a apresentar diversos furos na antiga linha completa. A medida que crescem em tamanho, as ilhas criam regiões estocásticas entre as suas cadeias até que por fim a última trajetória irracional (aquela de frequência igual ao número áureo $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$) é rompida e instaura-se o caos global (para o nosso modelo

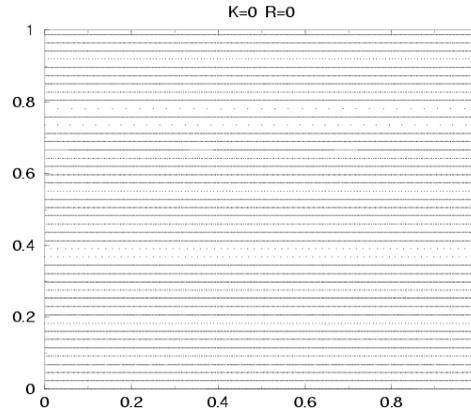


Figura 4.1: Retrato de fases para o mapa padrão com $K = 0$, caso integrável. Iteramos mil vezes oitenta condições iniciais sobre o eixo y , marcando os pontos no mapa.

isso ocorre para $K \geq \frac{0,971635\dots}{2\pi} = 0,15464\dots = K_c$). Em torno das ilhas, que possuem por sua vez uma frequência associada, surgem ressonâncias secundárias que provocam cadeias de ilhas de bifurcação cujas ilhas também estão suscetíveis a ressonâncias que criam novas ilhas e assim sucessivamente. Um aumento ainda maior da perturbação faz com que as ilhas reduzam seu tamanho no espaço de fases e pontos fixos elípticos estáveis se tornem hiperbólicos instáveis. Esse cenário descrito é típico de sistemas quase-integráveis e é explicado pela teoria KAM [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Walker e Ford, 1969, Zaslavsky, 1991].

No caso do aumento do parâmetro de controle aleatório (figura 4.3), também notamos a perda de estabilidade das trajetórias integráveis. No entanto, ela se dá de um forma distinta, passando a desviar levemente cada uma das trajetórias de seu traçado determinístico. A medida que aumentamos a perturbação, as estruturas vão tornando-se cada vez menos nítidas.

4.2 Transporte no modelo

A descrição do movimento de cada uma das partículas sob a ação de um sistema dinâmico é, muitas vezes, uma tarefa impossível seja pelo desconhecimento preciso da dinâmica ou pela complexidade dos cálculos. Outras vezes não estamos interessados em saber o comportamento individual de partículas, mas em conhecer comportamentos médios do sistema. Essas são as duas principais razões para a introdução de métodos estatísticos na descrição dos fenômenos dinâmicos.

Em nosso caso estamos interessados em conhecer de que forma um conjunto de trajetórias (que denominaremos muitas vezes partículas) se dispersa. Um exemplo intuitivo é pensarmos em como se afastam as partículas de contaminante se pingarmos uma gota de tinta em uma superfície líquida (ou sobre o nosso mapa).

4.2.1 Transporte difusivo

A primeira abordagem sistemática para esse problema parece ter sido dada por um médico austríaco, Adolf Fick, em 1855 (veja a descrição em [Sokolov et al., 2002]). Ele imaginou que a corrente de contaminante, a exemplo do que ocorre com a corrente elétrica ou de calor, deve ser proporcional à diferença de concentração entre duas regiões

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -D \nabla \mathcal{P}(\vec{r}, t), \quad (4.11)$$

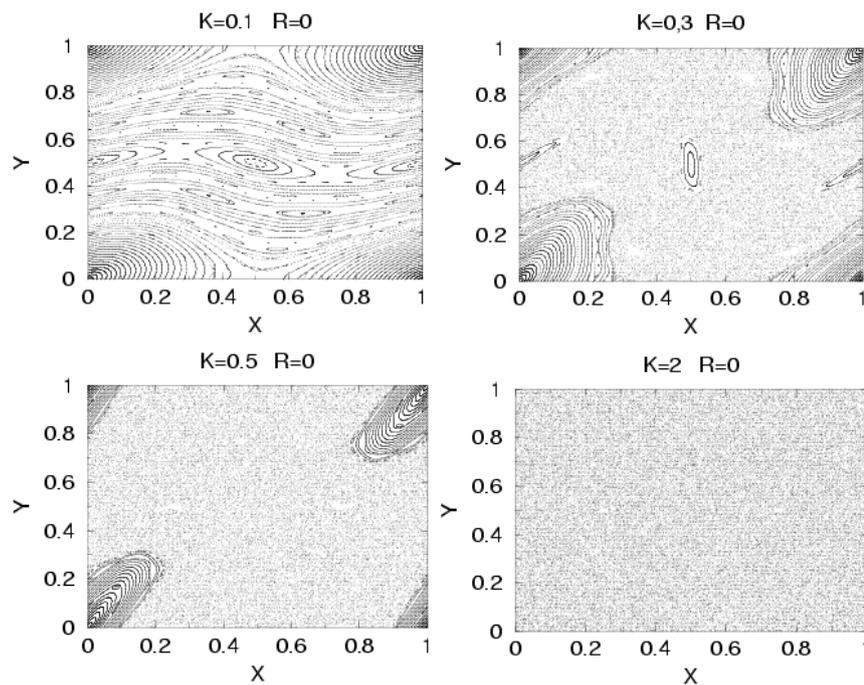


Figura 4.2: Retrato de fases do modelo a medida que cresce o parâmetro de controle não linear K (com $R=0$). Para cada figura foram escolhidos 100 pontos iniciais uniformemente distribuídos sobre o eixo y e iterados 800 vezes.

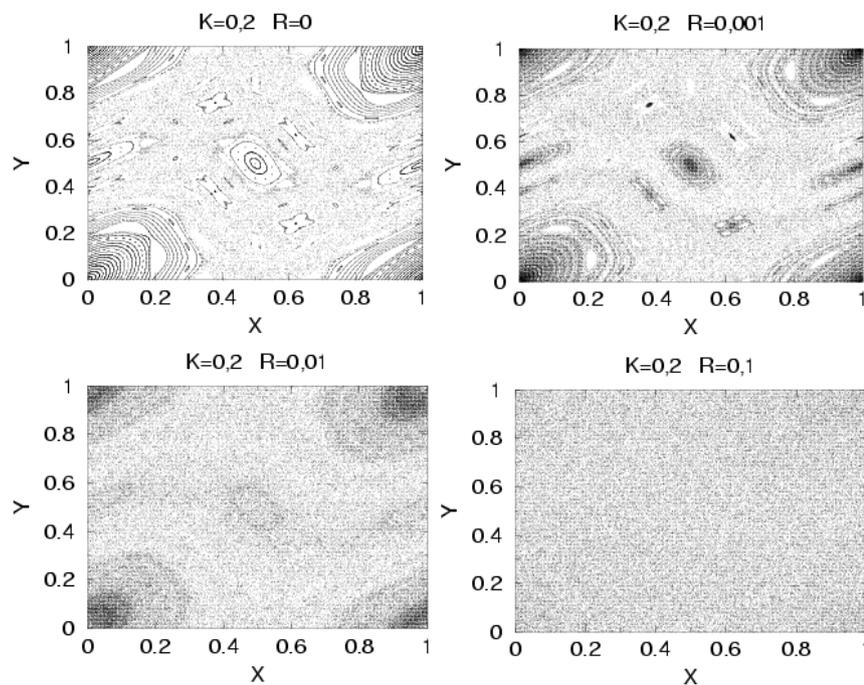


Figura 4.3: O mesmo que na figura 4.2, mas crescendo parâmetro de controle aleatório (com $K = 0,2$).

onde D é o coeficiente de difusão e \mathcal{P} a concentração. Se considerarmos ainda a equação de conservação das partículas

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (4.12)$$

obtemos, a partir de (4.11) e (4.12), a famosa equação de difusão

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \mathcal{P}(\vec{r}, t). \quad (4.13)$$

Obtemos ainda, de maneira intuitiva, uma equação para esse movimento que leve em conta a presença de uma força externa no sistema. Para isso basta somar ao lado direito da equação (4.11) o termo proporcional à força externa (\vec{f})

$$\vec{f}(\vec{r}, t) \mathcal{P}(\vec{r}, t).$$

Nesse caso a equação de difusão passa a ser escrita como a equação de Fokker-Planck (EFP),

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (-\nu \vec{f} \mathcal{P}(\vec{r}, t) + D \nabla \mathcal{P}(\vec{r}, t)). \quad (4.14)$$

A EFP é utilizada na descrição de uma variedade de fenômenos na física. Nesse caso a função $\mathcal{P}(\vec{r}, t)$ é interpretada como a probabilidade de encontrarmos um evento em determinada posição e tempo. Sua generalidade deve-se ao fato de descrever a distribuição de probabilidades para um sistema sem correlação ou do tipo Markoviano, ou seja, em que o evento posterior depende somente das condições do sistema imediatamente antes.³ Sua dedução é feita, por exemplo, para o caso típico de um movimento aleatório com passo fixo a intervalos de tempo constante no limite do contínuo [Feller, 1950]. No caso unidimensional, por exemplo a difusão em y no nosso mapa, e com tempo discreto a equação (4.14) se escreve como

$$\frac{\partial \mathcal{P}(y, t)}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial y} (B \mathcal{P}(y, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D \mathcal{P}(y, t)) \quad (4.15)$$

onde B é o coeficiente de fricção e D o de difusão. Em sistemas Hamiltonianos que obedecem a essa equação, não é difícil mostrar que [Lichtenberg e Lieberman, 1983]

$$B = \frac{1}{2} \frac{dD}{dy}. \quad (4.16)$$

A distribuição de probabilidades em sistemas de dimensão d que obedecem a equação (4.14) é da forma

$$\mathcal{P}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (4.17)$$

sendo que o desvio quadrático médio das partículas é da forma

$$\langle r^2(t) \rangle = \int r^2 \mathcal{P}(\vec{r}, t) d^3r = 2Dt, \quad (4.18)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre um conjunto de trajetórias. Esse resultado (4.18) fornece-nos uma resposta estatística adequada ao problema colocado inicialmente sobre a evolução temporal de

³ No entanto em sistemas com o espaço de fase suficientemente caótico (estocástico) o decaimento da função de autocorrelação (a ser definida na Eq. (3.15)) é exponencial fazendo com que o teorema do limite central se aplique e a equação de Fokker-Planck seja válida para esses sistemas para tempos maiores do que os tempos típicos desse decaimento [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Vergassola, 1998].

um conjunto de partículas uma vez que precisamos de um único número $D \in \mathbb{R}$ para caracterizar a velocidade com que as partículas se espalham. Isto por que a dispersão, ou média do desvio quadrático, evolui linearmente com o tempo. Este resultado é obtido também para o clássico problema do movimento Browniano (ou passeio aleatório Browniano) em que cada partícula desloca um passo para uma direção aleatória a cada instante de tempo. No caso geral a equação (4.18) torna-se

$$\langle r^{2n}(t) \rangle = \int r^{2n} \mathcal{P}(\vec{r}, t) d^3r \propto t^n, \quad (4.19)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2 Transporte anômalo

Em muitos casos de interesse o movimento caótico das partículas não é suficientemente decorrelacionado, ou então temos um *passeio aleatório* onde o tamanho do passo pode ser arbitrariamente grande, para que suas propriedades estatísticas sejam descritas pela EFP (4.14). O tratamento estatístico é então bastante dificultado sendo muitas vezes necessário novos métodos ou a alteração substantiva dos atuais.

Uma consequência natural para esses sistemas é que a evolução temporal da dispersão $\langle \Delta r^2 \rangle$ não se dá linearmente com o tempo como em (4.18). Uma dependência mais geral é da forma

$$\langle r^2(t) \rangle \propto t^\nu. \quad (4.20)$$

O intervalo de variação do parâmetro ν é determinado analisando-se o caso extremo de um movimento uni-direcional (maior variação possível). Neste caso teríamos uma dependência $r \propto t$ e portanto $\nu = 2$ em (4.20). Esse regime de transporte é denominado balístico e temos portanto que $0 \leq \nu \leq 2$. Regimes de transporte super-balístico são medidos em fenômenos turbulentos mas não serão explorados nesta dissertação.

O análogo da equação (4.19) nesse caso é

$$\langle r^{2n} \rangle \propto t^{n\nu} \quad (4.21)$$

ou de forma mais geral, quando o coeficiente depende do momento⁴ que estamos analisando

$$\langle r^{2n} \rangle \propto t^{n\nu_n}. \quad (4.22)$$

Uma proposta de abordagem estatística para esses tipos de sistemas é a introdução da EFP fracionária [Zaslavsky et al., 1997, Sokolov et al., 2002] que generaliza a equação (4.15) para

$$\frac{\partial^\beta \mathcal{P}(y, t)}{\partial n^\beta} = -\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} (A(y) \mathcal{P}(y, t)) + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} (DP(y, t)) \quad (4.23)$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ é um coeficiente associado à fractalidade do espaço e $0 < \beta \leq 1$ do tempo. Note a generalização da derivada parcial ∂ para o caso fracionário ∂^β .⁵ Nesses casos é possível obter

⁴As diferentes potências r^2, r^4, r^6, \dots são denominadas também de momento.

⁵A definição de derivada fracionária é feita a partir do operador integral fracionário $D^{-u} (u > 0)$

$$D^{-u} f(t) = \frac{1}{\Gamma(u)} \int_0^t (t - \xi)^{u-1} f(\xi) d\xi.$$

A derivada fracionária $D^u (u > 0)$ é então definida como sendo

$$D^u f(t) = D^m [D^{-(m-u)} f(t)],$$

com m inteiro [http://mathworld.wolfram.com].

o coeficiente de transporte como sendo

$$\nu = 2 \frac{\beta}{\alpha}. \quad (4.24)$$

Nesse ponto é necessário dedicarmos um parágrafo à nomenclatura, que é bastante diversificada na literatura e freqüentemente leva a confusões. Dos processos que apresentam uma variação linear da dispersão (Eq. (4.18)) diremos que possuem um transporte difusivo ou normal. Já no caso dos que obedecem a (4.20), ou outra diferente de (4.18), diremos que trata-se de um caso de transporte anômalo, subdividido por sua vez no caso super-difusivo ($1 < \nu \leq 2$) e sub-difusivo ($0 \leq \nu < 1$).

Convém não confundir ainda o transporte anômalo (ou difusão anômala) aqui referido com o transporte anômalo que surge no contexto da física de plasma. Nesse caso o termo refere-se a coeficientes de difusão da equação (4.18) (um transporte normal segundo a nossa notação) que estão muito acima do previsto pela teoria de transporte neo-clássica (que leva em conta somente as interações Coulombianas). Em Tokamaks os resultados mostram que o coeficiente de difusão medido é tipicamente 10 vezes maior que o da teoria [Wootton et al., 1990], no entanto não conhecemos resultados experimentais que determinam se ele é normal ou anômalo (segundo o nosso sentido).

4.2.3 Explorando o modelo

Buscamos caracterizar agora os processos de transporte difusivo e anômalo em nosso modelo⁶. Na figura 4.4 está ilustrada a variação dos pontos nesse modelo, efeito que pretendemos quantificar e estudar nesta seção. Sobre o eixo x ⁷ perfilamos uma série de partículas que serão seguidas afim de quantificar a variação do deslocamento sobre o eixo y .⁸

Primeiramente, seguiremos uma tentativa de descrição analítica e na sequência ilustramos resultados numéricos. A partir da expressão do mapa (4.9) escrevemos [Ott, 1993]

$$\Delta Y = Y_{n+1} - Y_n = K \sin(2\pi X_n + R\delta_n)$$

$$\langle \Delta Y^2 \rangle = K^2 \langle \sin^2(2\pi X_n + R\delta_n) \rangle$$

Observando o segundo termo da relação (4.9) vemos que se $K \gg 1$ a variação do argumento da função seno é bastante maior que 2π . Pode-se considerar então que esse valor varia de forma aproximadamente aleatória. O mesmo argumento vale se $R \approx 1$. Podemos escrever então

$$\langle \sin^2(2\pi X_n + R\delta_n) \rangle = \frac{1}{2},$$

e dessa forma obter a aproximação quasi-linear para o coeficiente de difusão

$$D_y = K^2/2. \quad (4.25)$$

⁶Seguimos nesta seção uma sequência didática e ilustrativa, onde iremos introduzir os trabalhos consagrados sobre a difusão no mapa padrão [Lichtenberg e Lieberman, 1983, Ott, 1993, Rechester e White, 1980, Ichikawa et al., 1984].

⁷Neste exemplo, assim como em algumas simulações numéricas tomamos as partículas inicialmente sobre o eixo x , no entanto essa escolha é irrelevante (como nossas simulações mostraram) salvo menção em contrário.

⁸Seguiremos aqui o estudo da difusão em y (momento), ressaltamos no entanto que o estudo da difusão angular (em x) também pode ser feito de forma análoga.

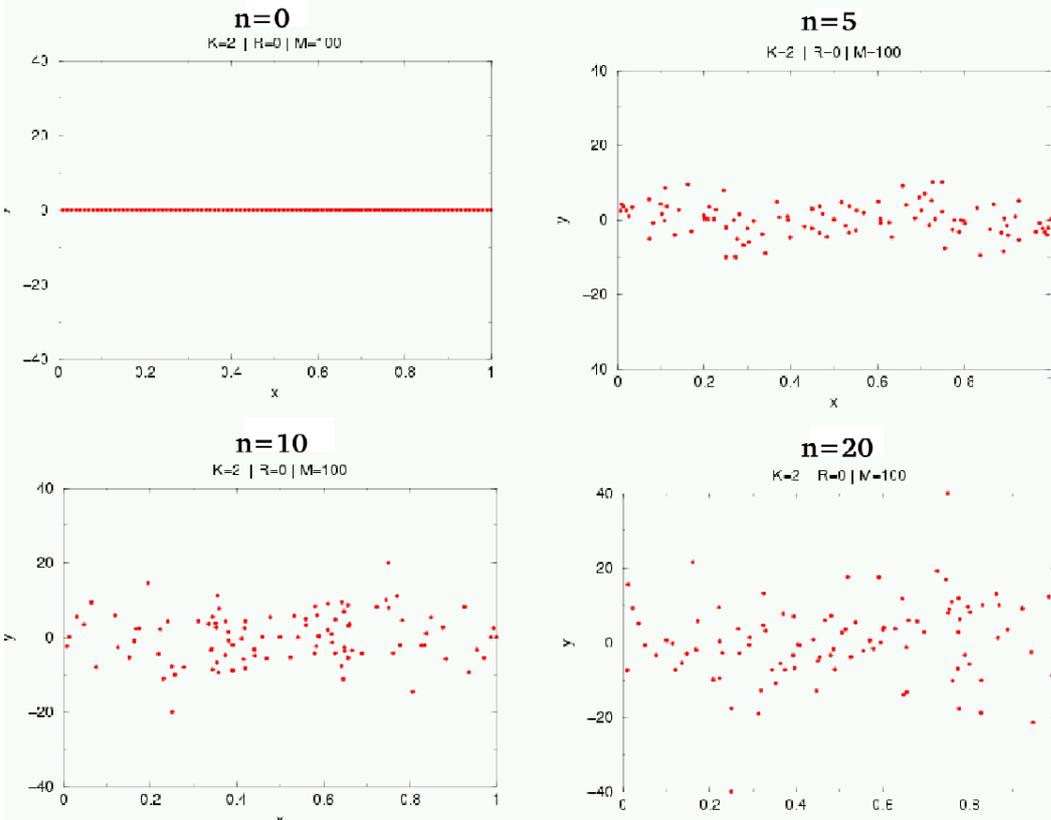


Figura 4.4: Evolução de um conjunto de partículas após n iterações do mapa padrão ($K = 2eR = 0$).

Para verificar essa expressão, passamos ao cálculo numérico do coeficiente de difusão em função de K . Para tanto, retomamos a configuração apresentada na figura 4.4 e após cada iteração calculamos o valor do deslocamento quadrático médio, ou dispersão,

$$\langle y_n^2 \rangle = \lim_{N_P \rightarrow \infty} \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{i=N_P} (y_n^i - y_0^i)^2, \quad (4.26)$$

onde N_P é o número de partículas que estamos utilizando, o índice i marca as N_P partículas utilizadas e y_n é a posição após n iterações da i -ésima partícula. O coeficiente de difusão, coerentemente com o que foi estabelecido em (4.18), é proporcional a inclinação da reta de $\langle y_n^2 \rangle$ x n . Ou seja,

$$D_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \langle y_n^2 \rangle. \quad (4.27)$$

Apresentamos na figura 4.5 o resultado de $\frac{D_y}{K^2}$ em função de K . Notamos claramente que para $R=0$ ocorre uma oscilação em torno do valor esperado ($\frac{1}{2}$) pelo modelo quase linear, com picos bastante acentuados para $K \approx 1,1$, $K \approx 2,1$, No caso de $R = 1$ as oscilações são significativamente menores e não parecem formar um padrão determinado.

Tratamentos analíticos mais refinados, a partir da integração direta da probabilidade [Rechester e White, 1980] ou a partir de caminhos no espaço de Fourier [Rechester et al., 1981] dão conta de muitos dos desvios apresentados na figura 4.5. É interessante notar ainda nessa

figura que o efeito da aleatoriedade é, nesse caso, variável: aumenta a difusão ou diminui, dependendo do parâmetro K [Palladino, 1998].

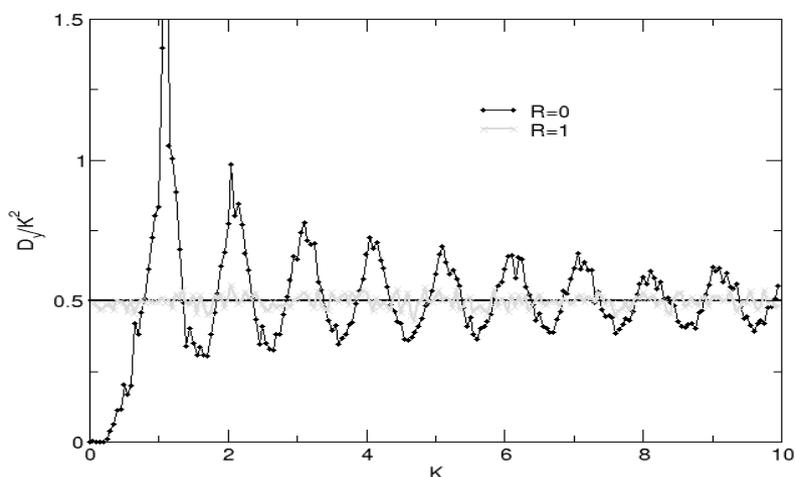


Figura 4.5: Variação do coeficiente de difusão no eixo y dividido por K^2 em função do parâmetro de controle K para a dinâmica da Eq. (4.9). Foram utilizados mil pontos iniciais (inicialmente sobre o eixo y) iterados mil vezes. O valor 0,5 para $R=1$ é o previsto pela aproximação quasi-linear, Eq. 4.25

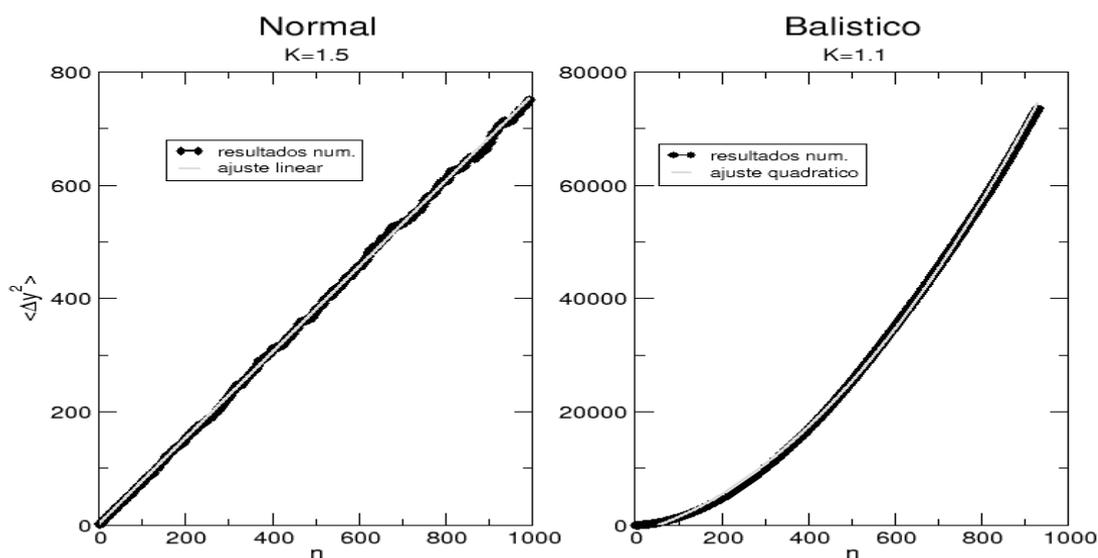


Figura 4.6: Deslocamento quadrático médio de 4000 partículas (igualmente espaçadas sobre o eixo x) sob a ação do mapa padrão ($R = 0$).

Para explorar as origens dos desvios apresentados na figura 4.5, repetimos a configuração apresentada na figura 4.4 e quantificamos a dispersão das partículas $\langle \Delta y^2 \rangle$ em função do

número de iterações. O resultado obtido para $K = 1,5$ e $K = 1,1$ ($R = 0$) está apresentado na figura 4.6 e confirma a relação linear: $\langle \Delta y^2 \rangle \propto t$ para o caso $K = 1,5$; mas mostra um dependência quadrática no caso de $K = 1,1$: $\langle \Delta y^2 \rangle \propto t^2$. Vemos que nessas condições o transporte é anômalo (balístico) tornando-se impossível a definição de um coeficiente de difusão como o da equação (4.18). Dessa forma, os picos da figura 4.5 (na realidade há uma divergência) ocorrem pois o coeficiente de difusão não pode ser definido para esse parâmetro devido à não convergência da Eq. (4.27).

Notamos portanto que no mapa padrão ($R=0$ em nosso modelo) existem regimes de difusão normal e anômalo (não difusivo) dependendo do parâmetro de controle K . A seguir estudaremos a razão do surgimento da difusão anômala que mostra ser resultado de estruturas especiais no espaço de fases denominadas modos balísticos [Ishizaki et al., 1990]. Um estudo do coeficiente ν do transporte anômalo para o mapa padrão para valores de $K \gtrsim K_c$ se encontra em [White et al., 1998].

4.2.4 Modos balísticos

Os modos balísticos, comumente denominados modos aceleradores, surgem no mapa padrão graças ao fato do eixo y ser periódico. O termo acelerador refere-se ao fato das ilhas provocarem um movimento contínuo no eixo y do mapa padrão, relacionado à ação ou momento da Hamiltoniana. Analisamos primeiramente o caso mais simples de modo balístico, que ocorre quando um ponto do mapa leva-nos ao mesmo ponto transladado em y de um número inteiro $l \in \mathbb{Z}^*$. Graças à periodicidade em y este efeito irá se repetir indefinidamente. Isto é, observando (4.4b),

$$y_{n+1} - y_n = l = -K \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Dessa relação observamos que a posição em x desse ponto deve ser

$$x^{bal} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arcsen}\left(\frac{l}{K}\right), \quad (4.28)$$

enquanto a outra equação do mapa padrão assegura que $y^{bal} = l$.

Para analisar a estabilidade dos dois pontos [Lichtenberg e Lieberman, 1983] [Ichikawa et al., 1987] que satisfazem a Eq. (4.28) calculamos o polinômio característico, a partir da matriz Jacobiana, nesse ponto

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} - \lambda & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} - \lambda \end{array} \right)_{x=x^{ac}} = \det \left(\begin{array}{cc} 1 - \lambda & \pm 2\pi K \cos(2\pi x^{ac}) \\ 1 & 1 \pm 2\pi K \cos(2\pi x^{ac}) - \lambda \end{array} \right) = \\ &= \lambda^2 - [2 \pm 2\pi K \cos(2\pi x^{ac})]\lambda + 1, \end{aligned} \quad (4.29)$$

e impondo que os autovalores λ sejam imaginários (ponto fixo elíptico, e portanto estável) obtemos

$$|2 \pm 2\pi K \cos(2\pi x^{ac})| < 2 \Rightarrow 0 < 2\pi K \cos(2\pi x^{ac}) < 2. \quad (4.30)$$

Substituindo a expressão (4.28) em (4.30), obtemos a condição de estabilidade em função do parâmetro de controle K

$$|l| < K < |l| \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi l}\right)^2}. \quad (4.31)$$

Vemos que os modos aceleradores são estáveis justamente próximo, e um pouco acima, de valores inteiros de K . Além disso, quando aumentamos o número $l \in \mathbb{N}$ temos uma faixa cada vez menor no intervalo K para o qual o modo balístico é estável. Essas duas características da relação (4.31) explicam o resultado observado na figura 4.5: os picos concentram-se próximos a valores inteiros de K e diminuem de tamanho quando K cresce. Quando introduzimos o efeito da aleatoriedade ($R \neq 0$) esperamos que trajetórias próximas (ou mesmo dentro) das ilhas aceleradoras sejam retiradas e portanto esse efeito cesse, explicando por que o resultado numérico para $R = 1$ (figura 4.5) se aproxima da aproximação quasi-linear (4.25).

A figura 4.7 fornece uma boa ilustração do fenômeno que procuramos analisar acima. Vemos que o comportamento da trajetória do caso $K = 1,1$, colocada próxima ao modo acelerador, destoa do movimento das demais trajetórias. A cada iteração a partícula se desloca $\Delta y = 1$ sempre na mesma direção, provocando um transporte balístico coerente com a figura 4.6b.

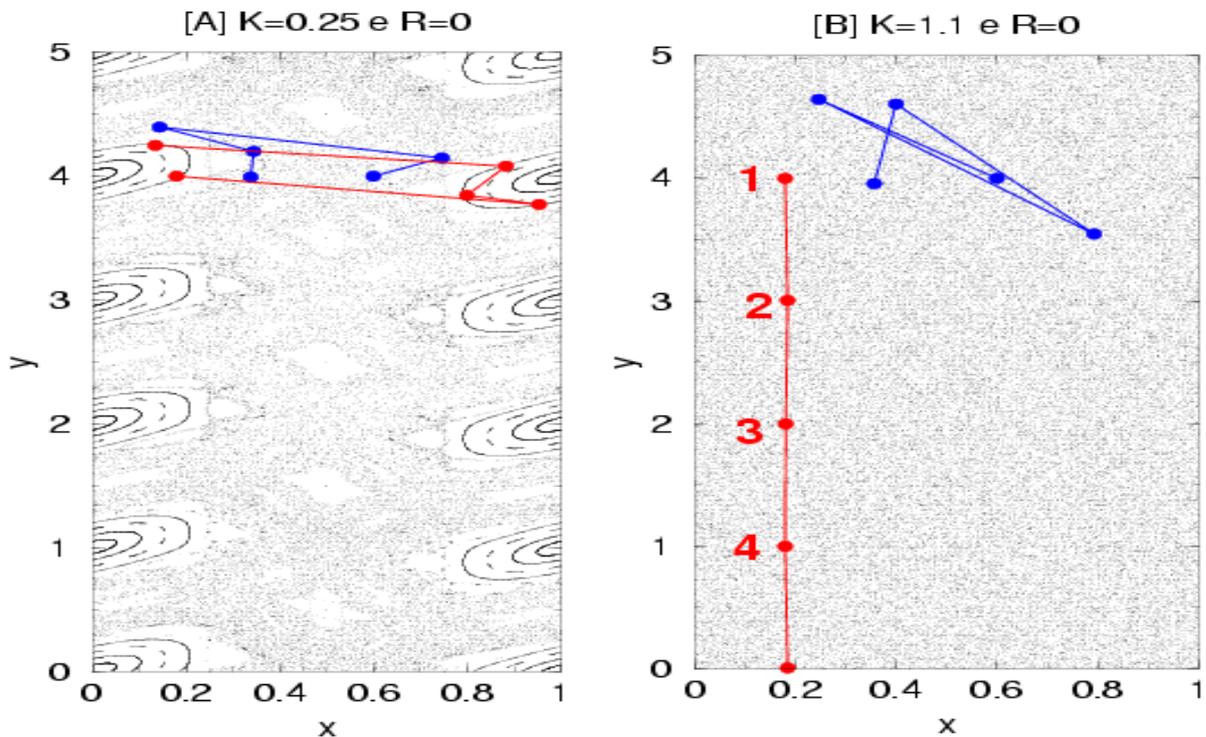


Figura 4.7: Ilustração da ação do modo balístico (estável para $K = 1,1$). Duas condições iniciais distintas (em cada gráfico) com cinco iterações do mapa padrão ($R=0$ na Eq. (4.9)) estão ressaltadas. Ao contrário dos retratos de fase anteriores (Fig. 4.2) nessa figura expandimos o eixo y para dar conta da trajetória no modo acelerador.

Uma análise ampliada na região do modo balístico nos mostra a estrutura responsável por esse movimento (figura 4.8). O estudo da formação dessa ilha se encontra em [Rom-Kedar e Zaslavsky, 1999]. Nessa figura, retratamos uma propriedade importantíssima, e muitas vezes pouco entendida, do modo balístico no que se refere à difusão. A trajetória em destaque, externa à ilha balística, representa a mesma trajetória acelerada da figura 4.7, só que reduzida a uma mesma ilha ($\text{mod}(1)$ em y). Portanto, não são somente as trajetórias internas ao modo acelerador que são “aceleradas”, mas também as próximas a ele. Deve-se somar a esse efeito o fato de as trajetórias serem grudadas (*sticked*) às ilhas (conforme ilustrado no item 3.3.3) ficando aprisionadas durante muito tempo a elas antes de voltarem ao mar estocástico. Dessa

forma, ainda que essa estrutura tenha uma atuação local, dentro e nas vizinhanças da ilha, seu efeito torna-se global devido ao aprisionamento, por tempos finitos mas longos, das trajetórias do mar estocástico. De fato, o aprisionamento em torno dos modos aceleradores é, muitas vezes, do mesmo tipo do discutido no item 3.3.3. Para confirmar esta afirmação, em torno do modo balístico definimos uma região e verificamos o tempo em que a trajetória ali permanecia, procedimento análogo ao que realizamos na figura 3.27. A distribuição do tempo de aprisionamento é apresentada na figura 4.9 e mostra um comportamento similar ao da figura 3.28, isto é, um comportamento geral do tipo lei de potência com diferentes expoentes.

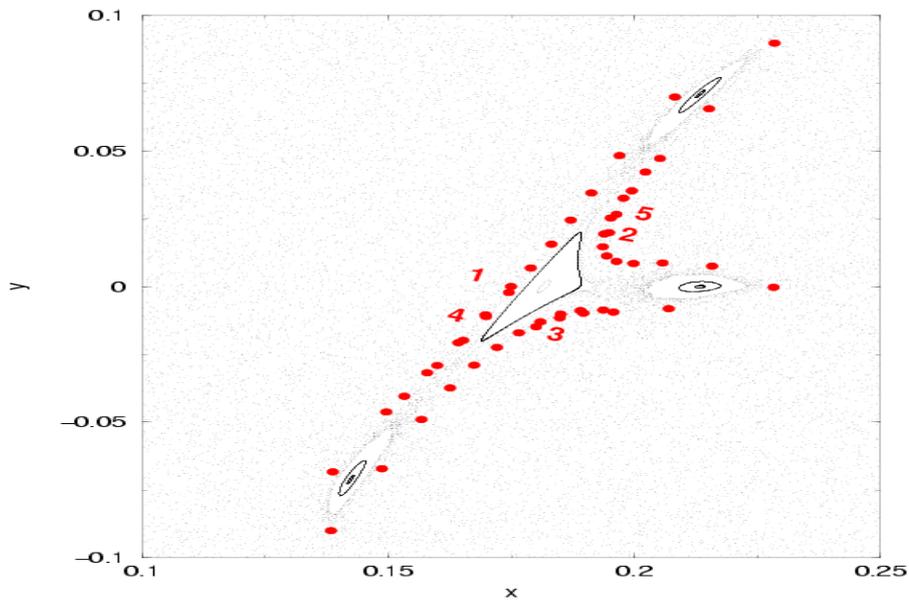


Figura 4.8: Ampliação do retrato de fases do mapa padrão com $K = 1,1$ (Fig. 4.7B) na região da ilha aceleradora. A trajetória em destaque é a mesma da figura 4.7b que mostrou-se acelerada. Nessa figura tomamos $\text{mod}(1)$ em y para facilitar a visualização.

É importante notar que os modos aceleradores não se restringem àqueles analisados acima, isto é, existem outros modos aceleradores para os quais a cada m iterações a trajetória retorna ao mesmo valor de x e a um valor de $y = y_0 + l$. Para uma lista não exaustiva dos modos aceleradores e da difusão no limite de K baixo consulte [Ichikawa et al., 1987], onde entre $K = 0,3475$ e $K = 0,9825$ estão listados 22 modos aceleradores com suas consequências na difusão. Notamos que esses valores do parâmetro K onde concentram-se os modos aceleradores estão próximos ao valor crítico $K_c = 0,1546\dots$

Ressalvamos que as características aqui abordadas são especiais do mapa padrão e não refletem uma propriedade geral dos sistemas dinâmicos Hamiltonianos uma vez que elas estão baseadas na simetria no eixo y e originada de sua extrema simplicidade. Quando este é utilizado como aproximação local de outros mapas esse fenômeno tende a não aparecer, uma vez que o movimento das partículas aceleradas ultrapassa rapidamente o domínio de validade da aproximação. Os modos aceleradores, nesses casos, podem dar origem aos modos quasi-aceleradores [Lichtenberg e Lieberman, 1983], mas o efeito certamente é limitado.

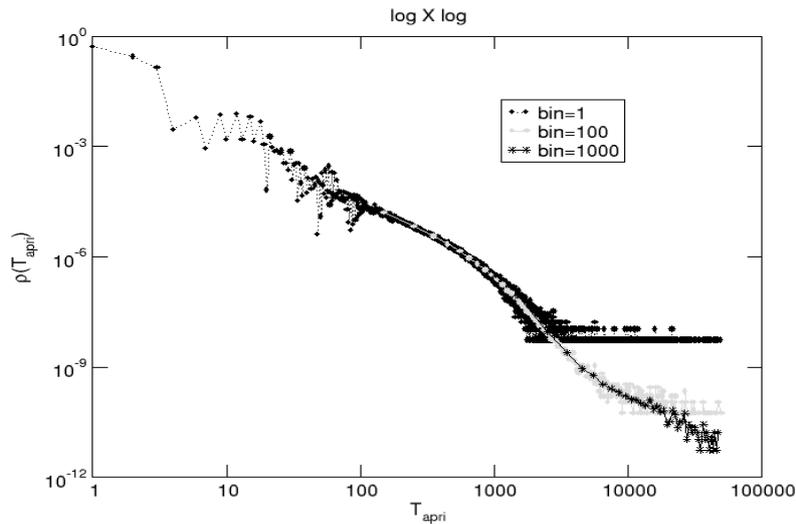


Figura 4.9: Distribuição do tempo de aprisionamento em uma região que engloba o modo balístico do mapa padrão com $K = 1, 1$. Notamos um comportamento geral do tipo lei de potência e apresentamos duas janelas de tempo com coeficiente distintos, reflexo da multi-escala do sistema.

4.3 Sistemas em que o tempo de retorno caracteriza o transporte anômalo

O projeto inicial para a dissertação pretendia estudar a associação da distribuição de tempo de retorno e o transporte anômalo das partículas. Nesta seção vamos explicitar os casos em que essas conexões podem ser feitas de forma quantitativas. Nos baseamos nos resultados da literatura, concentrando-nos no caso do mapa padrão.

Após os artigos clássicos sobre o transporte anômalo no mapa padrão [Ichikawa et al., 1984, Ichikawa et al., 1987, Rechester e White, 1980], sua conexão com correlações de longo alcance e com passeios aleatórios foi explorada em [Ishizaki et al., 1990, Ishizaki et al., 1991]. Com o artigo [Zaslavsky e Tippett, 1991], que possui o sugestivo título de Conexão entre a estatística de tempo de retorno e o transporte anômalo (*Connection between Recurrence-Time Statistics and Anomalous Transport*), começaram a ser exploradas as conexões das propriedades estatísticas das recorrências com o transporte anômalo. Uma série de trabalhos de G. M. Zaslavsky e colaboradores têm explorado o mapa padrão e outros sistemas Hamiltonianos como exemplos da Cinética Estranha (*Strange Kinetics* [Shlesinger et al., 1993]), relacionando o tempo de retorno de Poincaré com o transporte anômalo [Zaslavsky e Edelman, 2000, Zaslavsky et al., 1997, Benkadda et al., 1997]. Outra corrente, que continuou os desenvolvimentos baseados em passeios aleatórios, explorou também as propriedades de retorno e aprisionamento do mapa padrão bem como de outros sistemas dinâmicos [Zumofen e Klafter, 1994, Zumofen e Klafter, 1993, Klafter et al., 1996] propondo uma conexão da distribuição de TR com o transporte anômalo distinta. As diferentes interpretações de ambos os grupos se tornaram explícitas a partir de comentários e correções mútuos [Zumofen e Klafter, 1999, Benkadda et al., 1999]. Deste confronto parece-nos claro que a abordagem resumida em [Zaslavsky, 2002b] descreve melhor a conexão do tempo de retorno de Poincaré com o transporte anômalo para o caso do mapa padrão tratado na seção 4.1. A conexão através de passeios aleatórios, defendida pelo outro grupo, será explicitada

no item 4.3.3.

Baseados nesses artigos podemos listar três tipos de conexão entre o tempo de retorno de Poincaré, através do expoente γ do regime de lei de potência (3.28) da DTR, e o coeficiente ν do transporte anômalo. A conexão do tempo de retorno com o transporte anômalo se dá essencialmente devido ao aprisionamento de trajetórias em torno de um modo balístico. Assim, cada uma das três conexões com o transporte anômalo podem ser verificadas para um mesmo mapa (por exemplo o mapa padrão) dependendo do tipo de aprisionamento presente ou da faixa temporal onde as hipóteses se apliquem. Notamos ainda que, apesar do transporte anômalo ocorrer para a variável y (relacionada ao momento p) do mapa padrão, isto é, analisamos o mapa padrão no cilindro, devemos calcular a distribuição de tempo de retorno para o mapa padrão no torus, isto é, tomando mod 1 na variável y . Desta forma, graças a equivalência do mapa no eixo y , a cada intervalo, capturamos as propriedades de aprisionamento das estruturas através do tempo de retorno. O transporte no ângulo x também é de interesse e o surgimento de modos balísticos é natural dada a simetria nessa variável em qualquer sistema.

4.3.1 Ilhas fractais

Estudaremos inicialmente o caso de aprisionamento devido a uma estrutura de ilhas dentro de ilhas (*“Hierarchical Island Trap”*), caso ilustrado no item 3.3.3. Os resultados do item 3.3.3 nos mostraram que o aprisionamento de trajetórias em ilhas do espaço de fases é bem caracterizado pela distribuição de tempo de retorno. Já nos itens 4.2.3 e 4.2.4 vimos que o transporte anômalo no mapa padrão é consequência direta e exclusiva do aprisionamento das trajetórias em ilhas balísticas, os modos aceleradores. O transporte anômalo (super-difusivo) ocorre somente nos casos em que ilhas balísticas existem no espaço de fases do sistema estudado, ou seja, no caso do mapa padrão isto ocorre somente para valores bem determinados de K . São esses os casos que tratamos a seguir. A obtenção de uma relação quantitativa entre ν e γ supõe ainda outras simplificações:

- Consideramos o caso em que somente uma estrutura de aprisionamento está ativa no espaço de fases. Como vimos no item 3.3.3 relação entre o expoente de aprisionamento γ_{apri} e de retorno γ é obtido como $\gamma = \gamma_{apri} + 1$, expressão (3.29). Apesar do tempo de retorno ser medido localmente, a distribuição de tempo de retorno de Poincaré fornece uma informação global do espaço de fases do sistema (graças a ergodicidade do mar estocástico) e refletirá a distribuição de aprisionamento de uma determinada ilha somente no caso em que ela for a única estrutura aprisionadora ativa.
- Uma única estrutura aprisionadora pode provocar o surgimento de um fenômeno de multi-escala no sistema, isto é, diferentes regimes de lei de potência nos tempos de aprisionamento e retorno. Isto deve-se à multi-fractalidade da ilha, isto é, a medida que observamos a ilha em escalas sucessivamente menores não obtemos uma configuração auto similar (caso fractal) mas notamos uma dependência das propriedades das ilhas com a escala de observação. No contexto da figura 3.26 a fractalidade seria obtida se cada cadeia interna da ilha preservasse as mesmas propriedades da cadeia mais externa. Ou seja, a estrutura topológica se repetiria a cada nova escala. Neste caso o aprisionamento se dará de forma uniforme em cada uma das cadeias e uma única cauda de lei de potência será observada. Nos casos em que essa simetria não ocorre, trajetórias que penetram até as menores escalas das estruturas, e portanto são aprisionadas por mais tempo, podem sofrer um aprisionamento distinto daquelas que são aprisionadas por menos tempo, provocando mais de um regime lei de potência. Através de um ajuste fino dos parâmetros de controle sempre é possível construir uma estrutura perfeitamente auto-similar. Por simplicidade

trataremos neste caso da geometria fractal onde a distribuição de aprisionamento e de TR apresentam um única cauda de lei de potência.

Assumindo estas condições para o sistema estudado obtém-se [Zaslavsky et al., 1997] [Zaslavsky, 2002b] o expoente de transporte ν (Eq. (4.20)) como função do expoente γ da lei de potência da distribuição de tempo de retorno (eq. (3.28)) como sendo

$$\nu = \gamma - 2. \quad (4.32)$$

Para obter esta relação, que une de forma simples dois conceitos importantes e aparentemente independentes, é necessário relacionar as escalas temporais e espaciais do sistema. Essa união se dá a partir do uso de técnicas de grupo de renormalização aplicadas ao espaço de fases [Zaslavsky, 1994], que apresentamos apenas um esboço. Definimos os parâmetros de escala que relacionam o período \mathcal{T} e o comprimento l da última curva invariante de determinada ilha de uma determinada cadeia- k , com a cadeia mais interna da geração seguinte $k + 1$, como sendo

$$\hat{R}_k : \mathcal{T}_{k+1} = \lambda_{\mathcal{T}} \mathcal{T}_k; \quad l_{k+1} = \lambda_l l_k, \quad (4.33)$$

onde $\lambda_{\mathcal{T}} \geq 1$ e $\lambda_l \leq 1$. A condição de fractalidade (auto similaridade) impõe que os valores de $\lambda_l, \lambda_{\mathcal{T}}$ sejam independentes da escala, isto é, iguais para qualquer valor de k . Esta condição pode ser pensada também como uma idealização do caso típico em que os parâmetros de escala dependem de k e é necessário a utilização de valores efetivos [Zaslavsky, 2002a]. Obtém-se então sua relação com os coeficientes α, β da equação de Fokker-Planck fracionária (4.23) como sendo

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\ln \lambda_l}{\ln \lambda_{\mathcal{T}}}. \quad (4.34)$$

Da mesma forma, relacionando os parâmetros de escala com o expoente de aprisionamento γ_{apri} obtém-se

$$\gamma_{apri} = 1 + 2 \frac{\ln \lambda_l}{\ln \lambda_{\mathcal{T}}}. \quad (4.35)$$

Juntando as duas equações acima com (3.29) e (4.24) obtém-se finalmente a relação (4.32). Vemos assim que são as propriedades topológicas das ilhas que permitem obter um vínculo entres as escalas temporais e espaciais do sistema, de onde deduzimos a dependência do transporte anômalo com o tempo de retorno de Poincaré.

É interessante notar os limites que a relação (4.32) impõe para o expoente da cauda de lei de potência da distribuição de TR. O lema de Kac garante a existência de um TR médio finito forçando um valor assintótico de $\gamma > 2$. Sabemos que os modos balísticos tornam o transporte super-difusivo (o transporte no mapa padrão parece não ser sub-difusivo mesmo se há exclusivamente ilhas não aceleradoras [Zumofen e Klafter, 1994]). Portanto no caso da presença de modos balísticos fractais teremos $3 \geq \gamma \leq 4$. Cabe ressaltar, no entanto, que exceções, aos limites desse e de outros parâmetros, parecem não ser tão raras [Zaslavsky, 2002b].

O comportamento de multi-escala, isto é, mais de uma inclinação da lei de potência no tempo de aprisionamento e retorno, é consequência da multi-fractalidade das ilhas. A cada geração de ilhas (k) no espaço de fases, teremos valores distintos de $\lambda_l, \lambda_{\mathcal{T}}$ e, conseqüentemente, tempos de aprisionamento distintos. Tempos longos de aprisionamento estão associados às trajetórias que “entraram” mais profundamente no labirinto de ilhas. Do ponto de vista da Fig.3.26 estão em cadeias mais internas de ilhas. No entanto, como vimos nesta mesma figura, as cadeias de ilhas em torno de ilhas não caracterizam um fractal (repetição igual entre escalas) mas sim um multi-fractal e, conseqüentemente, o aprisionamento se dará de forma distinta para cada regime de tempo.

É fácil entender também o efeito do ruído ($R \neq 0$) no aprisionamento das trajetórias. Tempos longos de aprisionamentos (grandes vôos) estão relacionados com trajetórias presas em estruturas muito internas e pequenas do espaço de fases e, portanto, mais suscetíveis ao ruído. O efeito da aleatoriedade será o de limitar a lei de potência da distribuição de tempos de aprisionamentos fazendo com que haja um decaimento do tipo exponencial após os regimes de lei de potência. Quanto maior o ruído menor será o regime de lei de potência. Esses resultados foram obtidos na figura 5.17.

4.3.2 Aprisionamento na rede

Um outro tipo de aprisionamento (“net trap”) foi enunciado e brevemente explorado para o mapa padrão em [White et al., 1998, Benkadda et al., 1999, Zaslavsky, 2002a]. Nesse caso o aprisionamento não ocorre devido à distribuição fractal das cadeias de ilhas e podemos imaginar que nessa região do espaço o parâmetro da equação de Fokker-Planck fracionária (4.23) seja $\alpha = 2$. Já o parâmetro temporal pode ser associado ao tempo de aprisionamento da trajetória, ou seja, $\beta = \gamma_{apri}$. Assim, obtemos diretamente das equações (3.29) e (4.24) a seguinte relação

$$\nu = \gamma - 1. \quad (4.36)$$

4.3.3 Passeios aleatórios e vôos de Lévy

Na seção 4.2 ressaltamos que o movimento Browniano acarreta um processo difusivo. De forma análoga, passeios aleatórios com tempo contínuo, que modificam algumas das hipóteses do movimento Browniano, resultam em um transporte anômalo [Klafter et al., 1996] [Montroll e Shlesinger, 1984]. No passeio aleatório Browniano, supomos que a cada instante de tempo realiza-se um passo de tamanho fixo em uma direção aleatória. No caso de assumirmos que entre dois passos o sistema espera um tempo que se distribui de acordo com uma lei de potência de média infinita, teremos um regime de transporte sub-difusivo $0 < \nu < 1$ [Sokolov et al., 2002]. Um passeio aleatório de tempo contínuo que leva a um transporte super-difusivo, caso em que estamos especialmente interessados, é o passeio aleatório de Lévy [Klafter et al., 1996]. Nesse caso imaginamos que cada partícula viaje a uma velocidade constante. Após cada passo é escolhida uma nova direção, aleatoriamente, para o passo seguinte. O tamanho do passo é determinado pelo tempo de viagem de cada trajetória. No caso de Lévy este tempo de cada passo, ou tamanho do vôo, é definido por uma lei de potência do tipo

$$\Psi(t) \propto 1/(1 + t^{1+\eta}). \quad (4.37)$$

Nesse caso os regimes de transporte dependem exclusivamente de η [Klafter et al., 1996]

$$\langle r^2(t) \rangle = \begin{cases} t^2 & \text{balístico} & \text{se } 1 < \eta < 2 \\ t^2 \ln(t) & & \text{se } \eta = 1 \\ t^{4-\eta} & \text{super-difusivo} & \text{se } 2 < \eta < 3 \\ t \ln(t) & & \text{se } \eta = 2 \\ t & \text{difusivo} & \text{se } 3 < \eta \end{cases} \quad (4.38)$$

Aplicações do passeio aleatório de Lévy foram encontradas em diferentes áreas da Física: mapas unidimensionais intermitentes [Zumofen e Klafter, 1993], redes estocásticas [Chaikovsy e Zaslavsky, 1991], experiências de fluidos em rotação [Solomon et al., 1993], entre outros sistemas Hamiltonianos [Zaslavsky et al., 1993]. O papel do passeio aleatório de Lévy nesses sistemas é comparável ao do movimento Browniano nos processos difusivo, isto é, serve

de modelo dinâmico paradigmático. Neste contexto surgem as distribuições de Lévy, que generalizam e substituem a distribuição Gaussiana para o caso desse passeio aleatório, e tem a propriedade de que a soma de distribuições de Lévy permanece sendo uma distribuição de Lévy.

O mapa padrão também foi analisado a partir do formalismo de passeios aleatórios em [Balescu, 1997, Zumofen e Klafter, 1994]. A analogia é feita associando-se a distribuição do tempo de vôo com a distribuição de tempo em que a trajetória permaneceu presa ao modo acelerador uma vez que ambos os casos apresentam uma distribuição de lei de potência. Assim temos, da Eq. (4.37) que $\eta + 1 = \gamma_{apri}$ e pela relação (3.29) obtemos $\eta = \gamma$ [Zumofen e Klafter, 1999]. Dois vôos sucessivos estão descorrelacionados, a exemplo do suposto no modelo de passeio aleatório, uma vez que o mar estocástico faz com que a trajetória perca a memória rapidamente.

A conexão entre o expoente da distribuição de tempo de retorno de Poincaré é feita da mesma forma que nas relações (4.38) com $\gamma = \eta$. No regime super-difusivo temos

$$\nu = 4 - \gamma . \quad (4.39)$$

Notamos, no entanto, as ressalvas à aplicação dessa relação para o caso do mapa padrão com modos aceleradores ou outro sistema Hamiltoniano [Benkadda et al., 1999]. A relação (4.39) é obtida a partir da suposição de um único vôo, isto é, ignorando aprisionamento em subestruturas, o que é uma aproximação válida para tempos curtos (não assintótico).

4.3.4 Discussões finais

Resumo

As conexões possíveis entre o expoente da lei de potência da distribuição de tempo de retorno γ e o regime de transporte ν obtidas nesta seção estão resumidas no gráfico 4.10. Cada uma dessas relações foi obtida a partir de considerações sobre o aprisionamento das estruturas no espaço de fases ou sobre a distribuição dos vôos de Lévy do sistema e acarretam resultados distintos. Não é possível realizar nem mesmo uma relação qualitativa geral, uma vez que o transporte decresce com o aumento de γ em um caso enquanto aumenta nos demais. Ressaltamos que os modelos de transporte anômalo especificados acima tratam da superdifusão ($1 < \nu \leq 2$) e não da subdifusão ($0 < \nu < 1$), o que limita o interesse do gráfico 4.10 aos valores entre as linhas horizontais.

Além dos três casos descritos acima, mencionamos ainda o aprisionamento das trajetórias em regiões específicas do espaço de fases pode ocorrer pela junção de camadas estocásticas (“stochastic layers”) [Zaslavsky, 2002a, Zaslavsky, 2002b]. Este aprisionamento surge quando duas regiões caóticas do espaço de fases se fundem ao variarmos o parâmetro de controle.

Aprisionamento e Ergodicidade

Os diversos tipos de aprisionamentos mencionados aqui dependem exclusivamente da topologia das ilhas no espaço de fases, podendo surgir ou desaparecer, bem como mudar significativamente a intensidade do aprisionamento, para variações do parâmetro de controle do sistema (o valor de K no caso do mapa padrão)⁹. Uma questão importante é portanto a dependência da

⁹Diante das associações entre a topologia das ilhas e a DTR podemos compreender a proposta de Chirikov que a distribuição de tempo de retorno logo após o rompimento da última barreira de transporte (superfície integrável de frequência igual à regra áurea) teria uma lei de potência com $\gamma = 3$ independente do sistema dinâmico analisado [Chirikov e Shepelyansky, 1984, Chirikov e Shepelyansky, 2002]. Este resultado seria geral graças à equivalência topológica de todos os sistemas na situação em que a última barreira KAM é rompida.

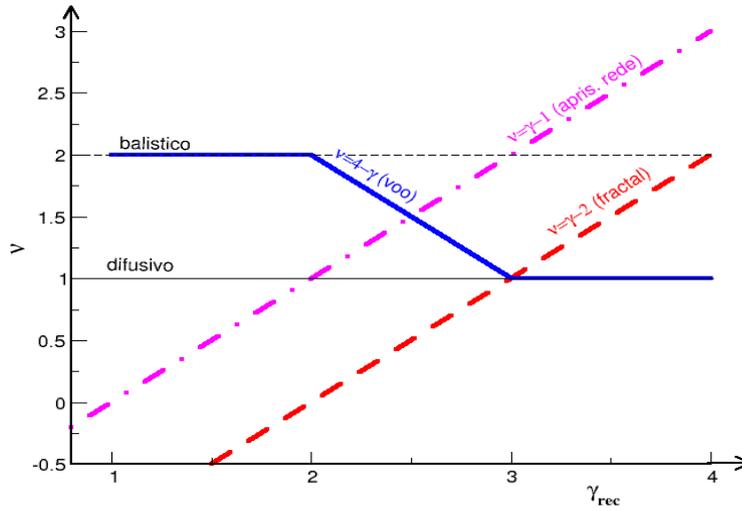


Figura 4.10: Coeficiente de transporte ν dado pela Eq.(4.20) em função do expoente da distribuição de TR lei de potência γ .

cauda de lei de potência na distribuição de TR como função deste parâmetro. Os resultados obtidos na literatura, bem como nossas simulações, nos mostram que em geral a dependência $\nu(K)$ é altamente não trivial assim como o transporte anômalo $\nu(K)$ [White et al., 1998]. Estes resultados tornam claro que as bifurcações e propriedades topológicas da fronteira entre as ilhas e o mar estocástico, bem como sua conexão com o transporte das trajetórias, constituem uma área de estudo que ainda não é bem compreendida [Zaslavsky, 2002a].

Essas considerações nos mostram que uma pequena variação do parâmetro de controle pode acarretar no surgimento de uma ilha com um aprisionamento bastante intenso. Este fenômeno persiste para valores do parâmetro de controle muito acima do valor crítico $K \gg K_c$. De fato, no mapa padrão é exatamente neste regime onde todas as ilhas principais do mapa já foram destruídas que alguns dos modos balísticos surgem (como nos mostra a figura 4.5) e, uma vez que são as únicas estruturas aprisionadoras do espaço de fases, permitem realizar a conexão do TR com o transporte anômalo (veja por exemplo a figura 4.7b).

Essas propriedades do mapa padrão, bem como de outros sistemas Hamiltonianos bidimensionais, acarretam consequências importantes para a ergodicidade do sistema. A ergodicidade de um sistema dinâmico implica que a média temporal de qualquer função $f(x)$ das coordenadas que é realizada sob uma trajetória (condição inicial $(x = x_0)$) é igual à média realizada sobre um conjunto (*ensemble*) de N trajetórias

$$\overline{f(x)} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_0^{(j)}) \equiv \langle f(x) \rangle. \quad (4.40)$$

É trivial perceber que a existência de ilhas no espaço de fases é suficiente para que a Eq. (4.40) seja violada, já que as trajetórias do mar estocástico não podem penetrar nestas regiões do espaço de fases e vice versa. Numa visão ingênua poderia-se argumentar que, uma vez que uma trajetória percorre todo o mar estocástico e que a área das ilhas é desprezível em relação à área total do espaço de fases poderíamos aproximar o sistema por um sistema ergódico. Este

raciocínio ignora, no entanto, um outro efeito das ilhas mais importante que sua área no espaço de fases: o aprisionamento de trajetórias do mar estocástico. O fato dos aprisionamentos ocorrerem de acordo com uma lei de potência, ao contrário do escape exponencial típico de sistemas com grande mistura, faz com que os valores de tempo máximo da integração e de número de partículas utilizados na relação (4.40) não sejam jamais alcançados. Essas restrições fizeram com que se denominasse tais sistemas de pseudoergódigos [Zaslavsky, 2002b] e suas propriedades de mistura são consideradas fracas.

Sistemas experimentais e modelos Hamiltonianos

Notamos que a dependência do regime de transporte com γ é particular. As pretensões do projeto inicial de realizar uma associação, ainda que qualitativa, entre o tempo de retorno de séries experimentais do plasma (por exemplo da densidade ou potencial elétrico do plasma em Tokamaks) com regimes de transporte têm de ser repensada¹⁰. De forma geral, a obtenção do regime de transporte das partículas ou das linhas de campo em um sistema experimental ou em um dos modelos que exploramos na seção 6.1, a partir da DTR é dificultada pelos seguintes motivos:

- i) Uma explicação para o surgimento de uma cauda de lei de potência na distribuição de TR é a existência de um aprisionamento em estruturas no espaço de fases. Uma vez que isto ocorre, as trajetórias acompanharão a estrutura, ou seja, o transporte anômalo irá ocorrer somente se esta estrutura for um modo balístico. A associação entre uma cauda de lei de potência na distribuição de TR e o regime de transporte requer a existência de estruturas aceleradoras ou de um processo tipo vôo de Lévy. Dessa forma, *para os casos acima mencionados*, podemos estabelecer a seguinte relação.

$$\begin{aligned} \text{Transporte anômalo} &\Rightarrow \text{Dist. TR com cauda de lei de potência.} \\ \text{Dist. TR do tipo binomial} &\Rightarrow \text{transporte difusivo} \end{aligned}$$

As duas relações acima se tornam equivalentes se considerarmos os sistemas em que as únicas distribuições possíveis são a binomial e a com cauda de lei de potência. Essas relações são inúteis para o nosso propósito pois, se estamos interessados em sistemas experimentais, seria necessário a relação inversa, isto é, a partir de uma cauda de lei de potência poderemos inferir a existência de um transporte anômalo. Isso não se verifica já que o aprisionamento pode ocorrer em ilhas não balísticas.

- ii) A existência de modos aceleradores na direção da ação (radial) requer uma periodicidade do mapa nesta direção que dificilmente existe em sistemas mais realistas. Quando utilizamos o mapa padrão, que possui esta propriedade, como aproximação local de um sistema Hamiltoniano mais complexo devemos levar em conta que seus modos aceleradores violam a aproximação local.
- iii) Para podermos relacionar quantitativamente γ a ν é preciso conhecer em detalhe os métodos de aprisionamento e/ou o sistema que relaciona o aprisionamento a um vôo. Em um sistema experimental dificilmente conhecemos em tamanho detalhe as estruturas do espaço de fases de forma que nos permitam obter esta associação. Deve-se levar em conta ainda que em um mesmo sistema podem haver estruturas aprisionadoras distintas.

¹⁰Uma abordagem alternativa para a obtenção do transporte anômalo a partir da série temporal será discutida no item 6.1.2 a seguir.

iv) Em muitos sistemas experimentais de interesse os dados são obtidos em forma de uma série temporal e sequer a distribuição de tempos de retorno de Poincaré pode ser obtida (esta ocorre no espaço de fases). Uma possível solução para este problema seria a utilização das técnicas tradicionais de reconstrução do espaço de fases [Takens, 1981, Ferrara e do Prado, 1994]. No entanto, em sistemas com muitos graus de liberdade e dados que apresentam ruído intenso, estas técnicas falham. Para aprofundar este ponto, discutiremos no próximo capítulo a utilização do TR em séries temporais comparando com os resultados já obtidos para o espaço de fases. Estamos interessados particularmente em sistemas turbulentos e com grande índice de aleatoriedade e pretendemos explorar as informações obtidas através da estatística de tempo de retorno. Trataremos de séries obtidas em um modelo baseado no mapa padrão, capítulo 5, para no capítulo 6 tratarmos de séries obtidas de medidas experimentais realizadas em dispositivos de confinamento de plasma.

Capítulo 5

Tempo de retorno em séries temporais

Passamos agora a investigar as distribuições de tempo de retorno em séries temporais e comparamos com a distribuição de tempo de retorno obtida no espaço de fases. Para tanto, adicionamos ao modelo estudado no capítulo anterior um contaminante escalar passivo que representa a densidade de partículas sob a ação da dinâmica do mapa padrão com fase aleatória. Tomamos então uma série temporal do contaminante em um ponto fixo do mapa que passamos a estudar. A distribuição de tempo de retorno apresenta os regimes binomial e exponencial com cauda de lei de potência e investigamos sua dependência com os parâmetros de controle não linear e aleatório. Além do interesse específico nas propriedades do modelo (como foi especificado nas motivações iniciais, item 1.2.1, e justifica a descrição detalhada realizada a seguir) este capítulo pretende discutir os efeitos de calcularmos o tempo de retorno não mais no espaço de fases mas em uma série temporal obtido do sistema. Este tipo de análise visa aproximar nossos estudos de situações experimentais factíveis. Em particular no sistema estudado foi possível estabelecer uma analogia (seção 5.4) entre esses dois casos que ajuda a esclarecer as consequências deste procedimento.

5.1 Série temporal no modelo

Em diversas situações experimentais a única informação do sistema passível de ser obtida é através da medida de determinada grandeza a intervalos de tempo fixo, constituindo assim uma série temporal. O próprio estudo de propriedades da borda do plasma confinado magnéticamente em Tokamaks, que será realizado no capítulo 6, é facilitado pela possibilidade de coletar dados, do potencial elétrico, temperatura ou densidade, a partir da tensão medida por uma sonda [Wootton et al., 1990, Baptista et al., 2001a]. Vemos portanto que o estudo de séries temporais é fundamental quando queremos nos aproximar de condições experimentalmente factíveis.

Estamos interessados em aproximar o nosso modelo de uma situação típica da física de fluidos. Para tanto adicionaremos um campo escalar que simula a densidade de partículas (de fluido ou plasma) e a seguir obteremos uma série temporal deste campo escalar. A exemplo do que foi feito em [Városi et al., 1991, Palladino, 1998], por simplicidade assumiremos que o campo escalar é passivo, isto é, as partículas seguem a dinâmica do modelo (que, como veremos no próximo capítulo, representa as linhas de \vec{B}) da mesma forma que um contaminante.

5.1.1 Contaminante escalar passivo

Inicialmente, para ilustrar a dinâmica do sistema introduzimos uma linha unidimensional de contaminante e observamos o seu comportamento. Os resultados estão na figura 5.1 e ilustram o processo de esticamento e dobra (*Stretching and Folding*) típico de sistemas caóticos. Esse processo, repetido seguidamente no espaço de fases, faz com que pontos inicialmente próximos diverjam após um pequeno período de tempo (este é o efeito do esticamento). No entanto, como o sistema é conservativo e limitado, as trajetórias sofrem necessariamente um processo de dobra, criando a estrutura mostrada e completando a descrição dessa dinâmica importante para a compreensão de sistemas caóticos. Para uma quantificação desse processo em função dos parâmetros de controle nos remetemos a [Palladino, 1998, Palladino et al., 2004].

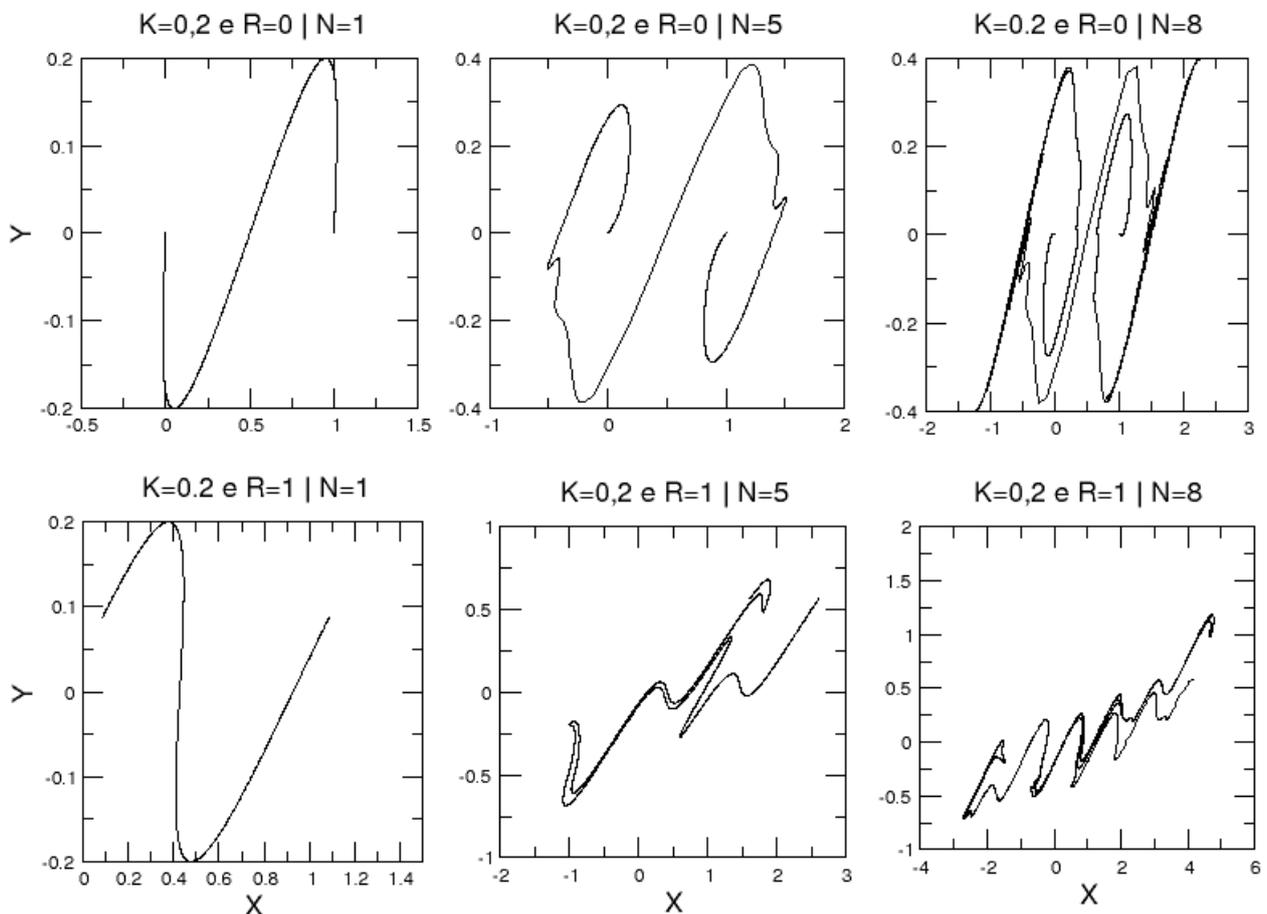


Figura 5.1: Evolução de uma linha (10 mil pontos entre $x=0$ e $x=1$, para $y=0$, no instante inicial) sob a ação da Eq. (4.9), sem tomarmos $\text{mod}(1)$ na sua segunda equação, para facilitar visualização do processo de esticamento e dobra.

O contaminante que usamos nos estudos dos próximos capítulos é distribuído de forma bidimensional, preenchendo assim todo espaço e simulando a distribuição da densidade de partículas no fluido. Neste caso o espaço de fases deve ser pensado como o espaço de configurações. A distribuição inicial do contaminante foi escolhida de forma senoidal [Városi et al., 1991, Palladino, 1998],

para respeitar a periodicidade do mapa no eixo x ¹ (ilustrado na primeira figura da fig. 5.2).

$$\Phi_{(x,y)}^{n=0} = \text{sen}(2\pi x) \quad (5.1)$$

As sucessivas iterações do mapa padrão com fase aleatória (4.9) aplicadas ao contaminante, a partir de sua condição inicial (Eq. (5.1)), estão ilustradas na figura (5.2) e mostram, quando comparado ao retrato de fases da figura 4.2, que sua mistura² está intimamente ligada às estruturas no espaço de fases. Ou seja, a mistura ocorre rapidamente nas regiões caóticas do espaço de fases enquanto que nas regiões periódicas (interior das ilhas), a mistura não ocorre.

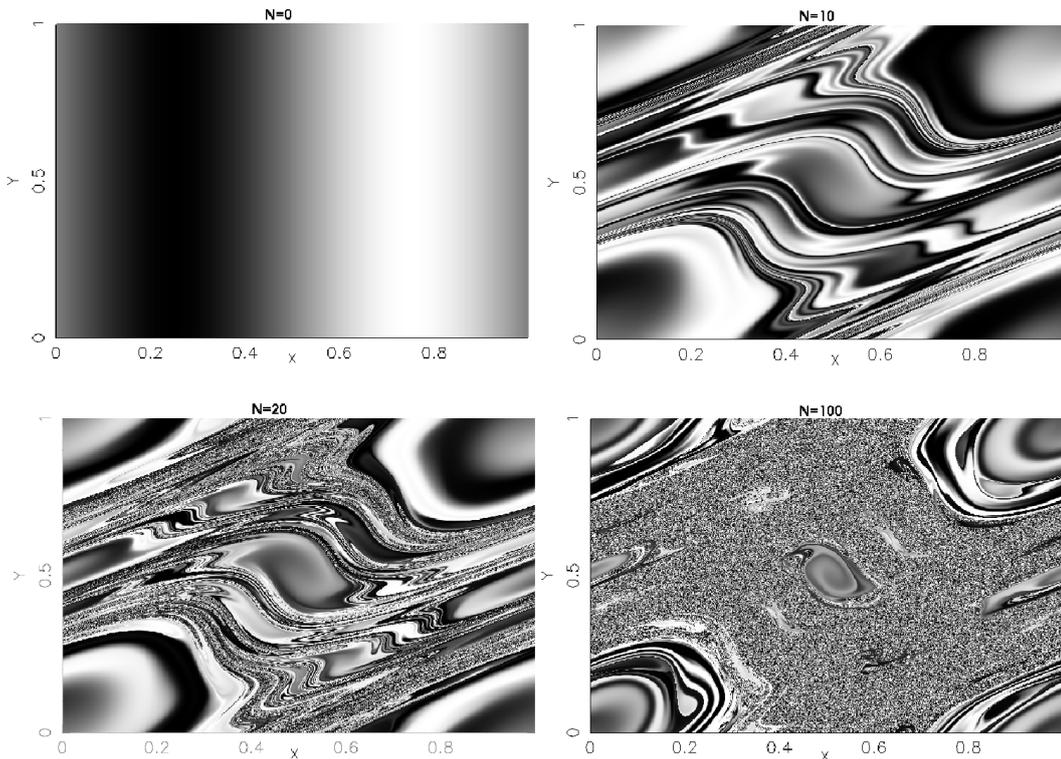


Figura 5.2: Evolução de um contaminante escalar passivo, como da equação (5.1), a partir da dinâmica da Eq. (4.9) após N iterações. Tons escuros representam uma concentração maior e tons claros uma concentração menor. $[K=0,2, R=0,01]$.

Descrevemos a seguir o procedimento numérico utilizado na figura 5.2, que é utilizado de forma geral para obtermos o valor da concentração de contaminante em determinado ponto (x_k, y_k) após um certo número de iterações (N). Considerando o fato de o mapa ser inversível, aplicamos o mapa inverso M^{-1} por N vezes (M^{-N}) sob o ponto (x_k, y_k) . Obtemos então o ponto onde estava o contaminante no tempo $n = 0$ (x_0, y_0) . Sabemos que o valor da concentração no tempo $n=0$ em (x_0, y_0) é dado pela equação (5.1) e usando o fato do contaminante não interagir

¹Em [Palladino, 1998] um contaminante com distribuição linear também é estudado.

²De forma simplificada dizemos que um sistema dinâmico apresenta a propriedade de mistura (tipo *mixing*) se ao aplicarmos a dinâmica a dois contaminantes distintos, qualquer região do espaço conterá a mesma proporção de cada um dos contaminantes [Lichtenberg e Lieberman, 1983]. De sistemas em que tal regime assintótico ocorre de forma rápida (lenta) diz-se que possui a propriedade de mistura forte (fraca) (*strong (weak) mixing*). De forma mais geral o problema da mistura de um contaminante em um sistema dinâmico é tratado em [Ottino, 1990].

(passivo), sabemos que esse mesmo valor será a concentração em (x_k, y_k) no tempo $n = N$. Ou seja,

$$\Phi_{(x_k, y_k)}^{n=N} \equiv \Phi_{[M^N(x_0, y_0)]}^{n=N} = \Phi_{[M^{-N}(x_k, y_k)]}^{n=0} \equiv \Phi_{(x_0, y_0)}^{n=0}.$$

Na construção da figura 5.2 tomamos uma grade de 600 x 600, tamanho do pixel da impressora, e realizamos o procedimento acima para cada um dos pontos da grade. Quando temos $R \neq 0$ devemos tomar o cuidado de utilizar uma única série de números aleatórios, isto é, em uma mesma iteração todas as trajetórias são modificadas por um mesmo número δ_n .

5.1.2 Obtenção da série temporal no modelo

Baseado nas observações acima, escolhemos um ponto no espaço de fase e marcamos o valor do contaminante naquele ponto a cada iteração do mapa construindo assim uma série temporal de valores da densidade. O ponto representa o fato de, no Tokamak, a sonda estar fixa em um determinado ponto da borda. A série temporal é obtida na prática a partir da iteração do mapa inverso fazendo com que a região de obtenção da série seja estritamente pontual.

A figura 5.3 representa a distribuição de contaminante em um determinado instante de tempo e o círculo simboliza o ponto de coleta da série temporal. A medida que iteramos o mapa (4.9) a concentração em cada um dos pontos é alterada (veja figura 5.2) e tomamos o valor do contaminante no ponto indicado a cada iteração do mapa.³ O ponto de coleta em cada um dos valores de parâmetro K, R deve se encontrar na região caótica. Afim de retratar a mistura do contaminante. As séries temporais que apresentaremos para o nosso modelo serão obtidas no ponto $x_f = 0,45, y_f = 0,1$, salvo menção em contrário. Podemos resumir uma série temporal com N_p pontos como sendo

$$\Psi_{(m)}^{N_p} = \{ \Phi_{(x_f, y_f)}^{n=0}, \Phi_{(x_f, y_f)}^{n=1}, \dots, \Phi_{(x_f, y_f)}^{n=i}, \dots, \Phi_{(x_f, y_f)}^{n=N_p} \} \quad (5.2)$$

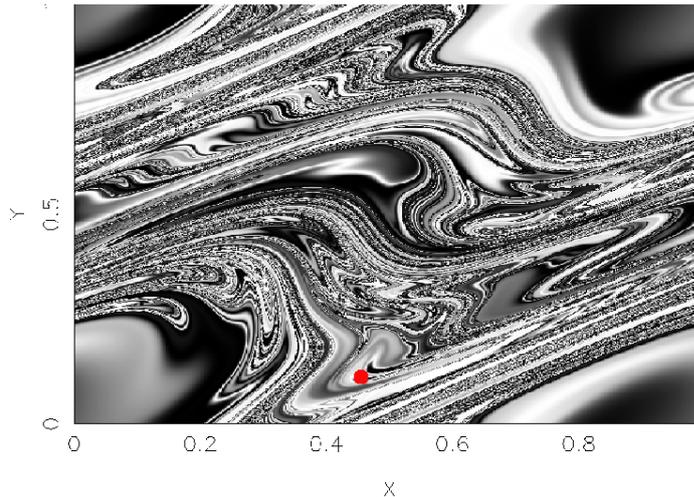


Figura 5.3: Distribuição do contaminante após 10 iterações do mapa padrão perturbado [$K=0,2, R=0,1$]. O círculo indica um dos pontos utilizados para obtenção da série temporal ($x_f = 0,45, y_f = 0,1$).

³A série temporal pode ser obtida com uma periodicidade diferente (maior) do que a do mapa caso se deseje introduzir o parâmetro associado à velocidade de aquisição dos dados.

Na figura 5.4 estão dois exemplos de séries temporais obtidas. Naturalmente estão confinadas entre $[-1,1]$ assim como o contaminante (Eq. (5.1)). Notamos que as séries representam flutuações em torno do zero, não possuindo variação da intensidade média tampouco tendências. Essa situação pode parecer um pouco artificial mas reflete nosso interesse no estudo das flutuações, não de seu comportamento periódico ou médio. Em séries que misturam esses dois tipos de comportamento é possível eliminar os crescimentos médios ou periodicidades (de forma análoga ao feito ao [Kantelhardt et al., 2002]) retendo apenas as flutuações.

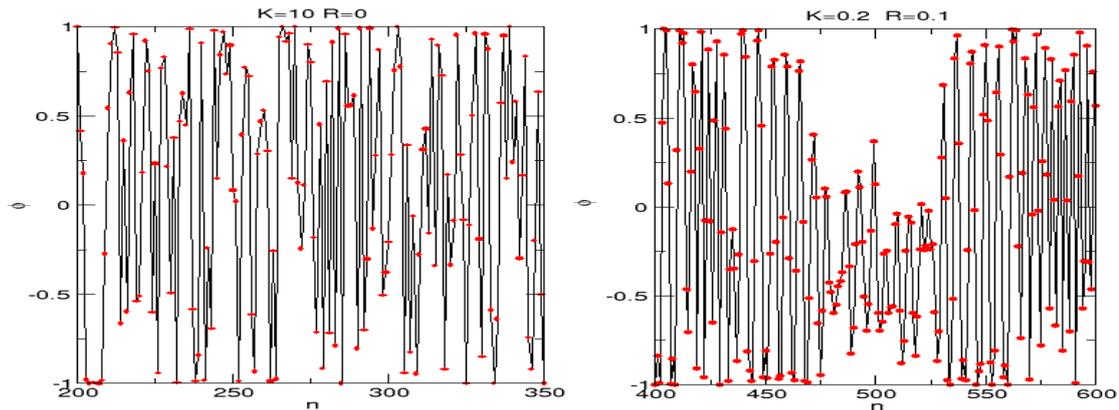


Figura 5.4: Dois exemplos de séries temporais de contaminante obtidas para o modelo no pontos $x=0,45$ e $y=0,10$.

Os parâmetros das duas séries ilustradas na figura 5.4 ($K = 0,2$ e $K = 10$) serão tomados aqui como valores extremos das condições de nosso sistema. Exploraremos seus efeitos, bem como a influência da aleatoriedade ($R > 0$) nesses casos. Com $K = 0,2$, conforme ilustra o retrato de fases da figura 4.3, a presença de estruturas no espaço de fases é grande. O caso $K = 10$ representa o caso em que essas estruturas estão muito reduzidas.

5.2 Análises preliminares

Passamos a analisar a série temporal obtida calculando o espectro de Fourier (5.2.1), a função de autocorrelação (5.2.2) e a função densidade de probabilidade (5.2.3). Ressaltamos que durante essas análises, bem como nas discussões sobre a distribuição de tempo de retorno, somente algumas menções à estrutura do espaço de fases no cenário de caos incompleto serão feitas. Uma analogia mais forte, que permitirá uma compreensão mais adequada de toda esta seção será feita na seção 5.4.

5.2.1 Espectro de Fourier

O espectro de Fourier discreto foi definido na equação 3.13 e indica as frequências características da série temporal analisada. No caso $K = 10$ (figura 5.5) nenhuma frequência característica foi detectada e o espectro com muitas frequências presentes, se assemelha ao espectro típico de um processo aleatório (ruído branco).

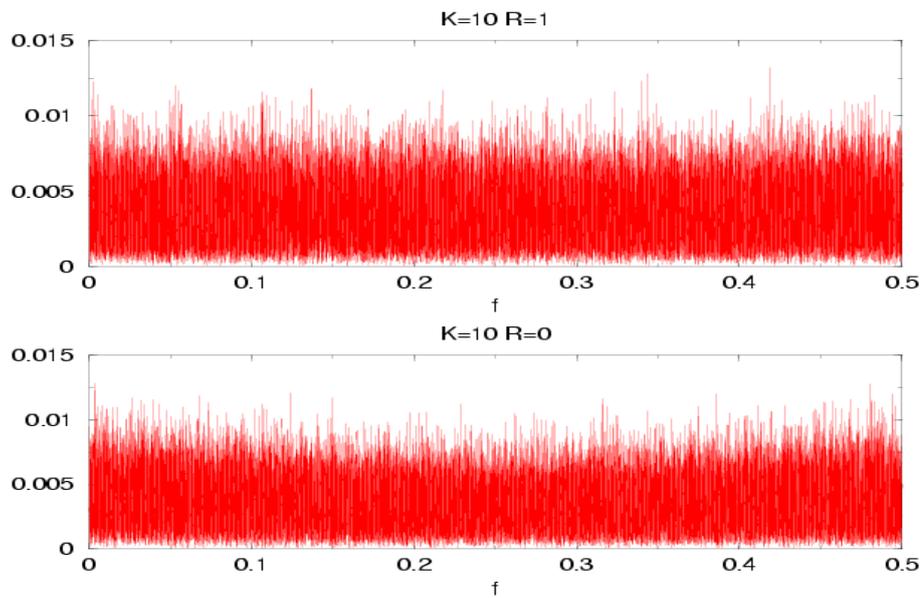


Figura 5.5: Espectro das séries temporais do modelo utilizado com $K=10$. A série temporal possui $2^{17} = 131072$ pontos.

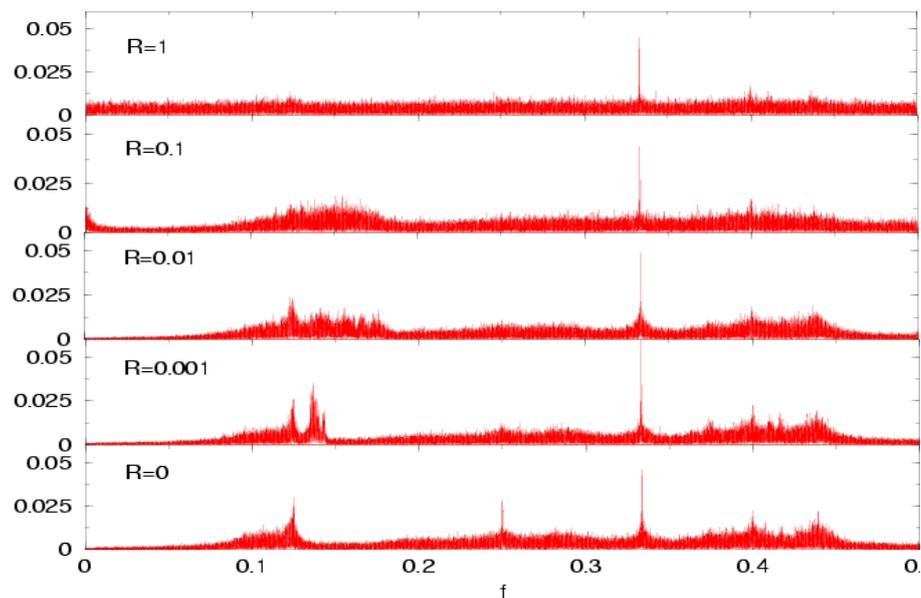


Figura 5.6: Espectro das séries temporais do modelo utilizado com $K = 0,2$. A série temporal possui $2^{17} = 131072$ pontos. De baixo para cima o valor da perturbação aleatória aumenta.

Já para $K = 0,2$, notamos uma diversidade de freqüências que dominam a série temporal. A presença desses picos está associada às ilhas no espaço de fases e serão estudadas em mais detalhes na seção 5.5.1. Notamos ainda que a medida que aumentando a aleatoriedade do sistema os picos são alargados e suavizados, no entanto, alguns deles permanecem mesmo para $R = 1$. Convém ressaltar, no entanto, uma dificuldade relacionada com a *não estacionariedade* da série. Quando observamos a série temporal para $K = 0,2$ (como por exemplo na figura 5.4) notamos a

existência de regiões que destoam das flutuações usuais devido a uma coerência. Esse fenômeno de intermitência, que veremos estar relacionado ao aprisionamento de trajetórias nas ilhas do mapa, é responsável pelo surgimento de picos no espectro observados na figura 5.6. Uma vez que isto ocorre para diferentes frequências em diferentes instantes no caso em que muitas estruturas permanecem ativas é de se esperar que, conforme constatamos, as frequências observadas no espectro dependam da região da série temporal que tomamos, de seu comprimento e também dos pontos (x_f, y_f) de obtenção da série. Sabendo que o tempo de aprisionamento segue uma lei de potência um tempo demasiado longo seria necessário para a obtenção precisa do espectro completo. Estes resultados serão reinterpretados no item 5.5.2.

5.2.2 Função de autocorrelação

Uma outra análise imediata que pode ser feita na série é a partir da função de autocorrelação, definida na Eq. (3.15). A forma como essa função decai a zero, exponencialmente ou como uma lei de potência, também é um indicativo da presença de memória no sistema [Lichtenberg e Lieberman, 1983].

O cálculo para as séries temporais obtidas pelo nosso modelo está presente na figura 5.7 e têm sua análise dificultada pelo fato do tempo de coleta entre os dados ser fixo, não podendo ser reduzido arbitrariamente. Dessa forma a função de autocorrelação, em todos os casos, decai a zero em apenas uma iteração do mapa, tornando inconclusiva a forma como se dá esse decaimento. Como esperado, devido às estruturas presentes no sistema, o caso em que $K = 0.2$ e $R = 0$ apresenta uma correlação, baixa mas presente, mesmo para tempos mais longos.

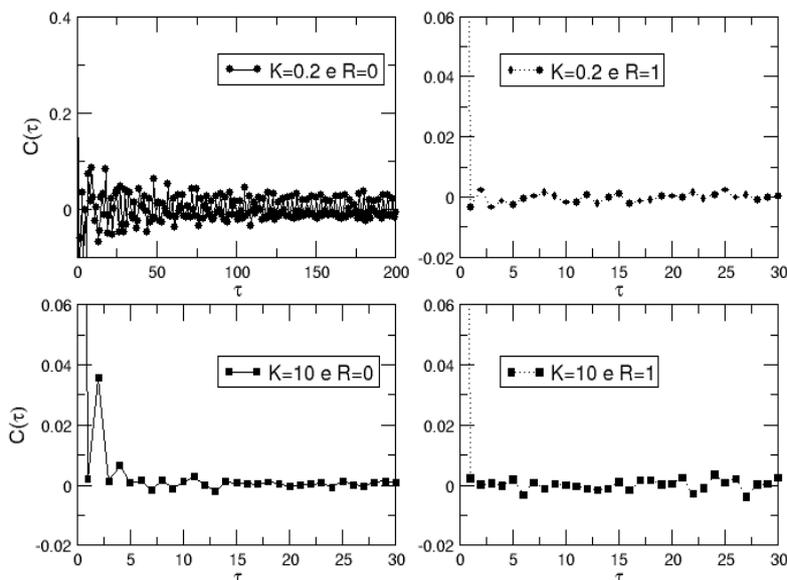


Figura 5.7: Função de autocorrelação (3.15) para as séries temporais obtidas no modelo estudado. Note a escala diferente no caso da série obtida com $K = 0, 2$ e $R = 0$, indicando uma maior correlação.

5.2.3 Função densidade de probabilidades

Uma informação importante sobre as séries temporais, particularmente útil no caso do cálculo da distribuição de tempo de retorno, é saber qual a frequência ou probabilidade que um valor de contaminante surge na série temporal. Esta relação é dada pela função densidade de probabilidades que, como veremos, não pode ser obtida de maneira analítica na maioria dos casos.

A dependência da distribuição densidade de probabilidades das séries temporais do sistema com os parâmetros de controle K, R é qualitativamente simples. A medida que aumentamos esses valores teremos uma dinâmica mais caótica e aleatória, respectivamente. Desta forma, esperamos que a distribuição de pontos da série temporal se aproxime da ergodicidade.

Um cálculo analítico para esta densidade, a exemplo do que foi feito para o mapa logístico, é possível no caso em que supomos o processo de mistura do contaminante uniformemente aleatório. A distribuição dos pontos da série temporal estará determinada então unicamente pela distribuição inicial do contaminante. No apêndice A esta distribuição foi obtida como sendo

$$\rho(\phi) = \frac{1}{\left|\frac{d\phi}{dx}\right|} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\phi^2}}. \quad (5.3)$$

Afim de verificar a ergodicidade do sistema comparamos a densidade de probabilidade das séries temporais com a distribuição espacial do contaminante. Esta distribuição foi obtida a partir de cem iterações de um conjunto grande de trajetórias dispostas no eixo x .

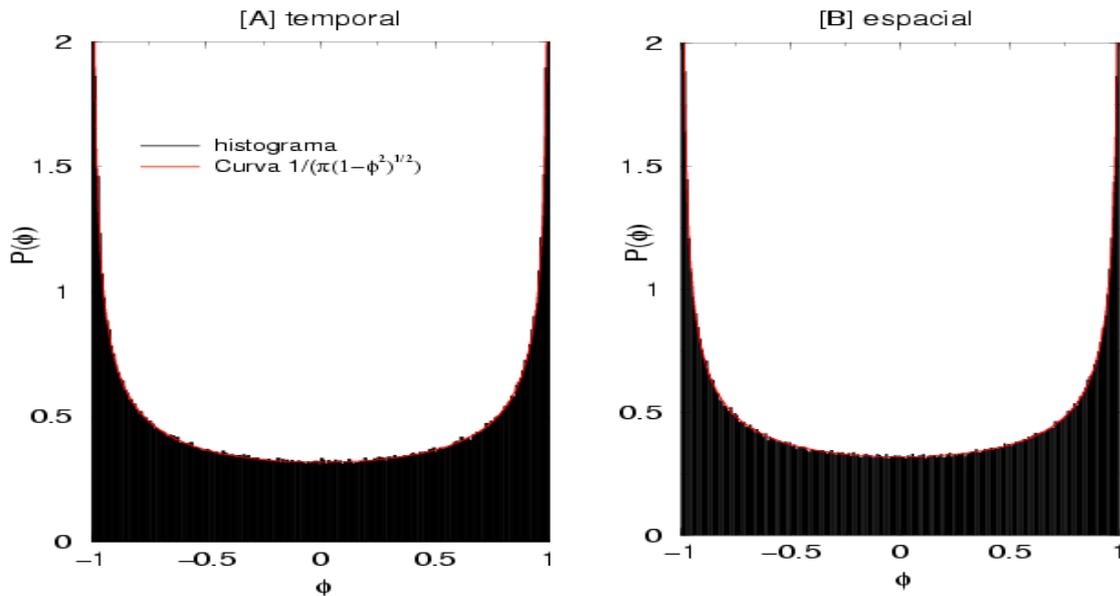


Figura 5.8: Distribuição de probabilidade para o mapa padrão com $K=10$ e $R=0$. [A] Série temporal com 10^6 pontos e [B] série espacial (10^6 pontos espalhados espacialmente sob o eixo x e iterados 100 vezes). A curva representa a distribuição do caso ergódico, equação (5.3).

As figuras 5.8A e 5.9A mostram 10^6 valores obtidos após a iteração do mapa inverso a partir do ponto escolhido. Já as figuras 5.8B e 5.9B mostram 10^6 valores obtidos após a centésima iteração de 10^6 condições iniciais uniformemente espalhadas no eixo x . As distribuições obtidas numericamente confirmam que para $K=10$ o mapa é ergódico e a distribuição (5.3) se aplica, o que não ocorre para o caso $K = 0, 2, R = 0$. Neste último caso percebemos que as ilhas remanescentes (figura 4.2) para esse parâmetro fazem com que a distribuição espacial de contaminante

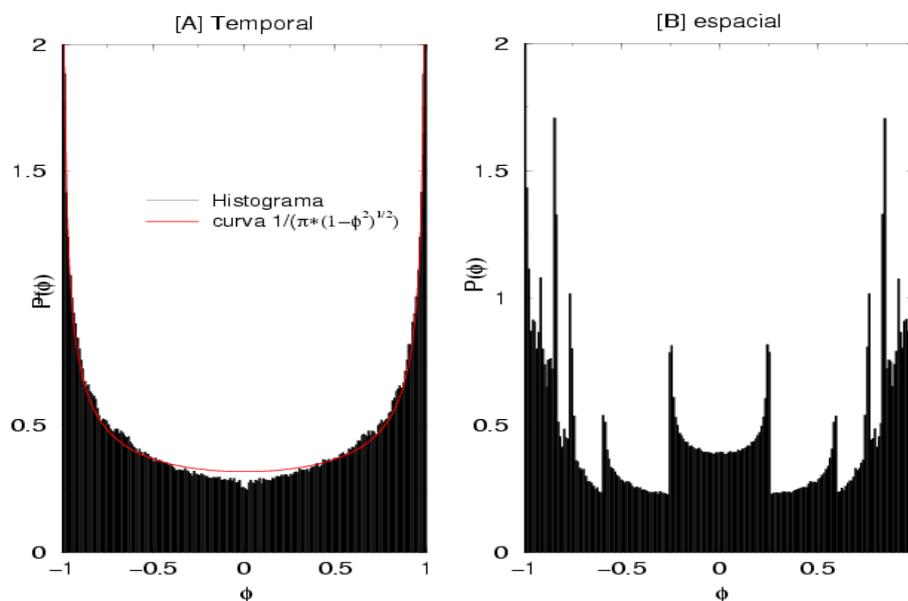


Figura 5.9: O mesmo que na figura 5.8 com $K = 0, 2$ e $R = 0$.

seja sensivelmente diferente do caso ergódico. Esta propriedade fica mais evidente para a distribuição espacial pois, por construção, teremos trajetórias iniciadas em ilhas do espaço de fases, enquanto que estamos tomando a série temporal no mar estocástico. É interessante notar, a título de curiosidade, uma espécie de autosimilaridade na figura 5.9B associada possivelmente às diferentes regiões estocásticas separadas do mar estocástico que diferentes trajetórias exploram. Quando aumentamos o valor do parâmetro de controle aleatório o sistema também se aproxima da ergodicidade como previsto.

5.2.4 Medida do intervalo de retorno

Exemplificamos agora os comentários sobre a dependência da medida do intervalo de retorno com os parâmetros que o definem (X_c, δ) enunciados no item 2.2.3. A partir do lema de Kac (Eq. (2.2)), que naturalmente continua válido no caso de séries temporais de sistemas multidimensionais, temos que o tempo médio de retorno é o inverso da medida do intervalo

$$\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle} = \frac{\text{Prob. Retorno}}{\text{Prob. Total}}. \quad (5.4)$$

Assim, os resultados que obtemos para a medida do intervalo aplicam-se de forma imediata ao tempo médio de retorno. Realizamos estes cálculos antes mesmo do cálculo do tempo de retorno para ressaltar que a dependência do tempo médio reflete nada mais que a dependência da medida do intervalo. No caso da DTR ser do tipo Poisson teremos ainda que o coeficiente do decaimento exponencial da distribuição de tempo de retorno β da Eq. (3.7), será igual à medida $\mu(I)$.

A figura 5.10 procura ilustrar esta relação e o quociente da equação (5.4) está representada pela divisão da área em cinza pela área total, preto mais cinza (caso a distribuição de probabilidade esteja normalizada, como é o caso nas figuras aqui demonstradas, essa última área é simplesmente 1). Ainda que não tivéssemos uma distribuição analítica para a série (casos em que a série não é ergódica) poderíamos definir a região de retorno da mesma forma.

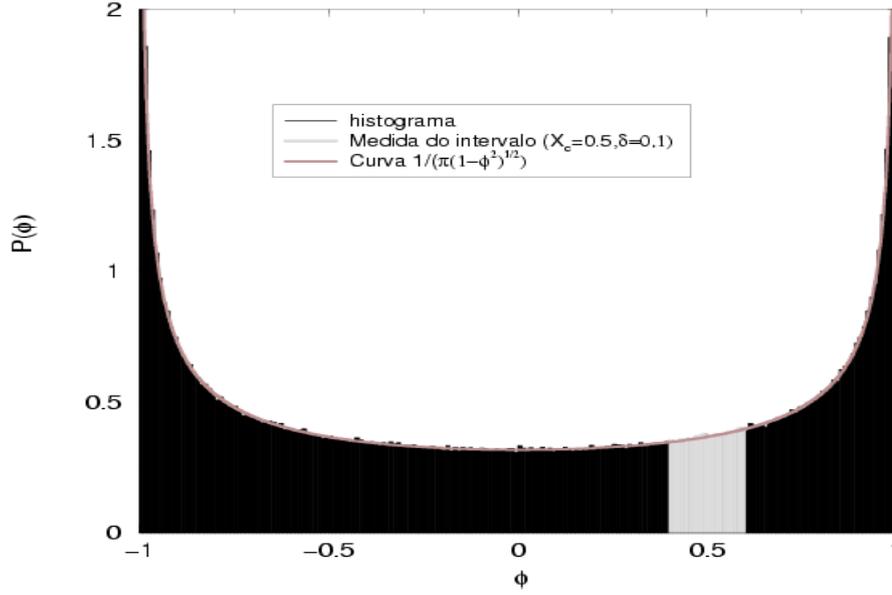


Figura 5.10: Figura ilustrativa para obtenção da dependência do tempo médio de retorno com X_c, δ .

Quando temos $\delta \rightarrow 0$ e a distribuição de probabilidade é contínua e diferenciável, podemos estimar a área de retorno como sendo a área do retângulo de altura igual a $\rho(X_c)$:

$$\mu(I) = 2\rho(X_c)\delta, \quad (5.5)$$

enfatizando novamente a dependência linear do tempo médio com δ , a exemplo do que foi discutido no item 2.2.3 e contrariamente a [Baptista et al., 2001a]. A obtenção de uma escala entre o tempo médio de retorno com δ através da dimensão D_1 não ocorre neste caso, pois estamos lidando com uma série que não está em um suporte fractal. Este resultado estatístico distingue a distribuição de tempo de retorno no espaço de fases da distribuição de tempo de retorno em uma série temporal.

Somente nos casos em que temos uma distribuição exata $\rho(\phi)$ o resultado analítico para essa dependência pode ser obtido a partir da integração da probabilidade. Então a equação (5.4) pode ser escrita também como

$$\frac{\text{Prob. Retorno}}{\text{Prob. Total}} = \frac{\int_{X_c-\delta}^{X_c+\delta} \rho(\phi)d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\phi)d\phi}. \quad (5.6)$$

Calculamos explicitamente a seguir os valores esperados para o caso da distribuição de probabilidade da série temporal obtida no modelo do mapa padrão perturbado, no regime de alta estocasticidade (alto K, R). Nesse caso tomamos a distribuição normalizada (5.3) e obtemos

$$\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle}(X_c, \delta) = \int_{X_c-\delta}^{X_c+\delta} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\phi^2}}d\phi = \frac{1}{\pi}[\arcsen(X_c + \delta) - \arcsen(X_c - \delta)]. \quad (5.7)$$

Expandindo esse resultado em série de Taylor em torno de $\delta = 0$ obtemos

$$\mu(I) = \frac{1}{\langle T \rangle}(X_c, \delta) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-X_c^2}}\delta^1 + \frac{1}{3\pi} \frac{1+2X_c^2}{\sqrt{1-X_c^2}(X_c^2-1)^2}\delta^3 + \frac{1}{20\pi} \frac{3+24X_c^2+8X_c^4}{\sqrt{1-X_c^2}(X_c^2-1)^4}\delta^5 + O(\delta^7), \quad (5.8)$$

que nos mostra que a aproximação linear é de fato da forma (5.5).

Nas figuras 5.11 e 5.12 está graficamente ilustrada a relação (5.7). Os gráficos se restringem ao intervalo em que $|X_c \pm \delta| \leq 1$, uma vez que a série temporal de contaminante em nosso sistema existe somente na faixa entre $[-1, 1]$.

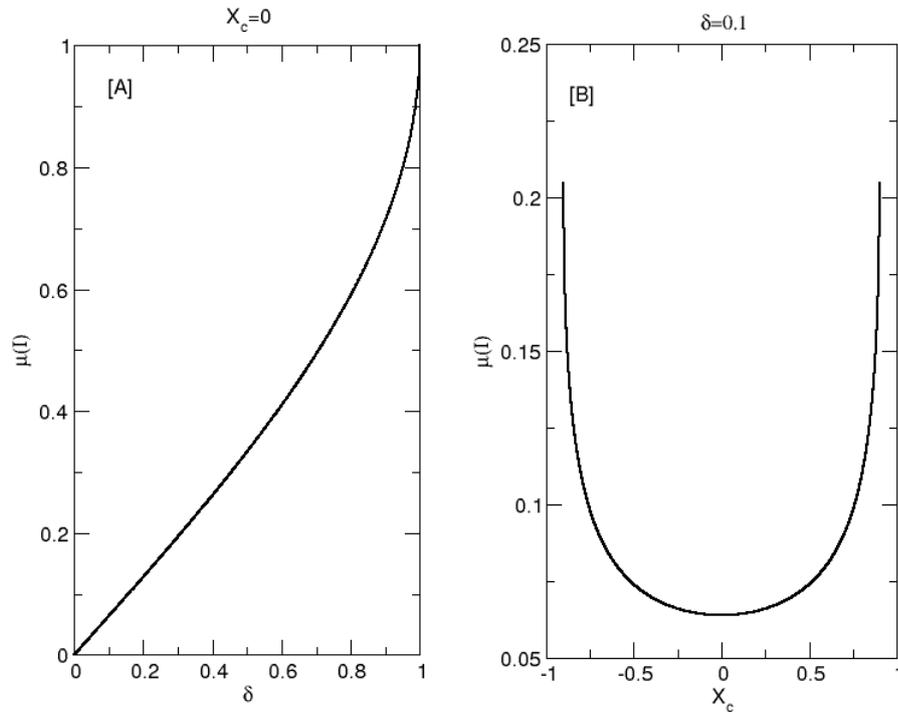


Figura 5.11: Dependência do tempo médio de retorno $\langle T \rangle$ com X_c, δ , conforme Eq. (5.7).

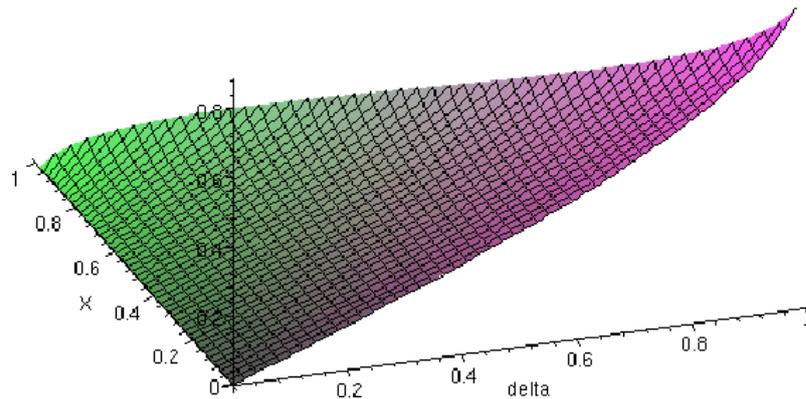


Figura 5.12: Dependência do tempo médio de retorno $\langle T \rangle$ com X_c, δ , conforme Eq. (5.7).

5.3 Distribuição de tempo de retorno

Discutimos inicialmente os resultados da literatura e as motivações para calcular a distribuição de TR em séries temporais. Calculamos então a distribuição de tempo de retorno (TR)

na série temporal de contaminante discutindo a dependência de suas características com os parâmetros de controle.

5.3.1 Distribuição de TR em séries temporais

Como já ressaltamos anteriormente é importante distinguir o tempo de retorno calculado no espaço de fases do tempo de retorno em séries temporais. Ainda que os principais resultados matemáticos sejam idênticos a interpretação do procedimento é fundamentalmente distinta. Enquanto que no espaço de fases estamos interessados em repetições da configuração do sistema, no caso de séries temporais somente uma das variáveis do sistema está sendo observada. Até o momento discutimos somente o tempo de retorno no espaço de fases.

Resultados da literatura

Os trabalhos que tratam de alguma forma do tempo de retorno em séries temporais são bastante restritos [Gao, 1999, Bunde et al., 2003b], além dos resultados anteriores obtidos por M. S. Baptista em nosso grupo.

Ainda que a distribuição de tempo de retorno para a série de contaminante se justifique por motivos diversos (apresentados em 5.3.1) é interessante discutirmos os trabalhos de [Bunde et al., 2003b, Bunde et al., 2003a]. O interesse nesse caso é na estatística de tempo de retorno de eventos raros, que se distingue da estatística de TR pela escolha de um intervalo de retorno na cauda da função densidade de probabilidade. Em geral este intervalo é definido como os eventos maiores que um determinado valor que pode ser considerado catastrófico. Por exemplo, se pensarmos que a série temporal mede o nível de água de um determinado rio, os eventos na cauda da função densidade de probabilidade (FDP) serão secas ou enchentes. O interesse na distribuição de tempo de retorno é saber então o tempo entre dois desses eventos.

Aquilo que nos interessa, e que parece manter-se válido para o caso de tempo de retorno em geral, é discutir a DTR de sistemas com correlação de longo alcance. Relembrando a definição da equação (3.15) a função que mede a correlação entre dois pontos de uma série separados de uma distância τ é dada por

$$C_x(\tau) = \langle x_i x_{i+\tau} \rangle = \frac{1}{N - \tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau} . \quad (5.9)$$

Dizemos que uma série possui correlação de longo alcance se, para tempos τ longos

$$C_x(\tau) \propto \tau^{-\beta_1} , \quad (5.10)$$

com $0 < \beta_1 < 1$ de forma que não se possa definir um tempo médio de correlação.

Os trabalhos acima mencionados mostram que calculando a distribuição de tempo de retorno para uma série construída de forma a ter uma correlação de longo alcance obtém-se como resultado uma exponencial esticada da forma

$$P_e(T) \propto \exp(-aT^{\beta_2}) , \quad (5.11)$$

com $\beta_1 = \beta_2$. Caso a distribuição (5.11) se aplique a todo intervalo sua visualização se torna mais fácil (como apresentada nos artigos) e o fator de normalização é $\frac{\beta_2 a^{1/\beta_2}}{\Gamma(1/\beta_2)}$. Em [Bunde et al., 2003b] é mostrado ainda que a série formada pelos tempos de retorno T_i também apresentará correlação de longo alcance. Esta correlação dos retornos é importante para suas conclusões uma vez que neste caso o intervalo de tempo entre a ocorrência tende a se repetir. Por exemplo, se o intervalo

entre catástrofes foi curto (longo) a tendência é que o próximo desastre ocorra após um tempo curto (longo).

Ressaltamos, no entanto, que este último resultado (da correlação da série de retornos) não é válido sempre que a DTR for da forma (5.11). Para perceber isso basta notarmos que a mistura dos tempos de recorrência de uma série de retornos mantém a DTR invariante mas altera a correlação da série.

Por que calcular a distribuição de TR na série de contaminante?

Ao calcularmos o espectro das séries temporais de contaminante notamos que a existência de eventos raros (aprisionamentos) poderiam fazer surgir picos no espectro. De fato, ao observarmos a figura 5.4 já notamos que para valores baixos do parâmetro de controle a observação da série temporal pode mostrar estruturas. Na figura 5.13 notamos que a série temporal durante um bom tempo distribui-se de forma errática em todo intervalo entre $[-1, 1]$ com concentração próximo aos extremos (coerentemente com 5.3). Próximo à iteração de número $n = 6000$ a série passa cerca de 1500 iterações apresentando um padrão bastante organizado. A parte de baixo desta figura mostra em detalhe esta região que veremos na seção 5.4 estar associada ao aprisionamento de trajetórias nas ilhas do espaço de fases.

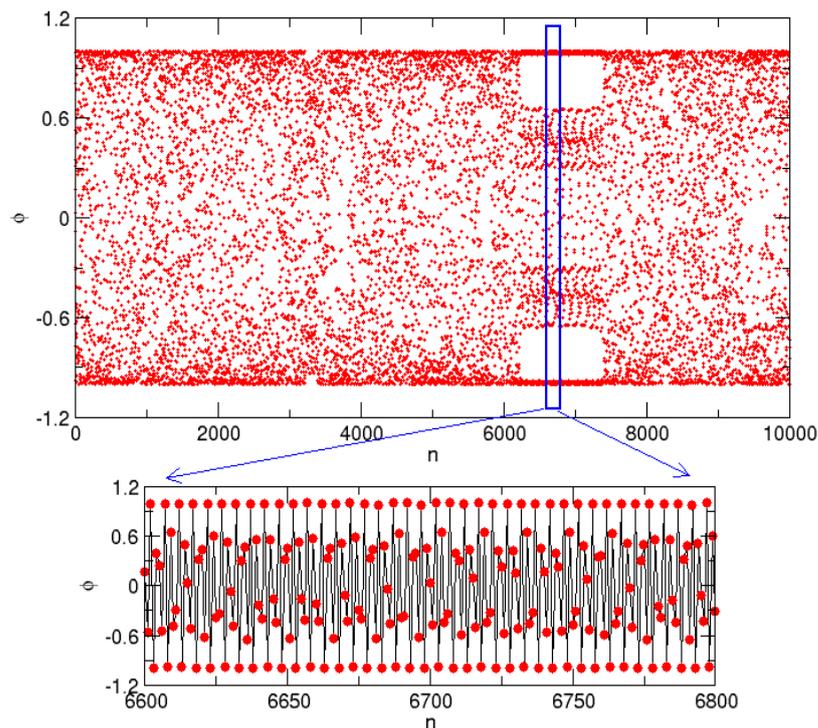


Figura 5.13: Série temporal (n) do contaminante ϕ para $K = 0, 2, R = 0$ com a ampliação de um aprisionamento.

Sem muito esforço é possível encontrar um evento organizado ainda maior, como o que ilustramos na figura 5.14. Nesse caso é possível perceber até mesmo a variação da organização da série de contaminante a medida que a trajetória entra ou sai da estrutura aprisionadora.

É razoável pensar que as frequências associadas a estas oscilações regulares apareçam no espectro dessas séries. Vemos assim a importância de sabermos de que forma se distribuem esses eventos. Podemos supor que a distribuição de tempo de retorno, inspirada na distribuição

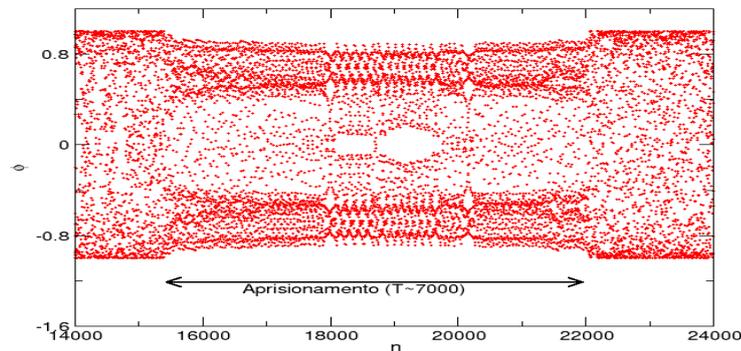


Figura 5.14: Série temporal (n) do contaminante ϕ para $K = 0, 2, R = 0$ mostrando um aprisionamento longo.

de TR de Poincaré calculada no espaço de fases, aplicada a essas séries temporais, forneça-nos informação a respeito dessas estruturas. Realizaremos portanto um procedimento análogo ao realizado para a distribuição de tempo de retorno de Poincaré em sistemas unidimensionais (como por exemplo na figura 2.2) para a série temporal do contaminante.

É importante ressaltar que ao calcularmos a distribuição de tempo de retorno não é necessário armazenar toda a série temporal em questão. Em nosso algoritmo iteramos o mapa e verificamos dinamicamente se houve um retorno do contaminante à faixa estabelecida. Este procedimento permitiu-nos calcular a distribuição de tempos de retorno para séries de até $N_p = 10^{11}$ pontos, o que seria impraticável caso fosse necessário armazenar a série temporal.

5.3.2 A distribuição de TR típica

O procedimento que envolve a obtenção da série temporal do contaminante e o cálculo da distribuição de tempo de retorno envolve uma série de parâmetros. A tabela 5.1 lista todos os parâmetros com as suas respectivas variações. Nas distribuições de TR que apresentamos a seguir, sempre que algum parâmetro não constar explicitamente na legenda deve-se entender que eles seguem aqueles listados na última coluna desta tabela.

Parâmetro	Descrição	Variação Possível	Calculado
K	não linearidade da dinâmica	$0 \leq K < \infty$	$0, 2 < K < 10$
R	aleatoriedade da dinâmica	$0 \leq R \leq 1$	$R = 10^{-p}, p = 0, 1, 2 \text{ ou } 3$
(x_f, y_f)	ponto fixo de coleta da série	$0 \leq x_f, y_f \leq 1$	$(0, 45, 0, 1)$
N_p	Número de pontos da série	$0 < N_p < \infty$	$N_p = 10^q, q = 9, 10, 11$
$\Phi(x, y; t = 0)$	distribuição de contaminante		$\Phi(x, y; t = 0) = \text{sen}(2\pi x)$
X_c	Ponto de retorno	$-1 < X_c < 1$	geralmente $X_c = 0$
δ	semi largura do intervalo	$0 < \delta < 1$	geralmente $\delta = 0, 05$

Tabela 5.1: Parâmetros envolvidos no cálculo da distribuição de TR da série temporal de contaminante. Os três blocos representam os parâmetros associados à dinâmica, à coleta da série temporal e ao cálculo da distribuição de tempo de retorno. Como estamos interessados em processos de mistura podemos estabelecer ainda as seguintes restrições: $K > K_c = 0, 1546...$ (especialmente quando $R = 0$) e que o ponto fixo (x_f, y_f) esteja no mar estocástico.

A variação de cada um desses parâmetros provoca alterações particulares na distribuição de TR, o que analisaremos a seguir. Afim de ilustrar os componentes que comumente aparecem nas distribuições de TR de contaminante, apresentamos na figura 5.15 uma distribuição típica, obtida para as séries ilustradas nas figuras 5.13 e 5.14.

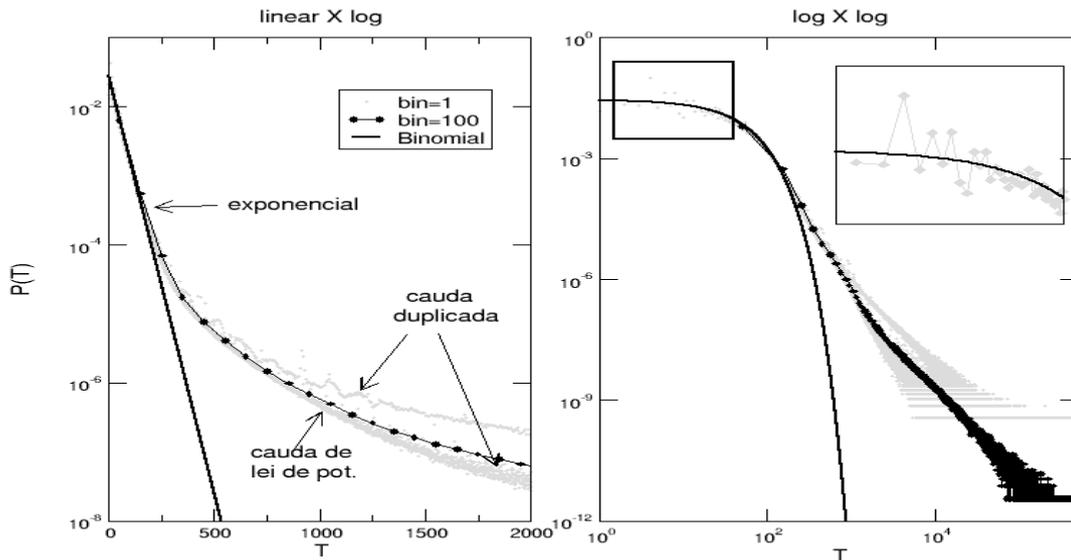


Figura 5.15: Distribuição de TR típica para uma série do contaminante (veja o texto para detalhes). A distribuição binomial (2.9) foi traçada a partir de $\mu = 1/\langle T \rangle$. [$K = 0, 2, R = 0, N_p = 10^{11}$]

O aspecto geral da distribuição apresentada na figura 5.15 é bastante familiar, especialmente considerando as análises feitas para o tempo de retorno de Poincaré no item 3.3.3 para o mapa padrão. Encontramos também na distribuição de TR da série temporal: decaimento do tipo exponencial para tempos curtos, cauda de lei de potência para tempos longos e memória de curto alcance. Um fenômeno novo, e bastante curioso, é o de multiplicidade das caudas de lei de potência. No caso da figura 5.15, ao invés de uma cauda de lei de potência na distribuição de tempo de retorno encontramos duas *paralelas*! Este aspecto naturalmente é mascarado quando, afim de melhorar a estatística de nossa distribuição, utilizamos valores diferentes de 1 para o bin (canal do histograma). Este efeito, como veremos na seção 5.4, surge exclusivamente pelo fato de estarmos tratando do tempo de retorno de séries temporais e não no espaço de fases e será omitido (através do aumento do bin) em alguns dos gráficos que seguem para ser explorado em detalhe no item 5.4.3.

5.3.3 A dependência da distribuição de TR com os parâmetros

Parâmetros dinâmicos K, R

Estudamos agora a dependência da distribuição de TR em função dos parâmetros que controlam a dinâmica do sistema: K, R . Os resultados numéricos apresentados nas figuras 5.16 e 5.17 foram calculadas para valores pequenos de R, K , respectivamente, de forma que o efeito da variação do outro parâmetro seja perceptível. Não obstante, devemos entender o cenário que descrevemos a seguir como geral.

Qualitativamente vemos que o efeito de um aumento do parâmetro de controle não linear (K) e aleatório (R) são o mesmo: fazem com que a distribuição do TR tenda à distribuição binomial obtida analiticamente a partir da densidade de probabilidade dada pela Eq. (5.3). No entanto,

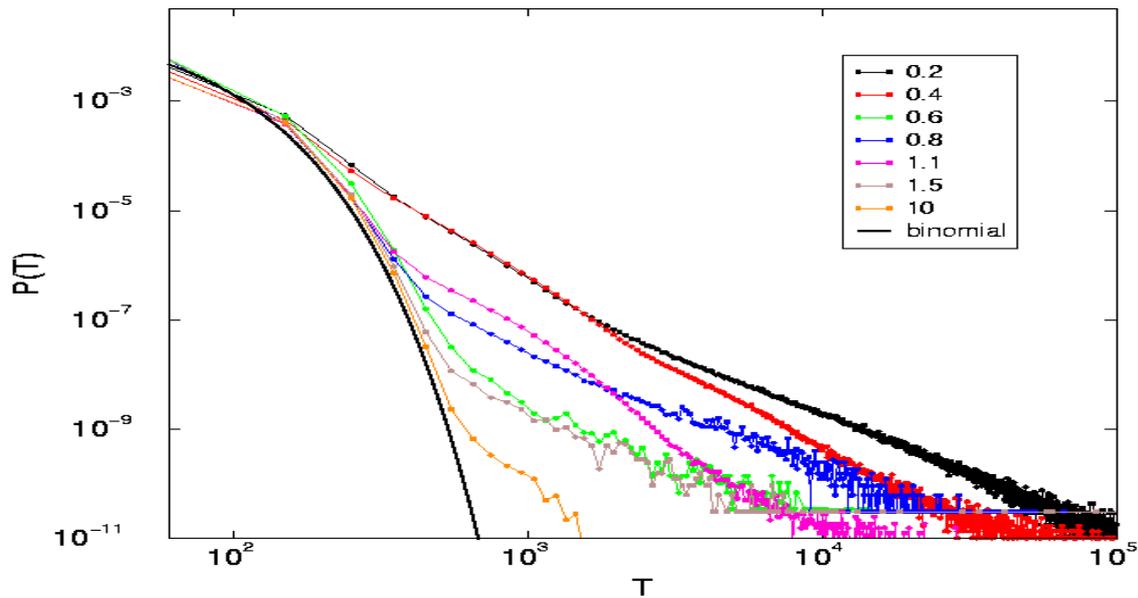


Figura 5.16: [Colorida] Dependência da distribuição de tempo de retorno do contaminante com o parâmetro de controle não linear K . [$R = 0, N_p = 10^{11}$]. A binomial foi traçada a partir de $\mu(I)$ dado pela Eq. (5.7).

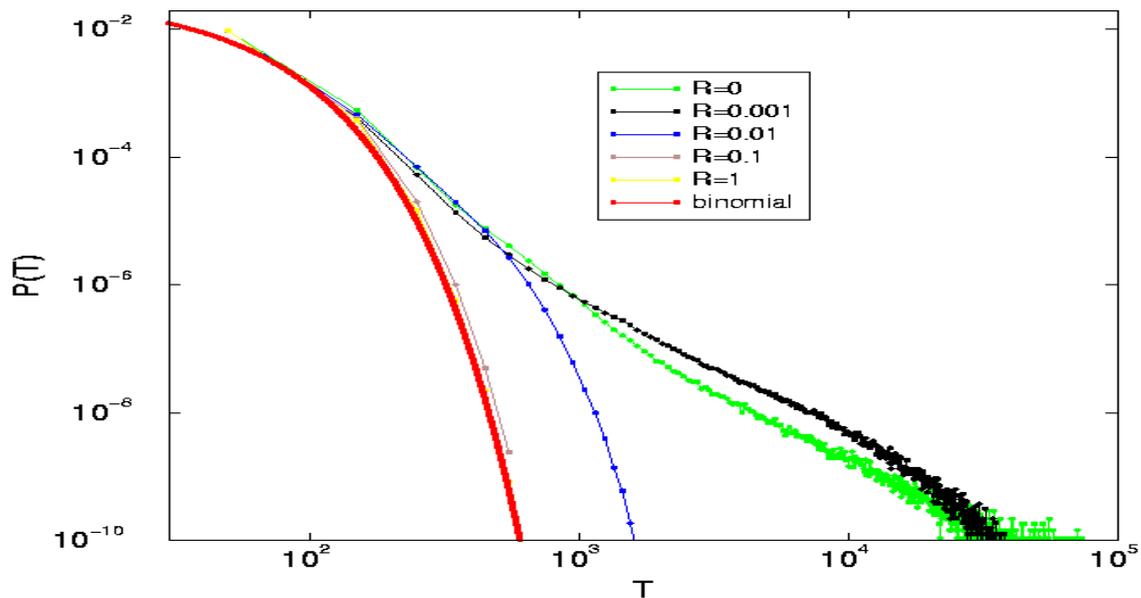


Figura 5.17: [Colorida] Dependência da distribuição de tempo de retorno com o parâmetro de controle aleatório R . [$K = 0, 2, R = 0, N_p = 10^{11}$]. A binomial foi traçada a partir de $\mu(I)$ dado pela Eq. (5.7).

a forma como essa tendência ocorre é significativamente diferente. Enquanto o aumento da aleatoriedade tende a transformar regimes que apresentam lei de potência em regimes exponenciais para tempos longos $T \rightarrow \infty$, o aumento da não linearidade faz com que o regime exponencial avance sobre o de lei de potência para tempos curtos. Esta distinção é bastante importante pois, ainda que seja de difícil obtenção numérica, a distribuição de tempo de retorno para valores grandes de K ainda pode apresentar um regime assintótico do tipo lei de potência. No caso de R ocorre justamente o contrário, para valores pequenos de R podemos pensar que o regime assintótico ($T \rightarrow \infty$) da distribuição será uma exponencial. Estes resultados estão coerentes

com o cenário de caos incompleto do espaço de fases uma vez que o ruído elimina as estruturas finas das ilhas enquanto que o aumento de K torna as ilhas cada vez menores no espaço de fases.

Uma quantificação mais precisa da dependência do expoente da cauda de lei de potência γ com o parâmetro de controle não linear K é impossibilitada pois pequenas variações deste parâmetro levam a bifurcações e ao surgimento de ilhas no espaço de fases que modificam drasticamente as propriedades de aprisionamento [White et al., 1998].

Parâmetros da série $N_p, (x_f, y_f), X_c$ e δ

Discutimos agora a dependência da distribuição de tempo de retorno (DTR) com os parâmetros relacionados à coleta da série temporal e ao procedimento de cálculo do retorno.

Na figura 5.18 apresentamos a distribuição de TR para séries temporais coletadas em dois pontos distintos do sistema. Notamos que o acordo entre os dois resultados é total o que mostra que a distribuição é independente do ponto de coleta da série temporal, desde que este se localize no mar estocástico. Este resultado deve-se à ergodicidade do mar estocástico. Veremos na próxima seção que este ponto fixo nada mais é do que a condição inicial de uma trajetória do mapa padrão inverso.

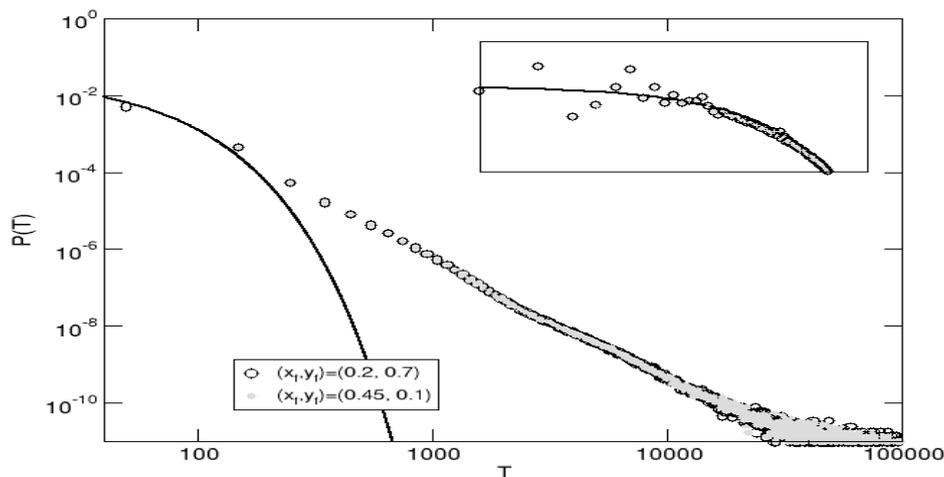


Figura 5.18: Distribuição de TR para série do contaminante coletadas em dois pontos (x_f, y_f) distintos. [$K = 0, 4, R = 0, N_p = 10^{11}$]

Certamente os parâmetros importantes que devemos variar no cálculo da distribuição do TR referem-se ao intervalo de retorno que utilizaremos. Definimos nosso intervalo de retorno a partir de sua posição X_c e semi-largura δ . A partir das discussões realizadas no final dos itens 2.2.2 e 5.2.3 vimos que a medida do intervalo determina o tempo médio e o coeficiente da distribuição Poisson. Uma vez fixado o ponto de retorno (X_c) o parâmetro δ nos indica justamente o tamanho do intervalo de retorno. Baseado nesses pontos vamos argumentar que, nos casos em que a distribuição de tempo de retorno apresenta uma cauda de lei de potência, a escolha de um valor adequado do parâmetro δ se faz fundamental para a visualização adequada da DTR.

Para valores pequenos de δ a tendência é que o número de retornos diminua consideravelmente piorando a estatística da distribuição. Além disso, quando δ é muito pequeno o coeficiente

da exponencial de tempo de retorno tende a diminuir o que faz com que, no gráfico linear-log, a reta observada tenda a ficar cada vez mais horizontal. Mesmo eventos com tempos de retorno muito longos podem estar associados ao movimento no mar estocástico e pertencerem portanto à região exponencial da DTR. O ponto em que a distribuição deixa de ser exponencial e passa a ser lei de potência **não** é independente do valor de δ . Na realidade a distribuição consiste, a partir de um tempo de retorno maior do que poucas interações, em uma soma da distribuição exponencial (movimento no mar estocástico) com a lei de potência (aprisionamento). A cauda torna-se visível por que a distribuição exponencial aproxima-se de zero muito mais rapidamente. Temos assim duas razões que fazem com que a cauda de lei de potência torne-se de difícil visualização quando δ é pequeno.

Ao aumentarmos o valor de δ fazemos com que a série temporal não seja bem resolvida (discriminada) uma vez que deixa-se de explorar uma propriedade local. Isto é, passamos a contar como retornos eventos que na realidade são intermitentes já que estes se encontram dentro da região I . Além disso a parte exponencial da DTR torna-se muito curta já que a distribuição pode tender a zero em poucas iterações e conter a maioria dos eventos (retornos).

A escolha de um valor adequado para δ leva em consideração estes dois efeitos contrários e em geral é obtido após diversas tentativas e tomando aquela que permite caracterizar mais claramente a distribuição. Essa inspeção visual depende ainda crucialmente do número de eventos (retornos) disponíveis para a histogramação. O número de retornos, por sua vez, é dado por

$$N_{retornos} = N_p \mu(I), \quad (5.12)$$

onde N_p é o número de pontos da série temporal. Vemos portanto que um parâmetro importante para essa determinação é o número de pontos da série temporal. Este problema é particularmente importante quando estamos tratando de sistemas experimentais como será feito no capítulo 6 ou sistemas onde a área das ilhas aprisionadoras seja pequena como no caso ilustrado na figura 5.19. No caso de distribuições de tempo de retorno com cauda(s) de lei de potência é fácil perceber que, para uma correta visualização desses eventos raros, séries longas são fundamentais.

O aumento do canal do histograma (bin) também é um artifício para melhorar a estatística, no entanto, sua utilização é limitada já que diminuí o número de pontos da distribuição. Além disso este procedimento faz com que efeitos não sejam visualizados: múltiplas caudas e memória de curto alcance. O efeito do número de pontos e do tamanho do bin estão exemplificados na figura 5.19 e mostram como a constatação do surgimento da cauda de lei de potência para o caso $K = 10$ e $R = 0$ só foi possível a partir de uma série temporal com 10^{11} pontos e com $bin = 100$.

Por fim resta-nos discutir a influência do parâmetro X_c . Ao contrário do caso dos sistemas aleatórios e com caos bem desenvolvidos, que possuíam uma distribuição do tipo binomial para o TR, vemos na figura 5.20 que a escolha da posição para o intervalo de retorno é determinante para a distribuição observada. Para uma melhor comparação do efeito da variação de X_c é interessante obter intervalos de retorno com a mesma medida em posições distintas. Para tanto escolhemos um intervalo fixo $I_1 = (X_c = 0, \delta = 0,05)$ e procuramos obter o valor de δ para o qual o intervalo em torno de $I_2 = (X_c = 0,95, \delta_2)$ satisfaça

$$\mu(I_1) = \mu(I_2).$$

Para estimarmos o valor de δ_2 assumimos que a distribuição densidade de probabilidade da série temporal poderia ser aproximada pela Eq. (5.3) e calculamos pela Eq. (5.7) o valor analítico de $\delta_2 = 0,015$. Nesse caso o valor do intervalo calculado analiticamente foi de $\mu(I) = 0,03184$, enquanto que os resultados numéricos obtidos a partir do cálculo do inverso do tempo médio foram $\mu(I_1) = 0,02946$ e $\mu(I_2) = 0,03156$. Apesar dessas distinções a figura 5.20 nos mostra

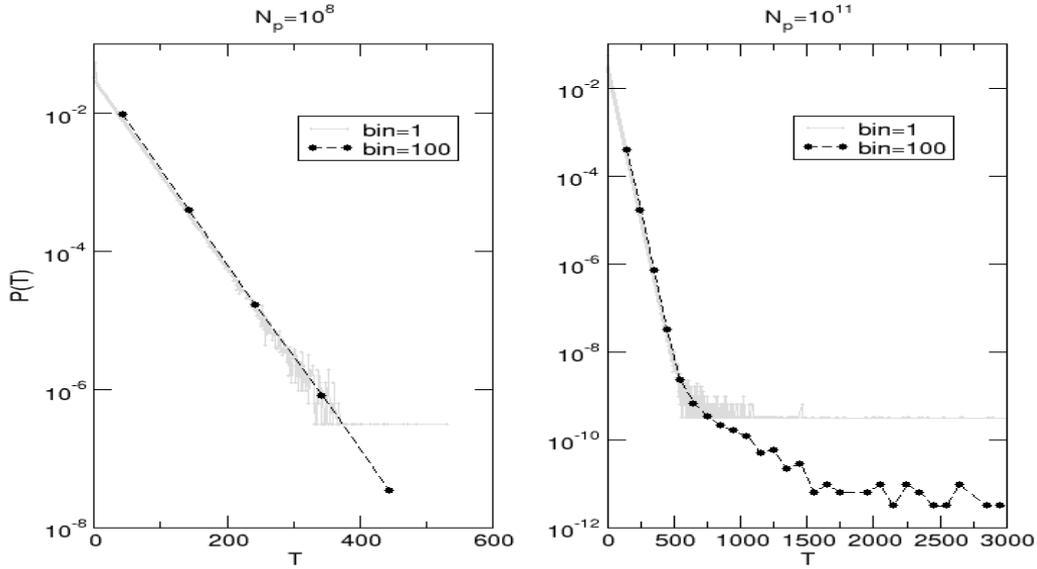


Figura 5.19: Distribuição de TR (gráfico linear-log) para duas séries temporais de tamanho N_p distintos. Note as escalas distintas nos eixos dos dois gráficos. [$K = 10, R = 0$]

que os valores são suficientemente próximos para uma boa comparação⁴: a região exponencial da distribuição de TR é bem descrita pela distribuição binomial calculada pela medida analítica enquanto que as caudas são muito diferentes entre si.

Uma análise qualitativa das figuras 5.13 já sugeriam que, dependendo da região em que escolhermos o intervalo de retorno, eventos intermitentes apareceriam ou não na distribuição de TR. No caso da distribuição de TR no espaço de fases era fácil escolhermos uma região de retorno no mar estocástico onde não houvesse nenhuma estrutura aprisionadora. No caso da série temporal de contaminante esta escolha não é trivial uma vez que o intervalo é escolhido na série temporal e as estruturas estão no espaço de fases. Notamos assim a necessidade de associar os intervalos de retorno da série temporal com regiões no espaço de fases. Essa analogia é feita na próxima seção e permitirá uma compreensão mais clara dos resultados obtidos até aqui (em especial a dependência com X_c), das relações entre distribuição de TR em séries temporais e no espaço de fases bem como explorar o efeito de múltiplas caudas paralelas (claramente presente na figura 5.20).

5.4 Analogia com o tempo de retorno no espaço de fases

Procuramos reinterpretar nesta seção a ocorrência de um retorno da série temporal do contaminante em termos do movimento no espaço de fases do sistema. A partir desta analogia (item 5.4.1) poderemos reinterpretar os resultados discutidos até o momento e explicar a observação das múltiplas caudas de lei de potência (item 5.4.3).

⁴Uma outra opção que facilitaria a comparação seria dividir o tempo pelo valor do tempo médio de retorno para todas as distribuições. Nesse caso, entretanto, podemos ter intervalos de retorno de medida consideravelmente distintas.

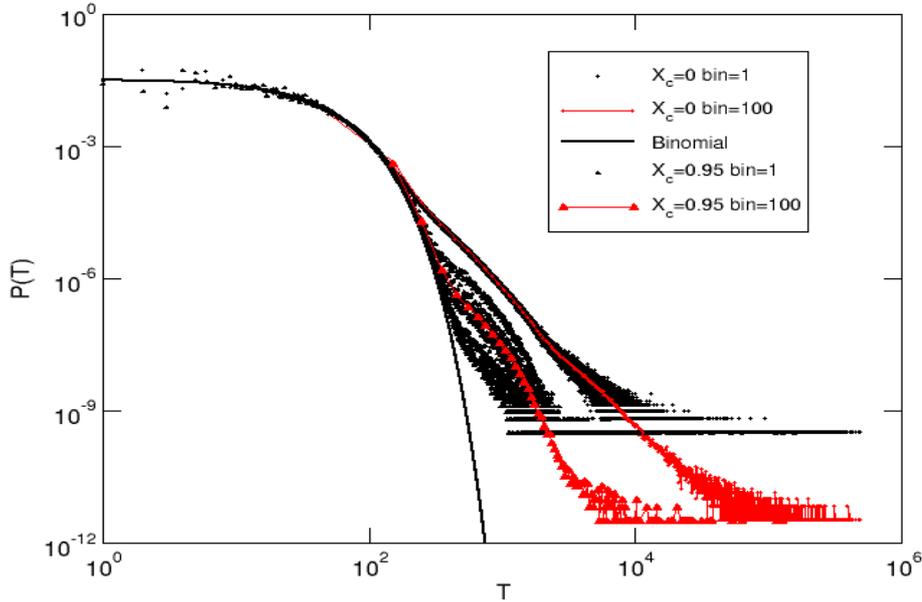


Figura 5.20: Distribuição de tempo de retorno para dois intervalos distintos: $I_1(X_c = 0, \delta = 0,05)$ e $I_2(X_c = 0,95, \delta = 0,015)$. A curva binomial foi traçada a partir do cálculo de $\mu(I_1) = \mu(I_2)$ pela Eq. (5.7) assumindo que a Eq. (5.3) é válida. [$K = 0,4, R = 0, N_p = 10^{11}$]

5.4.1 Regiões de retorno no espaço de fases

Vamos analisar em mais detalhe o procedimento numérico, descrito no item 5.1.1, utilizado para o cálculo da série temporal. Resumidamente ele consiste em tomar o ponto de coleta da série como condição inicial e iterar o mapa padrão inverso n vezes, o que resulta nos pontos (x_n, y_n) . Denominaremos esta trajetória de trajetória inversa. O valor do contaminante da série temporal no tempo n é dado simplesmente $\Phi = \text{sen}(2\pi x_n)$.

Notamos que somente a concentração inicial do contaminante é utilizada explicitamente no cálculo. Assim, para sabermos em qual região do espaço de fases estará a trajetória inversa quando a série temporal apresentar um valor do contaminante dentro do intervalo $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$ basta observar a distribuição espacial inicial do contaminante. Por exemplo, a figura 5.21 mostra o intervalo no eixo x que nos fornece um contaminante dentro de uma faixa em $X_c = 0,5$ e $\delta = 0,05$. O valor das bordas dessa faixa são facilmente obtidos como sendo $\frac{1}{2\pi} \arcsin(X_c + \delta)$ e $\frac{1}{2\pi} \arcsin(X_c - \delta)$.

Vamos analisar então como ocorrem as iterações do mapa padrão inverso. A partir de (4.4) é fácil perceber que o mapa inverso será

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+1} - y_{n+1} \text{ mod}(1) \\ y_n &= y_{n+1} + K \text{sen}(2\pi x_n + R\delta_n). \end{aligned} \quad (5.13)$$

A associação entre o mapa padrão e seu inverso é facilmente obtida. As trajetórias periódicas são igualmente iteradas sendo alterado o sentido de rotação no eixo x . Para as trajetórias caóticas algo análogo irá ocorrer, o que faz com que o retrato de fases do mapa inverso (5.13) seja idêntico ao do mapa do modelo (4.9).

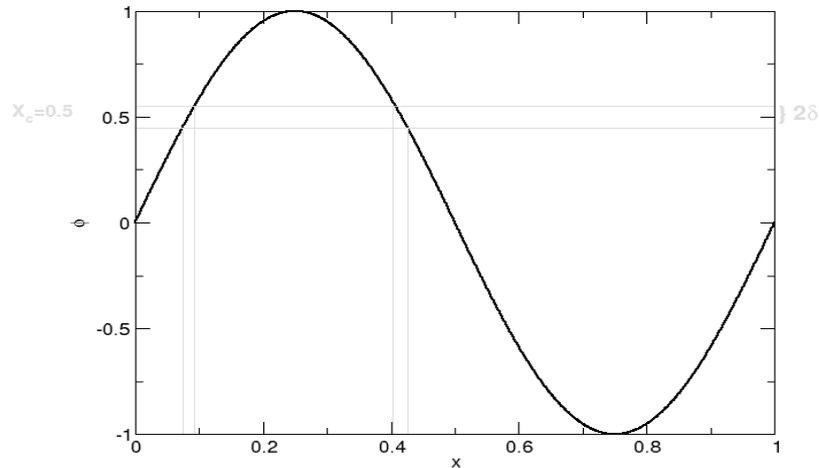


Figura 5.21: Ilustração da obtenção da faixa de parâmetros x que fornece um ponto da série temporal de contaminante Φ dentro de uma faixa X_c de largura 2δ .

Na figura 5.22 ilustramos como se dá o movimento das dez primeiras iterações do mapa inverso tendo como pontos iniciais os pontos utilizados na figura 5.18 para coleta da série temporal. Toda vez que uma dessas iterações cai dentro das faixas verticais temos um retorno da série temporal à faixa $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$. Podemos notar, a partir da figura 5.22, a distinção do cálculo do tempo de recorrência de Poincaré que tomaria, ao invés de faixas no espaço de fases, uma única região de raio δ para o retorno.

O fato das regiões de retorno no espaço de fases se tratarem de faixas verticais deve-se às propriedades específicas da distribuição inicial do contaminante (forma senoidal). No caso geral séries temporais obtidas a partir de sistemas dinâmicos de um espaço de fases de dimensão superior podem ser pensadas como projeções das demais dimensões em uma reta. Assim, regiões distantes e disjuntas do espaço de fases podem resultar em um mesmo valor da série temporal. Assim, no caso geral, podemos imaginar que recorrências da série temporal a um valor determinado estarão relacionadas à trajetórias presentes em grandes regiões do espaço de fases. Em nosso caso particular podemos estabelecer:

ANALOGIA: Um retorno da série temporal de contaminante a um intervalo $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$ é equivalente ao retorno de uma trajetória do mapa padrão inverso iniciada no ponto de coleta (x_f, y_f) à faixas no espaço de fases cujas fronteiras são $\frac{1}{2\pi} \arcsin(X_c + \delta)$ e $\frac{1}{2\pi} \arcsin(X_c - \delta)$.

5.4.2 Movimento no espaço de fases

A analogia mencionada acima possibilita que estudemos o problema da recorrência do contaminante a partir do movimento no espaço de fases de uma única trajetória inversa. As principais características do movimento no espaço de fases do caos incompleto foram descritas nos itens 3.3.3 e 4.3. Exploramos aqui as consequências do retorno às faixas e não às regiões pequenas contidas no mar estocástico⁵.

⁵Motivados pelo problema do retorno à faixas verticais no espaço de fases do mapa padrão, podemos considerar a seguinte pergunta: em qual das faixas de retorno uma trajetória que está em (x, y) irá passar primeiro. A

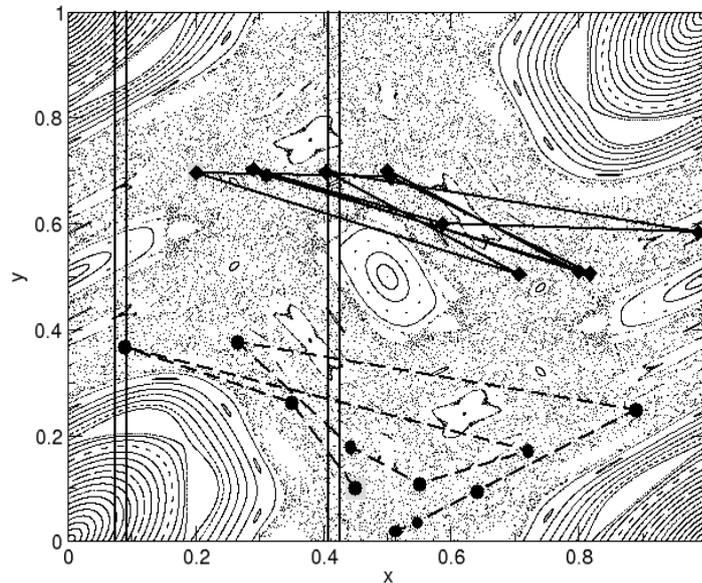


Figura 5.22: Retrato de fases do mapa inverso com as dez primeiras iterações a partir dos pontos de coleta da série temporal: $(0,45, 0,1)$ e $(0,7, 0,2)$. Quando a trajetória está dentro das faixas verticais temos um retorno da série temporal ao intervalo $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$

Na figura 5.23 mostramos como uma única trajetória iniciada no mar estocástico percorre todo o mar estocástico, sendo possível divisar inclusive cadeias de ilhas de quarta geração. Notamos ainda que as regiões próximas às cadeias de ilhas apresentam um maior número de pontos (mais escuro), mostrando que a trajetória gasta um tempo muito grande próxima às ilhas (aprisionada).

Uma pergunta natural que pode ser feita é: onde está a trajetória no espaço de fases quando ocorre um tempo de retorno na cauda da DTR? A resposta é apresentada através da figura 5.24. Os parâmetros utilizados nesta figura são os mesmos da figura 5.15 onde calculamos a DTR. Esta figura nos mostra que retornos de tamanho $T > 1000$ estão claramente na região de lei de potência. Na figura 5.24 notamos que:

- Em todos eventos apresentados (que foram escolhidos de forma arbitrária) com tempo de retorno $T > 1000$ a trajetória concentra-se em torno de ilhas.
- Eventos com um tempo de retorno similar podem estar associados a aprisionamentos em diferentes estruturas de ilhas.
- Quanto maior o tempo de retorno em mais detalhe a trajetória define as estruturas aprisionadoras, coerentemente com a imagem de que a trajetória penetra mais profundamente nas estruturas aprisionadoras.

consideração da bacia de atração de cada uma das faixas é similar à feita no que se refere à bacia de atração de dois buracos em um sistema Hamiltoniano e foi discutida em [Sanjuán et al., 2003]. Nesses artigos observa-se que essas bacias de atração são bastante complexas e possuem uma fronteira fractal.

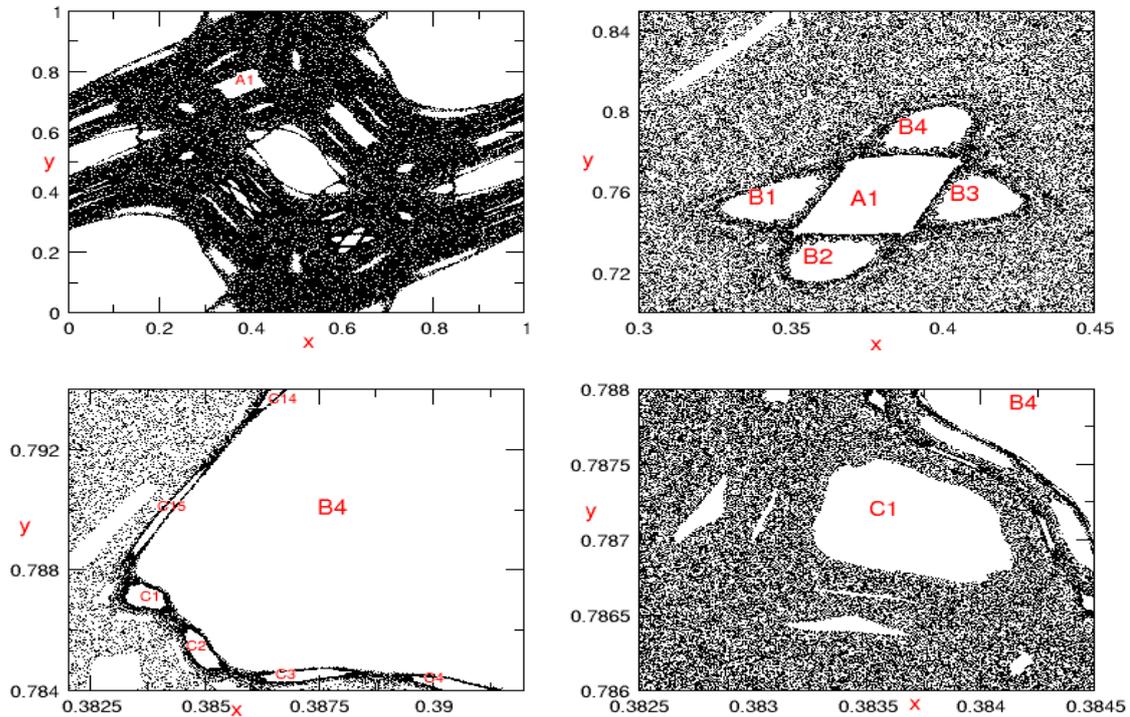


Figura 5.23: Uma única trajetória do mapa padrão inverso (duplo mod (1)) com $K = 0, 2$ e $R=0$ iteradas um grande número de vezes a partir do ponto $x = 0,45, y = 0,1$. Sucessivas ampliações das ilhas são realizadas.

5.4.3 Múltiplas caudas

Já na primeira distribuição de TR do contaminante, apresentada na figura 5.15, havíamos notado o surgimento de duas caudas de lei de potência paralelas. Na figura 5.20 notamos que este fenômeno é típico e pode tornar-se bastante complexo. O ponto interessante deste fenômeno é que as múltiplas caudas de lei de potência aparecem para uma mesma região temporal, ou seja, não se trata de multi-escala.

Para ilustrar mais precisamente o fenômeno, retornamos ao caso da distribuição da figura 5.15 e dividimos os pontos da distribuição de TR em dois conjuntos distintos: \bullet se T múltiplo de 3 e \circ caso contrário. Notamos assim que, para todos os tempos, a probabilidade de um tempo de retorno múltiplo de 3 é maior. Este tipo de fenômeno exige que ao menos alguns eventos sejam ordenados desde o início até o fim pois somente assim é possível saber que um tempo de retorno $T = 1671$ (múltiplo de 3) é mais provável de ocorrer do que um retorno de tempo $T = 1672$.

De forma análoga ao que realizamos anteriormente vamos explorar a localização das trajetórias no espaço de fases. Na figura 5.24 inferior apresentamos uma ampliação em torno da órbita de período 3 e notamos que a faixa de retorno corta a ilha central próxima a seus pontos hiperbólicos. Uma vez que estes pontos são instáveis, a trajetória em geral pode ficar um longo tempo sem se aproximar da variedade estável e conseqüentemente sem se aproximar deste ponto. Este é o efeito que faz com que, na figura 5.24, notemos que tempos de retorno longos estejam associados a aprisionamentos nas ilhas de período 1 e 3, mas não na de período 2.

Estamos interessados agora somente nas trajetórias aprisionadas na estrutura de período 3 destacada na figura 5.24. Uma órbita deste tipo pode cruzar a faixa de retorno central *sem*

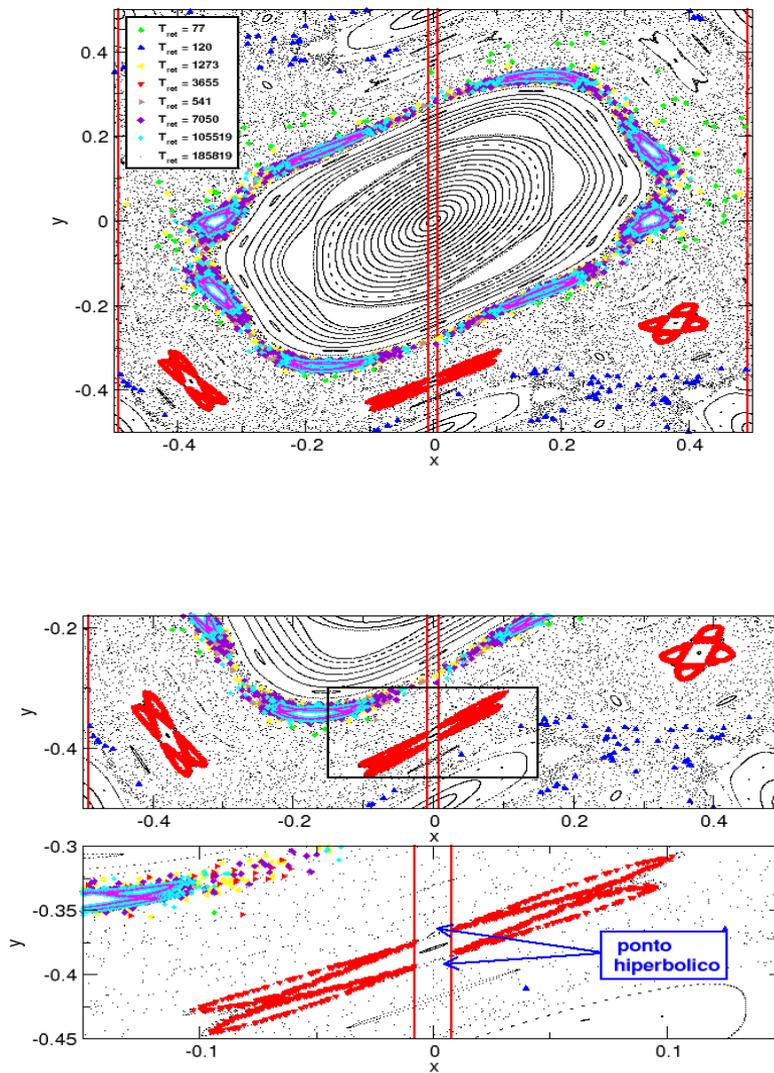


Figura 5.24: [Colorida] Retrato de fases do mapa padrão inverso com $K = 0,2$ e $R = 0$ apresentando as faixas de retorno associadas a um intervalo $X_c = 0, \delta = 0,05$. Os fragmentos de trajetória coloridos representam exemplos de trajetória cujo tempo de retorno foi igual ao valor T_{ret} da legenda. Note que apresentamos $x, y \in [-1, 1]$ que é equivalente ao caso $x, y \in [-0,5, 0,5]$. Na parte inferior duas ampliações da figura superior que mostram em detalhe o aprisionamento na estrutura de período 3.

deixar o aprisionamento. Caso este retorno ocorra duas vezes em um mesmo aprisionamento teremos um evento (retorno) de uma trajetória que permaneceu todo o tempo aprisionada. Neste caso é fácil perceber que a trajetória deve estar sempre na ilha central quando ocorrer um retorno. Isto só pode ocorrer a cada 3 iterações do mapa. Note ainda que todas as 4 ilhas da fronteira da ilha principal fazem fronteira com a faixa de retorno, fazendo com que todas as órbitas de período 3 (que alternam entre essas ilhas) também permitam retornos. Uma vez que a ocorrência deste tipo de retorno explica uma maior probabilidade da ocorrência de eventos de período 3 propomos de forma geral que:

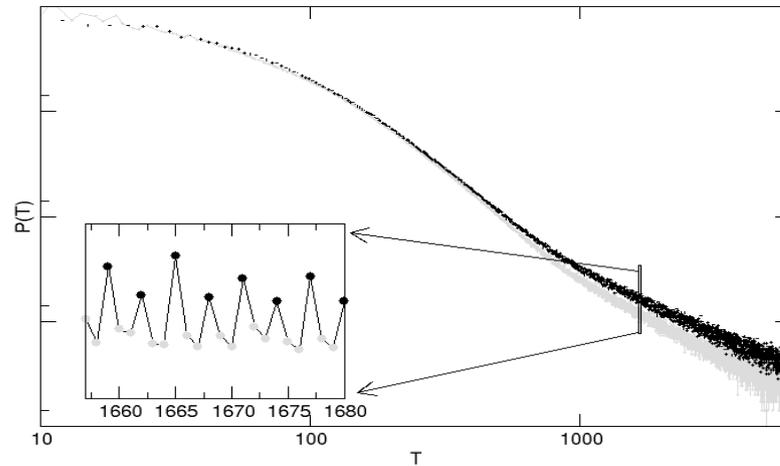


Figura 5.25: Distribuição de tempo de retorno da série de contaminante [$K = 0,2, R = 0$] (o mesmo da figura 5.15). Em preto retornos em tempos múltiplos de 3.

O surgimento de múltiplas caudas de lei de potência na distribuição de TR no tempo T é provocado por trajetórias que entram nas faixas de retorno ainda que estejam aprisionadas nas estruturas de ilhas. Ou seja, estão aprisionadas em t , quando ocorre um retorno, e permanecem aprisionadas em $t + T$, quando volta a ocorrer um retorno.

Vamos analisar em mais detalhes o caso de $K = 0,4, R = 0$ que foi ilustrado tanto no item 3.3.3 como na figura 5.20. Duas ampliações desta última figura são apresentadas abaixo (Fig. 5.26). No caso da curva superior notamos que a periodicidade nas múltiplas caudas é 2. Na parte superior da figura 5.27 apresentamos um retrato de fases para os parâmetros em questão e as faixas de retorno associadas ao intervalo utilizado $X_c = 0, \delta = 0,05$. A trajetória destacada nesta figura representa uma trajetória cujo tempo de retorno é $T = 1241$ que, conforme a figura 5.26, está na região de tempo de retorno onde há múltiplas caudas⁶. Notamos que a faixa de retorno corta a cadeia de ilhas próximo ao seu ponto hiperbólico em dois lugares distintos. Assim, apesar da ilha ser de período 4 a periodicidade que observamos será de período 2: os eventos de trajetória aprisionadas ocorrem sempre em tempos pares. São estes os eventos que constituem o ramo superior da cauda de lei de potência. Em geral também podemos pensar o fenômeno de caudas múltiplas como uma oscilação na cauda de lei de potência onde o período será igual ao período da ilha aprisionadora de maior nível.

Até o momento exploramos o caso em que a região de retorno escolhida era definida por $X_c = 0, \delta = 0,05$, ou seja, $I = [-0,05, 0,05]$. Associado a esse intervalo estão faixas de retorno no espaço de fases centradas em $x = 0$ e $x = 0,5$. Graças à simetria do mapa padrão estas faixas cortam as estruturas de período ímpar exatamente em seu ponto hiperbólico. Poderíamos desconfiar que este fenômeno é particular para esta região de retorno. Para verificar se este era o caso escolhemos os valores $X_c = 0,95, \delta = 0,015$ de maneira que uma das faixas corte uma

⁶Note que nem todos os eventos desta região são de trajetórias que permanecem todo o tempo aprisionada. Este efeito é complementar aos eventos “usuais” onde a trajetória é aprisionada e depois foge para o mar estocástico

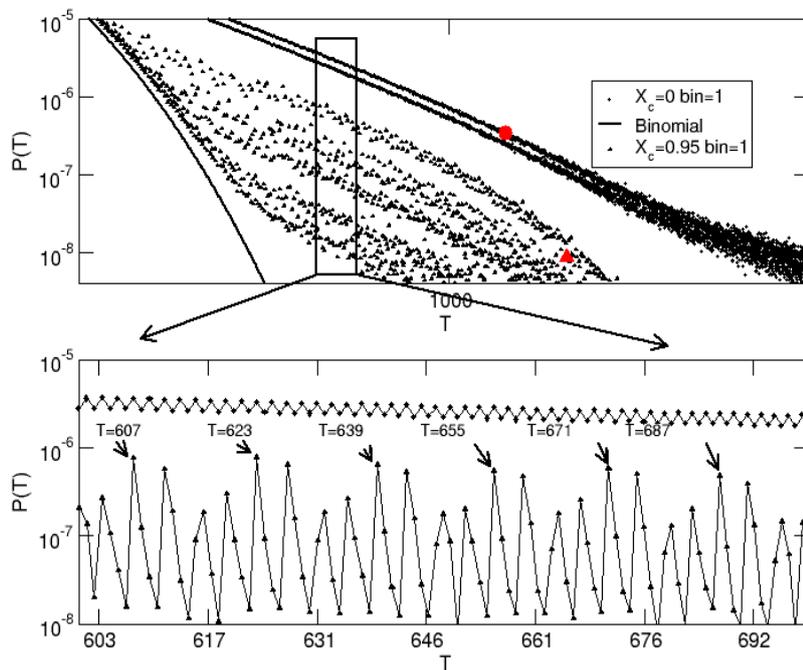


Figura 5.26: Ampliação da figura 5.20 na região de múltiplas caudas.

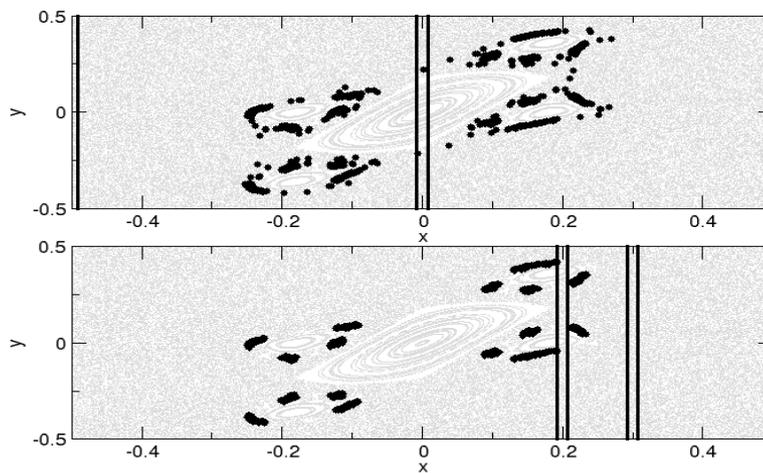


Figura 5.27: Retrato de fases do mapa padrão com $K = 0,4, R = 0$ com trajetórias responsáveis pelas múltiplas caudas na distribuição de TR da figura 5.26. Gráfico superior $X_c = 0, \delta = 0,05$ e trajetória com $T = 1241$. Gráfico inferior $X_c = 0,95, \delta = 0,015$ e trajetória com $T = 1571$

das 4 ilhas aprisionadoras (veja a parte inferior da figura 5.27). No entanto, como já estava claro na figura 5.20 em que tomamos este mesmo intervalo, tanto a cauda de lei de potência como sua

multiplicidade permaneceram evidente ainda que a cauda de lei de potência fique muito menos visível e as caudas múltiplas bem mais complexas.

A distribuição de tempo de retorno para este intervalo é explorada também na figura 5.26 onde fica claro que a situação aparentemente confusa na cauda de lei de potência esconde uma oscilação razoavelmente constante de período 16. Na figura 5.27 inferior apresentamos também uma trajetória que possui um tempo de retorno $T = 1571$ na região de múltiplas caudas. Notamos que esta trajetória penetrou muito mais na estrutura aprisionadora do que aquela retratada acima, ainda que seu TR não seja significativamente maior. Isto se deve ao fato da trajetória precisar de mais tempo para poder retornar às faixas sem deixar o aprisionamento. Percebemos ainda que esta trajetória define claramente uma órbita de período 16, mesmo período da oscilação da cauda!

Ao tentarmos anular o efeito de aprisionamento de uma determinada estrutura, fazendo com que uma das faixas de retorno cortasse esta estrutura, conseguimos somente que o primeiro nível de aprisionamento tivesse seu efeito minimizado (o que explica o surgimento posterior da cauda de lei de potência em comparação com o caso do intervalo usual $X_c = 0, \delta = 0,05$). A estrutura dominante passou a ser então a cadeia de quatro ilhas que circunda cada uma das quatro ilhas aprisionadoras. Podemos imaginar que sempre que tivermos um espaço de fases repleto de estruturas aprisionadoras o fenômeno de múltiplas caudas irá surgir.

5.5 Considerações finais

Discutimos aqui os resultados obtidos neste capítulo e procuramos estabelecer relações para a análise de séries temporais nos casos mais gerais.

5.5.1 Comparação entre as distribuições de TR

Apresentamos brevemente uma análise da utilização da distribuição de tempo de retorno (DTR) em séries temporais comparada à idéia original de Poincaré de cálculo do tempo de retorno no espaço de fases.

A interpretação física desses dois tipos de retorno é bastante distinta. Um retorno no espaço de fases significa que o sistema se encontra em uma configuração aproximadamente igual, ou seja, em um valor similar para *qualquer* observável. No caso da série temporal, um retorno significa simplesmente a repetição de um único observável sendo que o sistema pode estar em uma configuração completamente distinta da que se encontrava no caso do retorno anterior. Apesar dessa diferença na interpretação do retorno, os procedimentos e resultados estatísticos que utilizamos nos dois casos são praticamente idênticos, exceção feita ao cálculo da dimensão fractal do intervalo de retorno (conforme discutidos nas seções 2.1.3 e 2.2.2). Estatisticamente, a análise das flutuações da série utilizando distribuição de tempo de retorno é útil no estudo de suas intermitências e flutuações irregulares, que fazem com que uma estacionariedade na série temporal seja obtida somente para tempos longos de observação.

Uma forma comparativa adequada dos dois casos é imaginar que a região de retorno no espaço de fases refere-se a uma hiperesfera, no caso tradicional, e em um conjunto de regiões muitas vezes disjuntas, no caso de séries temporais. A comparação entre essas duas distribuições de tempo de retorno foi feita em detalhe para o caso do mapa padrão, um sistema Hamiltoniano bi-dimensional. Nesse caso notamos que a distribuição de tempo de retorno depende sensivelmente do volume das estruturas aprisionadoras.

Vimos que no caso das ilhas ocuparem um volume considerável do espaço de fases as regiões de retorno sempre cruzarão uma dessas estruturas. Nesses casos teremos uma DTR muito sensível à posição do intervalo de retorno X_c e com regimes de lei de potência muito distintos do caso

do tempo de retorno no espaço de fases. Podemos imaginar ainda que, sempre que tivermos um espaço de fases repleto de estruturas aprisionadoras, o fenômeno de múltiplas caudas irá surgir. Ressaltamos que este fenômeno só é visível se adotarmos um valor de $bin = 1$ e modifica sensivelmente o valor do expoente γ cauda de lei de potência quando utilizamos um valor grande de bin .

Quando o número e volume de ilhas no espaço de fases se torna progressivamente menor, ainda que seu efeito seja significativo para o cálculo da DTR ou do transporte no sistema, poderemos estabelecer uma analogia mais forte entre as DTR obtidas da série temporal e no espaço de fases. Na figura 5.28 calculamos a distribuição de tempo de retorno no espaço de fases (de forma análoga ao realizado nos itens 3.3.3 e 4.2.4) e na série temporal. Para este parâmetro de controle temos uma estrutura aprisionadora (o modo acelerador) de volume pequeno no espaço de fases. Os intervalos de retorno foram escolhidos afim de que possuíssem a mesma medida, o que foi verificado a partir do cálculo do tempo médio de retorno que resultou em $\langle T \rangle = 31.4$ e $\langle T \rangle = 31.8$. Notamos que as duas distribuições são equivalentes.

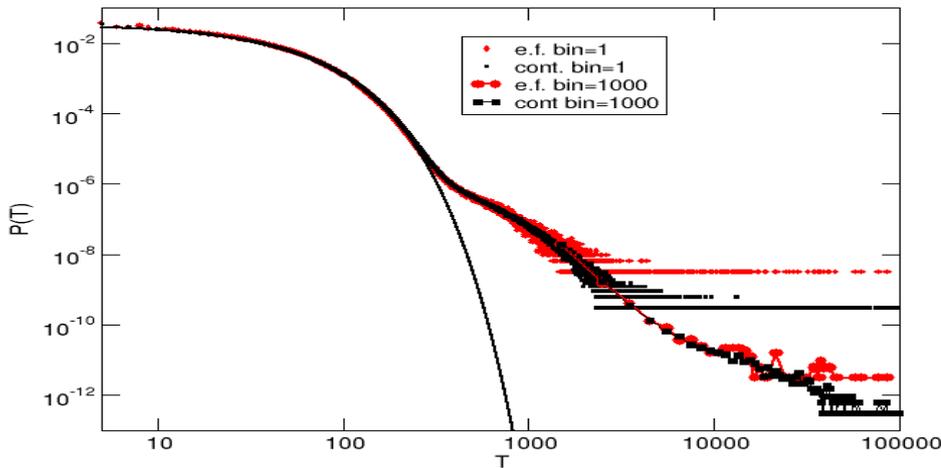


Figura 5.28: Comparação entre a distribuição de TR obtida no espaço de fases ($X_c = (0, 45, 0, 1)$ e $\delta = 0, 1$) e obtida através da série temporal de contaminante ($X_c = 0, \delta = 0, 05$). A distribuição binomial foi calculada com $\mu = \frac{1}{31.6} = 0, 0316, K = 1, 1$ e $R = 0$.

A equivalência entre as distribuições de TR no espaço de fases e em séries temporais ocorre graças ao fato da região de retorno no espaço de fases não cruzar nenhuma estrutura aprisionadora. No caso da distribuição de contaminante temos duas faixas no espaço de fases e certamente muitos retornos acontecem saindo de uma das faixas e retornando à faixa distinta. Esta equivalência remete-nos a uma observação importante, qual seja, a de que a DTR é determinada pela probabilidade da trajetória atingir uma região do espaço de fases. A informação importante sobre a região é a sua medida sendo que seu formato (hiperesfera, faixas, regiões disjuntas) de retorno é, em muitos casos, irrelevante. É importante ressaltar que o caso aqui explorado abordou o caso mais simples, isto é, a passagem de um sistema bidimensional para uma série temporal. No caso de series obtidas em espaços de fases de dimensão muito maior (como no caso do plasma) outros efeitos podem surgir.

5.5.2 Reinterpretação dos resultados

Diante das análises propostas na seção 5.4 podemos reinterpretar os resultados obtidos em 5.2 e 5.3. A dependência da distribuição de tempo de retorno com X_c mostrou-se crucial e vemos também que a variação de δ reflete-se em um aumento na espessura das faixas de retorno no espaço de fases. Vimos ainda que o ponto de coleta da série temporal nada mais é do que a condição inicial a partir da qual o mapa padrão inverso será iterado.

Analisamos agora o espectro calculado na figura 5.6 para uma série temporal de contaminante utilizando $K = 0, 2, R = 0$ tendo em vista o espaço de fases do mapa padrão para esses parâmetros (figura 5.24). É evidente que os picos dos espectros (como por exemplo para as frequências 0,125, 0,25, 0,333) estão associados à aprisionamentos em ilhas de período 8 (cadeia que envolve a ilha maior), 4 e 3 respectivamente. São precisamente essas as maiores cadeias no espaço de fases e que conseqüentemente provocam maior efeito sobre a série temporal. A dependência do espectro com o tamanho da série passa então a ser muito importante pois a presença de um aprisionamento em uma determinada cadeia de ilhas no intervalo da série que estamos analisando vai fazer com que surja um pico bem assentado no espectro.

Capítulo 6

Análise no plasma

Nos voltamos para o caso do plasma confinado magnéticamente. Discutimos inicialmente o domínio de validade e as limitações do modelo estudado no capítulo 5 para o Tokamak, em comparação com os sistemas presentes na literatura. Passamos então à análise de séries temporais obtidas na borda de Tokamaks: TextUp e TCABR. Descrevemos as principais características das séries experimentais que serão analisadas e calculamos então a função densidade de probabilidade e a distribuição de tempo de retorno. Notamos que neste caso a DTR é interpretada de forma mais natural quando comparada com a função de autocorrelação.

6.1 Validade e limitações do modelo para o Tokamak

6.1.1 Mapa padrão com fase aleatória

A dedução do mapa padrão com fase aleatória (Eq. (4.9)) foi feita considerando o modelo proposto originalmente em [Városi et al., 1991] para a hidrodinâmica com a pretensão de utilizá-lo na descrição do comportamento do plasma confinado magnéticamente em Tokamaks¹. Pretendemos justificar aqui esse procedimento bem como analisar as limitações do modelo.

São grandes as semelhanças da turbulência em modelos hidrodinâmicos, estudo baseado na equação de Navier-Stokes, e na turbulência do plasma, baseado na teoria MHD (magneto-hidrodinâmica). Nas referências [Biskamp et al., 1994, Biskamp et al., 1990] modelos mais elaborados para a turbulência no plasma são propostos baseados em modelos para a turbulência na hidrodinâmica, sendo que os resultados apontam para diversas semelhanças entre os dois casos.

Outra forma de abordagem para o nosso modelo é o fato das linhas de campo magnético na borda do plasma serem freqüentemente descritas por mapeamentos Hamiltonianos caóticos. As referências [Balescu et al., , Horton et al., 1998, Martin e Taylor, 1984] nos fornecem um embasamento para avaliar os domínios e limites de validade do mapa padrão como modelo para o plasma confinado em Tokamaks.

A associação do mapa às coordenadas do Tokamak se dá a partir de um seção de Poincaré (plano preto na figura 6.1A) do torus, conforme ilustrado na figura 6.1. A variável x do mapa (Eq. (4.9)) está associada ao ângulo (poloidal) e a variável y está associada à ação (raio). Uma vez realizada a seção transversal do toroide associamos o mapa à dinâmica das linhas de campo magnético que perfuram esta superfície. Ou seja, uma linha de campo que atravessa a seção de Poincaré em determinado sentido equivale a um ponto de nosso mapa. Dessa forma a dinâmica dos pontos reflete as propriedades da dinâmica das linhas de campo

¹Na seção 1.1.3 discutimos brevemente as motivações da utilização deste tipo de máquina.

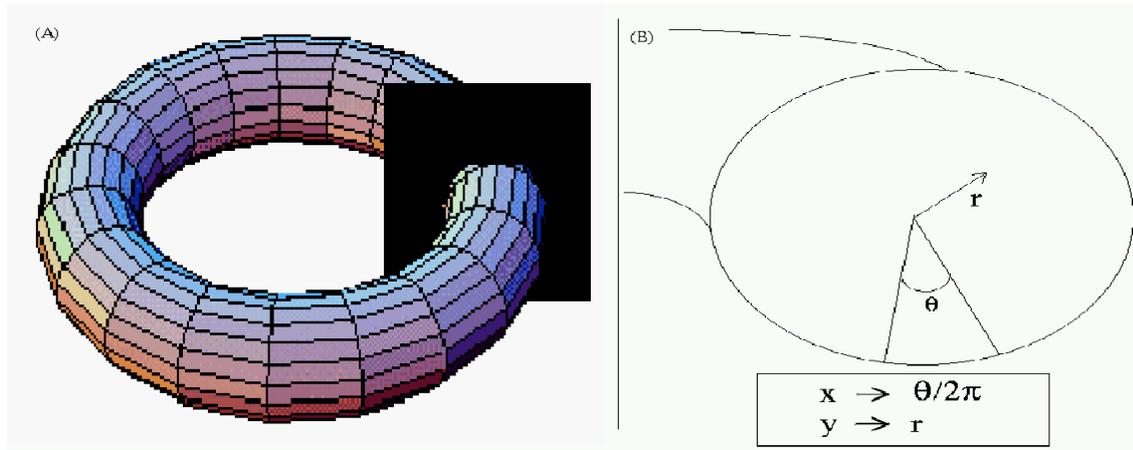


Figura 6.1: [A] Seção de Poincaré de um toroide e [B] definição das coordenadas do sistema.

magnético. Convém ressaltar que estamos interessados na dinâmica na borda do Tokamak pois esta região, além de permitir uma investigação experimental direta, possui um papel importante no confinamento [Wootton et al., 1990].

Na situação de equilíbrio somente as bobinas externas do Tokamak são consideradas o que faz com que a Hamiltoniana associada às linhas de campo magnético do sistema seja integrável e as linhas toroidais se encontrem em superfícies magnéticas fechadas. Pequenas perturbações desta configuração tornam o sistema quase-integrável, onde, a exemplo do mapa padrão, podemos aplicar métodos perturbativos da teoria KAM. As perturbações podem ser de natureza interna ao plasma (corrente de plasma) ou externas a partir da introdução de dispositivos que objetivem o aumento do confinamento (limitador ergódico, hélices ressonantes) [Caldas et al., 2002].

O artigo [Martin e Taylor, 1984] é um bom exemplo da derivação de um mapeamento para descrever as linhas de campo magnético no Tokamak. Particularmente ele trata do caso onde é introduzido um limitador ergódico, isto é, segmentos de corrente toroidal em torno do Tokamak que podem entrar em ressonância com o campo de equilíbrio e, a medida que aumentamos esta corrente, provoca sucessivamente na borda do plasma: (i) rompimentos nas superfícies fechadas do fluxo, (ii) ilhas entre as superfícies do fluxo e (iii) regiões caóticas. Apesar desta região caótica provocar um aumento no coeficiente de difusão ela auxilia o confinamento pois evita que impurezas (partículas massivas) provenientes da parede do Tokamak penetrem até o centro da coluna de plasma e absorvam energia de sua região mais quente.

A partir de expressões simplificadas dos campos magnéticos e combinando o efeito do limitador ergódico com o do fluxo chega-se a seguinte expressão para x (ângulo poloidal normalizado) e y (distância da borda) das linhas do campo magnético

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - pe^{-y_n} \cos(x_n) + sy_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + \log[\cos(x_n - pe^{-y_n} \cos(x_n))] - \log(\cos(x_n)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde p e q são parâmetros de controle associados, respectivamente, à intensidade da corrente no limitador e à intensidade do cisalhamento (*shear*) (gradiente radial da transformada rotacional das superfícies de equilíbrio). Considerando fraco o campo devido ao limitador em comparação com o campo de equilíbrio, obtemos o mapa padrão (equação 4.4), base de nosso modelo, como aproximação do mapa (6.1).²

²O mapa padrão é também obtido como aproximação local para a dinâmica de um sistema Hamiltoniano não linear genérico próximo a um ponto fixo.

Outro artigo que propõe a utilização de um mapeamento para representar a dinâmica das linhas de campo magnético no Tokamak é [Balescu et al.,], que aponta algumas limitações do mapa padrão e defende assim a utilização de seu TOKAMAP. Os argumentos favoráveis à utilização de um tal sistema dinâmico são essencialmente os mesmos: facilidade numérica e descrição das propriedades presentes no Tokamak de um caos incompleto.³ Os pontos considerados não atendidos pelo mapa padrão são:

- **Fator de segurança (q):** Em nosso sistema dinâmico Hamiltoniano consideramos o fator de segurança como sendo o inverso da frequência angular, que mede por sua vez a variação de H com a ação (I , ou nesse caso r): $w(r) = \frac{1}{q(r)} = \frac{\partial H_0}{\partial r}$. No caso do Tokamak o fator de segurança é, na maioria dos casos, uma função monotonicamente crescente⁴ de r . Já no mapa padrão $q(r) = \frac{1}{r}$ é inversamente proporcional, ou seja, decrescente.
- **Valor negativo de r:** No mapa padrão partículas com condições iniciais para $r \geq 0$ podem adentrar a região negativa de r (y no mapa (4.9)), que não tem significado físico como ilustra a figura 6.1. Não há portanto um eixo polar único no mapa padrão.

Em geral podemos dizer que estamos interessados nas propriedades estatísticas e qualitativas fornecidas pelo mapa padrão e pelas suas estruturas, e não por uma descrição precisa das linhas de campo. Sua descrição é mais apropriada para uma faixa radial limitada, como por exemplo, a borda do plasma, que possui especial interesse em nosso caso uma vez que queremos observar o transporte de partículas nesta região. Nesse sentido o mapa padrão serve perfeitamente e ajuda-nos com sua simplicidade e fácil manipulação numérica. Devemos ressaltar ainda os trabalhos realizados em nosso grupo do IFUSP em cima de mapeamentos para as linhas de campo magnético do Tokamak com limitador ergódico [Caldas et al., 2002]. Em particular, outros mapas mais realista para a descrição do plasma são os mapas simpléticos desenvolvidos em [Ullmann e Caldas, 2000, da Silva et al., 2001].

Em nosso modelo, introduzimos ainda uma fase aleatória (quando $R \neq 0$) à dinâmica do mapa padrão. Este fenômeno pode ser interpretado não apenas como um ruído inerente ao sistema, mas também como parte do modelo que incorporaria efeitos de graus de liberdade não considerados. Podemos então observar a dependência dos resultados como função de dois parâmetros: o aleatório (R) e o não linear K .

Cabe ressaltar ainda que se estamos interessados no movimento dos íons do plasma é somente em primeira aproximação que as partículas seguem as linhas de campo magnético. Efeitos de inércia e interação das partículas entre si ou com impurezas ocorrem usualmente no plasma. Nesse sentido notamos que a utilização de um contaminante passivo consiste também em uma aproximação grosseira para a dinâmica no Tokamak.

6.1.2 Transporte e aprisionamento

As limitações para o cálculo quantitativo do regime de transporte de partículas no Tokamak a partir da análise do tempo de retorno em séries temporais foram enfatizadas em 4.3. Os dois principais motivos levantados foram que o tempo de retorno era calculado no espaço de fases e que as estruturas aprisionadoras não eram necessariamente balísticas, podendo possuir diferentes efeitos sobre o transporte.

³Essa denominação está associada aos sistemas caóticos Hamiltonianos que possuem regiões caóticas e periódicas além de uma infinidade de estruturas, cadeias de ilhas, cantori, etc.

⁴Para uma discussão sobre o caso em que esta condição não é satisfeita veja os comentários sobre os sistemas non-twist na seção 7.3.

No que se refere ao primeiro ponto, o capítulo 5 mostrou um exemplo de série temporal cujo TR apresenta informações similares ao obtido no espaço de fases. Ou seja, a DTR obtida na série temporal caracterizou o aprisionamento das trajetórias no espaço de fases.

Outras caracterizações desses aprisionamentos foram realizadas em [Zaslavsky et al., 2000] para uma série experimental da densidade do plasma confinado magneticamente, que passamos a discutir. Nesse artigo é enfatizado que a importância das ilhas magnéticas para o problema do confinamento vêm sendo reconhecido partir de medidas finas da temperatura eletrônica. Argumenta-se então que as fronteiras de algumas dessas ilhas provocarão aprisionamento, a exemplo do que foi discutido nos itens 3.3.3 e 4.3.1. Esses aprisionamentos, ainda que tenham efeitos diversos sobre o transporte, possivelmente o tornarão anômalo.

Como enfatizamos em 4.3.1 a quantificação do aprisionamento é feita em sistemas dinâmicos mais simples, pelo mesmo G. M. Zaslavsky, a partir do cálculo da DTR e a associação com os coeficientes (α, β) da equação de Fokker-Planck fracionária (4.23). A caracterização das propriedades temporais do aprisionamento e sua associação com o transporte anômalo é feita em [Zaslavsky et al., 2000] para séries de forma análoga ao discutido no item 4.3.1. No entanto, os coeficientes α, β não são obtidos a partir da DTR da série, mas utilizando uma estatística para os vãos (aprisionamentos) obtida a partir de uma integração da série temporal.

Do nosso ponto de vista as discussões realizadas em [Zaslavsky et al., 2000] são bastante elucidativas no que se refere a influência das ilhas magnéticas aprisionadoras no transporte e sua influência em séries temporais. Já a associação quantitativa com o regime de transporte baseia-se apenas em analogias com o caso obtido rigorosamente no espaço de fases (veja [Zaslavsky, 2002b]) e apresenta-se muito imprecisa.

6.1.3 Séries analisadas

Um último ponto que merece atenção refere-se às séries que analisaremos a seguir. Vimos que os modelos de sistemas Hamiltonianos utilizados na Física de plasma se propõe a descrever as linhas de campo magnético de um Tokamak com limitador ergódico. Nos dados que analisamos tomamos séries do potencial elétrico flutuante e da densidade em um Tokamak sem o limitador ergódico. Acreditamos que ainda assim a comparação se justifique pois, como ressaltamos anteriormente, as perturbações no campo magnético que o tornam não integrável podem vir da própria corrente de plasma, ou outra flutuação qualquer. O sistema apresenta então uma configuração típica de sistema quasi-integrável sem que o limitador ergódico represente a perturbação. Além disso, se assumirmos que as partículas seguem aproximadamente as linhas de campo magnético podemos esperar que as flutuações do campo magnético se manifestarão em flutuações das demais grandezas medidas.

6.2 Dados experimentais do TextUp

Iniciamos a análise de séries temporais experimentais a partir da análise dos dados obtidos no Tokamak TextUp analisados anteriormente em [Baptista et al., 2001a]. Os principais dados do Tokamak estão na tabela 6.2. A série temporal do potencial flutuante foram obtidas por uma sonda de Langmuir na borda do plasma ($r/b = 1,01$) que coletou dados durante $75ms$ a uma taxa de $2MHz$ (um ponto a cada $\tau_a = 0,5\mu s$). Este procedimento resultou em uma série temporal com $N_p = 1,5 \times 10^5$ pontos. Como notamos anteriormente os resultados da distribuição de tempo de retorno DTR dependem sensivelmente no número de pontos da série temporal. Assim sendo, tomamos sete disparos obtidos na mesma posição e que apresentavam a mesma função densidade de probabilidade (FDP), espectro e função de autocorrelação. Realizamos assim os cálculos para a soma desses 7 disparos que resultaram em $N_p = 1,05 \times 10^6$ pontos.

Raio maior	b	1,05m
Raio menor	R_0	0,27m
Corrente de Plasma	I_p	$\leq 200kA$
Campo magnético Toroidal	B_t	2.0 T
Densidade média típica	n_e	$2,5 \times 10^{19}m^{-3}$

Tabela 6.1: Principais parâmetros do TextUp.

Na figura 6.2 mostramos que a FDP das séries temporais é uma Gaussiana

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.2)$$

onde σ, \bar{x} são o desvio padrão e a média do conjunto x . Este resultado não é surpreendente uma vez que esta é a distribuição obtida como o resultado da soma de variáveis aleatórias distintas. As propriedades temporais características da série são apresentadas na figura 6.3.

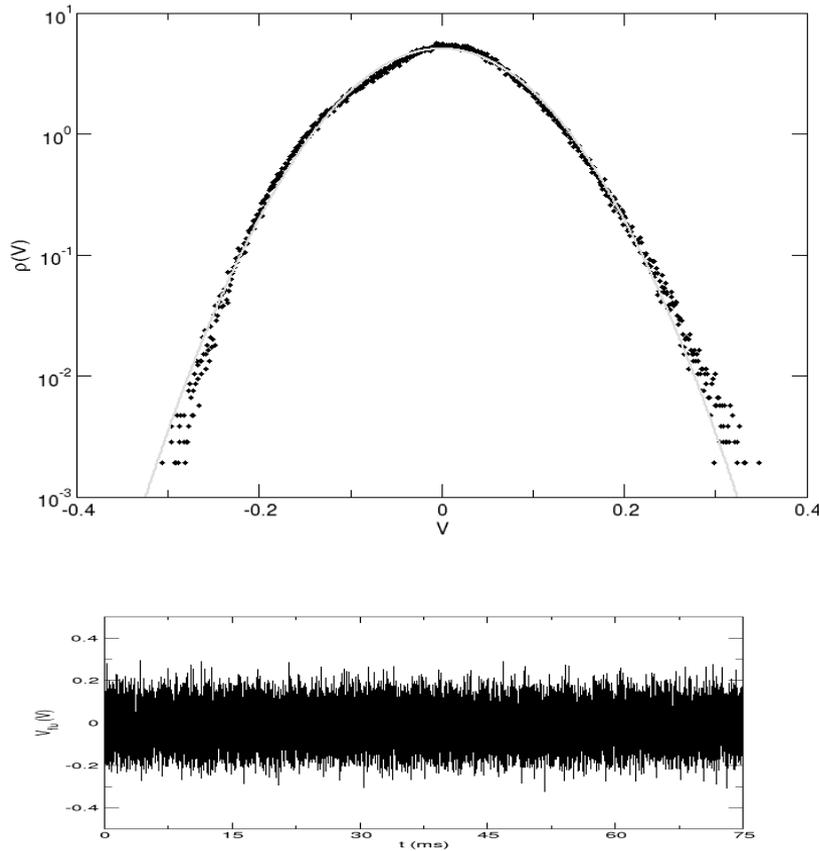


Figura 6.2: Acima, a função densidade de probabilidade para o conjunto de sete medidas do potencial flutuante no TextUp. A curva é a distribuição Gaussiana. Abaixo uma das séries temporais do potencial flutuante.

Procedemos então o cálculo da DTR nas séries temporais. A escolha da posição do intervalo de retorno X_c mostrou-se de forma geral irrelevante. Escolhemos assim um intervalo de

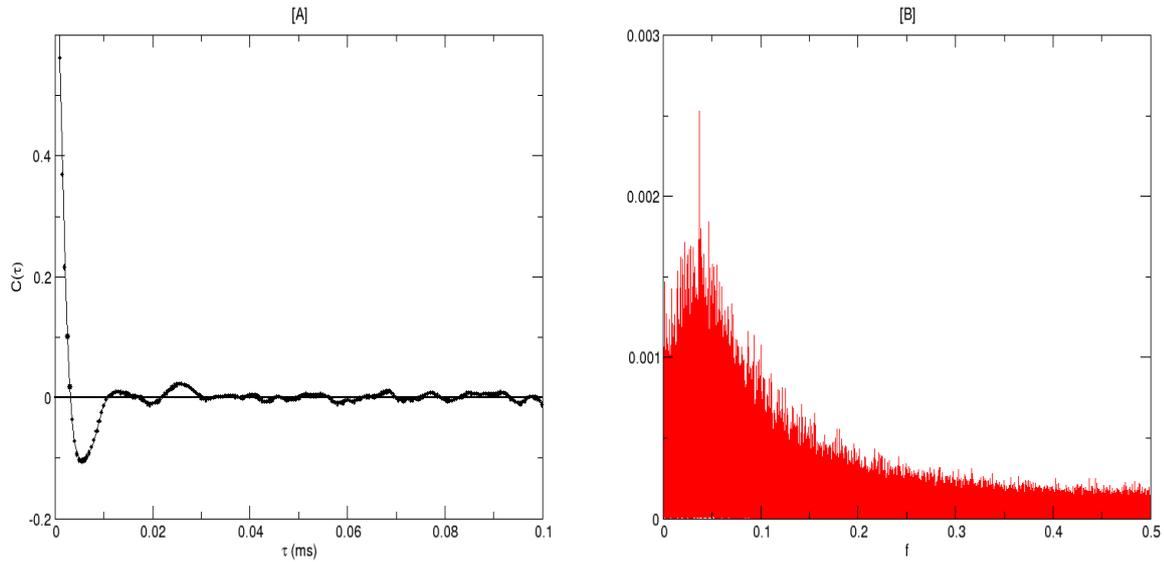


Figura 6.3: [A] Função de autocorrelação e [B] espectro de Fourier da série temporal do potencial flutuante.

retorno $I(X_c, \delta)$ cuja medida $\mu(I)$ permitisse uma boa visualização da DTR. Este valor pode ser obtido através da taxa de amostragem da série τ_s e do tempo médio de retorno $\langle T \rangle$ pelo lema de Kac, ou seja,

$$\mu(I) = \frac{\tau_s}{\langle T \rangle},$$

e oscilou em torno de 5%.

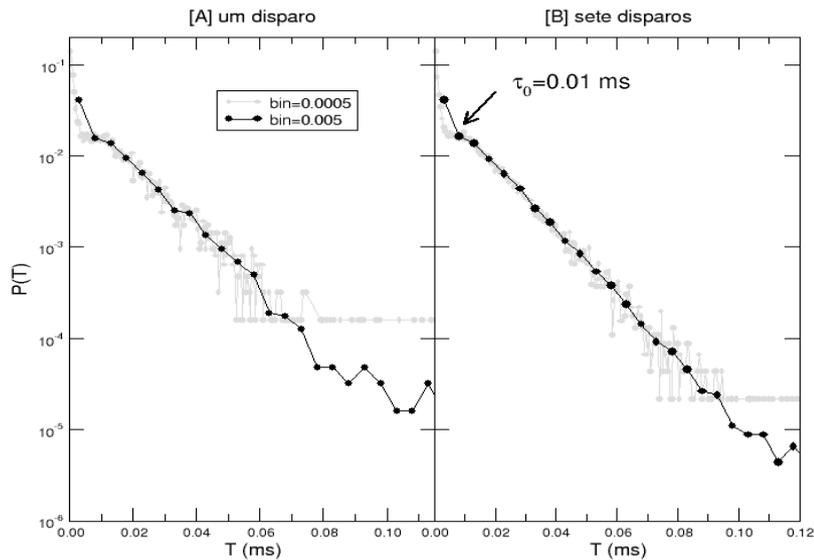


Figura 6.4: Distribuição de tempo de retorno ao intervalo $[X_c = -0, 1, \delta = 0, 01]$ para a série do potencial flutuante obtida no TextUp. [A] Os pontos em um único disparo foram utilizados $\langle T \rangle = 0,0115ms$; [B] O conjunto dos pontos dos sete disparos $\langle T \rangle = 0,01196ms$.

Notamos, a partir da comparação da figura 6.4 com a função de autocorrelação 6.3A, que a DTR apresenta um decaimento essencialmente exponencial a menos de uma oscilação para tempos curtos muito similar à oscilação da autocorrelação. Em particular, note que o valor indicado pela seta $\tau_0 = 0,01ms$ é bastante próximo ao valor que a função de autocorrelação se aproxima de zero. É curioso notar que este efeito, evidente na figura 6.4, não foi observado em [Baptista et al., 2001a] onde uma distribuição exclusivamente Poisson foi obtida para o mesmo conjunto de dados. A visualização do gráfico com eixos linear nesse artigo (ao invés de linear X log, aqui utilizado) tornam ainda mais visíveis os efeitos da autocorrelação. Isto se deve, possivelmente, à utilização de um intervalo de retorno I e um valor do bin na DTR muito grandes, que fizeram com que este resultado fosse encoberto.

6.3 Dados experimentais do TCABR

Passamos agora a analisar dados obtidos no Tokamak Chauffage Alfvén Bresilién (TCABR), que se encontra em nosso instituto. Os parâmetros típicos de operação estão na tabela 6.3.

Raio maior	R_0	0,61m
Raio menor	b	0,18m
Corrente de Plasma	I_p	$\leq 120kA$
Campo magnético Toroidal	B_t	1,1 T
Densidade média típica	n_e	$(1 - 3)10^{19}m^{-3}$
Temperatura iônica no centro	T_{ion}	200 eV
Temperatura eletrônica típica da borda	T_e	20 eV

Tabela 6.2: Principais parâmetros de operação do TCABR.

6.3.1 Descrição geral dos dados

A técnica utilizada no TCABR para explorar a dinâmica na borda consiste em introduzir um sistema de sondas múltiplas de Langmuir [Ferreira et al., 2000] até uma posição $r/b = 0,9$. Este sistema possui um conjunto de sondas que coletam informações a uma taxa fixa no tempo, sendo que duas delas medem as flutuações do potencial elétrico V_{flu} , e uma delas mede a corrente de saturação iônica I_{si} . Esta corrente é proporcional à densidade η de íons $I_{si} \propto \eta\sqrt{T_e}$. A aquisição dos dados é feita a uma frequência de amostragem $f_s = 1MHz$ o que faz com que tenhamos séries experimentais com pontos a cada $1\mu s$.

Na figura 6.5 estão as três séries temporais de interesse para um particular disparo do Tokamak em Fevereiro de 2002. O plasma é criado no Tokamak a partir de descargas (disparo) que duram aproximadamente $100ms$ no TCABR. A sonda adquire dados durante $50ms$ a partir do instante $t = 55ms$ após o início da contagem de tempo do disparo. Na figura 6.6 estão as principais informações sobre dois disparos de interesse. As figuras 6.5 e 6.6 ilustram os principais dados que analisamos para escolha das séries para as quais calculamos o tempo de retorno. Essa escolha considera dois aspectos: as condições de um disparo particular e a existência de disparos similares.

A primeira dessas condições é necessária para podermos supor que as flutuações medidas representam as flutuações características do sistema não sendo afetada por oscilações externas. Assim, escolhemos uma faixa de tempo de cada disparo onde os principais fatores do plasma permaneceram estáveis. Por exemplo, no caso ilustrado na figura 6.5, notamos que dentro da faixa em que as sondas estavam realizando medidas a corrente de plasma sofre uma queda

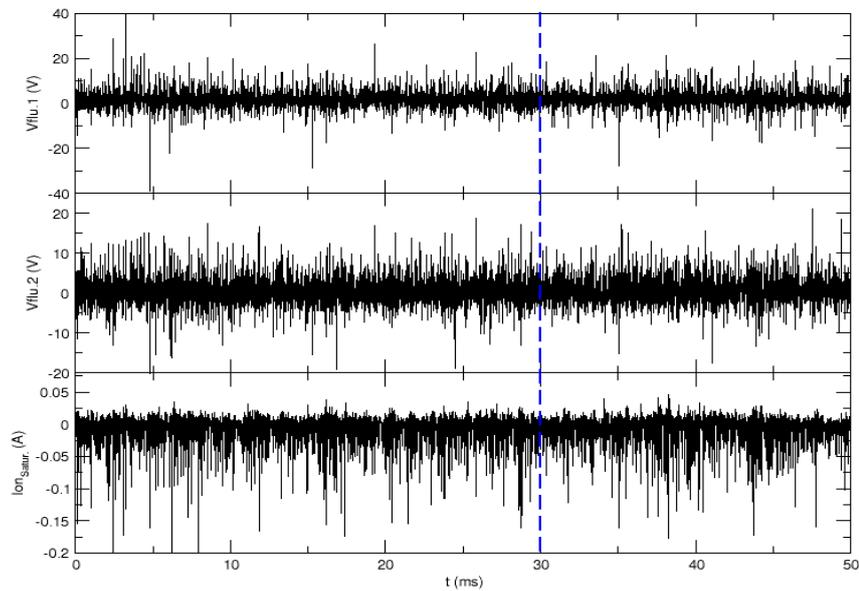


Figura 6.5: Séries temporais obtidas no TCABR por três sondas presentes no experimento. Os dois primeiros gráficos, de cima para baixo, representam o potencial flutuante ($Vflu$) em duas sondas enquanto o terceiro representa a corrente de saturação iônica (ion), proporcional a densidade, obtida em outra sonda. A linha pontilhada indica o limite onde a corrente de plasma manteve-se estável [Disparo 8046].

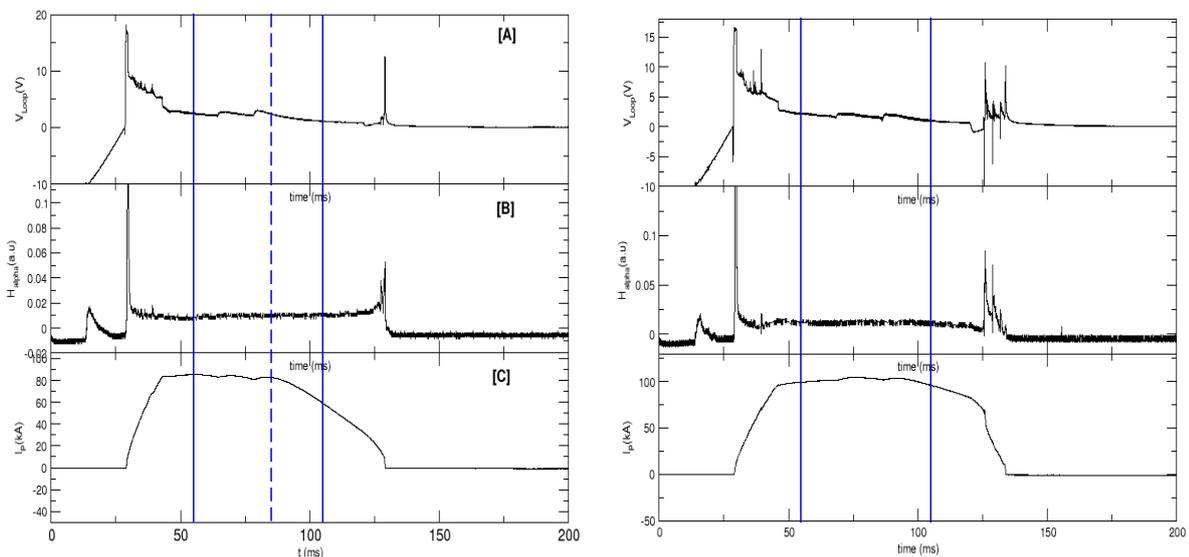


Figura 6.6: Na esquerda o diagnóstico do disparo 8046 em função do tempo, pulso típico do primeiro conjunto de dados analisado: [A] Tensão de enlace; [B] emissão em H_α e [C] a corrente do plasma. As faixas contínuas representam a faixa de tempo em que a sonda coletou dados. A faixa pontilhada indica o limite da região de corrente de plasma estacionária. Na parte da direita, o mesmo da esquerda para o pulso 9731, característico do segundo conjunto de dados.

acentuada. Neste caso foi necessário desprezar os últimos pontos da série. O critério utilizado para determinar as séries que satisfaziam este ponto foi o de que a corrente de plasma, a emissão em H_α e a tensão de enlace permanecessem aproximadamente constantes durante o tempo de aquisição das séries temporais. Observamos ainda qualitativamente cada uma das séries. A ocorrência de disrupturas e outras instabilidades seriam identificadas nessas medidas.

A segunda condição, de semelhança entre diferentes disparos, é necessária para melhorarmos a estatística de nossas distribuições. Ainda que usássemos toda a série obtida em um determinado disparo eles totalizariam 5×10^4 pontos. Vamos perceber que para uma melhor visualização da função densidade de probabilidade (FDP) e da distribuição de TR séries maiores são aconselháveis.

As condições que estabelecemos para que considerássemos que duas séries foram obtidas em condições idênticas, e que portanto poderiam ser somadas, foram mais rigorosas. Dentre os disparos que satisfizeram a primeira condição olhamos aqueles em que a sonda estava na mesma posição e que apresentavam as seguintes medidas semelhantes (diferiam em menos de 10%):

- 1 Corrente de Plasma.
- 2 Densidade.
- 3 Emissão em H_α .
- 4 Tensão de enlace.
- 5 Distribuição de pontos da série.
- 6 Função de autocorrelação.

Do banco de dados de disparos do TCABR conseguimos obter dois conjuntos de disparos em sequência que satisfizeram essas condições. Não foi possível obter um número considerável de disparos com ondas de Alfvén.

Conjunto 1, obtido em Fevereiro de 2002, consiste dos disparos 8030 a 8049 excluindo 8033, 8039 e 8041 totalizando $N_p = 5,1 \times 10^5$ pontos. Tomamos os pontos de cada disparo somente até o tempo $t = 30ms$ de coleta da série temporal (faixa pontilhada nas figuras 6.5 e 6.6). A digitalização dos dados impôs uma precisão nos dados da série de $0,152V$ na série do potencial elétrico e $0,0002A$ na corrente de ionização.

Conjunto 2, obtido em Outubro de 2002, consiste dos disparos 9731 a 9741 totalizando $N_p = 5,5 \times 10^5$. Uma vez que a corrente de plasma manteve-se estável durante todo o intervalo de coleta da série, pudemos usá-la por inteiro ($t = 50ms$). A digitalização dos dados impôs uma precisão nos dados de $0,179V$ na série do potencial elétrico e $0,0003A$ na corrente de saturação. No caso da corrente de saturação o aparato experimental não registrava valores superiores a $0,675A$ ou inferiores a $-0,675A$, o que provoca o truncamento observado na figura 6.13B.

A precisão dos dados (descrita acima) têm de ser levada em conta quando escolhemos o intervalo de retorno $I = [X_c - \delta, X_c + \delta]$. Na prática a série temporal não apresenta valores distribuídos continuamente, mas múltiplos desta precisão. Assim devemos garantir que a largura do intervalo de retorno 2δ e o tamanho do canal do histograma da FDP sejam maior que esta precisão.

Os resultados que apresentamos a seguir referem-se invariavelmente à soma das séries de potencial elétrico (de uma única sonda) ou de corrente de flutuação para cada um desses conjuntos de dados. É importante ressaltar que não estamos propondo que os resultados dos diferentes disparos sejam absolutamente equivalentes. Consideramos este procedimento de soma de diferentes disparos válido (e necessário) para as análises que realizamos a seguir.

6.3.2 Potencial flutuante

Tomamos inicialmente as séries da flutuação do potencial elétrico φ para cada um dos conjuntos de dados. Apresentamos a análise padrão para o cálculo da distribuição de tempo de retorno (DTR). A primeira informação relevante é a função densidade de probabilidade (FDP) pois é a partir dela que devemos escolher o intervalo de retorno I adequado para uma visualização da DTR. Os resultados para o potencial flutuante são apresentados na figura 6.7. Comparamos essas distribuições com a distribuição Gaussiana (6.2). Esta comparação é feita a partir de um ajuste numérico da distribuição (6.2) aos pontos em torno do pico. Notamos, no entanto, que as duas funções densidade de probabilidade (FDP) da figura 6.7, ao contrário dos dados do TextUp, divergem sensivelmente da Gaussiana ajustada. As caudas, no caso geral, não apresentam um decaimento do tipo lei de potência ou exponencial. Este resultado não é surpreendente uma vez que a dinâmica na borda do Tokamak é turbulenta. Apresentamos no apêndice C uma discussão mais detalhada dos modelos de turbulência que permitem descrever as FDPs observadas.

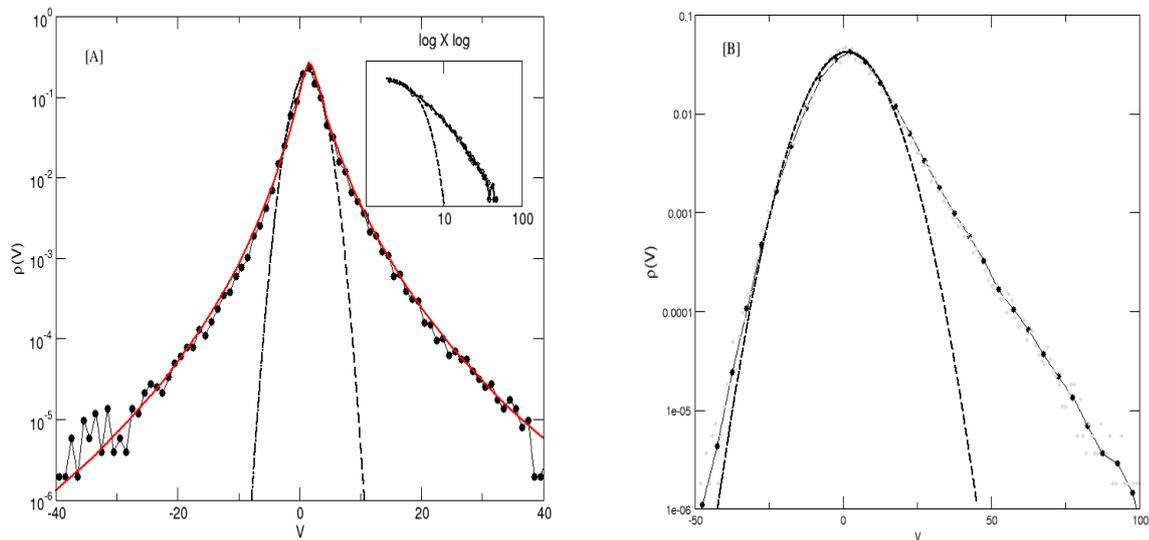


Figura 6.7: Função densidade de probabilidade das séries temporais da flutuação do potencial elétrico: [A] Conjunto 1, no detalhe graficamos a cauda da distribuição onde nota-se que o regime de decaimento não é do tipo lei de potência. [B] Conjunto 2. A curva tracejada é a Gaussiana ajustada para os pontos em torno do pico de cada um dos gráficos. A curva preta em [A] é o ajuste obtido pelo modelo log-normal no apêndice C.

O espectro de Fourier das séries temporais do potencial flutuante, assim como da corrente de ionização, obtidos para o TCABR, não diferem essencialmente do apresentado na figura 6.3 para o TextUp. De forma geral não notamos picos mas apenas um espectro largo com um decaimento para altas frequências. A relação de um espectro desse tipo com a DTR não é trivial e, como vimos no caso do TextUp, a comparação com as correlações presentes nas séries temporais parece mais adequada. Para tanto na figura 6.8 apresentamos a distribuição de autocorrelação (Eq. (5.9)).

As DTR foram calculadas para diferentes intervalos de retorno sem uma alteração qualitativa importante a menos do que discutimos no final deste item. O intervalo escolhido deve-se essencialmente ao valor da medida $\mu(I)$ ideal para visualização. A limitação na resolução dos pontos faz com que o valor de δ tenha que ser maior que sua precisão e que, portanto, o intervalo

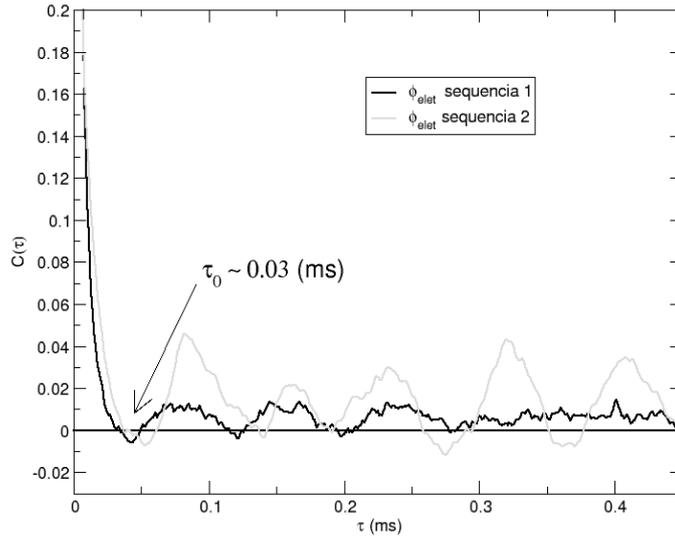


Figura 6.8: Função de autocorrelação (Eq. (5.9)) para as séries temporais do potencial flutuante obtidas no TCABR.

de retorno se encontre em regiões afastadas do pico da FDP.

A DTR do primeiro conjunto de dados indica a presença de dois regimes distintos. O primeiro, para tempos curtos, é muito mais lento que uma exponencial e parece se aproximar de uma distribuição do tipo lei de potência. Para tempos longos a DTR se assemelha a uma exponencial. É interessante notar que o tempo entre estes regimes é próximo ao valor do tempo que a auto-correlação aproxima-se de zero $\tau_0 = 0,03ms$, conforme indicado na figura 6.8. Podemos interpretar assim que, enquanto o sistema apresentava-se correlacionado a distribuição de tempo de retorno apresenta o primeiro regime de decaimento, enquanto que após a perda da correlação a DTR torna-se exponencial.

No caso do segundo conjunto de dados a DTR (figura 6.10) apresenta um comportamento similar. Analisando a função de autocorrelação desta série (figura 6.8) notamos que, ao contrário da série do potencial flutuante do primeiro conjunto que aproxima-se de zero e oscila muito pouco, existem grandes oscilações após a distribuição já ter decaído a zero. Esta flutuação da função de autocorrelação parece ser um indício da memória de longo alcance. Desta forma, e levando em conta os pontos discutidos no item 5.3.1 e em [Bunde et al., 2003b], teríamos uma exponencial esticada (Eq. (5.11)) como DTR. De fato, o formato da exponencial esticada se assemelha à forma global das DTR aqui discutidas, ainda que nesta distribuição não estejam presentes regimes distintos. Variando a posição e o tamanho do intervalo de retorno I foi possível observar DTR como a da figura 6.11, onde uma interpretação única para toda a distribuição pode ser feita através de uma exponencial esticada (linha azul) com $\beta = 0,43$ que se ajusta muito bem aos pontos (a menos de alguns poucos pontos iniciais). Ressaltamos, no entanto, que este coeficiente possui uma grande variação quando variamos o intervalo de retorno sendo difícil sua aplicação como coeficiente β_1 do decaimento da correlação. Na figura 6.12 analisamos um outro aspecto mencionado no item 5.3.1, isto é, a autocorrelação da sequência de retornos. Ainda que este resultado não seja consequência da DTR do tipo exponencial esticada (conforme discussão no item 5.3.1) vemos, pela concentração (clusterização) de TR longos e pela função de autocorrelação, que neste caso a série de retornos parece apresentar correlação de longo alcance.

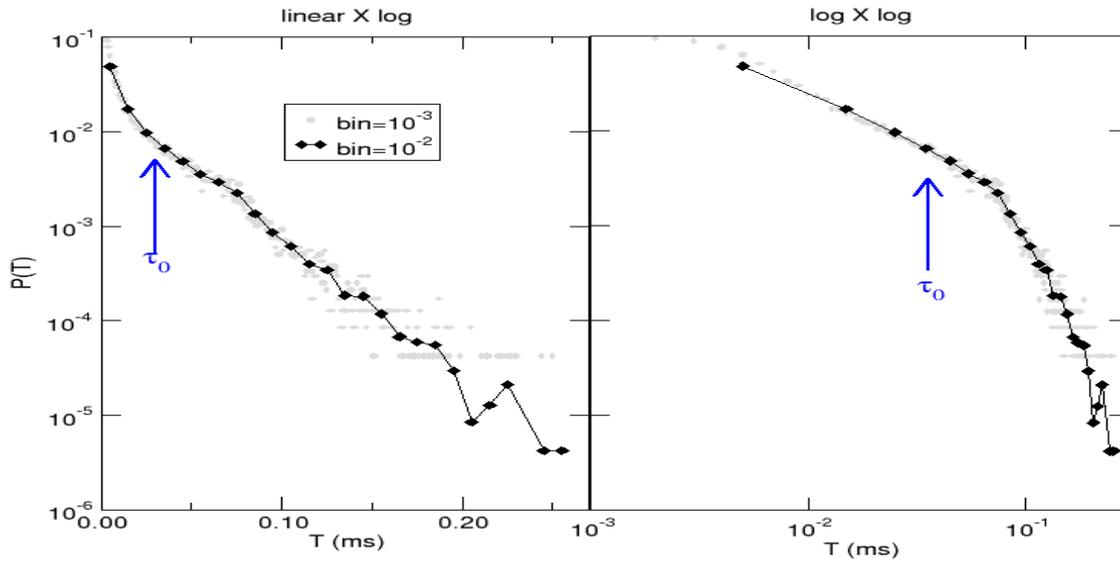


Figura 6.9: Distribuição de tempo de retorno para o potencial elétrico flutuante do conjunto 1. [$X_c = -0,05$, $\delta = 0,015$, $\langle T \rangle = 0,0459ms$]

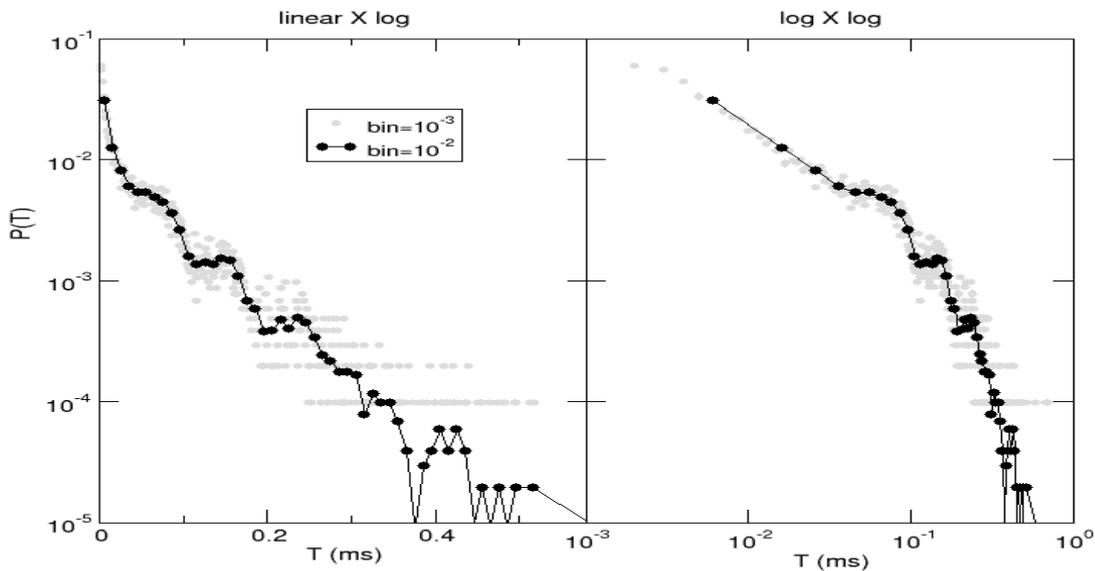


Figura 6.10: Distribuição de tempo de retorno para o potencial elétrico flutuante do conjunto 2. [$X_c = 25$, $\delta = 3$, $\langle T \rangle = 0,0535ms$].

É importante ressaltar que [Carras et al., 1998] também analisaram séries do potencial flutuante e da densidade na borda plasma obtendo expoentes de Hurst $H \approx 0.7$ que indicam a presença de auto-similaridade nas séries. Estes resultados sugerem a existência de memória de longo alcance, coerentemente com a nossa interpretação.

Das discussões realizadas torna-se clara a necessidade de uma investigação mais detalhada sobre a correlação de longo alcance para as séries do potencial flutuante e da corrente de saturação

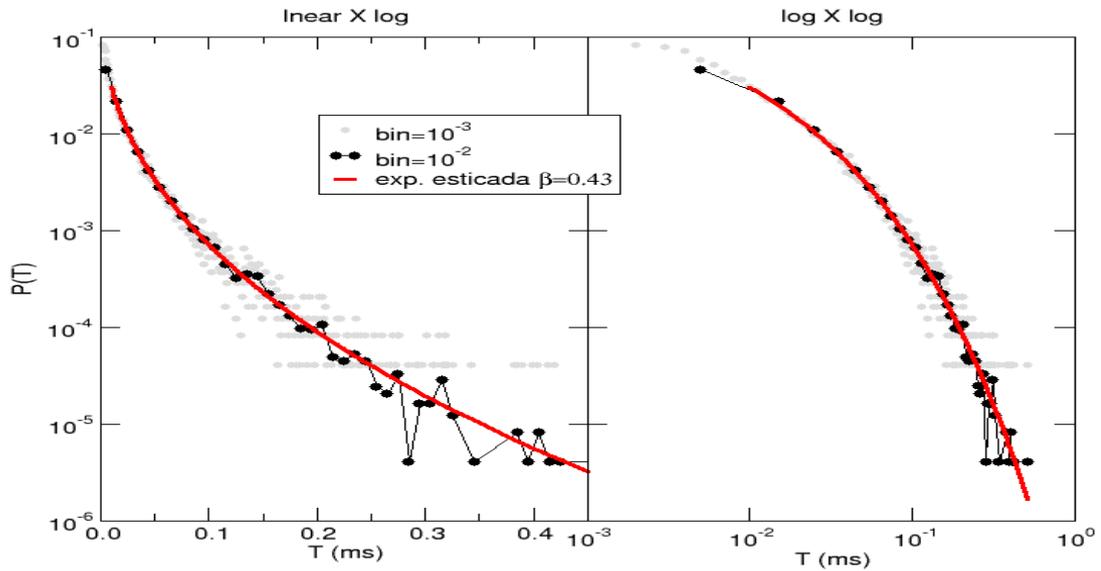


Figura 6.11: Distribuição de tempo de retorno para o potencial elétrico flutuante do conjunto 2 [$X_c = -10$, $\delta = 2$, $\langle T \rangle = 0,0222ms$]. A linha contínua representa o ajuste de uma distribuição exponencial esticada (5.11) aos dados.

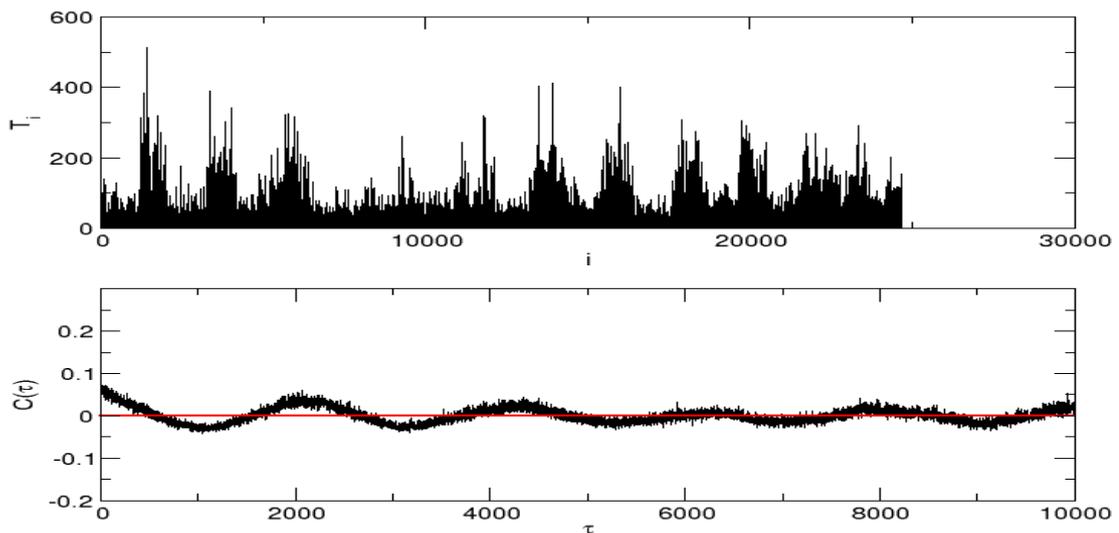


Figura 6.12: No topo a sequência dos TR na ordem em que surgiram no cálculo da figura 6.11. Abaixo a função de autocorrelação desta sequência de retornos.

iônica do TCABR. Em [Bunde et al., 2003b, Kantelhardt et al., 2002, Arneodo et al., 1997] são apresentados ou utilizados métodos mais eficientes para o cálculo de correlações de longo alcance do que o simples cálculo da função de autocorrelação. O cálculo direto da função de autocorrelação, no entanto, permite uma visualização da correlação em cada um dos tempos τ . Isto permite uma comparação imediata com a DTR uma vez que é natural pensarmos que se

uma série está positivamente (negativamente) correlacionada em τ a probabilidade de retorno no tempo de retorno $T = \tau$ será maior (menor).

6.3.3 Densidade

Além do potencial flutuante o sistema de sondas presente no TCABR mede a série temporal da corrente de saturação iônica do plasma, que está associada à densidade de íons no plasma. A análise desses dados, bem como a interpretação dos resultados, é feita de forma similar ao caso anterior.

As FDP aparecem na figura 6.13 e mostram novamente um grau elevado de assimetria, desta vez aumentando a cauda no sentido de valores negativos. É interessante notar, no entanto, que desta vez é a distribuição do primeiro conjunto de dados que se aproxima mais de uma Gaussiana e a assimetria privilegia oscilações negativas, ao contrário do caso do potencial flutuante (veja apêndice C para mais discussões a respeito).

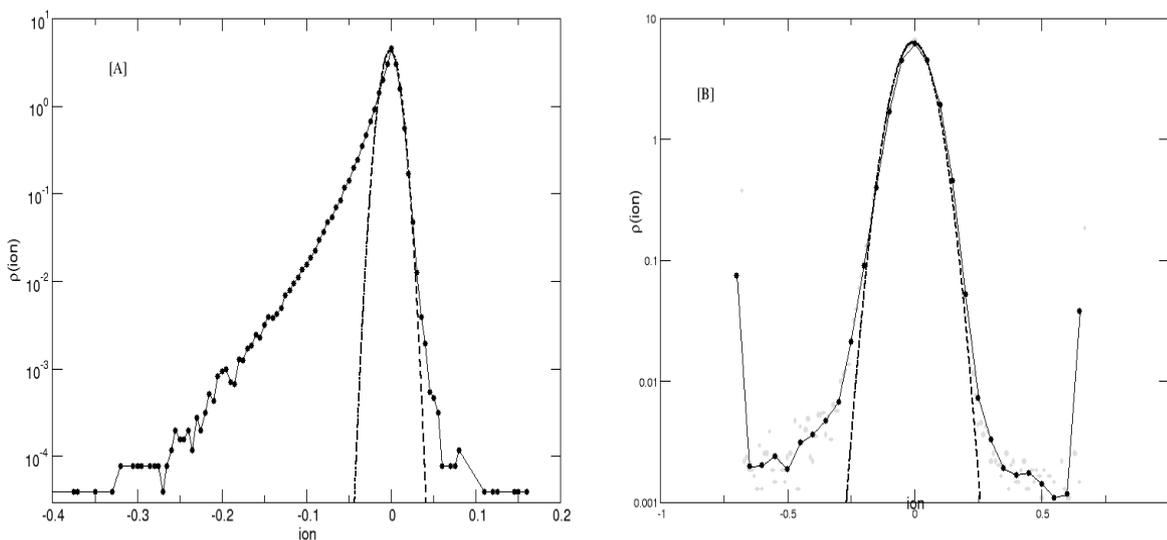


Figura 6.13: Distribuição densidade de probabilidade das séries temporais da corrente de flutuação: [A] Conjunto 1 e [B] Conjunto 2 de dados (as caudas são interrompidas devido a limitações na digitalização dos dados). A curva tracejada é a Gaussiana ajustada para os pontos em torno do pico de cada um dos gráficos.

Como nos mostra a comparação da figura 6.14 com a 6.8, para essas séries temporais temos um decaimento mais lento da função de autocorrelação. As flutuações da autocorrelação de ambos os dados são observadas nas distribuições de TR (figuras 6.15 e 6.16), a exemplo do que notamos para as séries do potencial flutuante. Confirmamos assim que a autocorrelação do sinal tem um papel dominante na DTR. Algo similar ocorreria caso analisássemos um sinal que apresenta um período predominante (um pico nítido no espectro de Fourier). Nesse caso tempos de retorno múltiplos desse período apresentarão uma probabilidade mais elevada na DTR.

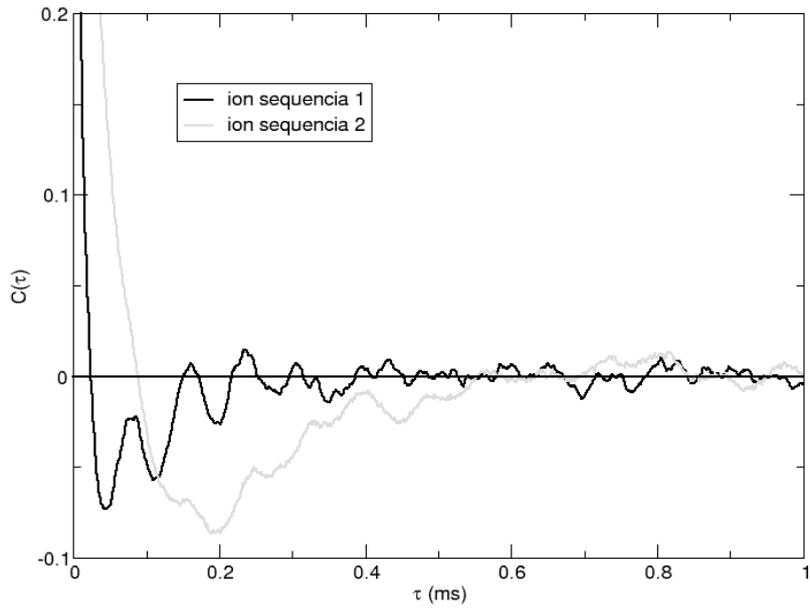


Figura 6.14: Função de autocorrelação (Eq. (5.9)) para as séries temporais da densidade obtidas no TCABR.

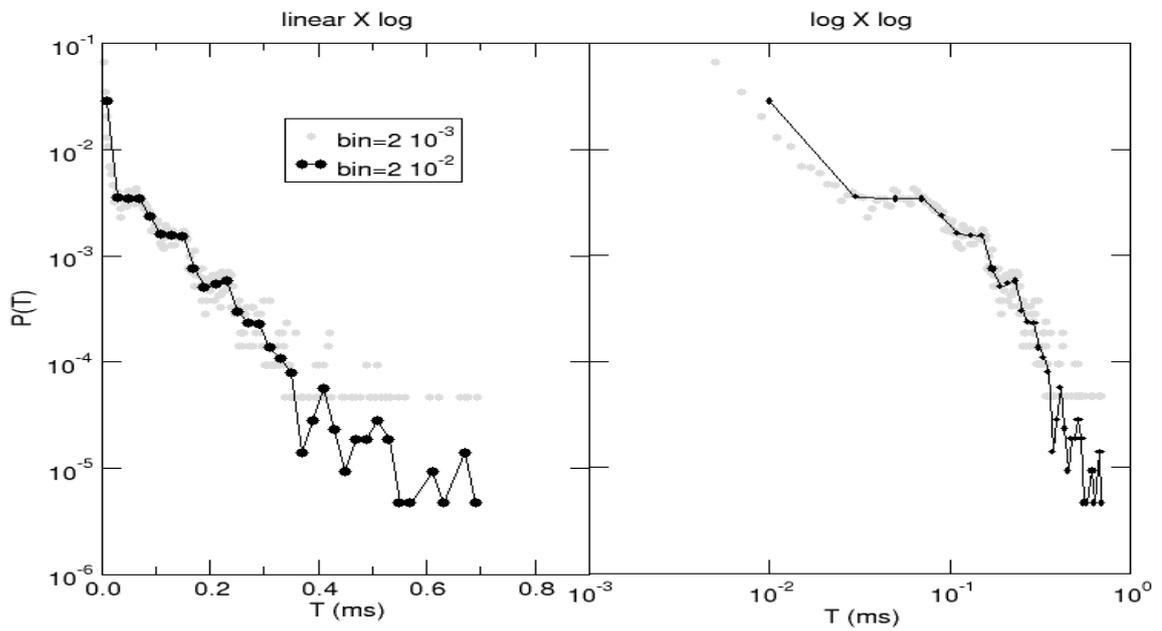


Figura 6.15: Distribuição de tempo de retorno para a série da densidade do conjunto 1. [$X_c = -0,05$, $\delta = 0,015$, $\langle T \rangle = 0,04759ms$]

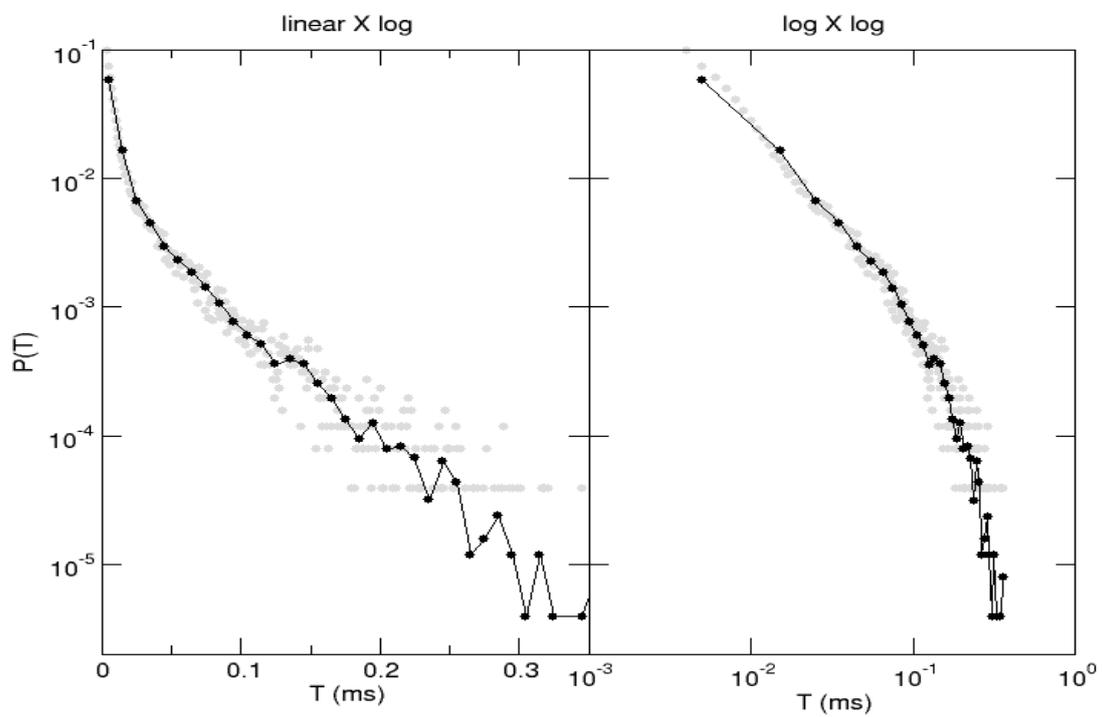


Figura 6.16: Distribuição de tempo de retorno para a série da densidade do conjunto 2. [$X_c = 0,02, \delta = 0,01, \langle T \rangle = 0,01961ms$]

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Tempo de retorno em sistemas caóticos

Os principais resultados da dissertação referem-se ao cálculo do tempo de retorno em sistemas dinâmicos caóticos, realizado no capítulo 3. Este estudo baseou-se na comparação das distribuições obtidas numericamente com a distribuição do tipo binomial para o r -ésimo tempo de retorno (2.6), obtida a partir de argumentos probabilísticos. Notamos que, a despeito de sua trivialidade, esta expressão aparece pela primeira vez nesta dissertação como distribuição de tempo de retorno (DTR). No que se refere aos sistemas caóticos destacamos como principais conclusões:

- A distribuição do tipo binomial, que se reduz à Poisson para intervalos de retorno pequenos, descreve bem a DTR de sistemas aleatórios e com caos bem desenvolvido. Assim, informações sobre a dinâmica determinística do sistema dinâmico contidas na distribuição de TR encontram-se em desvios desta distribuição.
- Um desvio típico que constatamos em mapas quadráticos, atratores estranhos e sistemas Hamiltonianos de baixa dimensão é o que denominamos memória de curta alcance. Exploramos em detalhe este efeito, mostrando sua relação com a distribuição de órbitas periódicas instáveis contidas no intervalo de retorno escolhido. Destacamos ainda que este efeito pode provocar grandes mudanças no regime exponencial da DTR tornando a distribuição flagrantemente não Poisson, ainda que exponencial para quase todos os tempos. Mostramos que este efeito permanece importante quando tomamos intervalos de retorno muito pequenos o que faz que para todos os fins práticos ele tenha que ser considerado, mesmo que em alguns sistemas ele desapareça no limite estrito de intervalo infinitesimal ($\delta \rightarrow 0$).
- Em sistemas que denominamos de forma ampla *intermitentes*, mostramos que a DTR apresenta as propriedades temporais características do sistema. Neste sentido a DTR de Poincaré parece ser um método unificado para caracterizar a intermitência, generalizando a distribuição de tempo da região laminar (usualmente utilizada para este fim).

7.2 Análise de séries temporais

A utilização da DTR como ferramenta de análise de séries temporais não é um procedimento usual. Nossa principal motivação, descrita sucintamente no item 1.2.1, foram as aplicações feitas anteriormente em nosso grupo (veja artigos de M.S. Baptista). No item 7.2.1 listamos nossas

reinterpretações de alguns desses resultados, no item 7.2.2 resumimos as conclusões da análise da série temporal de contaminante e no item 7.2.3 passemos a discutir o significado da DTR em séries temporais do plasma.

7.2.1 Visão inicial sobre o problema do TR

Listamos a seguir os pontos que, de forma direta ou indireta, apareciam nas aplicações anteriores de DTR, seguidos de nossa nova interpretação:

- A distribuição de tempo de retorno do tipo Poisson surge em sistemas aleatórios e caóticos não sendo, portanto, capaz de distinguí-los.
- O cálculo das relações envolvendo o tempo médio de retorno, que descrevemos nos itens 2.2.2 e 5.2.3, dependem exclusivamente da forma da função densidade de probabilidade (FDP). Em particular destacamos que o coeficiente σ da lei de escala de $\langle T \rangle$ com $\delta^{-\sigma}$ será sempre $\sigma = 1$ nos casos em que a FDP é contínua. Não pode, portanto, revelar informações sobre a quantidade de mistura presente no sistema, como conjecturado em [Baptista et al., 2001a]. A relação $\sigma = D_1$ é válida (veja figura 3.25) no caso de estarmos calculando o TR no espaço de fases. Fica ressaltada assim a importante distinção entre o tempo de recorrência de Poincaré (no espaço de fases) e o tempo de retorno em séries temporais.
- Não encontramos uma associação entre a distribuição de tempo de retorno $P(T_n)$ de uma série- y_n com a distribuição das flutuações $\rho(R_n)$, onde R_n é definido como $R_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{\sigma}$, sendo σ o desvio padrão da série. Do nosso ponto de vista a distribuição $\rho(R_n)$ está relacionada à função densidade de probabilidade. O cálculo da distribuição $\rho(R_n)$ nos casos do mapa logístico e da série de contaminante com $K = 10$, apesar de não terem sido apresentadas nesta dissertação, certamente não serão distribuições de Poisson ou Gaussianas já que a distribuição de pontos segue as distribuições A.5 e A.2, respectivamente. Apesar disso suas distribuições de tempo de retorno são exponencial, no primeiro caso, e com cauda de lei de potência no segundo. É claro que um processo formado a partir de uma soma de processos aleatórios independentes tende a ter uma FDP Gaussiana e uma DTR do tipo Poisson. No entanto podemos imaginar processos, inclusive de sistemas ergódigos, que possuam uma distribuição das flutuações $\rho(R_n)$ perfeitamente Poisson ou Gaussiana e apresentam distribuições de tempo de retorno das mais variadas formas.

7.2.2 Resultados para a série de contaminante

O problema proposto originalmente, da mistura de um contaminante escalar passivo sob a ação do mapa padrão com fase aleatória, foi estudado sob essa perspectiva no capítulo 5. De forma geral constatamos que as recorrências de séries temporais obtidas neste sistema se assemelham às recorrências de uma trajetória do mapa padrão. Destacamos em particular que a distribuição de tempo de retorno das séries temporais apresenta:

- regimes de lei de potência (multi-escala) associados aos aprisionamentos da trajetória nas estruturas (multi-fractais) do mapa padrão;
- uma dependência esperada para sistemas Hamiltonianos com os parâmetros de controle não linear K e aleatório R do modelo (Eq.4.9) conforme ilustrado nas figuras 5.16 e 5.17;
- o surgimento de um fenômeno novo de múltiplas caudas, resultado da projeção do espaço de fases bi-dimensional em uma série unidimensional;

A conexão da DTR com o transporte no sistema foi discutida em detalhes na seção 4.3 a partir de uma análise detalhada da literatura. Constatamos, no entanto, que esta conexão apresenta limitações significativas que, alteraram nossa visão inicial do problema e deixam claro que são de difícil aplicação aos casos em que estamos interessados.

7.2.3 Resultados obtidos para séries do plasma

Quando nos propomos a aplicar estes métodos à séries temporais experimentais, levando em conta as ressalvas discutidas na seção 7.2.1, temos em mente os resultados que obtivemos anteriormente para sistemas caóticos e aleatórios. Desse ponto de vista podemos associar regimes exponenciais (Eq. (3.7)) de decaimento da DTR com processos caóticos ou estocásticos, enquanto que regimes de lei de potência (Eq. (3.20)) estariam associados à intermitências. Já o decaimento como uma exponencial esticada (Eq. (5.11)), tendência intermediária entre as outras duas, foi relacionado com correlações de longo alcance (veja item 5.3.1).

Os resultados analisados para séries do TextUp e TCABR mostram distribuições de tempo de retorno (DTR) distintas da distribuição do tipo Poisson, diferentemente do obtido em [Baptista et al., 2001a]. Ao contrário do caso da série temporal de contaminante, quando foi possível fazer uma associação forte com a dinâmica no espaço de fases, a interpretação natural da DTR no caso das séries experimentais não passou pelos resultados dos sistemas caóticos. Esta foi obtida a partir da comparação com a função de autocorrelação. Ao contrário do modelo desenvolvido no capítulo 5, caudas de lei de potência não foram observadas em nenhuma das séries experimentais analisadas. Este fato é explicado pela dinâmica turbulenta na borda do plasma e pelo fato da série temporal não ser originada de um sistema de baixa dimensão que fizeram com que o aprisionamento das trajetórias na borda das ilhas não pudesse ser observado através desse tipo de análise.

Nossa interpretação dos resultados obtidos é que a presença de autocorrelação e de frequências típicas determinam a forma da DTR quando analisamos séries temporais como as obtidas no plasma. No caso geral notamos ainda uma dependência da DTR com a posição do intervalo de retorno sugerindo que diferentes valores da série apresentam diferentes correlações. Nesse sentido a distribuição de tempo de retorno passa a ser um instrumento a mais para detecção dessas correlações que, no entanto, parece demandar um maior número de pontos da série experimental, e ser menos direto do que os utilizados na literatura [Kantelhardt et al., 2002, Arneodo et al., 1997].

Os modelos adequados para a investigação da dinâmica da borda do Tokamak são aqueles ligados à turbulência. Destacamos que no apêndice C, através da utilização de um modelo de cascata log-normal, conseguimos interpretar de forma coerente a função densidade de probabilidade das séries utilizadas.

7.3 Áreas correlatas e complementações

Ao longo do desenvolvimento das pesquisas deste mestrado nos deparamos com alguns assuntos correlatos ao tema da dissertação que julgamos dignos de menção. Apresentamos inicialmente outros quantificadores das propriedades temporais de sistemas caóticos e comparamos com o tempo de retorno de Poincaré. Apontamos ainda para possíveis complementações e aplicações deste trabalho.

7.3.1 Outras quantificações temporais

Vimos ao longo desta dissertação que, em muitos casos, o tempo de retorno de Poincaré caracteriza as principais propriedades temporais de um sistema dinâmico. A estatística que utilizamos foi motivada a partir das idéias de Poincaré de recorrências no espaço de fases de sistemas Hamiltonianos e foram posteriormente aplicadas a sistemas dissipativos e séries temporais¹. Uma das principais limitações para o seu cálculo provém da necessidade de confinamento das trajetórias do sistema a uma região bem determinada no espaço de fases, condição para a própria ocorrência de retornos. À sistemas que não apresentam este tipo de propriedade aplicam-se usualmente outros tipos de técnicas para obter as propriedades temporais de estruturas presentes no espaço de fases.

Sistemas não confinados de interesse são os que apresentam espalhamento ou advecção caóticas. Nesses casos estamos interessados em fluidos que escapam através de sorvedouros [Károly e Tél, 1997] ou que são espalhadas por obstáculos e apresentam, após uma dinâmica caótica transiente, um comportamento assintótico regular [Tél et al., 2000]. Nesses sistemas as trajetórias que nunca escapam formam uma sela caótica e a taxa de escape das trajetórias é exponencial. No caso de existirem estruturas aprisionadoras, conforme foram discutidas nesta dissertação nos itens 3.3.3 e 4.3.1, no regime assintótico esperamos um decaimento do tipo lei de potência para o número de partículas. Podemos traçar assim um paralelo entre o número de partículas remanescentes (calculado no caso de sistemas abertos) e a distribuição de tempo de retorno (calculada em sistemas fechados). O estudo das propriedades temporais em função da posição espacial é feito nesses sistemas através da função de atraso (*time delay function*) que exhibe um padrão de picos fractal quando o segmento de condições iniciais escolhido intercepta a variedade estável da sela caótica.

Uma analogia mais direta do tempo de retorno ocorre no caso da existência de sorvedouros ou quando estabelecemos uma região arbitrária de saída em um sistema Hamiltoniano que permite que as trajetórias escapem [Schneider et al., 2002, Sanjuán et al., 2003]. A estatística para estes tempos é bastante similar à estatística de tempo de retorno de Poincaré discutida neste trabalho, sendo que a estatística de r -ésimo retorno aplica-se ao caso em que a trajetória deve passar r vezes em uma determinada região até escapar.

Essas analogias baseiam-se essencialmente no fato de, na maioria dos sistemas que estudamos, o tempo de retorno a um intervalo determinado no espaço de fases apresenta a mesma estatística de um tempo de passagem ou tempo de saída [Meiss, 1997], isto é, ao tempo que a trajetória leva para passar por duas regiões arbitrárias do espaço de fases.

De forma geral uma solução para estudar as propriedades de aprisionamento de determinada estrutura ou barreira no caso em que o sistema é aberto é a utilização de um conjunto de trajetórias escolhidas de forma aleatória em determinada região. Observa-se então o tempo que cada trajetória deste *ensemble* leva para cruzar determinada barreira ou afastar-se de uma região de interesse. Nos casos de ergodicidade e sistemas confinados os resultados devem ser os mesmos do que o cálculo de uma única trajetória por um tempo longo. A vantagem do tempo de retorno de Poincaré é que, como uma única condição inicial é escolhida, evita-se arbitrariedades quanto ao número de trajetórias e ao sorteio de suas posições iniciais. Considerando ainda que o tempo de retorno de Poincaré é obtido a partir da observação de uma única região do espaço de fases (não é necessário sequer conhecer o resto do espaço de fases), vemos que outra de suas vantagens é fornecer informações globais do sistema a partir de medidas locais [Zaslavsky, 1999].

¹Uma outra estatística temporal utilizada que aparece associada ao nome de Poincaré, que não deve ser confundida com a o tempo de retorno de Poincaré por nós utilizado, é o tempo entre cruzamentos de uma seção de Poincaré realizada em um fluxo.

7.3.2 Mapas *non twist*

Discutimos agora brevemente um conjunto de sistemas dinâmicos Hamiltonianos que não foram tratados nesta dissertação, os mapas *non twist*. Muitos dos tratamentos usuais de sistemas Hamiltonianos (como por exemplo a demonstração padrão do teorema KAM) assumem a hipótese de não degenerescência. Para o caso mais simples (bidimensional) que a frequência angular $w(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}$ possua uma variação monotônica:

$$\frac{\partial w(J)}{\partial J} = \frac{\partial^2 H_0(J)}{\partial J^2} \neq 0. \quad (7.1)$$

No caso de mapeamentos, a relação acima é chamada também de condição *twist* e passa a ser escrita como [del Castillo-Negrete et al., 1996]

$$\frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \neq 0. \quad (7.2)$$

No caso do Tokamak esta condição reflete um crescimento monotônico do fator de segurança $q(r)$. Experimentos recentes mostram que um cisalhamento reverso (*reversed shear*, ou seja, um mínimo do fator de segurança $q(r)$) foi detectado e o confinamento nesse caso foi melhorado. Dessa forma vemos que existe um interesse em comparar os resultados de mapas *twist* e *non-twist*, a exemplo do que ocorreu em [Horton e Reichl, 1984], o que complementaria este trabalho.

Mapas *non-twist*, isto é, com um fator de segurança não monotônico, estão tratados em [del Castillo-Negrete et al., 1996, Corso e Rizzato, 1998] onde ficam evidente o surgimento de fenômenos novos tais como a reconexão das variedades dos pontos fixos e o aparecimento de torus (barreiras) mais resistentes a perturbação.

O cálculo do tempo de retorno de Poincaré em mapas *non-twist* é dificultado pelas características das regiões caóticas em torno dos pontos em que a condição *twist* (7.2) falha. É nesta região que estamos interessados uma vez que nas demais regiões o mapeamento satisfaz localmente a condição (7.2) e pode ser interpretado como *twist*. Em geral o surgimento do caos na região não *twist* ocorre ao longo da separatriz apresentando uma faixa muito estreita onde poderíamos definir uma região de retorno. Para perturbações maiores esta faixa cresce, no entanto, o sistema deixa de estar confinado e as trajetórias divergem após algumas poucas recorrências. Assim parece que quantificadores distintos da distribuição de tempo de retorno (como os discutidos no item anterior) devem ser utilizados para a análise das propriedades de aprisionamento das estruturas de mapas *non-twist*.

7.3.3 Processos estocásticos

No que se refere especificamente ao tempo de retorno de Poincaré e sua relação com o transporte, um estudo complementar a esta dissertação abordaria os passeios aleatórios e processos estocásticos. Conforme mencionado no item 4.3.3 os modelos típicos para a difusão anômala utilizam-se de modelos de passeio aleatório e seria interessante explorar a distribuição de tempo de retorno para os diversos casos de passeio aleatório existentes. Uma vez que nos baseamos quase exclusivamente em sistemas dinâmicos determinísticos o tempo de recorrência desse tipo de sistema dinâmico não foi abordado nesta dissertação. Da mesma forma foram excluídos os processos de difusão anômala baseados em equações do tipo Langevin onde é possível relacionar os regimes de transporte com a função de memória do sistema.

7.3.4 Mistura de contaminante

No que se refere mais especificamente ao problema da mistura de um contaminante escalar passivo, discutido no capítulo 5, pode ser interessante avaliar o efeito de reações e atividade

neste problema. O estudo do efeito de uma dinâmica caótica sobre reações químicas e biológicas é uma área que têm se desenvolvido muito ao longo dos últimos anos [Toroczkai et al., 1998, Károly et al., 1999, de Moura et al.,]. A introdução deste refinamento no modelo (mapa padrão com fase aleatória) seria importante também no sentido de aproximar os modelos Hamiltonianos da situação do plasma uma vez que as partículas de plasma no Tokamak estão constantemente sofrendo colisões e reações.

Do ponto de vista prático, entretanto, a propriedade de passividade (não reação) do contaminante foi imprescindível para os cálculos aqui realizados. Graças a ela o valor do contaminante em um determinado ponto do espaço em um determinado tempo era obtido através da iteração de uma trajetória do mapa padrão inverso. Caso consideremos a reação de partículas sob ação de um mapa ou fluxo devemos verificar a cada passo de integração a ocorrência de reação.

7.3.5 Análise de séries temporais

A análise de séries temporais que realizamos indicam duas possíveis continuações:

Uma aplicação mais direta da idéia de tempo de retorno de Poincaré passa por explorar os resultados dos artigos recentemente publicados [Bunde et al., 2003b, Bunde et al., 2003a] e discutidos no item 5.3.1. É interessante notar que estes trabalhos não realizam a conexão com o tempo de retorno o que ajudaria na interpretação dos seus resultados bem como na justificação de alguns resultados matemáticos.

A aplicação do tempo de retorno em séries experimentais deste tipo parece ser mais frutífera quando estamos interessados em um estado particular da série temporal, onde definimos nossa região de retorno I . Este evento particular pode representar alguma catástrofe ou evento raro (acima de um determinado parâmetro), como em [Bunde et al., 2003b, Bunde et al., 2003a], ou ser um valor específico da série. Assim a distribuição de TR passa a ter um interesse natural: a probabilidade de termos uma repetição deste fenômeno após um tempo T . Este raciocínio é válido também no caso do espaço de fases. As técnicas desenvolvidas nesta dissertação podem ser então aplicadas integralmente não apenas para conhecermos a dinâmica do sistema mas também para compreender a repetição do fenômeno de interesse.

No que se refere à análise das séries temporais experimentais (potencial flutuante e densidade obtidas na borda do Tokamak) seria interessante explorar propriedades de correlação discutidas em [Castaing et al., 1990, Carras et al., 1998, Zaslavsky et al., 2000] (entre outras referências citadas nesses artigos ou que prosseguem estes trabalhos). Particularmente importante parece caracterizar, utilizando algoritmos mais adequados e específicos [Kantelhardt et al., 2002, Arneodo et al., 1997], a presença de correlação de longo alcance assim como o cálculo dos expoentes de Hurst e do espectro de multi-singularidade. Essa caracterização permitiria relacionar propriedades de memória e auto-similaridade com processos do plasma. Além disso parece adequado comparar estas séries com modelos e resultados típicos da turbulência. Nesse sentido parece destacar-se a grande assimetria nas funções densidade de probabilidade das séries do TCABR. Como discutido no final do apêndice C, é importante precisar quando a origem desta assimetria, e dos fenômenos intermitentes em geral, é bem explicada por modelos da turbulência [Castaing et al., 1990] e quando efeitos característicos do plasma [Ferreira et al., , Antar et al., 2001] são relevantes.

Apêndices

Apêndice A

Função densidade de probabilidade de sistemas caóticos

Nesse apêndice seguimos a referência [Vanin e Guffon, 1996] para calcular a função densidade de probabilidade (FDP) de uma variável aleatória que depende de uma variável cuja FDP é conhecida. Aplicamos então o resultado geral obtido para deduzir a distribuição dos pontos da série temporal do mapa padrão com fase aleatória no regime ergódico e para o mapa logístico com $b=4$.

O problema consiste em obter uma FDP da variável aleatória $\nu(x), g(\nu)$, quando sabemos $f(x)$, FDP de x . A probabilidade de encontrarmos um resultado no intervalo entre $[x_1, x_2]$ é a mesma que a de obter um resultado no intervalo $[\nu(x_1), \nu(x_2)] \equiv [\nu_1, \nu_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{\nu_1}^{\nu_2} g(\nu)d\nu$$

No limite em que $x_2 \rightarrow x_1$, obtemos

$$|f(x_1)dx| = |g(\nu_1)d\nu| .$$

Que fornece o resultado que desejamos

$$g(\nu) = \frac{f(x)}{\left|\frac{d\nu}{dx}\right|_{x'=x}} \quad \text{com } \nu = \nu(x) . \quad (\text{A.1})$$

A.1 Mapa padrão no regime de alta estocasticidade

A partir das figuras 4.2 e 4.3 do retrato de fases do modelo que estamos utilizando pudemos constatar o desaparecimento das ilhas periódicas no espaço de fases e o domínio do mar estocástico a medida que os parâmetros K, R eram aumentados. Podemos supor que nesse regime a variação da coordenada x do mapa padrão perturbado ocorre de forma uniforme em todo intervalo $x \in [0, 1]$, ou seja, $f(x) = 1$.

Já a dependência do valor do contaminante com a posição foi estabelecida na equação (5.1) como sendo $\Phi_{(x,y)}^{n=0} = \text{sen}(2\pi x)$. Uma vez que o contaminante se mistura de forma passiva, a medida que o iteramos a distribuição de probabilidade continua sendo dessa forma, ainda que a distribuição espacial não seja. Assim, a aplicação de (A.1) resulta em

$$P(\Phi) = \frac{f(x)}{\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|} = \frac{1}{2\pi \cos(\text{arcsen}(\Phi))} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \Phi^2}} ,$$

Uma vez que o contaminante está distribuído em um intervalo $\Phi \in [-1, 1]$ (de comprimento 2), a distribuição acima deve ser normalizada, resultando em

$$P(\Phi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\Phi^2}}, \quad (\text{A.2})$$

que é a distribuição de probabilidade para a distribuição de contaminante na série temporal no caso do regime ergódico.

A.2 Mapa logístico

Já a distribuição de probabilidades para os pontos gerados pelo mapa logístico com $b = 4$ (eq. (3.1)) pode ser obtida a partir do estudo de sua relação com o *bernoulli shift*

$$y_{n+1} = 2y_n(\text{mod}(1)),$$

ou com o mapa da tenda

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & 0 \leq y_n \leq \frac{1}{2} \\ -2y_n + 1 & \frac{1}{2} \leq y_n \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Esses dois mapas possuem um conjunto infinito e enumerável de órbitas periódicas instáveis no intervalo $y \in [0, 1]$. São sistemas lineares por parte, ou seja, em cada região do intervalo eles se comportam de maneira linear e sua distribuição é uniforme nesse intervalo [Ott, 1993]: $f(x) = 1$. Esse mapa é conjugado ao mapa logístico com a seguinte transformação de coordenadas

$$x = \text{sen}^2(\pi y/2) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)], \quad (\text{A.4})$$

que quando aplicada à equação (3.1) obtemos $\frac{\pi}{2}y_{n+1} = \pm\pi y_n + s\pi$, onde o sinal dessa equação e o valor de $s \in \mathbb{N}$ são escolhidos para que os valores de y permaneçam no intervalo entre 0 e 1 e resultam na equação (A.3).

Assim podemos aplicar essa transformação na equação (A.1) para obter a distribuição dos pontos de uma série temporal gerada pelo mapa logístico a partir de uma condição inicial não periódica.¹

$$P(x) = \frac{f(y)}{\left|\frac{dx}{dy}\right|} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\text{sen}(\pi y)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\text{sen}(\arccos(1-2x))} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(1-2x)^2}}.$$

Simplificando essa expressão e normalizando obtemos a distribuição densidade de probabilidade para o mapa logístico com $b = 4$ como sendo

$$P(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(x-1)}}. \quad (\text{A.5})$$

¹O conjunto de condições periódicas é denso mas enumerável o que faz com que tomando uma condição inicial aleatória entre os números reais do intervalo, a chance de tomarmos uma condição de órbita periódica seja nula.

Apêndice B

Distribuição Poisson para o tempo de retorno

Neste apêndice deduzimos a distribuição de tempos de r -ésimo retorno para um sistema que obedece a estatística de Poisson. Apesar de termos obtido a distribuição binomial (2.6), que se reduz ao caso Poisson para valores pequenos de μ e grandes de T , parece-nos importante obter o caso Poisson de forma independente uma vez que esta é a distribuição usualmente aplicada para o tempo de retorno de Poincaré. Além disso, através da descrição do processo poissoniano, podemos perceber tanto as características dos sistemas em que esta estatística se aplica como de que forma a distribuição de retornos se relaciona com as utilizações usuais da estatística de Poisson.

Processo do tipo Poisson

Vamos iniciar estudando a distribuição da ocorrência de eventos (retornos) com o tempo, ou seja, após um tempo t (que será tomado contínuo nesta dedução) a probabilidade de terem ocorrido n eventos é $P(n, t)$.¹ No problema que estamos interessados um evento ocorre quando temos um ponto da série temporal dentro do intervalo de largura 2δ na posição X_c .

Tomamos como hipótese que a probabilidade de ocorrer um evento é a mesma ao longo do tempo, dependendo portanto somente do intervalo de tempo δt

$$P_1 = \mu\delta t$$

Supomos que o intervalo δt seja suficientemente pequeno para que não englobe mais de um ponto da série temporal, de forma que a probabilidade de termos dois eventos em um desses intervalos é descartada. Assim a probabilidade de termos n eventos até o tempo $t + \delta t$ pode ser escrita como sendo a probabilidade de termos n eventos até t e 0 em δt mais a probabilidade de termos $n - 1$ eventos até t e 1 em δt

$$P(n, t + \delta t) = P(n, t)(1 - \mu\delta t) + P(n - 1, t)\mu\delta t$$

Que podemos escrever como

$$\frac{P(n, t + \delta t) - P(n, t)}{\delta t} = \mu(P(n - 1, t) - P(n, t)).$$

¹Seguiremos a referência [Vanin e Guffon, 1996] adaptando ao problema em questão. Ressaltamos que a distribuição de Poisson é deduzida também como um limite da distribuição binomial, quando a probabilidade de um evento é muito maior que a de outro [Feller, 1950, Vanin e Guffon, 1996].

Passando o limite de $\delta t \rightarrow 0$ obtemos a equação diferencial

$$\frac{dP(n, t)}{dt} + \mu P(n, t) = \mu P(n - 1, t). \quad (\text{B.1})$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} P(n, t)) = e^{\mu t}(\mu P(n, t) + \frac{dP(n, t)}{dt})$$

que quando aplicado com a relação (B.1) fornece

$$e^{-\mu t} \frac{d}{dt}(e^{\mu t} P(n, t)) = \mu P(n - 1, t)$$

Que se integrada em relação ao tempo nos leva a seguinte relação de recorrência

$$P(n, t) = e^{-\mu t} \int \mu e^{\mu t} P(n - 1, t) dt \quad (\text{B.2})$$

Para resolver a relação (B.2) devemos obter $P(0, t)$. Como

$$P(0, t + \delta t) = P(0, t)(1 - \mu \delta t),$$

se aplicarmos novamente o limite $\delta t \rightarrow 0$ têm como solução da equação diferencial resultante $P(0, t) = e^{-\mu t}$. Podemos agora escrever a solução da equação (B.2), que é a probabilidade de ocorrer n eventos após um tempo t de observação,

$$P(n, t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!} \quad (\text{B.3})$$

Lembrando que μ é a probabilidade de observar um evento por unidade de tempo, então $\mu = \mu t$ é o número médio de eventos no intervalo, que fornece a fórmula de Poisson usual. É precisamente μ que consideramos na seção 5.3 como sendo igual à probabilidade de encontrarmos um evento na região da faixa dividido pela probabilidade total.

Ilustramos na figura B.1 a validade da fórmula (B.3) para o modelo estudado com alta estocasticidade e para um tempo de observação $t = 100$ iterações.

Distribuição de Tempo de retorno

O nosso problema, no entanto, é distinto uma vez que o tempo t não é fixo. Estamos interessados no tempo de r -ésimo retorno, isto é, a probabilidade de termos r eventos em um tempo T . É interessante notar que a análise estatística dos processos que estamos tratando nesse apêndice são muito similares aquelas realizadas para o decaimento de núcleos em física nuclear. É nesse contexto que encontramos na referência [Melissinos, 1966] que seguimos agora.

Estudaremos, de forma mais geral, a probabilidade de obtermos um tempo de retorno de ordem r , isto é, a distribuição de tempos para o r -ésimo retorno da série ao intervalo. A probabilidade de que tenhamos r ou mais eventos em um tempo t é

$$Q_r(t) = \sum_{n \geq r}^{\infty} P(n, t) = 1 - \sum_{n=0}^{n=r-1} P(n, t). \quad (\text{B.4})$$

Mas estamos interessados somente na densidade de probabilidade dos eventos que ocorreram no intervalo δt após t , que denominamos $q_r(t)$. Para obter essa probabilidade escrevemos

$$q_r(t) \delta t = Q_r(t + \delta t) - Q_r(t)$$

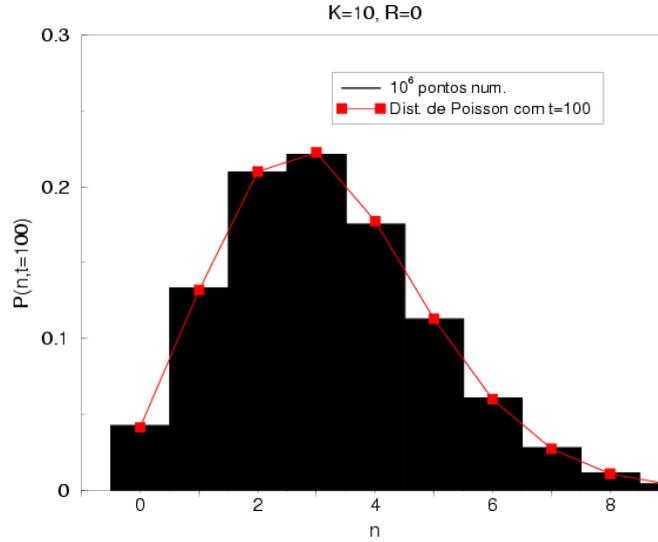


Figura B.1: Probabilidade de ocorrência de uma concentração de contaminante $\Phi \in [-0.05, 0.05]$ para o mapa padrão ($K = 10, R = 0$) após 100 iterações. O valor de μ utilizado na equação (B.3) é $\mu = 2P(X_c)\delta$. Resultados numéricos para uma série com 10^8 pontos.

que nos mostra que $q_r(t) = \frac{dQ_r}{dt}$ no limite de $\delta t \rightarrow 0$. Substituindo a equação (B.3) em (B.4), calculamos $q_r(t)$ como sendo

$$q_r(t) = - \sum_{n=0}^{r-1} \left[\frac{\mu n (\mu t)^{n-1} e^{-\mu t}}{n!} - \frac{\mu (\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!} \right] = \mu \sum_{n=0}^{r-1} \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!} - \mu \sum_{n=1}^{r-1} \frac{(\mu t)^{n-1} e^{-\mu t}}{(n-1)!}.$$

Se realizarmos a troca de índice $l = n - 1$ no segundo termo torna-se explícito que somente o último termo da primeira soma sobrevive. Obtemos portanto o resultado previsto para a distribuição de tempo de r eventos (retornos) em função do tempo t

$$q_r(t) = \mu \frac{(\mu t)^{r-1} e^{-\mu t}}{(r-1)!}. \quad (\text{B.5})$$

Trabalhamos especialmente com o tempo de primeiro retorno ($r = 1$)

$$q_1(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Modelo log-normal para a FDP de sistemas turbulentos

A compreensão da forma da função densidade de probabilidade (FDP) das séries temporais do plasma envolve o estudo de fenômenos turbulentos. Discutimos neste apêndice, após uma breve introdução à turbulência, as ferramentas típicas utilizadas para obter as FDPs em sistemas turbulentos. Em seguida aplicamos estes métodos aos dados empíricos discutidos na seção 6.3.

C.1 A teoria de Kolmogorov para a turbulência

A turbulência é um dos mais persistentes problemas da Física. Observações do comportamento complexo dos fluidos estão presentes já na obra de Leonardo da Vinci no século XV. Atualmente a turbulência permanece como o grande problema da Física clássica, tão longe de ser resolvido que, citando [Frisch e Orszag, 1990], não há acordo sequer no que seria uma solução adequada.

Um trabalho fundamental na área deve-se ao matemático e físico russo Andrei Kolmogorov (1903-1987) que em 1941 lançou os pilares da teoria da turbulência (K41). O ponto fundamental desta visão é que o fluido turbulento é constituído de um número muito grande de escalas espaciais. Um exemplo explícito dessas escalas são os diferentes tamanhos de redemoinhos encontrados em um fluido turbulento. De acordo com K41 o fluxo de energia vai sempre das escalas maiores, onde a energia é injetada, para as menores, próxima das escalas moleculares que é onde ocorre a dissipação. A partir de argumentos de ordem essencialmente dimensionais Kolmogorov obteve relações quantitativas importantes, como por exemplo, o espectro de energia como função do tamanho r da escala: $E(1/r) \propto (1/r)^{-5/3}$. Críticas a seu modelo inicial levaram Kolmogorov à incorporação da intermitência nas escalas menores em seu modelo de cascata de 1962 (K62). Desde então esses trabalhos formam o embasamento da área além de servirem de inspiração para futuros desenvolvimentos. Uma visão pictórica deste cenário está na figura C.1. Em [Frisch, 1995] uma descrição detalhada dessa teoria, seus desenvolvimentos e limitações.

Duas caracterizações usuais da turbulência são: os expoentes de escala $\zeta_r(p)$ e a função densidade de probabilidade (FDP). Seguindo a idéia de escalas presentes na turbulência, realiza-se em um determinado instante de tempo a medida da diferença da grandeza física u (velocidade, temperatura, etc..) entre dois pontos do fluidos separados por uma distância r . Os expoentes de escala $\zeta_r(p)$ mostram como, para uma determinada escala r , variam os momentos das distribuições

$$\langle u^p \rangle_r \propto r^{\zeta_r(p)} \quad (\text{C.1})$$

Turbulência por Kolmogorov

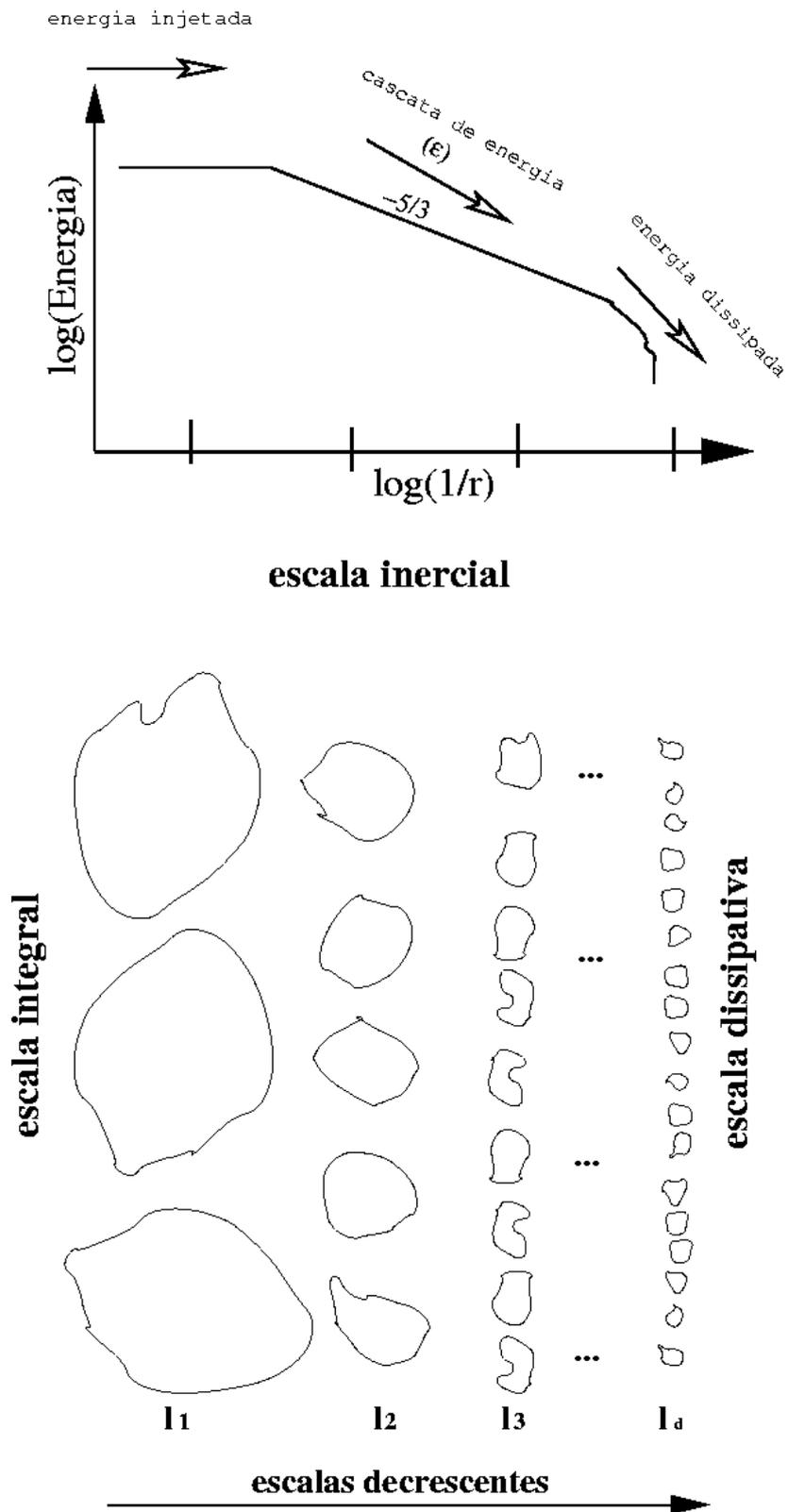


Figura C.1: Diagrama pictórico da turbulência segundo a teoria de Kolmogorov. A energia flui em forma de cascata das escalas maiores até a escala dissipativa de acordo com um espectro com lei de potência (coeficiente= $5/3$).

A teoria K41 prevê que $\zeta_r(p) = p/3$, sendo que os resultados experimentais apresentam um desvio considerável desta relação, o que deu origem a modelos multi-fractais para a turbulência [Frisch, 1995] (é a partir desses expoentes de escala que é obtido o espectro de multi-singularidade do sistema).

A FDP obtida a partir das flutuações de uma determinada escala $\rho_r(u)$ está diretamente relacionadas com $\zeta_r(p)$ uma vez que os momentos $\langle u^p \rangle_r$ podem ser obtidos como

$$\langle u^p \rangle_r = \int_{-\infty}^{+\infty} u^p \rho_r(u) du$$

É interessante notar que quando p cresce, região onde os desvios dos momentos $\zeta_r(p)$ em relação à teoria K41 são mais evidentes¹, regiões da cauda da FDP são ressaltadas. Do ponto de vista da FDP, são justamente essas regiões onde a comparação com os modelos é mais polêmica e problemática, graças à baixa estatística.

Na tabela C.1 resumimos as principais observações experimentais sobre a FDP de sistemas turbulentos descritos em [Frisch, 1995, Castaing et al., 1990]. Uma característica importante que não está listada nesta tabela é a assimetria da FDP entre flutuações positivas e negativas. Este ponto será discutido em mais detalhe a seguir.

l	Escala	FDP
$l \sim l_0$	integral	Gaussiana
$l_0 > l \gg l_d$	inercial	Caudas exponenciais
$l \sim l_d$	dissipativa	Caudas com exponenciais “estendidas”

Tabela C.1: Funções densidade de probabilidade típicas de sistemas turbulentos em função da escala l de observação. A escala de injeção da energia é denominada l_0 e a escala de dissipação l_d .

C.2 O modelo log-normal

Se desejamos obter explicitamente expressões para a FDP e para o espectro de singularidade, outras hipóteses são necessárias². Descreveremos aqui o modelo log-normal, utilizado em [Castaing et al., 1990], que permite uma associação direta com o modelo de cascata descrito acima e servirá como base para explorar os dados empíricos.

Neste modelo a FDP das flutuações da grandeza u é dividida em duas componentes que dependem da taxa de transferência de energia entre escalas (ε):

- (i) Flutuações devido a cascata de energia, para um ε fixo;
- (ii) Flutuações devido a variação de ε .

(i) No que se refere ao primeiro ponto supomos que grandes flutuações (intermitência) devem-se a variações da energia, não ocorrendo para um ε fixo. Neste caso teremos naturalmente que a flutuação resultante da grandeza u será Gaussiana:

$$M_{\bar{u}}^{Gauss}(u, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (C.2)$$

¹Ainda que o desvio seja qualitativamente o mesmo para p baixos.

²Destacamos ainda a existência de análises de auto-similaridade das FDPs que prescindem de modelos baseados na turbulência [Carras et al., 1999].

(ii) O segundo item acima leva em conta a intermitência a partir da variação de ε supondo que sua distribuição é log-normal, isto é, que $\ln(\varepsilon)$ distribui-se de forma Gaussiana. Esta hipótese está intimamente ligada ao conceito de cascata. Supõe-se que a transferência de energia ocorra de forma que seu valor ϵ_i em uma determinada escala l_i obedeça a seguinte relação:

$$\epsilon_i = W_{i-1} \epsilon_{i-1} ,$$

onde W é tomado como uma grandeza aleatória tal que $\langle W_i \rangle = 1$. Aplicando recursivamente esta relação e, sabendo a distribuição em uma determinada escala l_0 (ou, o que é equivalente, a dissipação na escala l_d) obtemos a energia na escala l_i

$$\epsilon_i = \epsilon_0 \prod_{j=0}^{i-1} W_j ,$$

Tomando o logaritmo da relação acima obtemos

$$\ln(\epsilon_i) \propto \sum_{j=0}^{i-1} W_j .$$

Lembrando a aleatoriedade dos valores de W_i , aplicamos o teorema do limite central que garante que a somatória de um número muito grande de W_i se distribuirá de forma Gaussiana, garantimos que a distribuição de $\ln(\epsilon)$ se dá de forma Gaussiana.

Argumentos dimensionais da teoria *K41* mostram que

$$\sigma \propto (\epsilon r)^{\frac{1}{3}} . \quad (\text{C.3})$$

Assim, temos que a distribuição de σ será também log-normal

$$L_{(\lambda, \sigma_0)}^{LN}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) d\ln\sigma ,$$

que em função de σ passa a ser

$$L_{(\lambda, \sigma_0)}^{LN}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) . \quad (\text{C.4})$$

Esta distribuição está ilustrada na figura C.2. O máximo presente nestas distribuições encontra-se em

$$\frac{dL(\sigma)}{d\sigma} = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{\sigma_0}{e^{\lambda^2}} ,$$

e representa o valor de σ mais atuante na FDP. Quando $\lambda \rightarrow 0$ temos que $\sigma_{max} \rightarrow \sigma_0$.

É interessante notar ainda a dependências de λ com a escala de observação l . Uma das hipóteses manifestas em *K62* é que $\langle \ln^2(\epsilon) \rangle$ depende linearmente com $\ln(r)$. Assim, pela relação (C.3) temos que

$$9\lambda^2 = C_1^2 - C_2 \ln(r) .$$

Mais recentemente têm-se proposto [*Castaing et al., 1990*] uma dependência do tipo lei de potência na região inercial

$$9\lambda^2 = (r/r_0)^{-\beta} , \quad (\text{C.5})$$

onde β seria uma medida da turbulência ou do tamanho da cascata.

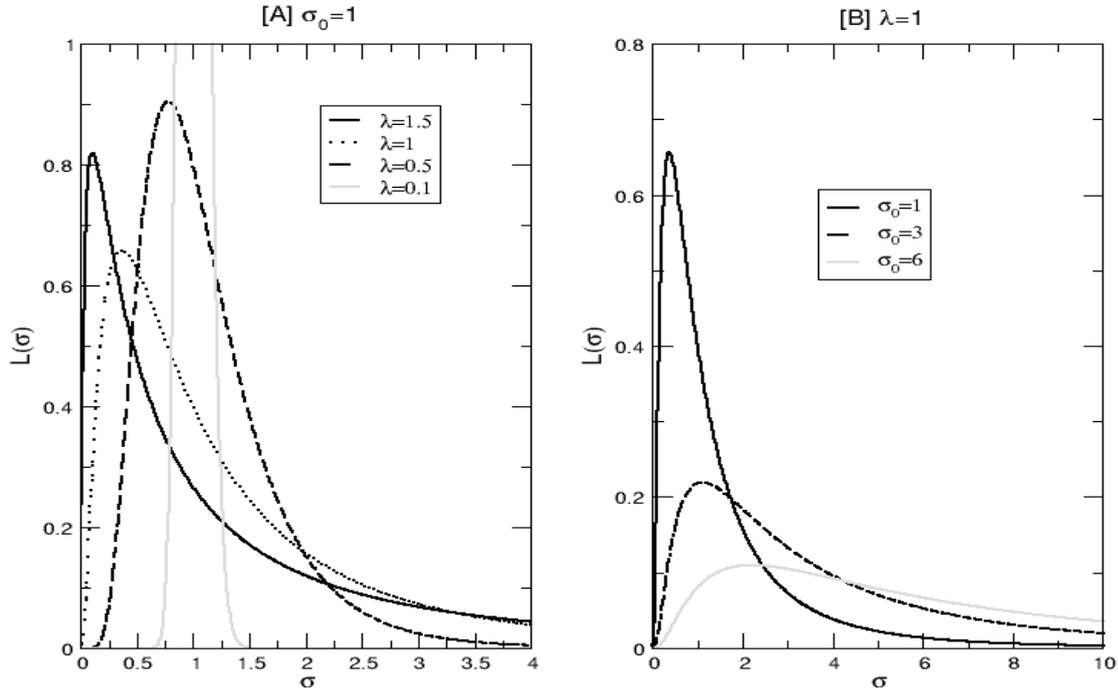


Figura C.2: Ilustração da dependência da distribuição log-normal (C.4) em função dos parâmetros λ, σ_0 .

De posse das flutuações em uma determinada escala para uma determinada energia (C.2) e da flutuação da energia (C.4) a função densidade de probabilidade (FDP) é obtida de forma geral como uma convolução

$$\rho_\lambda(u) = \int_0^\infty M(u, \sigma) L(\sigma) d\sigma \quad (\text{C.6})$$

que no caso de (C.2) e (C.4) torna-se

$$\rho_\lambda^{LN}(u) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) \frac{d\sigma}{\sigma^2}. \quad (\text{C.7})$$

Uma interpretação intuitiva para o procedimento descrito acima é ver a FDP como a soma de distribuições Gaussianas com uma mesma média mas com diferentes larguras σ . No modelo log-normal essas larguras são de tal forma que a distribuição de $\ln(\sigma)$ seja normal (Gaussiana). O valor de σ_0 é a largura média das Gaussianas a serem somadas e λ é a dispersão em torno deste valor médio indicando a faixa das Gaussianas que serão somadas.

Quando tomamos $\lambda \rightarrow 0$ a função log-normal $L(\sigma)$ tende a uma função δ de Dirac $\delta(\sigma - \sigma_0)$ (veja figura C.3) e teremos como consequência que a FDP se tornará uma Gaussiana de largura σ_0 . Já quando λ cresce, teremos como consequência que a FDP será uma soma de várias Gaussianas de diversas larguras. Estes resultados estão coerentes com o cenário descrito na tabela C.1 se pensarmos que λ é inversamente proporcional à escala do sistema l .

Assimetrias

Uma característica fundamental típica de sistemas turbulentos, que foi ignorada até o momento, é que as FDPs não são simétricas em relação ao seu ponto médio. De fato, os resultados

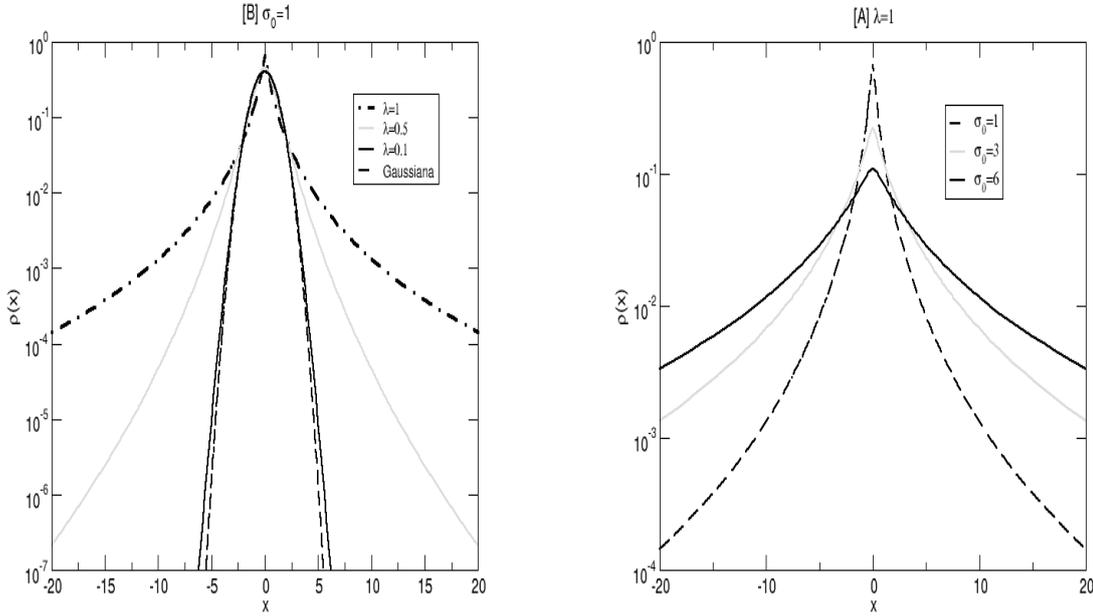


Figura C.3: Ilustração da dependência da FDP obtida pelo modelo log-normal em função da variação dos parâmetros λ, σ_0 como na figura C.2.

mostrados para séries do TCABR (Figs. 6.7 e 6.13) mostram que é este o caso também de nossos dados. No modelo log-normal utilizado acima esta assimetria jamais surgirá uma vez que para obter a FDP estamos realizando uma somatória de Gaussianas com uma mesma média. O procedimento proposto já em [Castaing et al., 1990] é realizar uma modificação na distribuição Gaussiana (C.2) acrescentando um termo assimétrico

$$M_{\bar{u}}^{\alpha_c}(u, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2} \left(1 - \alpha_c \frac{(u - \bar{u})/\sigma}{\sqrt{1 + ((u - \bar{u})/\sigma)^2}}\right)\right). \quad (\text{C.8})$$

O parâmetro $\alpha_c \in [-1, 1]$ controla o grau de assimetria da distribuição como ilustrado na figura C.4 e é subtraído de 1 em (C.8) ao invés de somado para dar conta de uma cauda maior para flutuações positivas. Em [Castaing et al., 1990] é utilizado o valor de $\alpha_c = -0.18$ que pareceu adequado para diferentes experimentos. É importante ressaltar que a distribuição (C.8) não está normalizada e não pretende ser a distribuição real das flutuações para um determinado fluxo de energia, mas apenas dar conta das notórias assimetrias.

C.3 Análise dos dados do TCABR

As funções densidade de probabilidade (FDP) obtidas das séries temporais estão ilustradas nas figuras 6.7 e 6.13. Os resultados obtidos mostram uma grande diversidade tanto se compararmos as FDPs obtidas em um mesmo período quanto se compararmos as duas distribuições de potencial elétrico ou da densidade de íons.

Apesar dessa variabilidade, os modelos teóricos descritos acima permitem uma interpretação satisfatória de todos os dados. Inicialmente notamos a clara distinção da distribuição Gaussiana,

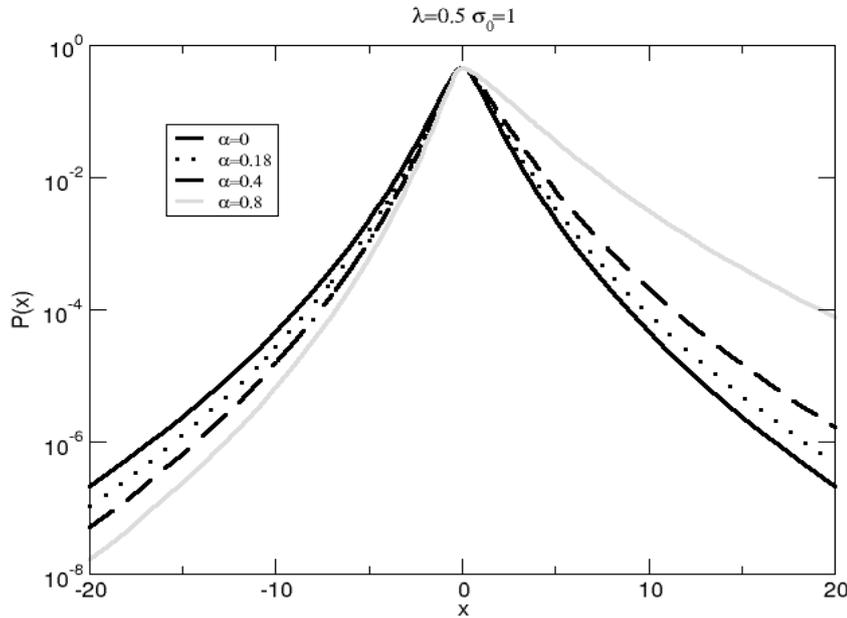


Figura C.4: Função densidade de probabilidade obtida através do modelo lognormal (C.4) utilizando a relação (C.8) para diferentes valores da constante de assimetria α_c .

com o surgimento de caudas aproximadamente exponenciais ou, o que parece ser mais típico, caudas que caem mais lentamente que exponenciais e mais rapidamente que leis de potência. A distribuição da figura 6.7B possui uma cauda aproximadamente exponencial e uma aproximadamente Gaussiana. Já a distribuição da figura 6.7A possui caudas típicas de exponenciais esticadas. Conforme ressaltado na seção C.1 estas características condizem com as observações típicas de sistemas turbulentos. O modelo log-normal resulta em distribuições com essas mesmas características. Assim podemos interpretar que caudas aproximadamente Gaussianas, do tipo exponencial e de exponenciais esticadas obtidas para as séries experimentais do TCABR estão associadas a observações nas escalas integrais, inercial e dissipativa da cascata de turbulência ilustrada na figura C.1.

Uma característica predominante em nossos dados experimentais, que é mais acentuada do que outros resultados de turbulência, é a assimetria. Atribuímos esta característica a dinâmica do plasma na borda do Tokamak e acreditamos que duas caudas assimétricas seriam visíveis em todas as distribuições caso tivéssemos uma estatística suficiente e observássemos em escalas suficientemente refinadas. Quando observamos em uma escala maior e, levando em conta a baixa estatística, é natural que a distribuição tenda a uma Gaussiana, fazendo com que primeiramente a cauda menor desapareça. Este parece ser o motivo pelo qual, em alguns casos, somente uma cauda pode ser claramente observada. No caso do potencial flutuante do TextUp (figura 6.2) podemos pensar que estamos observando em uma escala muito grande, pois obtivemos uma FDP perfeitamente Gaussiana e não constatamos assimetrias. Esta hipótese de que a baixa estatística evita o surgimento da outra cauda está coerente com o fato de que, apesar de distintas entre si, as flutuações do campo elétrico apresentam uma preferência pelo sentido positivo enquanto que as flutuações da densidade (corrente de saturação) pelo sentido negativo. Aparentemente

no primeiro conjunto de dados as escalas observadas pela corrente de saturação foram maiores que no segundo conjunto de dados acontecendo o inverso para a flutuação do potencial elétrico.

Usualmente as experiências designadas para medir a turbulência do plasma calculam a flutuação de uma grandeza (por exemplo a temperatura) fazendo a subtração de seu valor ($\delta T_i = T_i^1 - T_i^2$) em duas sondas que distam r , a escala da turbulência que está sendo medida. Em nosso caso estamos analisando o sinal de uma única sonda fazendo com que a escala do sistema que estamos observando seja definida pelas condições do plasma naquele disparo.

Para realizar uma análise quantitativa dos modelos discutidos acima escolhemos a série de flutuação do potencial elétrico do primeiro conjunto de dados (Figura 6.7A) pois foi a que apresentou mais claramente as propriedades turbulentas. Na figura C.5 apresentamos o melhor ajuste obtido a partir do modelo log-normal (Eq. (C.6)) aos dados³. Os parâmetros escolhidos foram: parâmetro de assimetria $\alpha_c = 0,18$ de acordo com [Castaing et al., 1990]⁴ constatamos que surpreendentemente este valor se aplica neste caso; valor médio $x_0 = 1,608$, obtido diretamente da série temporal; dispersão característica $\sigma_0 = 1,87$ obtida como o valor da dispersão da melhor Gaussiana ajustada à série; variância da distribuição das flutuações $\lambda = 0,67$ obtido a partir da inspeção visual dos resultados. Constatamos ainda uma arbitrariedade na escolha de σ_0 uma vez que um outro valor característico seria a própria dispersão da série total que, no entanto, é muito superior a este valor ($\sigma_s \approx 3$) e não permitia um ajuste adequado dos dados. Este procedimento levou-nos a um ajuste bom dos dados experimentais indicando a validade do modelo log-normal para esta série do potencial flutuante e reforçando a idéia de uma turbulência bem desenvolvida na borda do TCABR.

Apesar do modelo log-normal interpretar de forma coerente todos os resultados, questionamentos surgem quando observamos a FDP da série de potencial flutuante do segundo conjunto de dados (Fig. 6.7B). Notamos uma assimetria muito mais acentuada do que a do primeiro conjunto de dados, analisada em detalhe aqui. A interpretação do modelo log-normal, ressaltada acima, é de que o sistema foi observada em uma escala maior e a função densidade de probabilidade aproxima-se de uma Gaussiana. Entretanto, no caso do TCABR, esta distribuição apresenta uma assimetria muito elevada, fazendo com que para um ajuste aproximado dos dados tenhamos que elevar o parâmetro α_c da Eq. (C.8) até valores próximos a 40%. Vimos que a introdução da assimetria feita na equação (C.8) é, até certo ponto, artificial, uma vez que o termo foi introduzido justamente para dar conta das assimetrias e não para descrever um processo específico da turbulência. A utilização deste fator como parâmetro de ajuste em cada escala deve ser encarado como uma debilidade do modelo. Podemos pensar que eventualmente esta assimetria tenha origens em processos específicos do plasma, como sugerido por [Antar et al., 2001, Ferreira et al.,]. Parece-nos importante que uma análise futura mais precisa determine se os eventos intermitentes que geram as caudas (em especial as assimétricas) são bem explicado pelos modelos de turbulência tradicional (como o log-normal ou outro) e em que casos é necessário incluir efeitos de estruturas internas do plasma.

³Note que não é possível realizar um ajuste direto do modelo uma vez que a FDP em cada ponto é resultado de uma integração. Realizamos uma inspeção visual a partir dos resultados fornecidos por um integrador (Maple VI).

⁴O sinal contrário entre os valores utilizados está associado a uma tendência em nossos dados por flutuações de valores positivos.

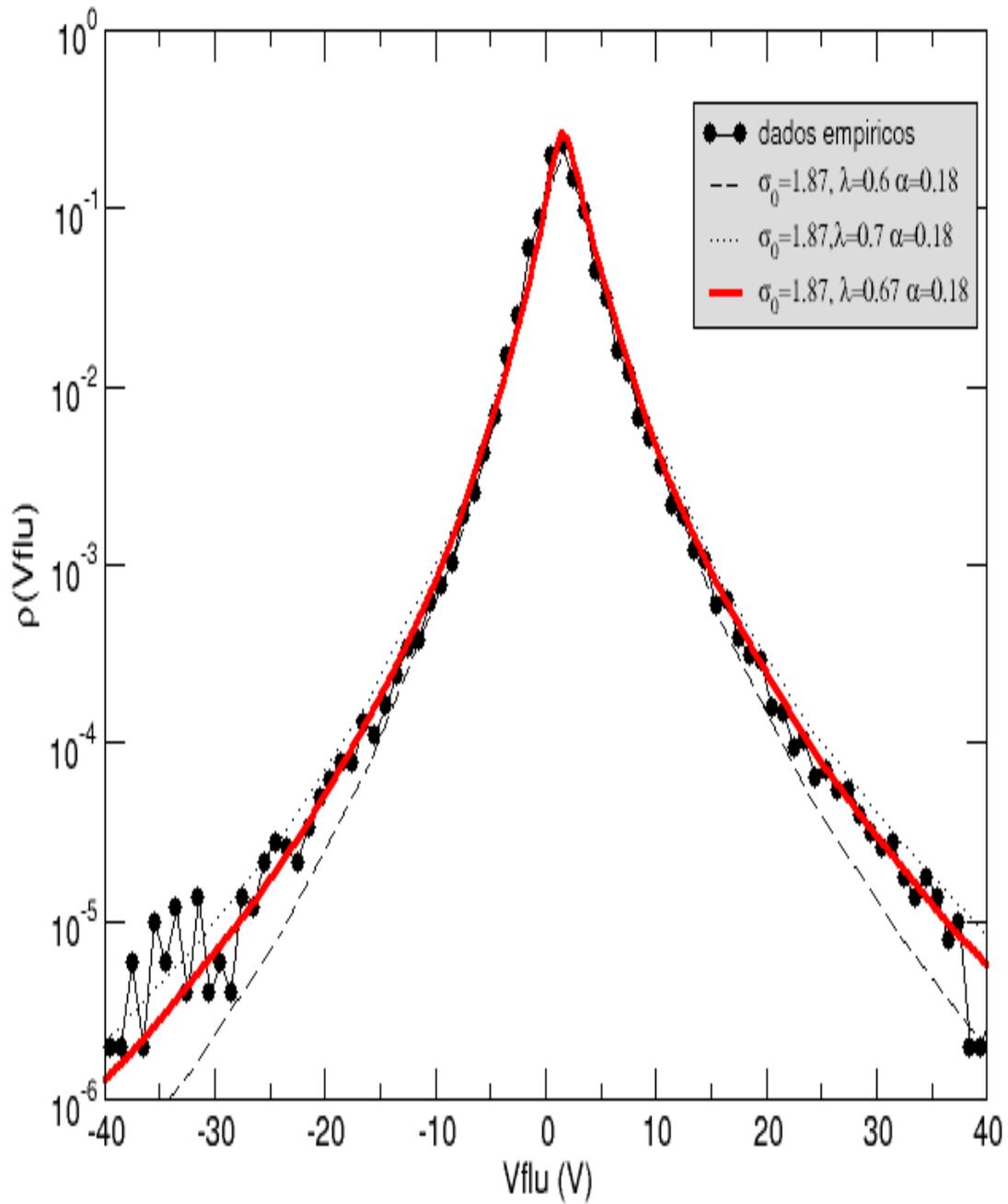


Figura C.5: Ajuste do modelo log-normal aos dados experimentais do potencial elétrico do TCABR. Podemos estimar $\lambda = 0,67 \pm 0,02V$.

Bibliografia

- [Afraimovich, 1997] Afraimovich, V. (1997). Pésin's dimension for poincaré recurrences. *Chaos*, 7(1):12.
- [Afraimovich e Zaslavsky, 1997] Afraimovich, V. e Zaslavsky, G. M. (1997). Fractal and multifractal properties of exit times and poincaré recurrences. *Physical Review E*, 55(5):5418.
- [Alligood et al., 1996] Alligood, K. T., Sauer, T. D., e Yorke, J. A. (1996). *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Berlin.
- [Anishchenko et al., 1994] Anishchenko, V., Neiman, A. B., e L.O.Chua (1994). Chaos-chaos intermittency and 1/f noise in chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):99–107.
- [Antar et al., 2001] Antar, G. Y. et al. (2001). Experimental evidence of intermittent convection in the edge magnetic of confinement devices. *Physical Review Letters*, 87(6):065001–1.
- [Aquino et al., 2001] Aquino, G., Grigolini, P., e Scafetta, N. (2001). Sporadic randomness, Maxwell's demon and the poincaré recurrence times. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12(11):2023–2038.
- [Arneodo et al., 1997] Arneodo, A., Muzy, J. F., e Roux, S. G. (1997). Experimental analysis of self-similarity and random cascade processes: Application to fully developed turbulence data. *J. Physique II*, 7:363.
- [Balakrishnan et al., 2001] Balakrishnan, V., Nicolis, C., e Nicolis, G. (2001). Recurrence time statistics in chaotic dynamics: Multiple recurrences in intermittent chaos. *Stochastics and Dynamics*, 1(3):345.
- [Balakrishnan et al., 2000] Balakrishnan, V., Nicolis, G., e Nicolis, C. (2000). Recurrence time statistics in deterministic and stochastic dynamical systems in continuous time: A comparison. *Physical Review E*, 61(3):2490–2499.
- [Balescu, 1997] Balescu, R. (1997). Continuous time random walk model for standard map dynamics. *Physical Review E*, 55(3):2465.
- [Balescu et al.,] Balescu, R., Vlad, M., e Spineau, F. *Tokamap: A Model of a Partially Stochastic Toroidal Magnetic Field*, volume 511 de *Lectures Notes in Physics*, p. 243 – 261. Springer-Verlag.
- [Baptista e Caldas, 2000] Baptista, M. e Caldas, I. (2000). On the stock market recurrence. *Physica A*, 284:2000.

- [Baptista et al., 2002] Baptista, M., Caldas, I., de Sá, W., e Elizondo, J. (2002). Statistics of plasma fluctuations in runaway discharges in TCABR tokamak. *Brazilian Journal of Physics*, 32(1):95.
- [Baptista et al., 2001a] Baptista, M. S., Caldas, I., Heller, M., e Ferreira, A. A. (2001a). Onset of symmetric plasma turbulence. *Physics of Plasmas*, 8:4455.
- [Baptista et al., 2001b] Baptista, M. S., Caldas, I., Heller, M., Ferreira, A. A., Bengtson, R., e Stöckel, J. (2001b). Recurrence of plasma edge turbulence. *Physica A*, 301:150–162.
- [Baptista e Caldas, 2002] Baptista, M. S. e Caldas, I. L. (2002). Stock market dynamics. *Physica A*, 312:539–564.
- [Baptista et al., 2000] Baptista, M. S. et al. (2000). Low-dimensional dynamics in observables from complex and higher-dimensional systems. *Physica A*, 287:91.
- [Benkadda et al., 1997] Benkadda, S., Kassibrakis, S., White, R., e Zaslavsky, G. M. (1997). Self-similarity and transport in the standard map. *Physical Review E*, 55:4909.
- [Benkadda et al., 1999] Benkadda, S., Kassibrakis, S., White, R., e Zaslavsky, G. M. (1999). Reply to comment. *Physical Review E*, 59(3):3761.
- [Bergé et al., 1995] Bergé, P., Pomeau, Y., e Dubois-Gance., M. (1995). *Dos Ritmos ao Caos*. Editora da Unesp, São Paulo.
- [Bergé et al., 1984] Bergé, P., Pomeau, Y., e Vidal, C. (1984). *Order Within Chaos*. John Willey & Sons, Paris.
- [Biskamp et al., 1990] Biskamp, D., Welter, H., e Walter, M. (1990). Statistical properties of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids B2*, p. 3024.
- [Biskamp et al., 1994] Biskamp, D., Welter, H., e Walter, M. (1994). Spectral properties and statistics of resistive drift-wave turbulence. *Physics Letters A*, 186:239.
- [Bruin e Vaienti, 2003] Bruin, H. e Vaienti, S. (2003). Return time statistics for unimodal maps. *Fundamenta Mathematicae*, 176:77.
- [Bunde et al., 2003a] Bunde, A., Eichner, J., Govindan, R., Havlin, S., Koscielny-Bunde, E., Rybski, D., e Vjushin, D. (2003a). Power-law persistence in the atmosphere: analysis and applications. Em *Nonextensive Entropy-Interdisciplinary Applications*. New York Oxford University Press.
- [Bunde et al., 2003b] Bunde, A., Eichner, J. F., Havlin, S., e Kantelhardt, J. W. (2003b). The effect of long-term correlations on the return periods of rare events. *Physica A*, 330:1–7.
- [Caldas et al., 2002] Caldas, I., Viana, R., Araujo, M., Vannucci, A., da Silva, E. C., Ullmann, K., e Heller, M. (2002). Control of chaotic magnetic fields in tokamak. *Brazilian Journal of Physics*, 32(4):980.
- [Callen et al., 1992] Callen, J. D., Carreras, B. A., e Stambaugh, R. D. (1992). Stability and transport processes in tokamak plasmas. *Physics Today*, Jan.
- [Carreras et al., 1999] Carreras, B. et al. (1999). Self-similarity properties of the probability distribution function of turbulence-induced particle fluxes at the plasma edge. *Physical Review Letters*, 83(18):3653.

- [Carras et al., 1998] Carras, B. A. et al. (1998). Self-similarity of the plasma edge fluctuations. *Physics of Plasma*, 5(10):3632.
- [Castaing et al., 1990] Castaing, B., Gagne, Y., e Hopfinger, E. (1990). Velocity probability density functions of high reynold number turbulence. *Physica D*, 46:177–200.
- [Chaikovsy e Zaslavsky, 1991] Chaikovsy, D. K. e Zaslavsky, G. M. (1991). Channeling and percolation in two-dimensional chaotic dynamics. *Chaos*, 1(4):463.
- [Chirikov, 1979] Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52:265.
- [Chirikov e Shepelyansky, 1984] Chirikov, B. V. e Shepelyansky, D. L. (1984). Correlation-properties of dynamical chaos in hamiltonian-systems. *Physica D*, 13(3):395–400.
- [Chirikov e Shepelyansky, 1999] Chirikov, B. V. e Shepelyansky, D. L. (1999). Asymptotic statistics of poincaré recurrences in hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 82(3):528.
- [Chirikov e Shepelyansky, 2002] Chirikov, B. V. e Shepelyansky, D. L. (2002). Universal power-law decay in hamiltonian systems? (reply). *Physical Review Letters*, 89(23):239402.
- [Cornfeld et al., 1982] Cornfeld, I., Fomin, S., e Sinai, Y. G. (1982). *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Corso e Rizzato, 1998] Corso, G. e Rizzato, F. B. (1998). Manifold reconnection in chaotic regimes. *Physical Review E*, 58(6):8013.
- [da Silva et al., 2001] da Silva, E. C., Caldas, I. L., e Viana, R. L. (2001). Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter. *Physics of Plasma*, 8(6):2855.
- [de Moura et al.,] de Moura, A. et al. *Physics Reports*. A ser publicado.
- [de S. Cavalcante e Leite, 2002] de S. Cavalcante, H. L. D. e Leite, J. R. S. (2002). Averages and critical exponents in type-III intermittent chaos. *Physical Review E*, 66:026210.
- [del Castillo-Negrete et al., 1996] del Castillo-Negrete, D., Greene, J. M., e Morrison, P. J. (1996). Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D*, 91:1–23.
- [Devaney, 1987] Devaney, R. L. (1987). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, California.
- [Feller, 1950] Feller, W. (1950). *An Introduction to probability theory and its applications*. John Willey & Sons, New York.
- [Ferrara e do Prado, 1994] Ferrara, N. F. e do Prado, C. P. C. (1994). *Caos, uma introdução*. Edgard Blücher, São Paulo.
- [Ferrara e Nascimento, 1987] Ferrara, N. F. e Nascimento, I. C. (1987). Fusão termonuclear controlada. Publicações IFUSP.
- [Ferreira et al., 2000] Ferreira, A. A., Heller, M. A., e Caldas, I. (2000). Experimental analysis of mode coupling and plasma turbulence induced by magnetic fields. *Physics of Plasma*, 7(9):3567–3572.

- [Ferreira et al.,] Ferreira, A. A., Heller, M. A., Caldas, I., Lerche, E. A., Ruchko, L. F., e Baccalá, L. A. Turbulence and transport in the scrape-off layer tcabr tokamak. Submetido.
- [Ferreira et al., 2002] Ferreira, A. A., Heller, M. V. A. P., Baptista, M., e Caldas, I. (2002). Statistics of turbulence induced by magnetic field. *Brazilian Journal of Physics*, 32(1):85.
- [Frisch, 1995] Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Frisch e Orszag, 1990] Frisch, U. e Orszag, S. A. (1990). Turbulence: Challenges for theory and experiment. *Physics Today*, Jan.:24–32.
- [Gao, 1999] Gao, J. B. (1999). Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications. *Physical Review Letter*, 83(16):3178.
- [Geisel et al., 1987] Geisel, T., Zacherl, A., e Radons, G. (1987). Generic 1/f noise in chaotic hamiltonian dynamics. *Physical Review Letters*, 59(22):2503.
- [Grassberger e Kantz, 1985] Grassberger, P. e Kantz, H. (1985). Universal scaling of long-time tails in hamiltonian systems? *Physics Letters A*, 113(4):167.
- [Grebogi et al., 1987] Grebogi, C., Ott, E., Romeiras, F., e Yorke, J. A. (1987). Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Physical Review A*, 36(11):5365.
- [Grebogi et al., 1982] Grebogi, C., Ott, E., e Yorke, J. A. (1982). Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, 48(22):1507.
- [Grebogi et al., 1986] Grebogi, C., Ott, E., e Yorke, J. A. (1986). Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical Review Letters*, 57(11):1284.
- [Grebogi e Yorke, 1997] Grebogi, C. e Yorke, J. A., editores (1997). *The impact of chaos on science and society*. United Nations University Press, Tokyo.
- [Gross, 1984] Gross, R. A. (1984). *Fusion Energy*. John Wiley & Sons.
- [Hadyn et al., 2002] Hadyn, N., Luevano, J., Mantica, G., e Vaienti, S. (2002). Multifractal properties of return time statistics. *Physical Review Letters*, 88(22):224502–1.
- [Heagy et al., 1994] Heagy, J. F., Platt, N., e Hammel, S. M. (1994). Characterization of on-off intermittency. *Physical Review E*, 49(2):1140.
- [Henon, 1976] Henon, M. (1976). A two dimensional mapping with a strange attractor. *Communication in Mathematical Physics*, 50:69–77.
- [Hirata, 1993] Hirata, M. (1993). Poisson law for axiom a diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 13(3):533–556.
- [Hirata et al., 1999] Hirata, M., Saussol, B., e Vaienti, S. (1999). Statistics of return times: A general framework and new application. *Communications in Mathematical Physics*, 206:33–55.
- [Horton e Reichl, 1984] Horton, C. W. e Reichl, L. E. (1984). *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*. John Wiley & Sons, New York.
- [Horton et al., 1998] Horton, W., Park, H., Kwon, J., Strozzi, D., Morrison, P. J., e Choi, D. (1998). Drift wave test particle transport in reversed shear profile. *Physics of Plasma*, 5:3910.

- [Huang e Kim, 1987] Huang, J.-Y. e Kim, J.-J. (1987). Type-II intermittency in a coupled nonlinear oscillator: Experimental observation. *Physical Review A*, 36(3):1495.
- [Ichikawa et al., 1984] Ichikawa, Y. H., Kamimura, T., e Hatori, T. (1984). Statistical properties of nonlinear area-preserving maps. Em *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas*, p. 21. John Wiley & Sons.
- [Ichikawa et al., 1987] Ichikawa, Y. H., Kamimura, T., e Hatori, T. (1987). Stochastic diffusion in the standard map. *Physica D*, 29:248–255.
- [Ishizaki et al., 1990] Ishizaki, R., Horita, T., Kobayashi, T., e Mori, H. (1990). Long-time correlations and anomalous diffusion due to accelerator modes in the standard map. *Progress of Theoretical Physics*, 84(2):179.
- [Ishizaki et al., 1991] Ishizaki, R., Horita, T., Kobayashi, T., e Mori, H. (1991). Anomalous diffusion due to accelerator modes in the standard map. *Progress of Theoretical Physics*, 85(5):1013.
- [Kac, 1947] Kac, M. (1947). On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53:1002.
- [Kac, 1959] Kac, M. (1959). *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. Interscience, New York.
- [Kantelhardt et al., 2002] Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., e Stansley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316:87–114.
- [Kantz e Grassberger, 1987] Kantz, H. e Grassberger, P. (1987). Chaos in low-dimensional hamiltonian maps. *Physics Letters A*, 123(9):437.
- [Karney, 1983] Karney, C. F. F. (1983). Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D*, 8:360.
- [Károly et al., 1999] Károly, G., Péntek, A., Toroczkai, Z., Tél, T., e Grebogi, C. (1999). Chemical or biological activity in open chaotic flows. *Physical Review E*, 59(5):5468.
- [Károly e Tél, 1997] Károly, G. e Tél, T. (1997). Chaotic tracer scattering and fractal basin boundaries in a blinking vortex-sink system. *Physics Reports*, 290:125.
- [Klafter et al., 1996] Klafter, J., Schlesinger, M. F., e Zumofen, G. (1996). Beyond brownian motion. *Physics Today*, Feb.:33–39.
- [Kurka et al., 2002] Kurka, P., Penné, V., e Vaienti, S. (2002). Dynamically defined recurrence dimension. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8(1):137–146.
- [Lebowitz, 1999] Lebowitz, J. L. (1999). Statistical mechanics: A selective review of two central issues. *Reviews of Modern Physics*, 71(2):346–357.
- [Lichtenberg e Lieberman, 1983] Lichtenberg, A. L. e Lieberman, M. A. (1983). *Regular and Chaotic Motion*. Springer-Verlag, New York.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Sci.*, 20:130.
- [Madan, 1993] Madan, R. N., editor (1993). *Chua's circuit: a paradigm for chaos*. World Scientific, Singapore.

- [Manneville, 1980] Manneville, P. (1980). Intermittency, self-similarity and a $1/f$ spectrum in dissipative dynamical systems. *Le Journal de Physique*, 41(11):1235.
- [Martin e Taylor, 1984] Martin, T. J. e Taylor, J. B. (1984). Ergodic behaviour in a magnetic limiter. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 26(1B):321.
- [May, 1976] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(Jun 10):459.
- [Medrano-Torricos, 2004a] Medrano-Torricos, R. O. (2004a). Detecção de órbitas periódicas no circuito de chupa. Tese de Doutorado - IFUSP. A ser publicada. Orientador: Iberê L. Caldas.
- [Medrano-Torricos, 2004b] Medrano-Torricos, R. O. (2004b). Homoclinic orbits in a piecewise system and their relation with invariant sets. *Physica D*. Aceito para publicação.
- [Meiss, 1997] Meiss, J. D. (1997). Average exit time for volume preserving maps. *Chaos*, 7(1):139–147.
- [Melissinos, 1966] Melissinos, A. C. (1966). *Experiments in Modern Physics*. Academic Press, Nova York.
- [Montroll e Shlesinger, 1984] Montroll, E. W. e Shlesinger, M. F. (1984). On the wonderful world of random walks. Em *Nonequilibrium Phenomena II: from stochasticity to hydrodynamics*, p. 1–122. North-Holland.
- [Nicolis e Prigogine, 1989] Nicolis, G. e Prigogine, I. (1989). *Exploring Complexity*. W. H. Freeman, New York.
- [Nussenzveig, 1999] Nussenzveig, H. M., editor (1999). *Complexidade*. Editora da UFRJ, Rio de Janeiro.
- [Ott, 1993] Ott, E. (1993). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Ottino, 1990] Ottino, J. M. (1990). *The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport*. Cambridge Uni. Press, Cambridge.
- [Palladino, 1998] Palladino, F. H. (1998). *Difusão e Mistura em Fluidos Caóticos*. Dissertação de mestrado junto ao Instituto de Física da USP. Orientador: Prof. Iberê Caldas.
- [Palladino et al., 2004] Palladino, F. H., Corso, G., e Caldas, I. L. (2004). Folding characterization in conservative chaotic fluid flows. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19:1087–1094.
- [Panouiu, 2000] Panouiu, N.-C. (2000). Anomalous diffusion in two-dimensional potentials with hexagonal symmetry. *Chaos*, 10(1):166.
- [Pomeau e Manneville, 1980] Pomeau, Y. e Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communication Mathematical Physics*, 74:189–197.
- [Press, 1995] Press, W. H. (1995). *Numerical Recipes in C*. Cambridge Uni. Press, Cambridge.
- [Rechester et al., 1981] Rechester, A. B., Rosenbluth, M. N., e White, R. B. (1981). Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov-Taylor model. *Physical Review A*, 23:2664.

- [Rechester e White, 1980] Rechester, A. B. e White, R. B. (1980). Calculation of turbulent diffusion for the Chirikov-Taylor model. *Physical Review Letters*, 44:1586.
- [Rom-Kedar e Zaslavsky, 1999] Rom-Kedar, V. e Zaslavsky, G. (1999). Islands of accelerator modes and homoclinic tangles. *Chaos*, 9:697.
- [Ruelle, 1991] Ruelle, D. (1991). *Chance and Chaos*. Princeton Uni. Press, Princeton.
- [Sanjuán et al., 2003] Sanjuán, M. A. F., Horita, T., e Aihara, K. (2003). Opening a closed hamiltonian map. *Chaos*, 13(1):17.
- [Schneider et al., 2002] Schneider, J., Tél, T., e Neufeld, Z. (2002). Dynamics of leaking hamiltonian systems. *Physical Review E*, 66:066218.
- [Shlesinger et al., 1993] Shlesinger, M. F., Zaslavsky, G. M., e Klafter, J. (1993). Strange kinetics. *Nature*, 363:31.
- [Sokolov et al., 2002] Sokolov, I. M., Klafter, J., e Blumen, A. (2002). Fractional kinetics. *Physics Today*, Nov.:48–54.
- [Solomon et al., 1993] Solomon, T. H., Weeks, E. R., e Swinney, H. L. (1993). Observation of anomalous diffusion and lévy flights in a two dimensional rotating flow. *Physical Review Letters*, 71(24):3975.
- [Takens, 1981] Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. Em *Springer Lectures Notes in Mathematics*, volume 898, p. 366. Springer.
- [Tél et al., 2000] Tél, T., Károly, G., Péntek, A., Scheuring, I., Toroczkai, Z., Grebogi, C., e Kadtké, J. (2000). Chaotic advection, diffusion, and reactions in open flows. *Chaos*, 10(1):89.
- [Toroczkai et al., 1998] Toroczkai, Z., Károly, G., Péntek, A., Tél, T., e Grebogi, C. (1998). Advection of active particles in open chaotic flows. *Physical Review Letters*, 80(3):500.
- [Ullmann e Caldas, 2000] Ullmann, K. e Caldas, I. L. (2000). A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter an its dynamical analysis. *Chaos, Solitons and Fractals*, 11:2129–2140.
- [Vanin e Guffon, 1996] Vanin, V. R. e Guffon, P. (1996). Tópicos avançados em tratamento estatístico de dados em física experimental. Publicações LAL-IFUSP.
- [Városi et al., 1991] Városi, F., Antonsen Jr., T. M., e Ott, E. (1991). The spectrum of fractal dimensions of passively convected scalar gradients in chaotic fluid flows. *Physics of Fluids A*, 3:1017.
- [Vergassola, 1998] Vergassola, M. (1998). Standard and anomalous diffusion in dynamical systems. Em *Analysis and Modelling of Discrete Dynamical Systems*. Gordon and Breach Science Publishers.
- [Walker e Ford, 1969] Walker, G. H. e Ford, J. (1969). Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems. *Physical Review E*, 188:416.
- [White et al., 1998] White, R. B., Benkadda, S., Kassibrakis, S., e Zaslavsky, G. M. (1998). Near threshold anomalous transport in the standard map. *Chaos*, 4:757.

- [Wootton et al., 1990] Wootton, A. J., Carreras, B. A., Matsumoto, H., McGuire, K., Peebles, W. A., Ritz, C. P., Terry, P. W., e Zweben, S. J. (1990). Fluctuations and anomalous transport in tokamaks. *Physics of Fluids B*, 2:2878.
- [Zaslavsky, 1999] Zaslavsky, G. (1999). Chaotic dynamics and the origin of statistical laws. *Physics Today*, Aug.:39–45.
- [Zaslavsky, 2002a] Zaslavsky, G. (2002a). Dynamical traps. *Physica D*, 168-169:292–304.
- [Zaslavsky, 1991] Zaslavsky, G. M. (1991). *Weak Chaos*. : Cambridge University Press, New York.
- [Zaslavsky, 1994] Zaslavsky, G. M. (1994). Renormalization group theory of anomalous transport in systems with hamiltonian chaos. *Chaos*, 4(1):25.
- [Zaslavsky, 1995] Zaslavsky, G. M. (1995). From hamiltonian chaos to Maxwell’s demon. *Chaos*, 5(4):653.
- [Zaslavsky, 2002b] Zaslavsky, G. M. (2002b). Chaos, fractinal kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, 371:461.
- [Zaslavsky e Edelman, 2000] Zaslavsky, G. M. e Edelman, M. (2000). Hierarchical structures in the phase space and fractional kinetics: I. classical systems. *Chaos*, 10(1):135.
- [Zaslavsky et al., 1997] Zaslavsky, G. M., Edelman, M., e Niyazov, B. A. (1997). Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos*, 7:159.
- [Zaslavsky et al., 2000] Zaslavsky, G. M., Edelman, M., Weitzner, H., Carreras, B., Mckee, G., Bravenec, R., e Fonck, R. (2000). Large-scale behavior of the tokamak density fluctuations. *pp*, 7(9):3691.
- [Zaslavsky et al., 1993] Zaslavsky, G. M., Stevens, D., e Weitzner, H. (1993). Self-similar transport in incomplete chaos. *Physical Review E*, 48(3):1683.
- [Zaslavsky e Tippett, 1991] Zaslavsky, G. M. e Tippett, M. K. (1991). Connection between recurrence-time statistics and anomalous transport. *Physical Review Letters*, 67(23):3251.
- [Zumofen e Klafter, 1993] Zumofen, G. e Klafter, J. (1993). Scale-invariant motion in intermittent chaotic systems. *Physical Review E*, 47(2):851.
- [Zumofen e Klafter, 1994] Zumofen, G. e Klafter, J. (1994). Random walks in the standard map. *Europhys. Lett.*, 25(8):565–570.
- [Zumofen e Klafter, 1999] Zumofen, G. e Klafter, J. (1999). Comment. *Physical Review E*, 59(3):3756.