

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
Departamento de Física Matemática

Buracos Negros e Termodinâmica

Davi Giugno

Banca Examinadora

Prof. Dr. Élcio Abdalla (IFUSP) - Orientador

Prof. Dr. Mário José de Oliveira (IFUSP)

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT/UNESP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

São Paulo
Maio de 2001

Dedico este trabalho às minhas sobrinhas Isabela, Giulia e Bruna

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Elcio Abdalla, por seus comentários, críticas, sugestões, esclarecimentos e, sobretudo, por sua paciência e boa-vontade, que tornaram possível a realização deste trabalho.

Devo sinceramente agradecer à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro.

Em seguida, gostaria de agradecer a todos os colegas do Departamento de Física Matemática do Instituto de Física da USP, pelo apoio e incentivo. Em particular, lá vão os agradecimentos ao inesquecível Paulo Bergo e família, por seu apoio e companheirismo, ao Lamartine, ao João Assirati, ao Luciano, ao Ivan, ao Marcelo Pires (por seu auxílio no manuseio de programas de cálculo e processamento de texto), ao Cedric, ao Leonardo, ao Fábio, aos irrepreensíveis Takeshi Osada e Bin Wang (pela amizade e prestatividade) e a todos os demais, que, até mesmo com o simples silêncio, criaram uma atmosfera propícia ao desenvolvimento deste trabalho.

Vale registrar os comentários, sugestões e incentivo de André Gimenez Bueno e Daniel Vanzella, colegas do IFT/UNESP.

Agradeço a todos os amigos fora da comunidade acadêmica, pela compreensão.

E faz-se indispensável o agradecimento à minha família, em particular à minha mãe, Shirley, e à minha irmã, Cristina, pelo inestimável apoio moral, em todas as horas.

Resumo

A finalidade deste trabalho é estabelecer as conexões entre física de buracos negros e termodinâmica, atentando para eventuais semelhanças e diferenças entre ramos aparentemente bem diversos da física moderna. Tais conexões foram inicialmente buscadas e estabelecidas na década de 1970, graças ao trabalho de S. Hawking e Jacob D. Bekenstein, entre outros, e sucessivamente aprofundadas nos anos subseqüentes, notadamente na última década. O mérito maior do primeiro foi estabelecer a emissão de radiação com espectro térmico por buracos negros em geral, mesmo aqueles desprovidos de rotação e carga (buracos negros de Schwarzschild). O segundo encarregou-se de correlacionar leis termodinâmicas clássicas com processos envolvendo buracos negros.

Neste trabalho, procuramos inicialmente estudar os buracos negros de Schwarzschild e Kerr-Newman no tocante às suas propriedades gerais, bem como o problema do movimento de partículas nos espaços-tempos em questão, para discutir-se brevemente o problema de extração de energia de buracos negros, como apontado por Penrose[4] e outros. Estabelecidas as propriedades gerais, pode-se enfim derivar a Termodinâmica destes buracos, correlacionando-se entropia e área, e obter expressões para a temperatura de corpo negro dos mesmos - em perfeita consonância com a derivação de Hawking, não abordada aqui, feita através da Teoria Quântica de Campos. Com a temperatura, pode-se estudar as capacidades térmicas, reveladoras de propriedades típicas de buracos negros não compartilhadas por sistemas clássicos. A reboque destas, entra a discussão sobre a estabilidade termodinâmica de buracos negros em ensembles canônicos e microcanônicos, através do método das séries lineares, de Poincaré, fechando o presente trabalho.

Assim, os capítulos 1 e 2 tratam das soluções de Schwarzschild e Kerr-Newman, respectivamente, abordando-lhes as propriedades gerais e o problema do movimento de partículas, materiais ou não, nessas geometrias. O capítulo 3 estabelece as pontes entre Termodinâmica e buracos negros, sendo crucial para o restante do trabalho. No capítulo 4 estudamos temperaturas e capacidades térmicas de diversos buracos negros, e finalmente no capítulo 5 vem o problema da estabilidade termodinâmica dos buracos negros.

Abstract

In the present work, we have established the connections between black-hole physics and thermodynamics, searching for similarities and differences between these two branches of physics, which might look quite far apart. Such links were first sought for and established during the 1970s, thanks to the pioneering work of S. Hawking and Jacob D. Bekenstein, among others, and continuously developed in the following years, notably in the last decade. Hawking's major achievement was the prediction, from arguments based on Quantum Field Theory, that black holes radiate with a thermal spectrum, even the uncharged and nonrotating ones (the Schwarzschild black holes). Bekenstein's biggest merit was to find the link between classical thermodynamical laws and processes involving black holes. In this work, we started with Schwarzschild and Kerr-Newman black holes, working out their general properties, as well as the problem of particle motion in such spacetimes, so that we could briefly discuss the issue of energy extraction from black holes, as established by Penrose and others. Once the general features of these black holes were known, it was possible to derive the black-hole thermodynamics, due to a simple relation between black-hole entropy and area. Expressions for the black-hole temperature were then easily obtained, in perfect agreement with Hawking's own derivation, not considered here. With temperatures at hand, heat capacities could be thoroughly examined, showing intrinsic properties of black holes, not shared by classical systems. The question of thermodynamic stability of black holes arose naturally from heat capacity analysis, and we have analysed black holes in both microcanonical and canonical ensembles, in the light of Poincaré's linear series method, completing the current work. Chapters 1 and 2 deal with the Schwarzschild and Kerr-Newman solutions, respectively, deriving their general features and working out particle motion in these geometries. Chapter 3 establishes the links between black-hole physics and thermodynamics, being of crucial importance for the subsequent chapters. Chapter 4 provides an extensive study of black-hole temperatures and heat capacities, paving the way for the closing chapter, Chapter 5, concerning to thermodynamic stability of black holes.

Sumário

1	A Solução de Schwarzschild	11
1.1	Propriedades Gerais	11
1.2	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	16
1.3	Partícula na Geometria de Schwarzschild	18
2	A Solução de Kerr-Newman	33
2.1	Propriedades Gerais	33
2.2	Partícula na Geometria de Kerr-Newman	39
3	A Conexão com a Termodinâmica	51
4	Temperaturas e Capacidades Térmicas	61
5	Estabilidade de Buracos Negros	89
5.1	Séries Lineares e Ensembles Termodinâmicos	89
5.2	O Método de Poincaré	90
5.3	A Estabilidade do Buraco de Schwarzschild	91
5.4	A Estabilidade do Buraco de Kerr-Newman	95
5.4.1	Ensemble Microcanônico	95
5.4.2	Ensemble Canônico	97
5.5	Conclusões deste Capítulo	99
A	A Métrica de Kruskal-Szekeres	101
B	Extraindo Energia de Buracos Negros	105
B.1	A Galáxia de Misner	105
B.2	Injeção de Matéria no Buraco Negro	106
C	As Transformações de Legendre	109
C.1	Definição Geral	109

C.2 Alguns Exemplos 110

Capítulo 1

A Solução de Schwarzschild

1.1 Propriedades Gerais

A métrica de Schwarzschild é a métrica que descreve o espaço-tempo de buracos negros esfericamente simétricos e estáticos, representando na verdade um caso particular de uma classe bastante geral de buracos-negros, os buracos de Kerr-Newman, como veremos mais adiante. O motivo para uma discussão em separado é que várias propriedades e conceitos relevantes ficam bem mais simples na métrica de Schwarzschild, permitindo a assimilação de idéias bastante gerais na física de buracos negros, sendo possível generalizá-los para a solução de Kerr-Newman. Isto sem mencionar a parte histórica, pois foi uma das primeiras soluções das equações de Einstein com simetria esférica e independente do tempo, datando de 1916.¹

O elemento de linha desta métrica é dado por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.1)$$

onde t é o tempo de um observador distante, no infinito, muito longe do buraco negro, r é a coordenada radial de Schwarzschild, que não corresponde exatamente a distâncias físicas na direção radial, como veremos a seguir, M é o conteúdo de massa-energia do buraco negro e $d\Omega^2$ é o elemento de ângulo sólido, dado por

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (1.2)$$

¹Nota: no que se segue, utilizaremos o sistema de unidades geométrico, onde $\hbar = c = k_B = G = 1$, salvo menção explícita em contrário.

onde θ e ϕ são os ângulos polar e azimutal de um sistema esférico de coordenadas. A condição de observador distante traduz-se por $r \gg 2M$. Escrevendo-se $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, temos as seguintes componentes do tensor métrico em sua forma covariante, $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad , \quad g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \quad , \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin(\theta)^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Podemos desde já listar as componentes do tensor métrico contravariante, $g^{\mu\nu}$, obtidas por meio da identidade

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho. \quad (1.4)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad , \quad g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} \quad , \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \quad , \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \quad . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Desde já, podemos notar algumas peculiaridades da métrica. De início, já se nota que é estática, não só por não depender explicitamente de t , mas também por não apresentar termos cruzados envolvendo dt , tais como $drdt$. Isto significa que a métrica é invariante por inversão temporal, ou seja pela troca $t \rightarrow -t$. Outra questão é que a mesma se torna patológica quando $r = 2M$, pois aí $g_{tt} = 0$ e g_{rr} torna-se singular. Basicamente veremos que as coordenadas r e t trocam de papel em $r = 2M$, r passando a representar o tempo coordenado e t representando a coordenada radial, para $r < 2M$, pois g_{rr} é negativo e g_{tt} positivo nesta região, ao contrário do que ocorre para $r > 2M$. No entanto, veremos que $r = 2M$ é apenas uma singularidade do sistema de coordenadas, devido à má escolha do mesmo, não representando uma singularidade *física*, independente do sistema de coordenadas. A verdadeira singularidade física está em $r = 0$, como veremos mais adiante.

Devido a estes problemas, r não representa distâncias físicas na direção radial. Se precisarmos estabelecer tais distâncias entre dois eventos de coordenadas radiais r_1 e r_2 , respectivamente, fazemos $dt = d\theta = d\phi = 0$ em ds^2 , obtendo $ds = \sqrt{(g_{rr})}dr$. Assim, a distância física radial λ entre tais eventos é

$$\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{rr}} dr. \quad (1.6)$$

Para comprovar o que dissemos acerca de singularidades em $r = 0$ e em $r = 2M$, precisamos determinar a curvatura do espaço-tempo nestas regiões. E para tanto precisamos estabelecer o tensor de curvatura ou de Riemann para esta métrica, calculando suas componentes em $r = 2M$. Para isto, é necessário definirmos os *símbolos de Christoffel*, definidos como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\gamma,\beta} + g_{\beta\sigma,\gamma} - g_{\beta\gamma,\sigma}), \quad (1.7)$$

onde

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \quad (1.8)$$

Devido à simetria do tensor métrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, temos $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$. Assim, temos os seguintes Γ 's não-nulos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{M}{r^2 - 2Mr} \quad , \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{M(1 - 2Mr^{-1})}{r^2} \quad , \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{-M}{r^2 - 2Mr} \quad , \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = 2M - r \quad , \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= (2M - r)\sin(\theta)^2 \quad , \quad \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad , \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \quad , \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{\tan(\theta)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Com estes símbolos de Christoffel, pode-se definir o *tensor de curvatura* ou de *Riemann*:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\beta\epsilon}^{\delta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} - \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon}, \quad (1.10)$$

onde, novamente,

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}}. \quad (1.11)$$

Este tensor pode ser posto na forma totalmente covariante, onde as suas propriedades aparecem por completo:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\eta}R_{\beta\gamma\delta}^{\eta}. \quad (1.12)$$

Suas propriedades refletem simetrias relativas a trocas ou permutações de índices, sendo listadas a seguir:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (1.13)$$

$$R_{\alpha(\beta\gamma\delta)} = 0, \quad (1.14)$$

onde o termo entre parênteses indica uma soma cíclica sobre os índices envolvidos. Além destas, há uma última propriedade, a ser introduzida um pouco mais adiante. Antes, definamos a *derivada covariante* de um tensor genérico, de p índices contravariantes e q índices covariantes:

$$\begin{aligned} T_{b_1 b_2 \dots b_q; c}^{a_1 a_2 \dots a_p} &= T_{b_1 b_2 \dots b_q, c}^{a_1 a_2 \dots a_p} + \Gamma_{ec}^{a_1} T_{b_1 b_2 \dots b_q}^{e a_2 \dots a_p} + \dots + \Gamma_{ec}^{a_p} T_{b_1 b_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots e} - \Gamma_{cb_1}^e T_{eb_2 \dots b_q}^{a_1 a_2 \dots a_p} - \\ &- \dots - \Gamma_{cb_q}^e T_{b_1 b_2 \dots e}^{a_1 a_2 \dots a_p}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde o símbolo “;” indica a derivação covariante e “,” a derivação ordinária. A derivada ordinária de um tensor não é, em geral, um tensor, mas uma derivada covariante do mesmo resulta em um novo tensor. Isto posto, estabeleceu-se a última propriedade do tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta(\gamma\delta;\epsilon)} = 0, \quad (1.16)$$

o termo entre parênteses indicando novamente uma permutação cíclica dos índices envolvidos. Esta última é também denominada *identidade de Bianchi*. Os termos não-nulos de R para a métrica de Schwarzschild são:

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= \frac{2M}{r^3}, \quad R_{t\theta t\theta} = \frac{-M + 2\frac{M^2}{r}}{r}, \\ R_{t\phi t\phi} &= R_{t\theta t\theta} \sin^2(\theta), \quad R_{r\theta r\theta} = \frac{-M}{r - 2M}, \\ R_{r\phi r\phi} &= R_{r\theta r\theta} \sin^2(\theta), \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = -2Mr \sin^2(\theta)^2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

as demais componentes podendo ser encontradas pelas simetrias já descritas. Podemos enfim calcular o *invariante de curvatura* I , dado por

$$I = R_{abcd} R^{abcd}, \quad (1.18)$$

e que para a métrica de Schwarzschild assume o valor

$$I_{Sch} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (1.19)$$

Para $r = 2M$, $I_{Sch} = \frac{3}{4M^4}$, sendo perfeitamente *finito*, indicando que as chamadas *forças de maré* são *finitas*. Para correlacionar este I_{Sch} com as forças de maré, podemos calcular g , a aceleração da gravidade, para tal métrica. A sua componente radial é dada por Novikov[6]

$$g^r = \frac{\Gamma_{tt}^r}{g_{tt}} = -\frac{M}{r^2}, \quad (1.20)$$

onde o sinal $-$ indica que a aceleração ocorre na direção do buraco negro, já que a força gravitacional é atrativa. Em $r = 2M$ tal aceleração é finita, valendo $\frac{1}{4M}$ em módulo. Em $r = 0$, ela tende ao infinito, denunciando a singularidade física ali existente (forças de maré infinitas). Assim sendo, $r = 2M$ não representa nenhuma singularidade física, apenas uma singularidade do sistema de coordenadas. Assim, $r = 2M$ não representa uma singularidade física, por não ser região de curvatura infinita. É simplesmente uma singularidade do sistema de coordenadas empregado. O mesmo não se pode dizer de $r = 0$, pois aí $I_{Sch} \rightarrow \infty$, o que acarreta curvatura tendendo ao infinito e “forças de maré” idem, esmagando qualquer objeto que por ali se aventure. É, portanto, uma singularidade real, *física*, não-removível por mudança de coordenadas. Na prática, o que ocorre é que o vetor ∂_t , definido por

$$\partial_t \cdot \partial_t = g_{tt}, \quad (1.21)$$

onde o símbolo \cdot indica produto escalar, passa de tipo-tempo ($g_{tt} < 0$) na região $r > 2M$, para tipo-espaço ($g_{tt} > 0$) na região $r < 2M$, o inverso ocorrendo com o vetor tangente ∂_r , definido por

$$\partial_r \cdot \partial_r = g_{rr}. \quad (1.22)$$

Assim, pode-se afirmar que as coordenadas r e t trocam de papel na região interior, $r < 2M$, r passando a representar a passagem do tempo e t , o deslocamento na direção radial. Nesta região, órbitas do tipo $r = \text{constante}$ são do tipo-espaço, pois fazendo-se $dr = 0$ na métrica de Schwarzschild, temos $ds^2 > 0$, já que $g_{tt} > 0$ e $r^2 d\Omega^2 > 0$. Órbitas assim não são seguidas por partículas materiais (já que $ds^2 < 0$ sempre) ou por sinais luminosos (para os quais $ds^2 = 0$ sempre), e portanto nenhum corpo ou sinal mantém-se em órbitas $r = \text{constante}$ na região interior. Como r decrescente implica a passagem do tempo, qualquer objeto ou sinal em $r < 2M$ é fatalmente arrastado para $r = 0$ e destruído. A região $r = 2M$ é denominada *horizonte de eventos* e delimita a região acessível ao observador externo: o que está dentro de $r = 2M$ fica inacessível a ele. O sistema de coordenadas que permite visualizar melhor estes fatos e explorar as relações de causalidade na geometria de Schwarzschild de forma inequívoca é o sistema de Kruskal-Szekeres, a ser introduzido a seguir.

1.2 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

O sistema de Kruskal-Szekeres é definido pelas mesmas coordenadas θ e ϕ do sistema de Schwarzschild, mais duas novas coordenadas, u e v , que substituirão as coordenadas r e t de Schwarzschild. Elas têm duas definições, uma para a região interior, $r < 2M$, e outra para a região exterior, $r > 2M$. Para a região exterior, doravante chamada região I do diagrama da Figura 1.1, (ao final desta seção), temos:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

enquanto que para a região interior, doravante chamada região II, temos

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nos dois casos, temos, devido à identidade $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$,

$$u^2 - v^2 = \left(-1 + \frac{r}{2M}\right) \exp\left\{\frac{r}{2M}\right\} \quad (1.25)$$

e também

$$t = 4M \operatorname{arctanh}\left\{\frac{v}{u}\right\}, \quad (1.26)$$

para a região I e

$$t = 4M \operatorname{arctanh}\left\{\frac{u}{v}\right\}, \quad (1.27)$$

para a região II. De qualquer forma, as linhas de universo do tipo $r = \text{constante}$ são dadas por hipérbolas do tipo $u^2 - v^2 = \text{constante}$, e linhas de universo do tipo $t = \text{constante}$ são dadas por retas passando pela origem do diagrama de Kruskal-Szekeres. A região $r \geq 2M$ traduz-se por $u^2 \geq v^2$, o horizonte de eventos pelas retas $u = v$ e $u = -v$, e $r = 0$ pela hipérbole $u^2 - v^2 = -1$. A métrica, nas coordenadas de Kruskal-Szekeres é dada por:

$$ds^2 = 32M^3 \frac{\exp\left\{-\frac{r}{2M}\right\}}{r} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (1.28)$$

Para a dedução, consultar o Apêndice A.

Um ponto importante aqui é notar que as características da geometria de Schwarzschild parecem ter sido “dobradas”: há duas hipérbolas $u^2 - v^2 = -1$, duas retas satisfazendo $u^2 = v^2$. Isto se explica pelo fato de as coordenadas de Schwarzschild não cobrirem todo o espaço-tempo. Para cobrirmos todo o espaço-tempo é necessário adicionarmos duas novas prescrições às variáveis u e v , a saber:

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= -\sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

para a região III, análoga à região I, por apresentar $u^2 < v^2$ e

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

para a região IV, análoga à região II, por apresentar $v^2 > u^2$. Aqui também vale a relação

$$u^2 - v^2 = \left(-1 + \frac{r}{2M}\right) \exp\left\{-\frac{r}{2M}\right\} \quad (1.31)$$

para as regiões III e IV, e

$$t = 4M \operatorname{arctanh}\left\{\frac{v}{u}\right\}, \quad (1.32)$$

para a região III (assim como para a I), mais

$$t = 4M \operatorname{arctanh}\left\{\frac{u}{v}\right\}, \quad (1.33)$$

para a região IV (bem como para a II). Há diversas interpretações possíveis para a parte do diagrama designada pelas regiões III e IV. Uma interpretação possível seria a de que as regiões (I,II) e (III,IV) consistiriam em dois Universos paralelos e assintoticamente planos, conectados pela origem do diagrama, $u = v = 0$. Mas deve-se enfatizar que isto é apenas uma possibilidade teórica. Para analisarmos as relações de causalidade na geometria de Schwarzschild, valhamo-nos das regiões I e II do diagrama. Concentremo-nos inicialmente nas linhas de universo radiais, $d\Omega^2 = 0$. Para sinais luminosos,

com $ds^2 = 0$, isto acarreta $du = dv$ ou $du = -dv$, correspondendo às linhas $u = v + cte$ e $u = -v + cte$, respectivamente. Assim, no segundo caso, um fóton pode vir de $r \geq 2M$ ($u \geq v$), e atravessar $r = 2M$ ($u = v$), entrando na região II até atingir $r = 0$ ($u^2 - v^2 = -1$). Uma partícula material em órbita radial, por ter $ds^2 < 0$, deve ter $dv^2 > du^2$. E, se a órbita é não-radial, como $d\Omega^2 > 0$, isto valerá também para sinais luminosos e, com ainda mais razão, para partículas materiais. Assim, linhas de universo com $du^2 > dv^2$ seriam do tipo-espaço, e não corresponderiam a nenhum sinal ou partícula. Isto leva-nos a concluir que linhas de universo conectando a região I com a II, por apresentarem $dv^2 > du^2$, são fisicamente realizáveis, e é assim possível a quem está na região I ($r > 2M$) entrar na região II ($r < 2M$). Agora, a recíproca não vale, pois linhas de universo conectando a região II com a I têm, obrigatoriamente, $du^2 > dv^2$, e portanto do tipo-espaço, não sendo realizáveis por nenhuma partícula ou sinal. Logo, não é possível a quem se encontra na região II escapar para a região I, passando por $r = 2M$ (ou $u = v$). Assim $r = 2M$ é a fronteira absoluta de todos os eventos acessíveis a um observador externo, corroborando o que já foi afirmado anteriormente e justificando o nome “horizonte de eventos”. O mesmo raciocínio pode ser aplicado às regiões III (análoga à I) e IV (análoga à II). Um viajante em III poderia cair na região IV, por seguir linhas de universo com $du^2 < dv^2$. Mas a algo ou alguém na região IV não é dado escapar para a região III, passando por $r = 2M$ (aqui, $u = -v$), pois teria de seguir uma linha de universo do tipo-espaço, $du^2 > dv^2$. Isto completa a discussão sobre causalidade na geometria de Schwarzschild. Agora é o momento de discutir o movimento de uma partícula na geometria de Schwarzschild.

1.3 Partícula na Geometria de Schwarzschild

Inicialmente, veremos o movimento de uma partícula nesta geometria de forma qualitativa, buscando compará-lo com a mecânica celeste clássica. Depois virá uma breve discussão quantitativa do tempo gasto por uma partícula para cair em $r = 2M$, tanto sob o ponto de vista da própria partícula quanto do ponto de vista de um observador distante.

Aqui, convém tomarmos a Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (1.34)$$

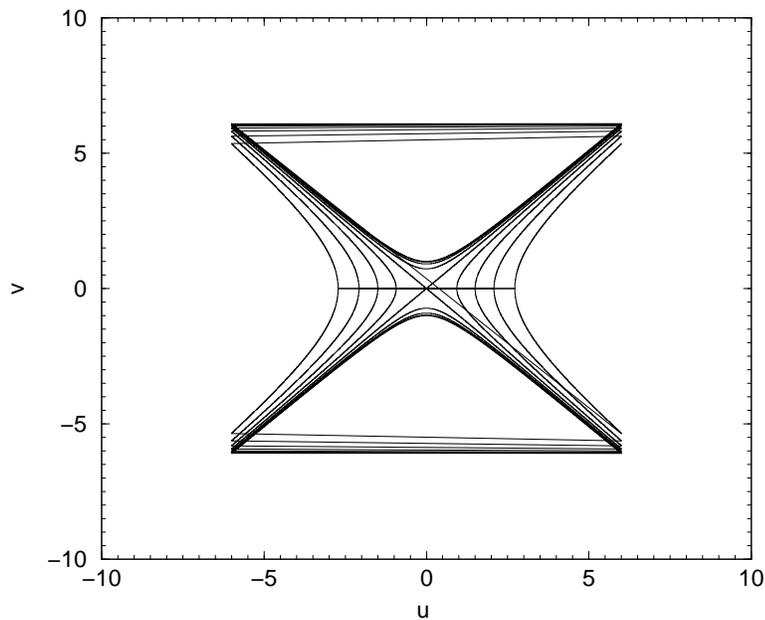


Figura 1.1: Temos o gráfico de u em função de v , representando as coordenadas de Kruskal-Szekeres. Tomamos $M = 1$ por simplicidade. As retas $u = v$ e $u = -v$ correspondem a $r = 2M$. A hipérbole $u^2 - v^2 = -1$ representa a singularidade física em $r = 0$. Hipérbolas com $u^2 - v^2 < 0$ correspondem a $r < 2M$, assim como aquelas com $u^2 - v^2 > 0$, a $r > 2M$. A região $u > |v|$ denomina-se região I do diagrama, a região $v > |u|$ é a região II, $u < -|v|$ é a região III e $v < -|u|$ representa a região IV. Ignorar as riscas horizontais nas bordas superior e inferior do diagrama.

onde λ é o *parâmetro afim* de uma linha de universo qualquer. Usemos a notação a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{dt}{d\lambda} \quad , \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} \quad , \\ \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{d\lambda} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda} \quad . \end{aligned} \quad (1.35)$$

A lagrangeana fica, assim,

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(-1 + \frac{2M}{r} \right) (\dot{t})^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} (\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\theta})^2 + r^2 (\sin(\theta))^2 (\dot{\phi})^2 \right], \quad (1.36)$$

e as equações de Euler-Lagrange tomam a forma

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}. \quad (1.37)$$

Definimos os momentos conjugados às variáveis x^μ por

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad (1.38)$$

e temos assim

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \quad , \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad , \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \quad , \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 (\sin(\theta))^2 \dot{\phi} \quad . \end{aligned} \quad (1.39)$$

A não-dependência explícita de L com t e ϕ já nos indica serem elas coordenadas cíclicas, com duas integrais do movimento a elas associadas, como veremos a seguir:

$$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (1.40)$$

de modo que p_t e p_ϕ constantes. Seja $p_t = E$ e $p_\phi = S$, onde E e S terão seu significado explicado mais adiante. Da equação de movimento para θ , vem:

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (\dot{\phi})^2 = r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}. \quad (1.41)$$

Tomemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianos, e quando $\dot{\theta} = 0$ temos $\ddot{\theta} = 0$. Deste modo, o plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ passa a ser um *plano invariante*. Chamá-lo-emos de *plano equatorial*

daqui por diante. Assim, $p_\phi = r^2\dot{\phi} = S$ pode ser considerado como o momento angular da partícula em relação ao buraco negro. Isolemos $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{S}{r^2} \quad (1.42)$$

e joguemo-lo na equação para L :

$$L = \frac{1}{2} \left[-E^2 \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + (\dot{r})^2 \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{S^2}{r^2} \right] \quad (1.43)$$

onde já usamos $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sabemos que

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = -\frac{\mu^2}{2}, \quad (1.44)$$

onde μ representa a massa de repouso da partícula. Podemos ajustar o parâmetro λ de forma a termos $-2L = 1$. Esta reparametrização é feita com a troca

$$\lambda = \frac{\tau}{\mu}, \quad (1.45)$$

onde τ indica o *tempo próprio* para partículas materiais. Para fótons e outras partículas não-massivas, deve-se usar λ pois τ ficaria indefinido para $\mu = 0$. Além disto, definimos a energia por unidade de massa de repouso, \tilde{E} , e o momento angular por unidade de massa de repouso, \tilde{S} , via

$$\tilde{E} = \frac{E}{\mu}, \quad \tilde{S} = \frac{S}{\mu} \quad . \quad (1.46)$$

Assim, a lagrangeana reparametrizada, $-2L = 1$, fica

$$1 = \frac{(\tilde{E})^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{(\dot{r})^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{(\tilde{S})^2}{r^2}. \quad (1.47)$$

Isolando \dot{r} , vem:

$$\dot{r}^2 = (\tilde{E})^2 - (\tilde{V})^2, \quad (1.48)$$

onde

$$\tilde{V} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{S}^2}{r^2}\right)} \quad (1.49)$$

atende pelo nome de *potencial efetivo* (por unidade de massa de repouso) para o movimento da partícula. Escolhemos a raiz quadrada positiva para \tilde{V} e para \dot{r} , pois consideramos *positiva* a energia de uma partícula vinda de $r \geq 2M$. Naturalmente, a massa de repouso está incluída em \tilde{E} . Assim, para \dot{r} , temos

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2}, \quad (1.50)$$

e podemos estudar qualitativa e quantitativamente o movimento de uma partícula na geometria de Schwarzschild, do ponto de vista da própria, ou de um observador movendo-se junto com ela, em termos de r , \tilde{E} e \tilde{S} . Para uma análise qualitativa, devemos observar o potencial efetivo, \tilde{E} , e a energia \tilde{E} .

O limite $r \rightarrow \infty$ fornece

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{S}^2}{r^2}\right)} = 1, \quad (1.51)$$

mas sempre *menor* do que 1, pois o termo de ordem r^{-1} dentro da raiz é negativo. Temos ainda

$$\tilde{V}(r = 2M) = 0, \quad (1.52)$$

o mesmo não estando definido para $r < 2M$. Estabelecido o comportamento assintótico do potencial, podemos investigar seus extremos (se existirem). Veremos que estes dependem crucialmente de \tilde{S} . Tomando a derivada com relação a r , vem:

$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{M - \frac{\tilde{S}^2}{r} + 3\frac{M\tilde{S}^2}{r^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{S}^2}{r^2}\right)}}, \quad (1.53)$$

que, igualando a zero, permite achar os máximos e mínimos. Igualando o segundo membro acima a zero, temos a equação:

$$M - \frac{\tilde{S}^2}{r} + 3\frac{M\tilde{S}^2}{r^2} = 0, \quad (1.54)$$

fornecendo as soluções

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{6M}{1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}}} \\ r_2 &= \frac{6M}{1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}}}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

que ainda não sabemos se são máximos ou mínimos, e que existem só se $\tilde{S}^2 \geq 12M^2$. Para tanto, vejamos a segunda derivada do potencial,

$$\frac{d}{dr} \frac{d\tilde{V}}{dr} = X = \frac{-\frac{2M}{r^3} + \frac{3\tilde{S}^2}{r^4} - \frac{12M\tilde{S}^2}{r^5}}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})(1 + \frac{\tilde{S}^2}{r^2})}} - \frac{1}{2} \frac{(\frac{M}{r^2} - \frac{\tilde{S}^2}{r^3} + \frac{3M\tilde{S}^2}{r^4})^2}{((1 - \frac{2M}{r})(1 + \frac{\tilde{S}^2}{r^2}))^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.56)$$

O valor de X para $r = r_1$ é negativo, deixando claro que r_1 é um *máximo* de \tilde{V} . O oposto ocorre com $r = r_2$, que é assim um *mínimo* de \tilde{V} . Sem perda de generalidade, daqui por diante vamos considerar $\tilde{S} \geq 0$, pois \tilde{V} depende de \tilde{S} de forma quadrática sob a raiz e não linear. Assim, tais máximos e mínimos só existem para $\tilde{S} \geq 2M\sqrt{3}$. Aliás, quando $\tilde{S} = 2M\sqrt{3}$, $r_1 = r_2 = 6M$, e $X = 0$, indicando um ponto de inflexão no gráfico de \tilde{V} em função de r . Neste caso particular, $\tilde{V}(r = 6M) = \sqrt{\frac{8}{9}}$. É útil estabelecer os valores do potencial para $r = r_1$ e $r = r_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(r_1) &= \sqrt{\frac{1}{3} \left[2 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}} \right] \left[\frac{2}{3} + \frac{\tilde{S}^2}{18M^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}} \right) \right]} \\ \tilde{V}(r_2) &= \sqrt{\frac{1}{3} \left[2 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}} \right] \left[\frac{2}{3} + \frac{\tilde{S}^2}{18M^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}} \right) \right]} \end{aligned} \quad (1.57)$$

O máximo do potencial cruza $\tilde{V} = 1$ para $\tilde{S} = 4M$, excedendo este valor se $\tilde{S} > 4M$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S} \rightarrow \infty} \tilde{V}(r = r_1) &= +\infty, \\ \lim_{\tilde{S} \rightarrow \infty} r_1 &= 3M, \\ \lim_{\tilde{S} \rightarrow \infty} r_2 &= \infty \\ \lim_{\tilde{S} \rightarrow \infty} \tilde{V}(r = r_2) &= 1, \end{aligned} \quad (1.58)$$

mas ainda *menor* do que 1, devido ao termo $2 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{S}^2}}$ dentro da raiz, na fórmula para $\tilde{V}(r = r_2)$. Temos ainda

$$\lim_{\tilde{S} \rightarrow 2M\sqrt{3}} r_1 = \lim_{\tilde{S} \rightarrow 2M\sqrt{3}} r_2 = 6M, \quad (1.59)$$

como já foi exposto acima, e

$$\lim_{\tilde{S} \rightarrow 2M\sqrt{3}} \tilde{V}(r = r_1) = \lim_{\tilde{S} \rightarrow 2M\sqrt{3}} \tilde{V}(r = r_2) = \sqrt{\frac{8}{9}}, \quad (1.60)$$

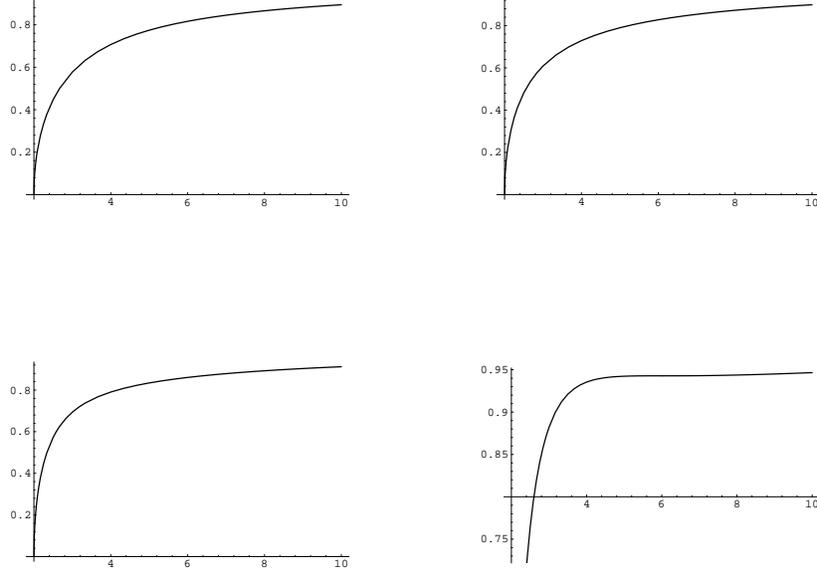


Figura 1.2: Estes são os gráficos de \tilde{V} em função de r , para $\tilde{S} = 0, 1, 2, 2\sqrt{3}$, respectivamente (da esquerda para a direita e de cima para baixo, como na seqüência normal de leitura). Nos três primeiros não há máximos ou mínimos. No último, temos um ponto de inflexão em $r = 6M$.

como também já foi exposto anteriormente. A seguir, serão expostos gráficos de \tilde{V} em função de r , para diversos valores de \tilde{S} . Tomamos $M = 1$ por simplicidade.

Os tipos de movimento dependerão de \tilde{S} e \tilde{E} . Há vários casos a analisar: para $\tilde{S} < 2M\sqrt{3}$, $\tilde{S} = 2M\sqrt{3}$, $4M \geq \tilde{S} > 2M\sqrt{3}$ e $\tilde{S} > 4M$. No caso $\tilde{S} < 2M\sqrt{3}$, só há uma possibilidade de movimento, qualquer que seja a energia \tilde{E} da partícula: esta cai no buraco negro, pois não há máximo local ou global de \tilde{V} capaz de detê-la. No caso em que $\tilde{S} = 2M\sqrt{3}$, só um valor de \tilde{E} , a saber $\sqrt{\frac{8}{9}}$, para o qual a partícula não cai no buraco negro. Isto corresponde a largar a partícula em $r = 6M$, justamente com $\tilde{S} = 2M\sqrt{3}$. Nestas condições, a partícula executa um movimento circular instável em volta do buraco, de tal forma que a menor perturbação altera para mais ou para menos sua energia e a lança na direção do buraco negro. Qualquer outro valor de \tilde{E} faz o mesmo.

As coisas ficam mais interessantes nos dois últimos casos. Quando $4M > \tilde{E} > 2M\sqrt{3}$, há um máximo e um mínimo distintos para \tilde{V} , mas o máximo

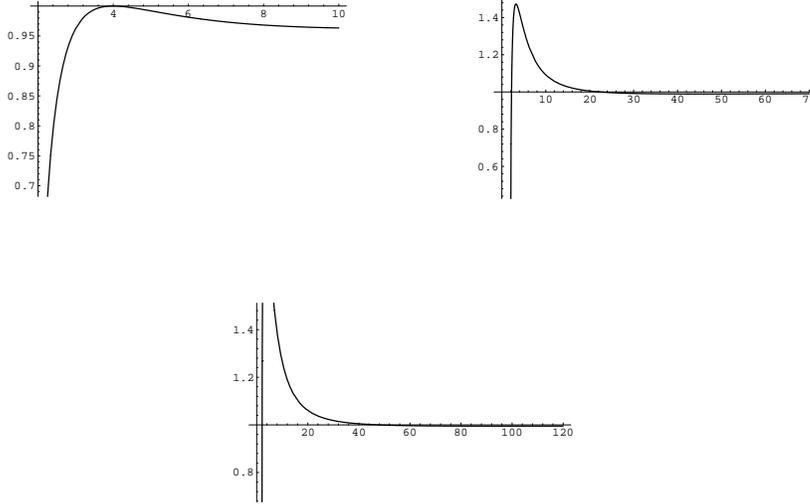


Figura 1.3: Idem, com $\tilde{S} = 4, 7, 10$. Notar os máximos e mínimos de \tilde{V} nestes casos. Quanto mais pronunciado o máximo, mais alto o valor de \tilde{S} .

deste não atinge o valor 1. Isto significa que uma partícula vinda do infinito ($\tilde{E} \geq 1$), ou de r finito com energia superior ao máximo de \tilde{V} , termina por cair no buraco negro em $r = 2M$. Se a energia da partícula for igual ao máximo de \tilde{V} , ela apresenta uma órbita circular instável, com $r = r_1$, de acordo com a notação aqui empregada. A menor perturbação pode arrastá-la para o buraco, se elevar a energia daquela, ou trazê-la para órbitas estáveis, caso ocorra o oposto. Se \tilde{E} está entre o máximo e o mínimo do potencial, a partícula apresentará órbitas limitadas (com dois pontos de retorno $r = r_A$ e $r = r_B$), mas não-fechadas (pois órbitas fechadas são típicas de forças centrais atrativas inversamente proporcionais ao quadrado da distância física, como na Mecânica Celeste Newtoniana), em torno do buraco negro. Se \tilde{E} for justamente igual ao mínimo de \tilde{V} , a órbita será circular e estável em $r = r_2$. Se $\tilde{S} = 4M$, tudo o que foi exposto acima vale, com a exceção de que a órbita circular instável ocorrerá se tivermos partículas com $\tilde{E} = 1$, em $r = 4M$, e a queda em $r = 2M$ para $\tilde{E} > 1$. Finalmente, se $\tilde{S} > 4M$, a gama de possibilidades é a mais ampla: se \tilde{E} coincidir com o mínimo de \tilde{V} , teremos uma órbita circular estável, no valor de $r = r_2$ correspondente; se $1 > \tilde{E} > \tilde{V}(r = r_2)$, teremos uma órbita limitada, com dois pontos de retorno, mas em geral não-fechada. Se \tilde{E} estiver entre 1 (inclusive) e o máximo do potencial (exclusive), teremos uma órbita não-limitada, com apenas um

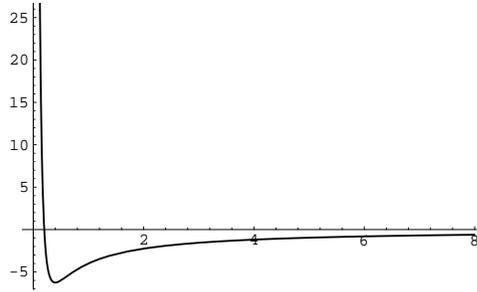


Figura 1.4: Este é o potencial efetivo newtoniano, com $A = 5$ e $B = 1$. O mínimo de V_n ocorre para $r = \frac{2}{5}$. Cuidado a ser tomado: a abscissa-valor de r -corresponde a $V_n = E = 0$, e não é igual à massa de repouso da partícula, pois na Mecânica Newtoniana esta não contribui para a energia total.

ponto de retorno (de máxima aproximação do buraco negro, para ser mais preciso). Quando \tilde{E} for igual ao máximo de \tilde{V} , teremos outra vez uma órbita circular instável, com a partícula executando muitas voltas em torno do buraco até que alguma perturbação a arraste para dentro ou para longe do buraco negro. E se \tilde{E} supera este máximo do potencial, a partícula cai em $r = 2M$, caracterizando uma *captura gravitacional*. Podemos comparar este último leque de possibilidades com a Mecânica Celeste Newtoniana.

O movimento de uma partícula nesta última é regida por um potencial efetivo V_n , da forma

$$V_n = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}, \quad (1.61)$$

onde A e B são constantes positivas, e r é a coordenada radial de um sistema de coordenadas esféricas. A constante B relaciona-se diretamente ao momento angular da partícula relativamente ao centro de forças em volta do qual orbita. O mínimo deste potencial ocorre para $r = \frac{2B}{A}$, obtido fazendo-se $\frac{dV_n}{dr} = 0$. Um gráfico do mesmo pode ser visto na Figura 1.4.

Nestas condições, dependendo da energia E que a partícula apresenta, ela pode realizar uma série de movimentos, qualitativamente falando. Se es-

ta energia for igual ao mínimo de V_n , teremos uma órbita circular estável em $r = \frac{2B}{A}$. Se $0 > E > \min V_n$, teremos órbitas limitadas (e fechadas) com dois pontos de retorno; e se $E > 0$, apenas um ponto de retorno existirá: é o de maior aproximação. A órbita é aberta, e a partícula volta a se afastar rumo ao infinito, após a aproximação máxima, não importando quão alta seja E . Assim, de comum entre a Mecânica Newtoniana e a de Schwarzschild, temos a existência de uma órbita circular estável, a existência de órbitas limitadas (embora não-fechadas, no caso de Schwarzschild) e/ou com um só ponto de retorno. Mas, de fundamentalmente distinto no caso de Schwarzschild, temos as órbitas circulares instáveis (devido ao máximo de potencial efetivo, inexistente no caso clássico) e a possibilidade de *captura gravitacional*, exclusiva de buracos negros. Estabelecida a comparação, podemos agora discutir quantitativamente o caso mais simples de movimento na geometria de Schwarzschild, que é o caso de movimento puramente radial ($S = 0$). O caso em que o movimento é não-radial exige cálculos numéricos e não foi tratado neste trabalho. Aqui, antes de começar a discussão, vale lembrar que há dois referenciais distintos: o da partícula (tempo próprio τ) e aquele do observador distante, em $r \gg 2M$ (tempo coordenado t). Começemos com o primeiro deles.

Usando a equação para a componente radial do 4-momento, \dot{r} , temos

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{V}^2}, \quad (1.62)$$

com \tilde{V} se reduzindo a

$$\tilde{V} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (1.63)$$

no caso de movimento radial. Manipulando a equação para \dot{r} , temos:

$$\frac{dr}{\sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} = d\tau, \quad (1.64)$$

que pode ser integrada:

$$\int_{r_0}^{r_f} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} \right) dr = \tau_f - \tau_0, \quad (1.65)$$

onde (τ_0, τ_f) e (r_0, r_f) indicam os valores inicial e final de τ e de r , respectivamente. Vamos, para simplificar, tomar $\tau_0 = 0$ e $r_0 = r(\tau = 0)$. Supondo

a partícula inicialmente em repouso na coordenada radial r_0 , ela terá então energia $\tilde{E}^2 = 1 - \frac{2M}{r_0}$, correspondendo ao potencial efetivo para o caso $\tilde{S} = 0$. Isto nos permite escrever

$$\int_{r_0}^{r_f} \left(\frac{1}{\sqrt{2M(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0})}} \right) dr = \tau_f. \quad (1.66)$$

Assim, podemos proceder à substituição de variáveis abaixo:

$$r = \frac{r_0(1 + \cos(\eta))}{2}, \quad (1.67)$$

acarretando

$$dr = -\frac{r_0 \sin(\eta)}{2} d\eta, \quad (1.68)$$

o que, substituído na integral em r , dá

$$\int_0^{\arccos\{-1+2\frac{r_f}{r_0}\}} \left(-\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \frac{\sin(\eta)}{\sqrt{\frac{1-\cos(\eta)}{1+\cos(\eta)}}} \right) d\eta = \tau_f = \tau, \quad (1.69)$$

onde eliminamos o índice inferior em τ , por simplicidade. Convém usar aqui a “tangente do arco metade”, dada por:

$$\begin{aligned} \tan(\eta) &= \frac{2 \tan(\frac{\eta}{2})}{1 - (\tan(\frac{\eta}{2}))^2}, \\ \sin(\eta) &= \frac{2 \tan(\frac{\eta}{2})}{1 + (\tan(\frac{\eta}{2}))^2}, \\ \cos(\eta) &= \frac{1 - (\tan(\frac{\eta}{2}))^2}{1 + (\tan(\frac{\eta}{2}))^2}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

a ser substituída na integral em η acima:

$$\tau = -\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \int_0^{\arccos\{-1+2\frac{r_f}{r_0}\}} \left(\frac{2 \tan(\frac{\eta}{2})}{[1 + (\tan(\frac{\eta}{2}))^2] \sqrt{\tan(\frac{\eta}{2})^2}} \right) d\eta, \quad (1.71)$$

que pode enfim ser tratada. Nestas condições, chamemos de b o limite superior de integração, a saber

$$b = \arccos\{-1 + \frac{2r_f}{r_0}\}, \quad (1.72)$$

para simplificar a notação. Agora, como η varia entre 0 e π radianos, $\frac{\eta}{2}$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ radianos. Assim, $\sin \frac{\eta}{2}$, $\cos \frac{\eta}{2}$ e $\tan \frac{\eta}{2}$ são todas funções não-negativas no intervalo considerado, implicando

$$\sqrt{(\tan \frac{\eta}{2})^2} = \tan \frac{\eta}{2} \quad (1.73)$$

na integral em η , que assim se torna

$$\tau = -2\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \int_0^b \left(\frac{1}{1 + (\tan \frac{\eta}{2})^2} \right) d\eta. \quad (1.74)$$

Ocorre que o integrando acima pode ser reescrito como

$$\frac{1}{1 + (\tan \frac{\eta}{2})^2} = \cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\eta), \quad (1.75)$$

acarretando

$$\tau = -\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \int_0^b [1 + \cos(\eta)] d\eta, \quad (1.76)$$

ou, finalmente,

$$\tau = -\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} [b + \sin(b)], \quad (1.77)$$

que é o tempo próprio para se ir, em movimento puramente radial, de $r_0 > 2M$ até r_f . Se tivermos $r_f = 2M$, teremos

$$b = \arccos\left\{-1 + \frac{2r_f}{r_0}\right\} = \arccos\left\{-1 + \frac{4M}{r_0}\right\}, \quad (1.78)$$

e

$$\sin(b) = \sqrt{1 - (\cos(b))^2} = \frac{2}{r_0} \sqrt{2Mr_0 - 4M^2}, \quad (1.79)$$

resultando

$$\tau = -\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \left(\arccos\left\{-1 + \frac{4M}{r_0}\right\} + \frac{2}{r_0} \sqrt{2Mr_0 - 4M^2} \right), \quad (1.80)$$

um tempo perfeitamente *finito*. No seu próprio referencial, portanto, a partícula cai no buraco ($r = 2M$) em um tempo próprio *finito*. Para se ir até $r_f = 0$, temos

$$b = \arccos(-1) = \pi, \quad (1.81)$$

acarretando

$$\tau = -\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8M}}, \quad (1.82)$$

um tempo próprio igualmente finito. No referencial de um observador distante, $r \gg 2M$, os intervalos de tempo são medidos pelo tempo coordenado, t . Assim,

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = p^0 \frac{dr}{dt} = g^{tt} p_0 \frac{dr}{dt} = -\frac{\tilde{E}}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dr}{dt}, \quad (1.83)$$

e o observador distante descreve o movimento radial através da equação

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{-\tilde{E}} \frac{dr}{d\tau} = -\frac{1 - \frac{2M}{r}}{\tilde{E}} \sqrt{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (1.84)$$

integrável como

$$\int_{r_0}^{r_f} \left(-\frac{\tilde{E}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{-1 + \frac{2M}{r} + \tilde{E}^2}} \right) dr = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t, \quad (1.85)$$

onde tomamos $t_0 = 0$ por simplicidade. Com

$$\tilde{E} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}, \quad (1.86)$$

já que r_0 a partícula está inicialmente em repouso, $\tilde{E}^2 = \tilde{V}^2$, a integral fica

$$t = -\sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_0}}{2M}} \int_{r_0}^{r_f} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} \right) dr. \quad (1.87)$$

A substituição feita anteriormente,

$$r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos(\eta)), \quad (1.88)$$

$$dr = -\frac{r_0}{2} \sin(\eta), \quad (1.89)$$

também é feita aqui, resultando em

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} \int_0^b \left(\sin(\eta) \sqrt{\frac{1 + \cos(\eta)}{1 - \cos(\eta)}} \left[1 + \frac{4M}{-4M + r_0(1 + \cos(\eta))} \right] \right) d\eta, \quad (1.90)$$

onde

$$b = \arccos\left\{-1 + \frac{2r_f}{r_0}\right\}, \quad (1.91)$$

como antes. A novidade aparece no termo $\frac{4M}{-4M+r_0(1+\cos(\eta))}$, no denominador do integrando. A integração em questão não é fácil, tendo por resultado

$$\begin{aligned} t = & \left[\left(2M + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} \right] \eta + \frac{r_0}{2} \sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} \sin(\eta) + \\ & + 2M \ln \left| \frac{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} - \tan \frac{\eta}{2}} \right|, \end{aligned} \quad (1.92)$$

cf. Khuri[24], citado em Misner[9]. Tomando o limite $r \rightarrow 2M$ deste termo, ou, o que é equivalente, o limite $\eta \rightarrow b$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 2M} t = & 2M \lim_{\eta \rightarrow b} \ln \left| \frac{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + \left(\left[\frac{r_0}{2} + 2M \right] \sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} \right) b + \\ & + \frac{r_0}{2} \sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} \sin(b), \end{aligned} \quad (1.93)$$

onde $\sin(b) = \sqrt{8Mr_0^{-1} - 16M^2r_0^{-2}}$. Os dois últimos termos são finitos e podem ser agrupados em uma constante, c . Precisamos saber o valor de $\tan \frac{b}{2}$, antes de prosseguirmos. Temos

$$\cos(b) = -1 + \frac{4M}{r_0} \quad (1.94)$$

e

$$\cos(\eta) = \frac{1 - (\tan \frac{\eta}{2})^2}{1 + (\tan \frac{\eta}{2})^2}, \quad (1.95)$$

para qualquer η . Resolvendo-se a equação acima para $\eta = b$, temos:

$$\tan\left\{\frac{b}{2}\right\} = \frac{r_0 - 2M}{\sqrt{2Mr_0 - 4M^2}}, \quad (1.96)$$

e o limite $\eta \rightarrow b$ fica

$$\lim_{\eta \rightarrow b} \ln \left| \frac{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| = \lim_{\eta \rightarrow b} \ln \left| \frac{2\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}}}{-1 + \frac{r_0}{2M} - (-1 + \frac{r_0}{2M})} \right| = +\infty, \quad (1.97)$$

correspondendo a

$$t = c + 2M \lim_{\eta \rightarrow b} \ln \left| \frac{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{-1 + \frac{r_0}{2M}} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| = +\infty, \quad (1.98)$$

ou seja, a partícula levará um tempo infinito para atingir $r = 2M$, no referencial de um observador distante. Assim, corrobora-se o que já se estudou acerca do horizonte de eventos: é ele a fronteira absoluta de todos os eventos acessíveis a um observador externo ao buraco negro. A partícula de fato caiu em $r = 2M$, mas o observador externo não percebe sua queda, por ser tal região a ele inacessível.

Para fecharmos a seção sobre o buraco negro de Schwarzschild, falta calcular a área deste (área do horizonte de eventos). Ela é dada por

$$A_{Sch} = \int (\sqrt{g}) d\theta d\phi, \quad (1.99)$$

onde g é o determinante da parte angular da métrica,

$$g = g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} - g_{\theta\phi}^2 = r^4(\sin(\theta))^2, \quad (1.100)$$

calculado em $r = 2M$, resultando

$$A_{Sch} = 16\pi M^2. \quad (1.101)$$

Esta expressão será relevante no Capítulo 3, quando for estabelecida a conexão com a Termodinâmica.

Capítulo 2

A Solução de Kerr-Newman

2.1 Propriedades Gerais

A solução de Kerr-Newman é a solução mais geral existente para buracos negros, por levar em conta a possibilidade de estes apresentarem rotação em torno de um de seus eixos e, também, carga elétrica. Do ponto de vista físico, é uma solução mais realista do que a de Schwarzschild, pois não se pode esperar que todos os buracos negros tenham simetria esférica e estejam livres de qualquer carga elétrica. Como veremos, a geometria de Schwarzschild é só um caso particular da de Kerr-Newman.

A métrica descrevendo a solução de Kerr-Newman é dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a(\sin(\theta))^2 d\phi)^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} ((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (2.1)$$

onde θ e ϕ têm o mesmo significado que possuíam na geometria de Schwarzschild, t é o tempo de um observador distante do buraco negro, r é a coordenada radial, e

$$a = \frac{J}{M}, \quad (2.2)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad (2.3)$$

e

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (2.4)$$

Q representando a carga elétrica, J o momento angular do buraco relativamente ao seu eixo de rotação e M o seu conteúdo de massa-energia. As componentes do tensor métrico covariante, $g_{\mu\nu}$, são

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\Delta}{\rho^2} + \frac{a^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2}, \\ g_{t\phi} &= \frac{a \sin^2(\theta)[Q^2 - 2Mr]}{\rho^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \frac{\sin^2(\theta) [-a^2 \Delta \sin^2(\theta) + (r^2 + a^2)^2]}{\rho^2}, \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

É útil estabelecer a forma contravariante da métrica, $g^{\mu\nu}$, relacionada com a forma covariante por

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma}. \quad (2.6)$$

Os resultados são

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \frac{-(r^2 + a^2)^2 + a^2 \Delta \sin^2(\theta)}{\Delta \rho^2}, \\ g^{t\phi} &= \frac{a \left[1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right]}{\rho^2}, \\ g^{\phi\phi} &= \frac{-a^2 + \frac{\Delta}{\sin^2(\theta)}}{\Delta \rho^2}, \\ g^{rr} &= \frac{\Delta}{\rho^2} \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estas expressões serão úteis mais adiante. Podemos, desde já, fazer algumas considerações sobre a métrica. Esta métrica não depende explicitamente de t e de ϕ , o que já indica que ela é axialmente simétrica (simetria por rotação em torno de um dos eixos do buraco) e *estacionária* (não varia com o tempo),

mas já não é *estática* (pois a rotação introduziu um termo cruzado, $dt d\phi$, na solução, esta perdendo a invariância por inversão temporal, $t \rightarrow -t$). Há casos-limite, onde a métrica torna-se mais simples:

1. $Q = 0$, J não-nulo:

Neste caso, a solução atual reduz-se à solução de Kerr, sem carga, idêntica em forma à anterior, com $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$;

2. $J = 0$, Q não-nulo:

Aqui temos o buraco negro esfericamente simétrico e estático, mas carregado, denominado *solução de Reissner-Nordström*, com o elemento de linha

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (2.8)$$

3. $J = Q = 0$:

Anulando-se Q em ds^2 acima, temos a solução de Schwarzschild, já analisada. De fato esta é um caso particular da métrica de Kerr-Newman;

4. $a^2 + Q^2 = M^2$:

Aqui, $\Delta = (r - M)^2$, simplificando a métrica original. É conhecido pelo nome *solução de Kerr-Newman extrema*.

Outras propriedades interessantes são a existência, além de um horizonte de eventos, de um *limite estático* que precede aquele, e de uma *ergosfera* (região intermediária entre eles). Além disto, a ergosfera é rica em propriedades interessantes e pode, como veremos no Apêndice B, ser utilizada para se extrair energia do buraco negro. Vejamos como deduzir a existência destas propriedades.

Vejamos o termo g_{tt} e igualemo-lo a zero:

$$g_{tt} = \frac{-\Delta + a^2 \cos^2(\theta)}{\rho^2} = 0, \quad (2.9)$$

temos

$$r = r_0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2(\theta)}, \quad (2.10)$$

e também

$$r = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2(\theta)}, \quad (2.11)$$

sendo que somente a primeira solução nos interessa, correspondendo ao chamado *limite estático*. A segunda está aquém do horizonte de eventos e, por isso mesmo, fora do alcance de um observador externo. O horizonte de eventos pode ser localizado fazendo-se $\Delta = 0$, o que fornece

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2 + 0 \Rightarrow r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (2.12)$$

que é o horizonte procurado, embora haja também outra solução, dada por

$$r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (2.13)$$

e denominada *horizonte interno*, igualmente aquém de r_+ . Ambos, por anularem Δ , tornam o termo g_{rr} da métrica divergente. Vejamos, rapidamente, o porquê de $r = r_0$ ser denominado limite estático.

Seja Ω a velocidade angular de um observador estacionário em relação à geometria local, isto é, que segue uma linha de universo com (r, θ) constante, com velocidade angular também constante. Para um observador distante do buraco, $r \gg r_+$, temos

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t}, \quad (2.14)$$

onde u^μ é a 4-velocidade do observador estacionário em relação à geometria local. Ela pode ser descrita como

$$u = u^t \partial_t + u^\phi \partial_\phi = u^t \left[\partial_t + \frac{u^\phi}{u^t} \partial_\phi \right] = u^t [\partial_t + \Omega \partial_\phi] \quad (2.15)$$

Definimos os vetores de Killing da geometria de Kerr-Newman, ξ_μ , por

$$\begin{aligned} \partial_t &= \xi_t \\ \partial_\phi &= \xi_\phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Estes vetores representam simetrias do espaço-tempo em questão. O primeiro representa invariância por translações temporais, $t \rightarrow t + dt$, e o segundo representa a simetria axial, ou invariância por translações na direção ϕ , $\phi \rightarrow \phi + d\phi$. Têm a propriedade abaixo, em decorrência da definição acima,

$$\begin{aligned} \partial_t \cdot \partial_t &= \xi_t \cdot \xi_t = g_{tt}, \\ \partial_\phi \cdot \partial_\phi &= \xi_\phi \cdot \xi_\phi = g_{\phi\phi} \\ \partial_t \cdot \partial_\phi &= \xi_t \cdot \xi_\phi = g_{t\phi}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Podemos normalizar $U = u^t[\xi_t + \Omega\xi_\phi]$ como segue:

$$U = \frac{\xi_t + \Omega\xi_\phi}{|\xi_t + \Omega\xi_\phi|}. \quad (2.18)$$

Estes observadores estacionários não podem ter qualquer Ω em determinados (r, θ) . Somente aqueles para os quais se verifica $U \cdot U < 0$, isto é, quando U é tipo-tempo. Isto equivale a impor a condição

$$(\xi_t + \Omega\xi_\phi)^2 < 0, \quad (2.19)$$

ou

$$g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi} < 0, \quad (2.20)$$

impondo um mínimo e um máximo para Ω , dependendo de r e θ , a saber

$$\begin{aligned} \Omega_{min} &= \omega - \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \\ \Omega_{max} &= \omega + \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$\omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}. \quad (2.22)$$

Assim, se $r \geq r_+$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega_{min} &= -\frac{1}{r} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega_{max} &= \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

correspondendo aos limites fixados pela velocidade da luz no vácuo, $c = 1$. No entanto, para $r = r_0$, temos $g_{tt} = 0$, o que acarreta

$$\begin{aligned} \Omega_{min}(r = r_0) &= 0, \\ \Omega_{max}(r = r_0) &= -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

indicando que não é mais possível a um observador estacionário relativamente à geometria local permanecer parado relativamente à mesma. A rotação do buraco negro *arrasta* os referenciais inerciais irresistivelmente a partir de $r = r_0$. A faixa de valores admissíveis de Ω estreita-se quando

se avança de $r = r_0$ para $r = r_+$. E, em $r = r_+$, algo notável acontece: $\Omega_{min} = \Omega_{max} = \sqrt{\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$, indicando que a partir daí não há mais observadores estacionários. Na verdade, em $r = r_+$ temos

$$\Omega_{min} = \Omega_{max} = \sqrt{\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (2.25)$$

que, como veremos mais tarde, é a velocidade angular do buraco negro, medida por um observador no infinito. Linhas de universo tipo-tempo apontam para dentro do horizonte de eventos e qualquer observador ali presente é capturado, tal como acontecia na geometria de Schwarzschild. Nesta região entre o limite estático e o horizonte de eventos, caracterizada por $g_{tt} > 0$, está a *ergosfera*. O fato de ξ_t ser do tipo-espaço nesta região é relevante, pois deixa em aberto a possibilidade de se ter energias negativas para partículas materiais, quando medidas por observadores externos a ela. Retornaremos a esta questão quando abordarmos a extração de energia em buracos negros, no Apêndice B.

Antes de prosseguirmos, seria útil obtermos uma expressão para a área do buraco negro (área de seu horizonte de eventos), A . Ela é dada pela integral abaixo:

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi(\sqrt{g}), \quad (2.26)$$

onde g é o determinante da parte angular da métrica, dado por

$$g = g_{\phi\phi}g_{\theta\theta} - g_{\phi\theta}^2, \quad (2.27)$$

que, calculado em $r = r_+$, fornece

$$g = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2(\theta), \quad (2.28)$$

o que, substituído na definição, e integrado, fornece

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (2.29)$$

que é a expressão procurada. Ela será bastante útil daqui por diante. Podemos agora discutir o movimento de uma partícula na geometria de Kerr-Newman, de forma bastante geral.

2.2 Partícula na Geometria de Kerr-Newman

O procedimento é muito parecido com o que foi adotado para o mesmo problema na geometria de Schwarzschild, baseado em Carter[22]. Definimos uma hamiltoniana ¹ H , dada por

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2}p^\mu p_\mu = -\frac{\mu^2}{2}, \quad (2.30)$$

onde p_μ é o quadrimomento da partícula. No entanto, devido ao aparecimento de campos eletromagnéticos externos ao buraco negro (pela carga existente em seu interior), temos a existência de um 4-potencial vetor, A_μ , em toda a área exterior ao horizonte de eventos. Este 4-vetor obriga-nos a redefinir o 4-momento da partícula, p_μ , como

$$p_\mu = \pi_\mu - eA_\mu, \quad (2.31)$$

onde π_μ representa o *4-momento generalizado* para a partícula. As componentes do 4-vetor A_μ são:

$$\begin{aligned} A_t &= -\frac{Qr}{\rho^2}, \\ A_\phi &= \frac{Qra \sin^2(\theta)}{\rho^2}, \\ A_r &= A_\theta = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Assim, a hamiltoniana a ser empregada é, simplesmente,

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu). \quad (2.33)$$

As equações de Hamilton são:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\mu}, \quad (2.34)$$

para as coordenadas x^μ , e

$$\frac{d\pi_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}, \quad (2.35)$$

para os momentos generalizados π_μ . Aqui, λ é o parâmetro afim das linhas de universo das partículas. A forma geral da hamiltoniana acarreta

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \pi^\mu - eA^\mu = p^\mu \quad (2.36)$$

¹Cabe uma observação aqui: esta H é, de fato, a Hamiltoniana canônica.

e também

$$\frac{d\pi_\mu}{d\lambda} = e\pi_\nu A_{,\mu}^\nu - e^2 A_\nu A_{,\mu}^\nu = e(\pi^\nu - eA^\nu)A_{\nu,\mu}. \quad (2.37)$$

Em primeiro lugar, H não depende de ϕ e de t , sendo estas variáveis denominadas *cíclicas*. Os momentos generalizados a elas associados satisfazem

$$\frac{d\pi_t}{d\lambda} = \frac{d\pi_\phi}{d\lambda} = 0, \quad (2.38)$$

sendo portanto constantes, ou *integrals do movimento*. Para saber quem são exatamente, precisamos fazer algumas considerações sobre a métrica de Kerr-Newman longe do buraco negro. Nesta região (assintótica), a métrica reduz-se a

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.39)$$

que é a métrica lorentziana, de um espaço-tempo plano. A forma do potencial vetor é tal que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} A_t &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} A_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

de sorte que, nesta região, $p^\mu \approx \pi^\mu$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi_t &= p_t = -p^t = -E, \\ \pi_\phi &= p_\phi = r^2 \sin^2(\theta) p^\phi = L, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde E é a “energia-no-infinito” e L é a projeção do momento angular da partícula na direção do eixo de rotação do buraco negro, doravante denominada simplesmente “momento angular da partícula”. Ficam portanto definidos os momentos generalizados π_t e π_ϕ :

$$\begin{aligned} E &= -\pi_t = -(p_t + eA_t) \\ L &= \pi_\phi = p_\phi + eA_\phi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Já temos duas constantes do movimento. A terceira constante é

$$p_\alpha p^\alpha = -\mu^2, \quad (2.43)$$

onde μ é a massa de repouso da partícula. Temos, até aqui, três constantes óbvias para o problema. Para a caracterização completa do movimento,

necessitamos de uma quarta constante, já que nosso espaço-tempo é quadridimensional. Uma tal constante existe, e é denominada *constante de Carter*, obtida por Brandon Carter em 1968, quando da análise deste problema pelo método de Hamilton-Jacobi. Este método consiste na busca de uma função S , a função de Hamilton-Jacobi, com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\partial S}{\partial \lambda} \\ \pi_\beta &= \frac{\partial S}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Efetuada uma tal substituição na hamiltoniana H , obtemos

$$H = -\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - eA_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - eA_\nu \right) \quad (2.45)$$

que se apresenta em uma forma conveniente para a dedução das equações de movimento. A constante de Carter aparecerá durante a dedução. Substituindo-se os $g^{\mu\nu}$, A_μ e usando $H = -\frac{\mu^2}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu^2}{2} = H &= \frac{1}{2\rho^2} \left(a^2 \sin^2(\theta) - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{eQr}{\rho^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{a}{\rho^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{eQr}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\rho^2} \left(-\frac{a^2}{\Delta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right)^2 + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Vamos aproveitar o fato de a Hamiltoniana não depender explicitamente nem de t e nem de ϕ , bem como as equações para S , para escrever a função S sob a forma

$$S = \frac{\mu^2 \lambda}{2} - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (2.47)$$

que, substituída em H , fornece

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\mu^2}{2} = \frac{1}{2\rho^2} \left(a^2 \sin^2(\theta) - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right) \left(-E + \frac{eQr}{\rho^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{a}{\rho^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) \left(-E + \frac{eQr}{\rho^2} \right) \left(L - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)} - \frac{a^2}{\Delta} \right) \left(L - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right)^2 + \\ &+ \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

que pode ser rearranjada sob a forma mais simples

$$-\frac{\mu^2}{2} = -\frac{1}{2\rho^2\Delta} [-(r^2 + a^2)E + aL + eQr]^2 + \frac{1}{2\rho^2\sin^2(\theta)} [L + (-E)a\sin^2(\theta)]^2 + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2. \quad (2.49)$$

Cumpre-nos, agora, executar a separação de variáveis para encontrar S_r e S_θ . Assim, temos

$$\frac{\Delta}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = -\frac{\mu^2}{2} + \frac{1}{2\rho^2\Delta} [-E(r^2 + a^2) + eQr + aL]^2 + (-)\frac{1}{2\rho^2\sin^2(\theta)} [L - aE\sin^2(\theta)]^2, \quad (2.50)$$

ou

$$\Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + r^2\mu^2 - \frac{1}{\Delta} [aL + eQr - E(r^2 + a^2)]^2 = -a^2\mu^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [L - aE\sin^2(\theta)]^2 - \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2, \quad (2.51)$$

onde o termo do segundo membro pode ser reescrito como

$$-(p_\theta^2 + a^2\mu^2\cos^2(\theta) + \sin^{-2}(\theta) [L^2 - 2aEL\sin^2(\theta) + a^2E^2\sin^4(\theta)]), \quad (2.52)$$

ou

$$\begin{aligned} & - \left(p_\theta^2 + a^2\mu^2\cos^2(\theta) + \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} + a^2E^2\sin^2(\theta) \right) + 2aEL = \\ & = -p_\theta^2 - a^2\mu^2\cos^2(\theta) + a^2E^2\cos^2(\theta) - a^2E^2 - \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} + \\ & + 2aEL, \end{aligned} \quad (2.53)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & - p_\theta^2 - a^2(\mu^2 - E^2)\cos^2(\theta) - \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} + 2aEL - a^2E^2 - L^2 + L^2 = \\ & = -p_\theta^2 - a^2(\mu^2 - E^2)\cos^2(\theta) - \frac{L^2}{\tan^2(\theta)} - (L - aE)^2, \end{aligned} \quad (2.54)$$

o que, substituído na equação original em r e θ , fornece

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \mu^2 r^2 - \frac{1}{\Delta} [aL + eQr - E(r^2 + a^2)]^2 - 2aEL + a^2 E^2 + L^2 = \\ = -p_\theta^2 - a^2 \mu^2 \cos^2(\theta) - \frac{L^2}{\tan^2(\theta)} + a^2 E^2 \cos^2(\theta) = -C, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde C é a *constante de Carter*, que aparece naturalmente no processo de separação de variáveis executado aqui. Como $p_\theta = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}$, temos

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = p_\theta = \sqrt{C - \frac{L^2}{\tan^2(\theta)} - a^2(\mu^2 - E^2) \cos^2(\theta)}, \quad (2.56)$$

onde escolhemos o sinal positivo para a raiz por convenção. E S_r fica também determinado:

$$\sqrt{\Delta} \frac{\partial S_r}{\partial r} = \sqrt{-C - \mu^2 r^2 - (L - aE)^2 + \frac{1}{\Delta} [aL + eQr - E(r^2 + a^2)]^2}, \quad (2.57)$$

onde novamente adotou-se o sinal positivo para a raiz, por convenção. Integrando sobre r e θ respectivamente, vem:

$$\begin{aligned} S_r &= \int^r \left(\frac{\sqrt{R}}{\Delta} \right) dr \\ S_\theta &= \int^\theta (\sqrt{\Theta}) d\theta, \end{aligned} \quad (2.58)$$

com

$$\begin{aligned} R &= [E(r^2 + a^2) - La - eQr]^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + C + (L - aE)^2], \\ \Theta &= C - \cos^2(\theta) \left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Com a função S completamente determinada, podemos escrever as equações de movimento, usando

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \pi_\mu = p_\mu + eA_\mu, \quad (2.60)$$

fornecendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r} &= \pi_r = p_r = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \pi_\theta = p_\theta = \sqrt{\Theta} \\ \frac{\partial S}{\partial \phi} &= \pi_\phi = p_\phi + eA_\phi = L, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \pi_t = p_t + eA_t = -E \end{aligned} \quad (2.61)$$

Utilizando-se os valores de A_t e A_ϕ ,

$$\begin{aligned} p_t &= -E + \frac{eQr}{\rho^2} \\ p_\phi &= L - \frac{eQar \sin^2(\theta)}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Na forma contravariante, teremos

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu, \quad (2.63)$$

resultando, para p^r ,

$$\begin{aligned} p^r &= g^{rr} p_r = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{R} \quad , \quad p^\theta = g^{\theta\theta} p_\theta = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\Theta} \quad , \\ p^\phi &= g^{t\phi} p_t + g^{\phi\phi} p_\phi \quad p^t = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_\phi \quad , \end{aligned} \quad (2.64)$$

as duas últimas equações resultando em

$$\begin{aligned} p^\phi &= \frac{\left[a(Q^2 - 2Mr)(-E + \frac{eQr}{\rho^2}) + (-a^2 + \frac{\Delta}{\sin^2(\theta)})(L - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2}) \right]}{\rho^2 \Delta} \\ p^t &= \frac{\left[(a^2 \Delta \sin^2(\theta) - [r^2 + a^2]^2)(-E + \frac{eQr}{\rho^2}) \right]}{\rho^2 \Delta} + \\ &+ \frac{\left[a(Q^2 - 2Mr)(L - \frac{eQra \sin^2(\theta)}{\rho^2}) \right]}{\rho^2 \Delta}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Temos, agora, as quatro equações que procurávamos. Em geral, são resolvidas numericamente, devido à sua complexidade. Em alguns poucos casos, é possível obter informações qualitativas e até quantitativas sobre o movimento de uma partícula na geometria de Kerr-Newman, inclusive obtendo um potencial efetivo para o movimento radial. Um pouco mais adiante, isto será feito. Primeiramente, seria útil introduzir uma questão importante.

Sabemos que os buracos negros são caracterizados por três quantidades fundamentais: a carga Q , o momento angular J e o conteúdo de massa-energia, M , popularmente conhecidos como os “três fios de cabelo” dos mesmos. Sabemos que, por captura de matéria, emissão de radiação gravitacional ou de Hawking (tema do próximo capítulo), estes três parâmetros podem variar. Dadas variações arbitrárias em dois deles, digamos Q e J , queremos saber se o terceiro parâmetro (M , no caso) pode variar de forma

igualmente arbitrária, ou se há alguma restrição sobre esta variação, assim como vale a condição

$$M^2 \geq Q^2 + a^2, \quad (2.66)$$

visando a preservar a existência do horizonte de eventos. Esta condição, em particular, deve-se à hipótese da *Censura Cósmica*, explorada inicialmente por Penrose[4]. Esta hipótese prevê a inexistência de singularidades *nuas*, baseada na premissa de que, se exposta, a singularidade poderia influenciar toda a evolução do Universo exterior a ela. Assim, a menos que tenhamos um perfeito conhecimento da física das singularidades (o que não é o caso, atualmente), não podemos prever a evolução do Universo. Desta forma, a singularidade deve ser sempre envolvida por um horizonte de eventos.

A resposta à questão das variações é positiva, existindo mesmo uma limitação sobre a variação do terceiro parâmetro em termos das variações dos outros dois. E uma tal limitação pode ser encontrada de duas formas *distintas*, a saber: as equações de movimento já derivadas e a Lei das Áreas, tema do próximo capítulo. Aqui trataremos apenas da primeira. Com efeito, precisamos saber quais os valores permitidos para a energia E de uma partícula que esteja situada em um ponto do espaço-tempo de coordenadas (r, θ) . Tomemos as equações para p^θ e p^r , isolando E a partir delas:

$$\begin{aligned} (\rho^2 p^r)^2 &= R = [E(r^2 + a^2) - La - eQr]^2 - \Delta[\mu^2 r^2 + C + (L - aE)^2], \\ \Delta(\rho^2 p^\theta)^2 &= \Delta[C - \cos^2(\theta)[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}]]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Somando-se as duas equações, temos

$$\begin{aligned} T &= \rho^4[(p^r)^2 + \Delta(p^\theta)^2] = E^2(r^2 + a^2)^2 + L^2 a^2 + e^2 Q^2 r^2 + 2LaeQr + \\ &- 2E(r^2 + a^2)(La + eQr) + 2ELa\Delta - \\ &- a^2 E^2 \sin^2(\theta)\Delta - \frac{L^2}{\tan^2(\theta)}\Delta - \mu^2 \cos^2(\theta)\Delta - \\ &- \mu^2 r^2 \Delta - L^2 \Delta, \end{aligned} \quad (2.68)$$

que resulta na seguinte equação para E :

$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma = 0, \quad (2.69)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta), \\ \beta &= (r^2 + a^2)(eQr + La) - La\Delta \\ \gamma &= (La + eQr)^2 - \rho^2 \Delta \mu^2 - L^2 \Delta \frac{1}{\sin^2(\theta)} - \rho^4[(p^r)^2 + \Delta(p^\theta)^2] \end{aligned} \quad (2.70)$$

Resolvendo a equação para E , temos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \\ E &= \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

das quais só a primeira vale (sinal positivo antes da raiz). Isto porque, em Teoria Quântica de Campos, uma partícula livre deve apresentar um espectro de energias positivo. O termo α é positivo para qualquer r além do horizonte e mesmo para $r = r_+$. Observemos que E será mínima caso $\mu = p^r = p^\theta = 0$, pois neste caso α e β não se alteram mas γ é máximo, valendo

$$\gamma_0 = (La + eQr)^2 - \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} \Delta, \quad (2.72)$$

minimizando o termo sob a raiz na expressão para E . Note-se então que μ , p^r e p^θ sempre contribuem positivamente para E . Desta forma, injetando um objeto no buraco negro, produzimos alterações infinitesimais em Q e J , bem como em M . Nestas condições, injetando um objeto de $\mu = p^r = p^\theta = 0$ no buraco negro, junto ao horizonte de eventos ($r = r_+$), com carga elétrica $\delta Q = e$ e momento angular $\delta J = L$, a massa do buraco negro, após a captura do objeto, variará por uma quantidade $\delta M = E$, onde E é a energia do objeto, dada pela expressão anterior para E . Esta variação é obtida após substituir-se $r = r_+$ e γ_0 na expressão anterior para E :

$$\delta M_{min} = \frac{La + eQr_+}{r_+^2 + a^2}, \quad (2.73)$$

após substituição destes valores na expressão anterior para E . Como $e = \delta Q$ e $L = \delta J$, temos

$$\delta M_{min} = \frac{a\delta J + r_+Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}, \quad (2.74)$$

que é o valor mínimo para a variação de M . Num caso mais geral, onde μ , p^θ e p^r não são necessariamente nulos, pode-se escrever

$$\delta M \geq \frac{a\delta J + r_+Q\delta Q}{r_+^2 + a^2}, \quad (2.75)$$

que é o mesmo resultado fornecido pela Lei das Áreas, a ser vista no capítulo seguinte, obtido de forma independente desta. Assim, se uma partícula

não-carregada cai no buraco, portando um determinado momento angular L , a massa do buraco negro variará de acordo com o sinal de $\delta J = L$ e vice-versa. Num caso mais geral, δM pode ser positivo, nulo ou mesmo negativo, dependendo da relação entre e e L . Voltaremos a este ponto quando estudarmos a extração de energia de buracos negros, mais adiante neste trabalho. Um caso digno de nota é o da geometria de Kerr-Newman extrema, $a^2 + Q^2 = M^2$. Neste caso, $r_+ = M$. Com $J = Ma$, vem, para o caso de o buraco em questão absorver uma partícula de carga $\delta Q = e$ e momento angular $\delta J = L$, que a variação de energia δM é dada por

$$\delta M \geq \frac{a\delta(Ma) + Qr_+\delta Q}{M^2 + a^2}, \quad (2.76)$$

o que acarreta

$$M\delta M \geq a\delta a + Q\delta Q, \quad (2.77)$$

ou ainda

$$\delta(M^2) \geq \delta(a^2) + \delta(Q^2), \quad (2.78)$$

de forma que M^2 permanece maior ou igual a $a^2 + Q^2$. Assim, não há o risco de se destruir o horizonte de eventos com a injeção de partículas em um buraco de Kerr-Newman extremo. Para fechar este capítulo, cabem breves considerações sobre o movimento de uma partícula na geometria de Kerr-Newman. Precisamos voltar então à equação para a energia da partícula em sua forma mais geral:

$$E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \quad (2.79)$$

tomando apenas a liberdade de trabalhar no plano equatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, com $p^\theta = 0$. Mantida toda a notação anterior, temos

$$E = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0 + r^4\alpha(p^r)^2 + \mu^2 r^2 \alpha \Delta}}{\alpha}, \quad (2.80)$$

que assume um mínimo se $p^r = 0$. Aqui não usamos $\mu = 0$ pois a partícula pode ou não ser massiva. Este mínimo é justamente o *potencial efetivo*, V , para o movimento da partícula no plano equatorial desta geometria. Mais precisamente,

$$V = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma_0 + \alpha\Delta\mu^2 r^2}}{\alpha}. \quad (2.81)$$

Através de V podemos estudar qualitativamente o movimento, em termos da energia-no-infinito da partícula, E , exatamente como fizemos na geometria de Schwarzschild. Os pontos onde, eventualmente, $V = E$, são os *pontos de retorno* da partícula. O ponto onde V é um mínimo local (quando existir) corresponde a uma órbita circular estável para o valor de r correspondente. Idem para o ponto onde V for um máximo local, quando este existir, exceto que a órbita será circular e instável, onde a menor perturbação pode arrastá-la para longe ($r \rightarrow \infty$) ou para o buraco ($r = r_+$). Alguns gráficos ilustrarão estes comentários. Por simplicidade, tomaremos o caso em que $Q = 0$ e $a^2 = M^2$, sem perda de generalidade. Assim, se $a = M$, podemos definir \tilde{L} e \tilde{E} como sendo o momento angular por unidade de repouso e a energia-no-infinito por unidade de massa de repouso, respectivamente, de forma a termos não propriamente V mas sim \tilde{V} , o potencial efetivo por unidade de massa de repouso, sempre que $\mu \neq 0$. Explicitamente, teremos

$$\tilde{E} = \frac{E}{\mu}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{\mu}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\mu} \quad (2.82)$$

fornecendo

$$\tilde{V} = \frac{2a^2\tilde{L} + \sqrt{4a^4\tilde{L}^2 - [r^3 + ra^2 + 2a^3][(2a - r)\tilde{L}^2 - r(r - a)^2]}}{r^3 + ra^2 + 2a^3}. \quad (2.83)$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a} \tilde{V} &= \frac{\tilde{L}}{2a}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{V} &= 1. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Tomamos o limite $r \rightarrow a$ porque este é o horizonte de eventos para uma geometria de Kerr extrema. Para diferentes valores de \tilde{L} plotamos os gráficos de \tilde{V} em função de r .

Assim não temos mínimos (poços finitos de potencial) para os casos em que $\tilde{L} = 0, 1$. Nestes casos, a captura da partícula pelo buraco negro é inevitável. Para $\tilde{L} = 2, 4, 7$ temos mínimos locais \tilde{V}_{min} com $\tilde{V}_{min} < 1$. Assintoticamente, todos tendem a 1. O início dos gráficos é sempre em $r = a = 1$, pois o potencial efetivo só está definido para $r \geq a$. Assim, para os casos $\tilde{L} = 2, 4, 7$, por exemplo, pode haver órbitas limitadas e estáveis para partículas com $\tilde{V}_{min} < \tilde{E} < 1$, e órbitas circulares estáveis se $\tilde{E} = \tilde{V}_{min}$. No caso $\tilde{L} = 2$, como $\tilde{V}(r = a) = 1$, se $\tilde{E} = 1$ teremos uma órbita circular instável em $r = a$, à semelhança do que ocorria com uma partícula na geometria de Schwarzschild, com a partícula executando muitas voltas em torno do buraco negro, a menor perturbação podendo ou arrastá-la buraco adentro ou afastá-la do mesmo. Para $\tilde{L} = 4, 7$ os valores de $\tilde{V}(r = a = 1)$ são $\tilde{V} = 2$ e $\tilde{V} = 3.5$, respectivamente, correspondendo ao máximo de \tilde{E} que a partícula pode ter, nestes casos, para não ser capturada pelo buraco negro. Ainda se $\tilde{L} = 4, 7$, se $1 < \tilde{E} < \tilde{V}(r = a)$, há órbitas com apenas *um* ponto de retorno, a partícula aproximando-se do buraco até um certo valor de r e afastando-se depois. E se $\tilde{E} > \tilde{V}(r = a)$, a partícula é capturada pelo buraco negro (*captura gravitacional*).

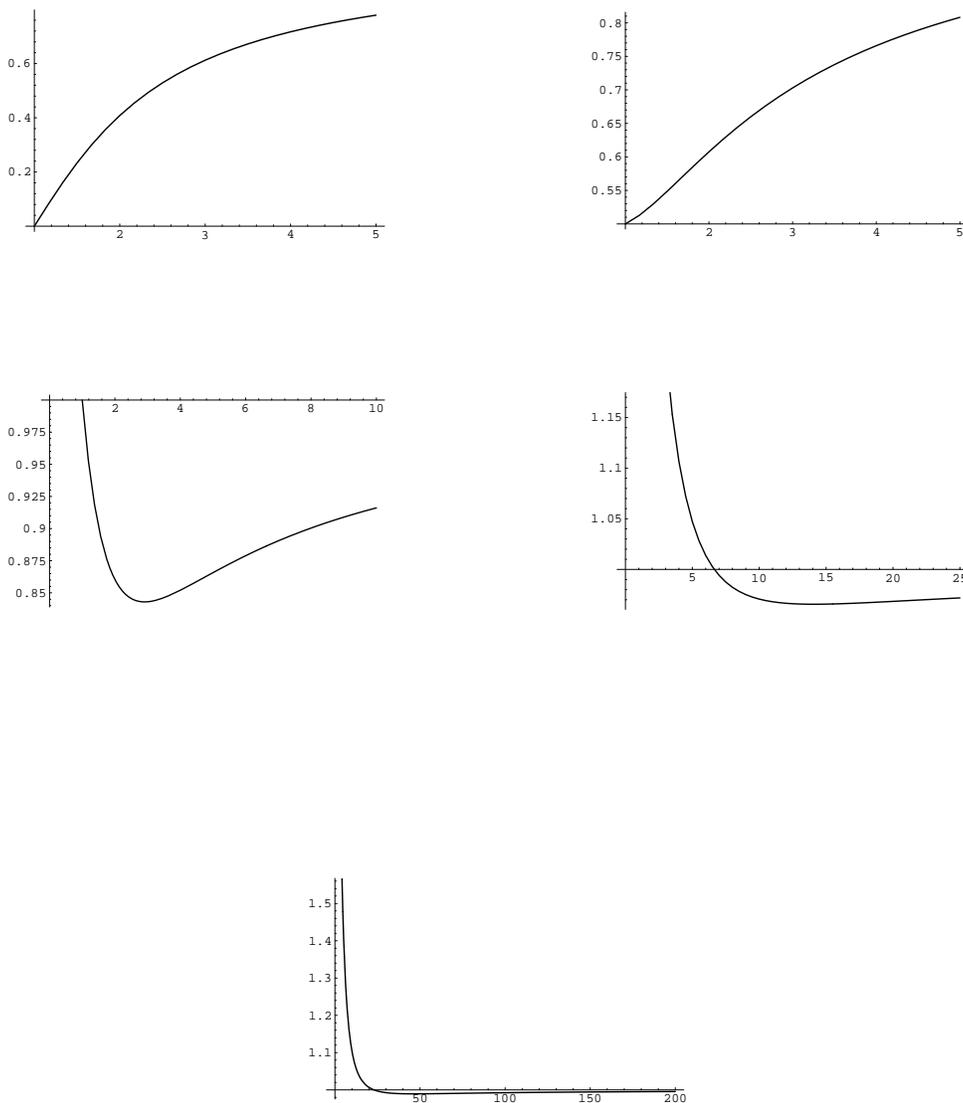


Figura 2.1: Gráficos de \tilde{V} em função de r para o caso $a = M = 1$, $Q = 0$, $\tilde{L} = 0, 1, 2, 4, 7$, no sentido normal de leitura. \tilde{V} aparece nas ordenadas e r nas abscissas. Não há máximos ou mínimos em V se $\tilde{L} = 0, 1$, enquanto que para $\tilde{L} = 2, 4, 7$ aparecem mínimos nítidos.

Capítulo 3

A Conexão com a Termodinâmica

Neste capítulo reside a alma do presente trabalho, pois aqui é feita a conexão com a Termodinâmica Clássica, base para os demais capítulos.

A expressão para a área de um buraco negro genérico já foi deduzida no Capítulo 2, ao final da seção 2.1, sendo igual a

$$A = 8\pi \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} + M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right], \quad (3.1)$$

que se reduz a $A = 16\pi M^2$ para o buraco negro de Schwarzschild. No início da década de 70, Stephen Hawking demonstrou a *Lei das Áreas*, segundo a qual a área de um buraco negro *nunca diminui* em qualquer processo físico. Esta é uma lei *clássica*, na medida em que não são usados elementos de Mecânica Quântica em sua formulação e/ou demonstração. Matematicamente, temos

$$\delta A \geq 0. \quad (3.2)$$

A referida lei tem duas bases essenciais: uma é a inexistência de singularidades nuas, ou “Censura Cósmica”, como levantada por Penrose[4]. A outra base é um teorema do próprio Penrose, citado em Misner[9]. De acordo com tal teorema, a união de todos os horizontes de eventos é gerada por geodésicas tipo-nulo que não têm pontos finais na direção do futuro. Cada evento (no horizonte) que origina um gerador é denominado *cáustica*. Estes geradores não podem interceptar-se, a não ser nas cáusticas. Mais de um gerador pode sair de uma cáustica, mas em nenhum evento não-cáustico pode

passar mais de um gerador. Na direção do futuro, novos geradores podem aparecer (fisicamente, isto corresponde a absorção de matéria pelo horizonte de eventos do buraco negro, ou mesmo a fusão de buracos negros). Mas os geradores antigos não desaparecem. Assim, a área da seção transversal de um feixe de geradores nunca diminui, já que o contrário acarretaria eventual interceptação de geradores fora das cáusticas, violando o teorema de Penrose. Hawking demonstrou que a hipótese da Censura Cósmica leva às conclusões acima. Não diminuindo a área de nenhum feixe de geradores, a área da soma desses feixes, com a evolução temporal, nunca diminui. E tal soma de feixes representa o horizonte de eventos. Assim, a área deste (que é exatamente a área do buraco negro), nunca diminui. A Lei das Áreas, pelo seu enunciado, guarda forte semelhança com a Segunda Lei da termodinâmica clássica, segundo a qual a entropia S de um sistema físico fechado não diminui em nenhum processo, isto é,

$$\delta S \geq 0. \quad (3.3)$$

Deve-se mencionar um detalhe aqui: a Lei das Áreas é mais estrita do que a Segunda Lei da Termodinâmica. Em um sistema de vários buracos negros, não só a soma das áreas de todos os buracos negros não diminui, como também a área de cada buraco negro, tomado isoladamente, não pode diminuir. Ou seja, não é possível transferir área de um buraco negro para outro (buracos negros não “bifurcam”, classicamente falando). Na Termodinâmica Clássica, dentro de um sistema fechado a entropia não diminui, mas pode haver transferência de entropia entre os subsistemas que o compõem, mediante trocas de calor, por exemplo.

Tal semelhança, de qualquer forma, motivou alguns teóricos, como Bekenstein[1], o próprio Hawking e outros, a buscar novas analogias entre a física de buracos negros e a termodinâmica. Com efeito, é possível estabelecer uma analogia entre a física de buracos negros e a Primeira Lei da Termodinâmica. Tomemos, para isto, a “área racionalizada”, α , do buraco negro:

$$\alpha = \frac{A}{4\pi} = a^2 + r_+^2 = 2Mr_+ - Q^2. \quad (3.4)$$

Agora, tomemos o diferencial de α ,

$$d\alpha = 2Mdr_+ + 2r_+dM - 2QdQ, \quad (3.5)$$

que, após os ajustes necessários, fica

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(2r_+ + 2M + \frac{4M^2 + \frac{4M^2}{J^2}}{r_+ - r_-}\right)dM - \left(2Q + \frac{4MQ}{r_+ - r_-}\right)dQ - \\ &- \left(\frac{4J}{M(r_+ - r_-)}\right)dJ, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou ainda

$$d\alpha = \frac{4\alpha}{r_+ - r_-}dM - \frac{4Qr_+}{r_+ - r_-}dQ - \frac{4J}{M(r_+ - r_-)}dJ, \quad (3.7)$$

onde $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}$ é a outra solução de $\Delta = 0$. Isolando-se dM , vem:

$$dM = \frac{r_+ - r_-}{4\alpha}d\alpha + \frac{Qr_+}{\alpha}dQ + \frac{J}{M\alpha}dJ, \quad (3.8)$$

ou ainda

$$dM = \Theta d\alpha - \Phi dQ + \Omega dJ, \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{r_+ - r_-}{4\alpha} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \\ \Phi &= -\frac{Qr_+}{\alpha} = -\frac{Q[M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}]}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

que se define como o potencial elétrico no horizonte, e

$$\Omega = \frac{J}{M\alpha} = \frac{J}{M \left[2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right]}, \quad (3.11)$$

que é a velocidade angular do buraco negro, medida por um observador no infinito. Se M é o conteúdo de massa-energia do buraco negro, então temos a analogia com a Primeira Lei da Termodinâmica, expressa em termos da energia interna U , entropia S , temperatura T , volume V e pressão p exercida sobre o sistema,

$$dU = TdS - pdV, \quad (3.12)$$

onde TdS representa variação em U por trocas de calor com o meio externo, e $-pdV$ representa a variação em U em virtude da realização de trabalho sobre o sistema. Assim, podemos estabelecer as correspondências adequadas:

1. O termo $\Theta d\alpha$ é análogo ao termo TdS ;
2. O termo $-\Phi dQ + \Omega dJ$ é análogo ao termo $-pdV$.

A analogia ainda não está completa. Em virtude da semelhança entre os enunciados da Lei das Áreas e da Segunda lei da Termodinâmica, buscou-se não apenas considerar A e S simplesmente como análogas, mas também como grandezas correlatas, no contexto da física de buracos negros. A relação estabelecida entre ambas, por Bekenstein[2] e Hawking[3], ainda nos anos 70, é

$$S_{bh} = S = \frac{Ac^3}{4G\hbar} = \frac{c^3\alpha\pi}{G\hbar}, \quad (3.13)$$

sendo que $\hbar = c = G = 1$ no sistema de unidades geométricas e S passa a se chamar, doravante, *entropia do buraco negro*. É importante frisar aqui que, embora a Termodinâmica por si só já permita estabelecer uma analogia entre entropia e área para buracos negros, a forma exata da correlação entropia-área dada há pouco só pode ser encontrada na dedução da temperatura da radiação de Hawking em Teoria Quântica de Campos em espaços curvos. Assim, a comparação entre TdS e $\Theta d\alpha$ fornece

$$T = \frac{\Theta}{\pi}, \quad (3.14)$$

onde T passa a ser uma grandeza análoga à temperatura, para o buraco negro. Em função de M , Q e J , tem-se

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi\alpha} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{4\pi \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right]}. \quad (3.15)$$

Surge, no entanto, um problema. Classicamente falando, um buraco negro nada emitiria além de ondas gravitacionais. Assim sendo, sua temperatura, estritamente falando, deveria ser *zero*. No entanto, pouco tempo após a Lei das Áreas ser demonstrada, Stephen Hawking constatou, por meio da Teoria Quântica de Campos, que buracos negros de fato *emitem* radiação, mesmo aqueles buracos sem rotação e sem carga. Mais: irradiam bósons e férmions

com espectro térmico, isto é, como corpos negros a uma temperatura T . Esta temperatura T coincide com a “temperatura” T aqui derivada. Uma tal radiação foi batizada de *radiação de Hawking*, em homenagem a seu descobridor. Mais precisamente, de acordo com Hawking[3] e Bekenstein[2], para um buraco negro formado por colapso gravitacional, ocorre a emissão de todos os tipos de quanta a uma taxa uniforme. Para cada modo de radiação especificado por uma frequência ω , momento angular azimutal m e carga elétrica e , o número médio n de quanta emitidos é

$$\begin{aligned} n &= \Gamma \frac{1}{\exp\{x\} - 1} \\ n &= \Gamma \frac{1}{\exp\{x\} + 1} \\ x &= \frac{\hbar\omega - \hbar m\Omega + e\Phi}{T} \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a primeira equação vale para bósons e a segunda, para férmions. A constante Γ aqui é a *absorptividade* para o modo de radiação em questão, isto é, a fração da radiação, em determinado modo, que o buraco negro absorve. O termo T na equação anterior corresponde à temperatura de corpo negro associada ao buraco negro, e, conforme a derivação de Hawking[3], coincide com a temperatura aqui derivada para os buracos negros, por vias termodinâmicas. Assim, as abordagens quântica e termodinâmica fornecem o mesmo resultado para este problema. Aqui, Ω e Φ são as mesmas derivadas anteriormente para a velocidade angular e o potencial eletrostático do horizonte de eventos, respectivamente. Subseqüentemente, Bekenstein[2], demonstrou que a perda de área (e, conseqüentemente, de entropia) por parte do buraco negro devido à radiação emitida é compensada pela entropia da radiação emitida, de tal forma que a entropia do sistema “buraco negro-radiação” nunca diminui. Isto se constitui em uma generalização da Segunda Lei da Termodinâmica no contexto de buracos negros. Voltaremos à questão da perda de área pelo buraco mais adiante nesta seção, onde veremos que a Lei das Áreas, para buracos negros em geral, ainda é válida, dada a lentidão do processo de evaporação. A descoberta da radiação de Hawking foi relevante, não apenas por seu próprio mérito, mas também por emprestar, enfim, significado físico à “temperatura” T , que deixa de ser uma simples analogia com a temperatura clássica e passa a representar uma temperatura de corpo negro para o buraco negro, em termos de M , Q e J . De outra forma, a presente conexão com a termodinâmica (e o restante deste trabalho) perderia todo o sentido.

Isto posto, poderíamos partir diretamente para o estudo detalhado das

temperaturas e capacidades térmicas de buracos negros. Isto será feito no próximo capítulo, de maneira detalhada e extensiva. Por ora, cabem comentários relevantes sobre a Lei das Áreas, até pelas questões que esta suscita.

Ao final do capítulo anterior, havíamos feito uma aplicação das equações de movimento de uma partícula na geometria de Kerr-Newman, estabelecendo um limite mínimo para as variações da energia, δM , do buraco negro em termos das variações de J e de Q . Veremos a seguir que a lei das áreas fornece exatamente o mesmo resultado. Ela impõe

$$\delta A \geq 0, \quad (3.17)$$

que pode ser reescrita como

$$\delta(r_+^2 + a^2) \geq 0, \quad (3.18)$$

ou

$$2M\delta M - Q\delta Q + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\delta M + \frac{M^2\delta M - QM\delta Q - J\left[\frac{dJ}{M} - \frac{JdM}{M^2}\right]}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \geq 0, \quad (3.19)$$

que, após os ajustes necessários, reduz-se a

$$\left[2M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} + \frac{M^2 + \frac{J^2}{M^2}}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}\right] \delta M - Q \left[1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}\right] \delta Q - \frac{J}{M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \delta J \geq 0. \quad (3.20)$$

Utilizando-se $r_+ - r_- = 2\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}$, as definições de r_+ e r_- , e também $2Mr_+ - Q^2 = \alpha$, vem:

$$\delta M \geq \frac{Qr_+\delta Q + \alpha\delta J}{r_+^2 + a^2}, \quad (3.21)$$

que é *exatamente* o mesmo resultado do fim do capítulo anterior, mas obtido de forma totalmente independente. A lei das áreas é, assim, perfeitamente compatível com as equações de movimento da geometria de Kerr-Newman.

Falta ainda a questão da evaporação dos buracos negros, que poderia, a princípio, invalidar a lei das áreas, por permitir aos buracos negros eventualmente desaparecerem. Por simplicidade, abordaremos somente o caso em que $Q = J = 0$, e além disso suporemos que o buraco negro é um absorvedor perfeito (absorptividade $\Gamma = 1$ em todos os modos de radiação). Nestas circunstâncias,

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \quad (3.22)$$

e sabemos que a potência irradiada por um corpo negro é proporcional à *quarta potência* de T . Passando das unidades geométricas para as convencionais (MKS), a temperatura do buraco negro fica

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M}, \quad (3.23)$$

e a lei de Stefan-Boltzmann para a potência F irradiada por um corpo negro (por unidade de área, ou ainda *fluxo*) fica

$$F = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} T^4, \quad (3.24)$$

onde $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ é a constante de Boltzmann, $c = 3.0 \times 10^8 m/s$ é a velocidade da luz no vácuo e $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J.s$ é a constante de Planck (dividida por 2π). Assim, a potência total irradiada pelo buraco negro fica, após a multiplicação de F pela área do horizonte de eventos, $A_{Sch} = 16\pi M^2 \frac{G^2}{c^4}$,

$$P = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2}. \quad (3.25)$$

Assim, se M é a energia do buraco negro, teremos

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dM}{dt} = -P = -b \frac{1}{M^2}, \quad (3.26)$$

já que $E = Mc^2$, onde

$$b = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2}, \quad (3.27)$$

o que, após integração, fornece

$$M^3 = -3bc^{-2}t + k = -3\beta t + k, \quad (3.28)$$

onde k é uma constante e $\beta = bc^{-2}$. Com a condição inicial $M(t = 0) = M_0$, ficamos com

$$M(t) = (M_0^3 - 3\beta t)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.29)$$

o que implica um tempo

$$t = \frac{M_0^3}{3\beta} \quad (3.30)$$

para a evaporação completa do buraco negro. Este tempo é proporcional, portanto, à terceira potência de M_0 , a massa inicial do buraco negro. Para um buraco negro com $M_0 = M_s$, onde M_s é a massa solar, podemos estimar este tempo. Se $M_0 = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{s}^{-2}$, vem

$$t = 6,60 \times 10^{74} \text{ s} = 2,09 \times 10^{67} \text{ anos}, \quad (3.31)$$

um tempo muitas ordens de magnitude superior aos 10^{10} anos estimados para o nosso universo. Da teoria astrofísica, sabemos que estrelas com massa inferior a cerca de $1.5M_s$ não formam buracos negros. Supondo que a grande maioria dos buracos negros tenha massa superior a estes $1.5M_s$, conclui-se que eles não tiveram tempo suficiente para evaporar de forma significativa, de forma que sua área não sofreu variação significativa por conta de evaporação quântica. Assim, podemos assegurar que a Lei das Áreas é válida mesmo em processos que envolvem escalas de tempo cosmológicas, $t \geq 10^8$ anos. Processos como colisão de buracos negros e captura de partículas, bem como o de extração de energia a partir da ergosfera de buracos negros girantes, envolvem tempos bem menores do que a atual idade do universo e podem ser estudados à luz da Lei das Áreas, mesmo esta sendo uma lei clássica. Esta conclusão é muito importante, pois de outra forma a Lei das Áreas reduzir-se-ia a mera curiosidade, com pouca aplicação prática, invalidando os resultados obtidos até aqui. Isto completa o que foi exposto anteriormente neste capítulo, sobre a questão da perda de área pelos buracos negros em virtude da radiação de Hawking.

Para um caso mais geral, de buracos negros em rotação ou carregados, não fizemos nenhuma estimativa de tempos de evaporação, mas o resultado acima já dá uma boa idéia do que esperar para casos mais gerais. Vejamos agora o conceito de *massa irreduzível*[20], [21], M_{ir} , de um buraco negro, importante para os dois capítulos finais. Esta massa é aquela de um buraco negro de Schwarzschild com a *mesma área* do buraco de Kerr-Newman

correspondente. Usando-se a expressão para a área do buraco, vem

$$A = 16\pi M_{ir}^2 = 4\pi(a^2 + r_+^2), \quad (3.32)$$

que, após substituir-se a expressão para r_+ e $a = \frac{J}{M}$, fornece, resolvendo-se para M ,

$$M = \sqrt{\left(M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}}\right)^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2}}, \quad (3.33)$$

que é a expressão da energia M do buraco em termos de Q , J e M_{ir} , permitindo ver a participação de cada uma destas “fontes” para a energia total do buraco. O termo “irredutível” é procedente, pois, pela lei das áreas,

$$\delta A = 32\pi M_{ir} \delta M_{ir} \geq 0. \quad (3.34)$$

Sendo a massa uma grandeza sempre positiva, temos assim $\delta M_{ir} \geq 0$, justificando o termo. Notar que, no limite $J, Q \rightarrow 0$, tem-se $M = M_{ir}$. Como não se extrai mais energia de buracos sem rotação alguma ($J = 0$), e não se interage eletromagneticamente com buracos sem carga ($Q = 0$), concluímos que M_{ir} é para o buraco negro o análogo à massa de repouso para uma partícula qualquer, ou, ainda, ao conceito de *calor* na Termodinâmica clássica, como a energia que não é mais conversível em trabalho.

Por último, fechando este capítulo, há uma última observação a fazer: na expressão da temperatura T de um buraco negro, conforme veremos detalhadamente no próximo capítulo, o valor mínimo que T assume é zero, para buracos negros com geometria extrema, onde $M^2 = Q^2 + a^2$. Neste caso, a área do buraco é mínima. E sua entropia é também mínima. Mas não é nula. Isto indica que os buracos negros violam a Terceira Lei da Termodinâmica, segundo a qual um sistema físico à temperatura nula apresenta entropia nula.

Capítulo 4

Temperaturas e Capacidades Térmicas

Aqui faremos uma discussão detalhada e extensiva sobre temperaturas e capacidades térmicas de buracos negros. Retomemos a expressão para a temperatura do buraco negro,

$$T = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{4\pi \left(M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right)}. \quad (4.1)$$

O caso mais simples é aquele onde $Q = J = 0$, onde

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \quad (4.2)$$

que é o caso de Schwarzschild, que pode ser tratado à parte por sua simplicidade. Nestas condições,

$$M = \frac{1}{8\pi T}, \quad (4.3)$$

de forma que a capacidade térmica c é dada por

$$c = \frac{dM}{dT} = -\frac{1}{8\pi T^2} = -8\pi M^2, \quad (4.4)$$

sendo portanto sempre *negativa*, tendendo a $-\infty$ se $M \rightarrow \infty$. Esta é a primeira conclusão realmente significativa deste trabalho, por ser contrária ao que se esperaria para a maioria dos sistemas físicos clássicos. Na Termodinâmica clássica, capacidade térmica negativa indica um sistema entrando em colapso, ou termodinamicamente *instável*, levantando dúvidas sobre

62CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

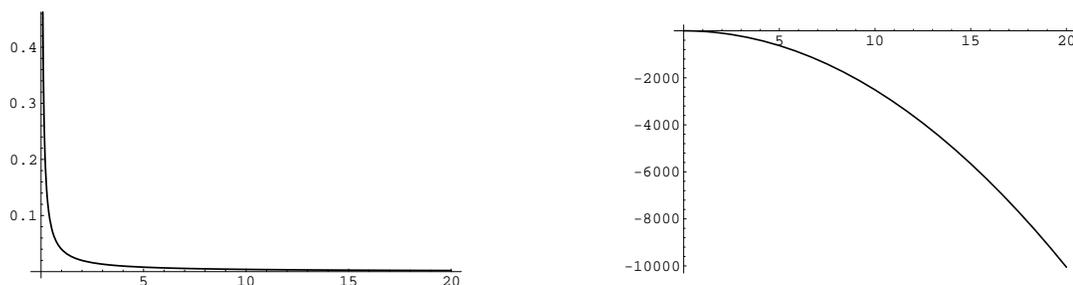


Figura 4.1: O gráfico à esquerda representa T em função de M para o buraco de Schwarzschild, sendo M nas abscissas e T nas ordenadas. O gráfico à direita representa c em função de M para o buraco de Schwarzschild, c nas ordenadas e M nas abscissas.

a estabilidade termodinâmica de buracos de Schwarzschild. Veremos, no próximo capítulo, que, sob certas circunstâncias, estes buracos são estáveis, e instáveis sob outras. Por ora, fiquemos nas temperaturas e capacidades térmicas, analisando os gráficos da Figura 4.1.

Uma vez tratado este caso mais simples, podemos lidar com casos mais complexos. Tratemos inicialmente o caso $Q = 0$, mas com J não nulo. Foram plotados gráficos de T contra M com J fixo, assumindo os valores $J = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. Vejamos os gráficos correspondentes, na Figura 4.2, onde T aparece nas ordenadas e M , nas abscissas. Detalhes como o valor mínimo de M e o valor de M que maximiza T aparecem nas legendas, e serão vistos após os gráficos.

Em seguida podemos ver o caso em que $J = 0$, com carga Q não-nula. Seguem-se alguns gráficos, com Q mantido constante, assumindo os valores $Q = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. Ver Figura 4.3.

64 *CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS*

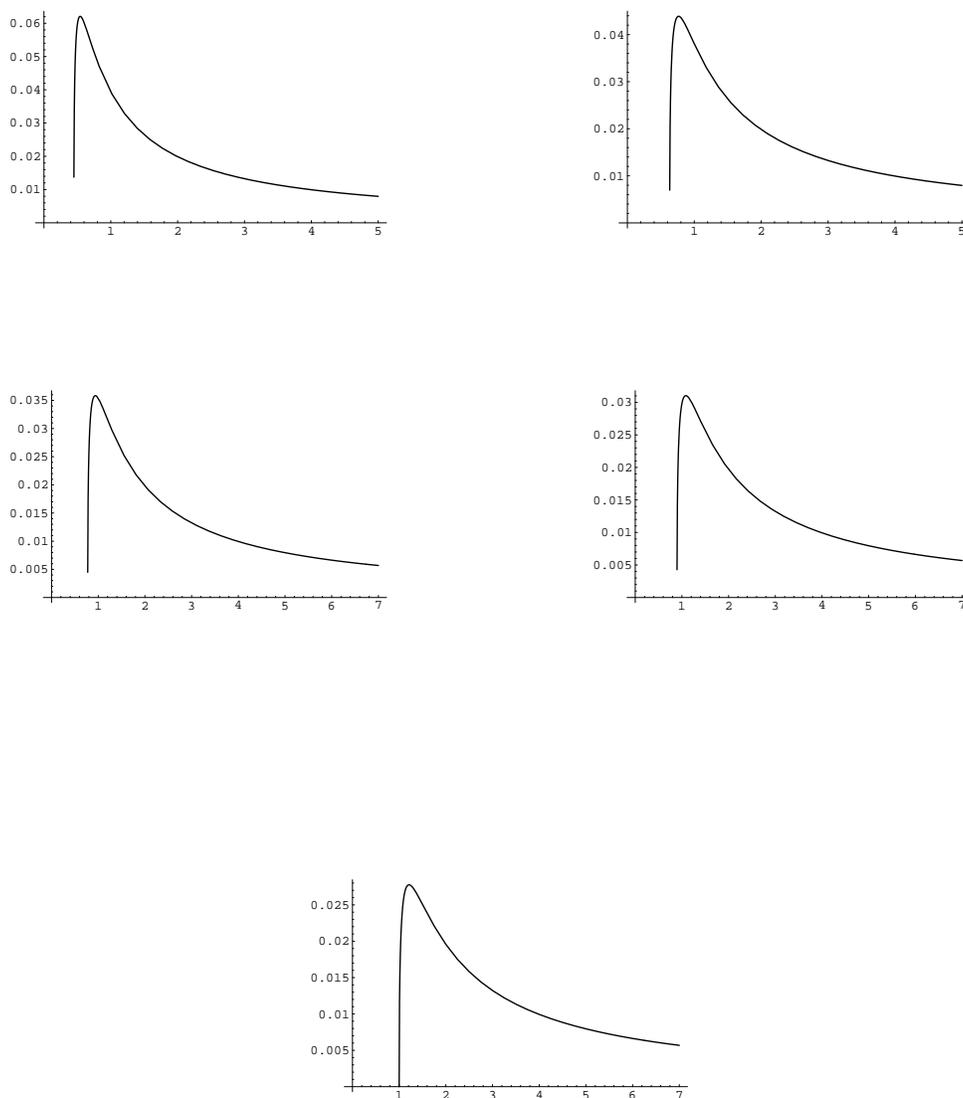


Figura 4.2: Estes são os gráficos de T em função de M para $Q = 0$ e $J = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, na seqüência normal de leitura. Os valores de M_0 , M_c e de T_c virão adiante, na Tabela 01. Reparar nos picos dos gráficos.

A seguir, foram elaborados gráficos para o caso $Q \neq 0, J \neq 0$. Foram escolhidos os valores $Q = 0.4$ e $Q = 0.8$ para a carga, enquanto que, para *cada um destes valores de Q* , a variável J assumiu os valores $J = 0.4$ e $J = 0.8$. Vamos a eles, na Figura 4.4.

66CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

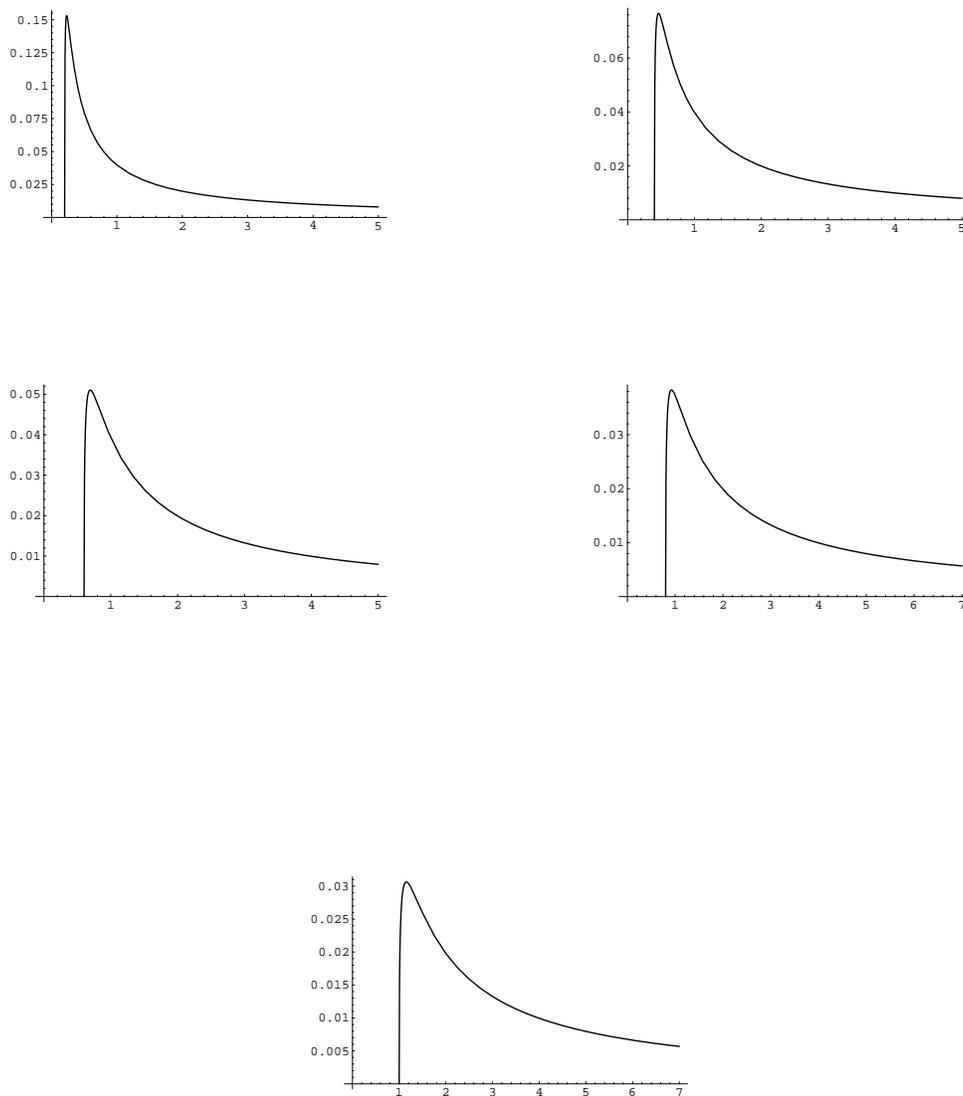


Figura 4.3: Gráficos de T em função de M , para $J = 0$, $Q = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, no sentido normal de leitura. Os valores de M_0, M_c e T_c correspondentes estão tabelados mais adiante-ver Tabela 02. Observar os picos dos gráficos.

O valor mínimo para M , M_0 , é dado pela condição de existência do horizonte de eventos,

$$M^2 \geq Q^2 + \frac{J^2}{M^2}, \quad (4.5)$$

onde a igualdade fornece M_0 , a saber,

$$M_0 = \frac{Q}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4J^2}{Q^4}}}. \quad (4.6)$$

Agora, temos de obter os valores de M que maximizam T para Q, J dados. Tomando-se a derivada de T com relação a M , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial M} &= \frac{1}{4\pi} \frac{M + \frac{J^2}{M^3}}{\left(M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\right) \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} - \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \left(2M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\right)}{\left(M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\right)^2} +, \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{M^2 + \frac{J^2}{M^2}}{\left(M^2 - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

que, igualada a zero, fornece

$$3M^8 - 4Q^2M^6 - 6J^2M^4 - J^4 = 0, \quad (4.8)$$

equação que só pode ser resolvida numericamente, a não ser nos casos particulares abaixo:

- $Q \neq 0, J = 0$

Neste caso, a equação acima reduz-se a

$$3M^8 - 4Q^2M^6 = 0, \quad (4.9)$$

resultando em $M = M_c = \frac{2Q\sqrt{3}}{3}$. A temperatura máxima, T_c , é

$$T(M_c) = T_c = \frac{\sqrt{3}}{18\pi Q}. \quad (4.10)$$

68CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

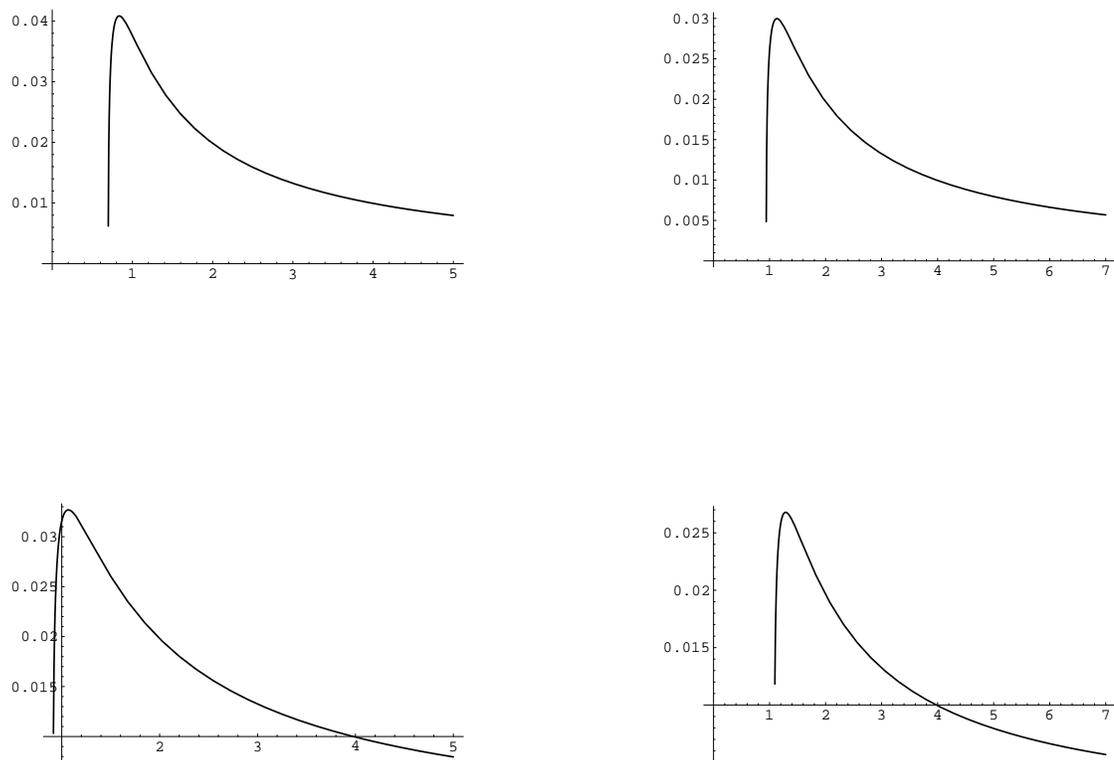


Figura 4.4: Gráficos de T em função de M para $J = Q = 0.4$, $Q = 0.4, J = 0.8$, $Q = 0.8, J = 0.4$ e $J = Q = 0.8$, no sentido normal de leitura. Os valores de M_0, M_c e T_c estão na Tabela 03. Observar os picos dos gráficos.

- $Q = 0, J \neq 0$

Neste caso, o valor $M = M_c$ que maximiza T é dado por

$$3M^8 - 6J^2M^4 - J^4 = 0, \quad (4.11)$$

forneendo $M = M_c = \sqrt[4]{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J}} = 1.2116\sqrt{J}$. Na expressão de T , isto acarreta uma temperatura máxima T_c dada por $T(M_c) = T_c = \frac{0.02776}{\sqrt{J}}$. Conforme aumenta o valor de Q ou o de J , o máximo (pico) de T desloca-se para a direita, mas sua "altura" decresce. Ou seja, com o aumento de J e de Q , ocorre uma suavização dos picos dos gráficos. Como exposto nas tabelas a seguir, isto ocorre também quando Q e J são ambos diferentes de zero.

- **Tabela 01 - Valores de M_0, M_c e T_c para diferentes valores de J com $Q = 0$**

J	M_0	M_c	T_c
0.2	0.4472	0.5418	0.0621
0.4	0.6325	0.7663	0,0439
0.6	0.7746	0.9385	0.0358
0.8	0.8944	1.0837	0.0310
1.0	1.0000	1.2116	0.0278

- **Tabela 02 - Valores de M_0, M_c e T_c para $J = 0$ e Q fixo**

Q	M_0	M_c	T_c
0.2	0.2	0.2309	0.1531
0.4	0.4	0.4619	0.0766
0.6	0.6	0.6928	0.0510
0.8	0.8	0.9238	0.0383
1.0	1.0	1.1547	0.0306

- **Tabela 03 - Valores de M_0, M_c e T_c para $Q = 0.4$ e J fixo.**

J	M_0	M_c	T_c
0.2	0.5435	0.6435	0.0536
0.4	0.6985	0.8351	0.0409
0.6	0.8278	0.9937	0.0342
0.8	0.9402	1.1310	0.0300
1.0	1.0408	1.2537	0.0270

70CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

- **Tabela 04 - Valores de M_0, M_c e T_c para $Q = 0.8$ e J fixo.**

J	M_0	M_c	T_c
0.2	0.8351	0.9691	0.0363
0.4	0.9123	1.0676	0.0327
0.6	1.0000	1.1782	0.0294
0.8	1.0870	1.2869	0.0268
1.0	1.1704	1.3906	0.0247

Em geral, o comportamento dos gráficos é bastante semelhante, diferindo basicamente em detalhes quantitativos. Todos os gráficos começam em um determinado M_0 (que depende de J e Q), assumindo aí o valor zero. Crescem até um determinado valor M_c (também dependente de Q e de J). Nesta faixa de valores de M , a derivada $\frac{\partial T}{\partial M}$ é positiva, assim como a sua inversa,

$$c_{J,Q} = C = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{J,Q}, \quad (4.12)$$

que é a *capacidade térmica* a J, Q constantes, doravante denominada simplesmente C . Nas proximidades de M_c , a situação exige exame mais detalhado. Se $M \rightarrow M_c^-$, isto é, se M tende a M_c mas é inferior a ele, a derivada $\frac{\partial T}{\partial M}$ tende a zero, mas é ainda positiva (simbolicamente, $\frac{\partial T}{\partial M} \rightarrow 0^+$). Isto acarreta $C \rightarrow +\infty$, ou seja, torna-se divergente a capacidade térmica. Quando passamos para o outro ramo do gráfico, temos $\frac{\partial T}{\partial M} \rightarrow 0^-$ para $M \rightarrow M_c^+$, ou seja, esta derivada é negativa (ainda que próxima de zero), quando M tende a M_c mas excedendo este valor. Isto acarreta $C \rightarrow -\infty$, ou seja, torna-se igualmente divergente a capacidade térmica, só que desta vez *negativa*. Em outras palavras, C é *singular* em $M = M_c$, muito embora a temperatura T não o seja. À medida que M cresce para além de M_c , T decresce, lentamente no início, mais rapidamente depois, voltando a decrescer mais lentamente a partir de um certo valor M_x , que, como veremos mais adiante, corresponde a um máximo local para C , que permanece, apesar disto, negativa (ponto de inflexão nos gráficos de T contra M , no ramo $M > M_c$). Finalmente, se $M \rightarrow \infty$, $\frac{\partial T}{\partial M} \rightarrow 0^-$, implicando $C \rightarrow -\infty$. Este é o limite de Schwarzschild, onde $\frac{Q}{M}$ e $\frac{J}{M^2}$ tendem a zero. Além disto, na expressão para T , temos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T(J, Q, M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi M} = 0, \quad (4.13)$$

significando uma temperatura cada vez mais próxima de zero quando M tende ao infinito. Assim, quanto mais massivo o buraco, tanto menos ele

irradiará, pela lei de Stefan-Boltzmann. E tanto mais tempo precisará para evaporar, como vimos ao final do capítulo anterior. Agora podemos estudar as capacidades térmicas a J, Q constantes. Tomando-se a expressão anterior para $\frac{\partial T}{\partial M}$, e invertendo-a, obtemos C , já simplificada

$$C = 4\pi \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} + M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right]}{M + \frac{J^2}{M^3} - 2\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \quad (4.14)$$

que pode ser plotada (mantendo-se J e Q fixos) em função de M . Como nos gráficos para T contra M , há um mínimo M_0 para M , bem como um valor M_c para o qual C é singular. Se $M \rightarrow M_c^-$, então $C \rightarrow \infty$; se $M \rightarrow M_c^+$, então $C \rightarrow -\infty$. Se $M = M_0$, então temos o anulamento do termo sob a raiz no numerador de C , anulando-a. Assim, $C \rightarrow 0$ se $M \rightarrow M_0$. E, no limite oposto, temos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} C = \lim_{M \rightarrow \infty} -8\pi M^2 = -\infty, \quad (4.15)$$

que é o caso-limite de Schwarzschild. A novidade aparece no ramo negativo da capacidade térmica, $M > M_c$. Os gráficos de T contra M para J, Q fixos (não ambos nulos) apresentam um ponto de inflexão para um determinado $M_x > M_c$. Como veremos nos gráficos da figura 4.5, isto corresponde a um máximo local de C , que permanece negativa. Calculando $\frac{\partial C}{\partial M}$ e igualando a zero, vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial M} &= 12M^{16} - 36Q^2M^{14} + (25Q^4 - 84J^2)M^{12} + 132Q^2J^2M^{10} + (120J^4 - \\ &- 30J^2Q^4)M^8 - 76J^4Q^2M^6 + (9Q^4J^4 - 36J^6)M^4 + \\ &+ 12Q^2J^6M^2 + 4J^8 = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

que é a equação para o máximo local no ramo negativo de $C_{J,Q}$, podendo ser resolvida numericamente. Nestas condições, para os valores de Q e J empregados nos gráficos de T contra M , podemos tabelar M_x , juntamente com M_c , para montar os gráficos de C contra M , a J, Q fixos. Ver Figura 4.5.

- **Tabela 05 - Valores de M_c e M_x para os gráficos de C contra M**

72CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

Q	J	M_c	M_x
0	0.2	0.5418	0.6746
0	0.4	0.7663	0.9541
0	0.6	0.9385	1.1685
0	0.8	1.0837	1.3493
0	1.0	1.2116	1.5085
0.2	0	0.2309	0.2763
0.4	0	0.4619	0.5526
0.6	0	0.6928	0.8288
0.8	0	0.9238	1.1051
1.0	0	1.1547	1.3814
0.4	0.4	0.8351	1.0286
0.4	0.8	1.1310	1.4002
0.8	0.4	1.0676	1.2920
0.8	0.8	1.2869	1.5726
1.0	1.0	1.5003	1.8276

Podemos agora plotar estes gráficos, para alguns valores de J e Q , e observar o que acontece. Basta escolhermos os valores de Q e J para plotagem. Podemos, por exemplo, tomar $Q = 0, J = 0.6$, depois $J = 0, Q = 0.6$, depois $Q = J = 0.4$ e ainda $J = Q = 1.0$. Ver Figura 4.5.

Agora, podemos tirar algumas conclusões extras, baseados nos gráficos e tabelas acima:

- Os máximos locais M_x deslocam-se para a direita nos gráficos de C contra M com o aumento de Q e de J , tal qual ocorre com M_0 e M_c ;
- Os valores dos máximos sempre serão negativos.

Até aqui, temos tratado um caso específico de temperaturas e capacidades térmicas, aquelas a Q e J constantes. No entanto, estes dois parâmetros não são os únicos existentes, além da massa M , para se descrever buracos negros. Há outros parâmetros, tais como a velocidade angular do buraco negro, Ω , e seu potencial eletrostático no horizonte de eventos, Φ . A própria temperatura T ou a sua inversa, β , poderia substituir M , onde isto se mostrasse adequado. Além de enriquecer a presente discussão, a inclusão de buracos negros com parâmetros constantes diferentes de J e de Q será útil para o próximo e último capítulo deste trabalho, devotado à questão da estabilidade termodinâmica de buracos negros, suscitada pelo aparecimento de capacidades térmicas negativas.

Da expressão para S , dada no capítulo anterior, temos

$$S = 2\pi \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} + M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right], \quad (4.17)$$

juntamente com as derivadas

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Omega}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J} = \frac{2\pi J}{M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \\ \chi &= \frac{\Phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q} = 2\pi Q \left[1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

representando respectivamente a *velocidade angular* e o *potencial eletrostático no horizonte*, ambos *divididos pela temperatura T* . Para podermos estudar buracos negros onde estes parâmetros (ao menos um deles, ou ambos), estejam constantes, não poderemos usar a entropia S diretamente. Precisamos de outras funções termodinâmicas geradas a partir desta, por um processo denominado *transformada de Legendre*. Estas serão as *funções de Massieu*, por terem sido obtidas a partir da entropia. Para mais detalhes, consultar

74CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

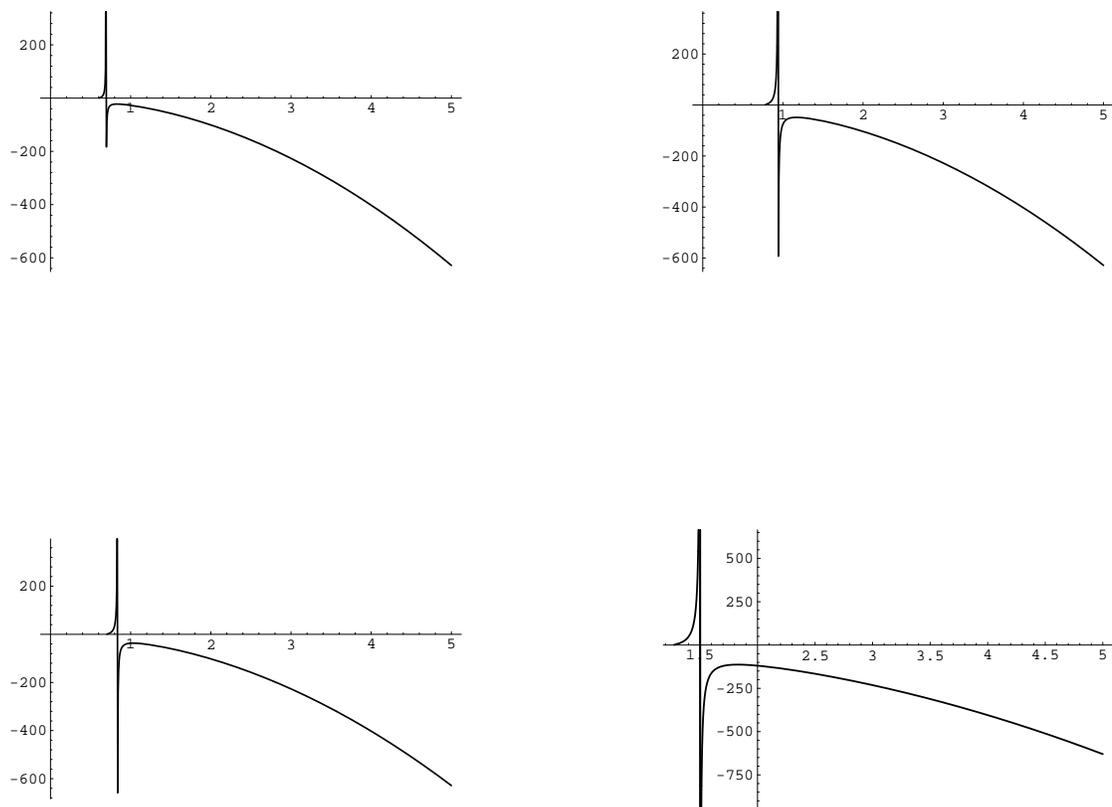


Figura 4.5: Gráficos de C em função de M para $Q = 0.6, J = 0, Q = 0, J = 0.6, Q = J = 0.4$ e $Q = J = 1.0$, no sentido normal de leitura. Reparar na singularidade em $M = M_c$ e no máximo local M_x , no ramo negativo dos gráficos. Consultar Tabela 05 para os valores de M_x e M_c .

o Apêndice C, ao final deste material. Temos, assim, as funções de Massieu, a saber:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 - J \frac{\partial S}{\partial J} = S_0 + \alpha J = S_1(M, Q, \alpha), \\ S_2 &= S_0 - Q \frac{\partial S}{\partial Q} = S_0 + \chi Q = S_2(M, J, \chi), \\ S_3 &= S_0 - Q \frac{\partial S}{\partial Q} - J \frac{\partial S}{\partial J} = S_0 + \alpha J + \chi Q = S_3(M, \alpha, \chi). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Iremos, mais tarde, no último capítulo, definir outra classe de funções de Massieu, obtidas pela troca de M por β . Por ora, examinemos a função S_1 , para buracos negros onde α, Q são constantes. Invertendo a expressão para α , para acharmos $J(M, Q, \alpha)$, vem:

$$\frac{J}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} = \frac{M\alpha}{2\pi}, \quad (4.20)$$

o que fornece

$$J = M^2 \alpha \sqrt{\frac{1 - \frac{Q^2}{M^2}}{\alpha^2 + 4\pi^2}}, \quad (4.21)$$

o que nos permite calcular

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \alpha J = 2\pi \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right] + \alpha J = 2\pi \left[M^2 - \frac{Q^2}{2} \right] + \\ &+ M^2 \sqrt{(\alpha^2 + 4\pi^2) \left(1 - \frac{Q^2}{M^2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

que pode ser derivado com relação a M , fornecendo a temperatura recíproca β_1 a α, Q constantes,

$$\beta_1 = \frac{\partial S_1}{\partial M} = \frac{4\pi M \sqrt{M^2 - Q^2} + (2M^2 - Q^2) \sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2}}{\sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (4.23)$$

E assim, vem

$$T_1 = \frac{1}{\beta_1} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{4\pi M \sqrt{M^2 - Q^2} + (2M^2 - Q^2) \sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}}, \quad (4.24)$$

definida sempre que $M^2 \geq Q^2$. Esta temperatura T_1 é, fisicamente falando, a mesma temperatura T que vínhamos usando até há pouco. A diferença está, isto sim, nas *variáveis* utilizadas para expressá-la. Daí a introdução do índice 1 em T_1 . Podemos, sem perda de generalidade, usar valores positivos para Q e α , pois T_1 é invariante por trocas de sinal destas variáveis. Assim, o mínimo de M , M_0 , é Q . Falta agora descobrir os máximos de T_1 , bem como seu comportamento assintótico, para caracterizá-la completamente. Temos

$$\begin{aligned} T_1(M = Q) &= 0, \\ \lim_{M \rightarrow \infty} T_1(M, \alpha, Q) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi M + 2M\sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

porém maior do que zero, já que o coeficiente de M é positivo. Agora precisamos achar o mínimo de β_1 (ou máximo de T_1). Assim,

$$\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial M}\right)_{Q, \alpha} = \frac{4\pi(M^2 - Q^2)\sqrt{M^2 - Q^2} + (2M^3 - 3MQ^2)\sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}}{(\sqrt{M^2 - Q^2})^3}, \quad (4.26)$$

que igualando a zero, fornece

$$4z^6\alpha^2 - 12z^4\alpha^2 + (9\alpha^2 - 12\pi^2)z^2 + 16\pi^2 = 0, \quad (4.27)$$

onde $z = \frac{M}{Q}$. Esta equação depende crucialmente só de α , com Q desempenhando o papel de constante multiplicativa da solução (máximo de T_1 aumenta linearmente com Q , exceto para $Q = 0$, para o qual a equação acima não está definida). Para $Q = 0$, só há mínimo de β_1 para $M = 0$, e T_1 fica

$$T_1 = \frac{1}{4\pi M + 2M\sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}}, \quad (4.28)$$

que se reduz a $\frac{1}{8\pi M}$ no limite $\alpha \rightarrow 0$, recuperando o limite de Schwarzschild, sem mínimo ou máximo algum. Ou seja, $T \rightarrow \infty$ (ou $\beta_1 \rightarrow 0^+$) se $Q = 0$, $M \rightarrow 0$. Se $Q \neq 0$, no entanto, precisamos resolver a equação para z , para diferentes valores de α . Com efeito, se tomarmos $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1.0$, por exemplo, para cada um dos valores de Q a seguir: $Q = 0, 0.5, 1.0$, poderemos tabelar M_0 (valor mínimo de M) e M_c (valor de M que maximiza T), bem como $T_c = T(M_c)$, e plotar os gráficos correspondentes, na Figura 4.6.

• **Tabela 06 - Valores de M_0 e M_c para α, Q diversos**

Q	α	M_0	M_c	T_c
0	0	0	–	–
0	0.5	0	–	–
0	1.0	0	–	–
0.5	0	0.5	0.5779	0.06126
0.5	0.5	0.5	0.5774	0.06115
0.5	1.0	0.5	0.5776	0.06083
1.0	0	1.0	1.1548	0.03063
1.0	0.5	1.0	1.1548	0.03058
1.0	1.0	1.0	1.1552	0.03042

Na Figura 4.6 estão os gráficos de T_1 em função de M para Q, α fixos, para todos os valores da tabela acima, exceto o caso trivial, $Q = \alpha = 0$ e os casos onde $\alpha = 0$, pois nestes apenas recuperaremos os gráficos de $T(M, Q, J)$ com $J = 0$.

78CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

Da tabela 06 concluímos que a faixa de valores de M onde a derivada $\frac{\partial T}{\partial M}$ a α, Q constantes é positiva é relativamente estreita, sendo dada por $M_0 \leq M < M_c$, correspondendo a capacidades térmicas positivas, $C_{Q,\alpha} = \frac{1}{(\frac{\partial T}{\partial M})_{\alpha,Q}}$. O ramo $M > M_c$ apresenta a derivada $\frac{\partial T}{\partial M} < 0$ e, subseqüentemente, $C_{Q,\alpha} < 0$. Em $M = M_c$, com o anulamento de $(\frac{\partial T}{\partial M})_{\alpha,Q}$, temos uma singularidade em $C_{Q,\alpha}$. Isto é perfeitamente análogo ao que acontecia com as temperaturas e capacidades térmicas para J, Q constantes. A expressão da capacidade térmica a α, Q constantes é

$$C_{\alpha,Q} = \frac{1}{(\frac{\partial T}{\partial M})_{Q,\alpha}} = -\frac{\partial M}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial T} = -\beta_1^2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial M}\right)^{-1}, \quad (4.29)$$

que, com a expressão anterior para β_1 , fica

$$C_{Q,\alpha} = -\frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \left[4\pi M \sqrt{M^2 - Q^2} + (2M^2 - Q^2) \sqrt{4\pi^2 + \alpha^2} \right]^2}{4\pi (M^2 - Q^2)^{\frac{3}{2}} + (2M^3 - 3MQ^2) \sqrt{4\pi^2 + \alpha^2}} \quad (4.30)$$

e assim poderemos plotar gráficos de capacidades térmicas a Q, α constantes, para alguns valores desses parâmetros, a saber $(\alpha, Q) = (1.0, 0), (0.5, 0.5), (1.0, 0.5), (0, 1.0), (1.0, 1.0)$. Notar que, no limite $M \rightarrow \infty$, temos $C_{\alpha,Q} = -8\pi M^2$, em conformidade com o limite de Schwarzschild. Os gráficos estão na Figura 4.7.

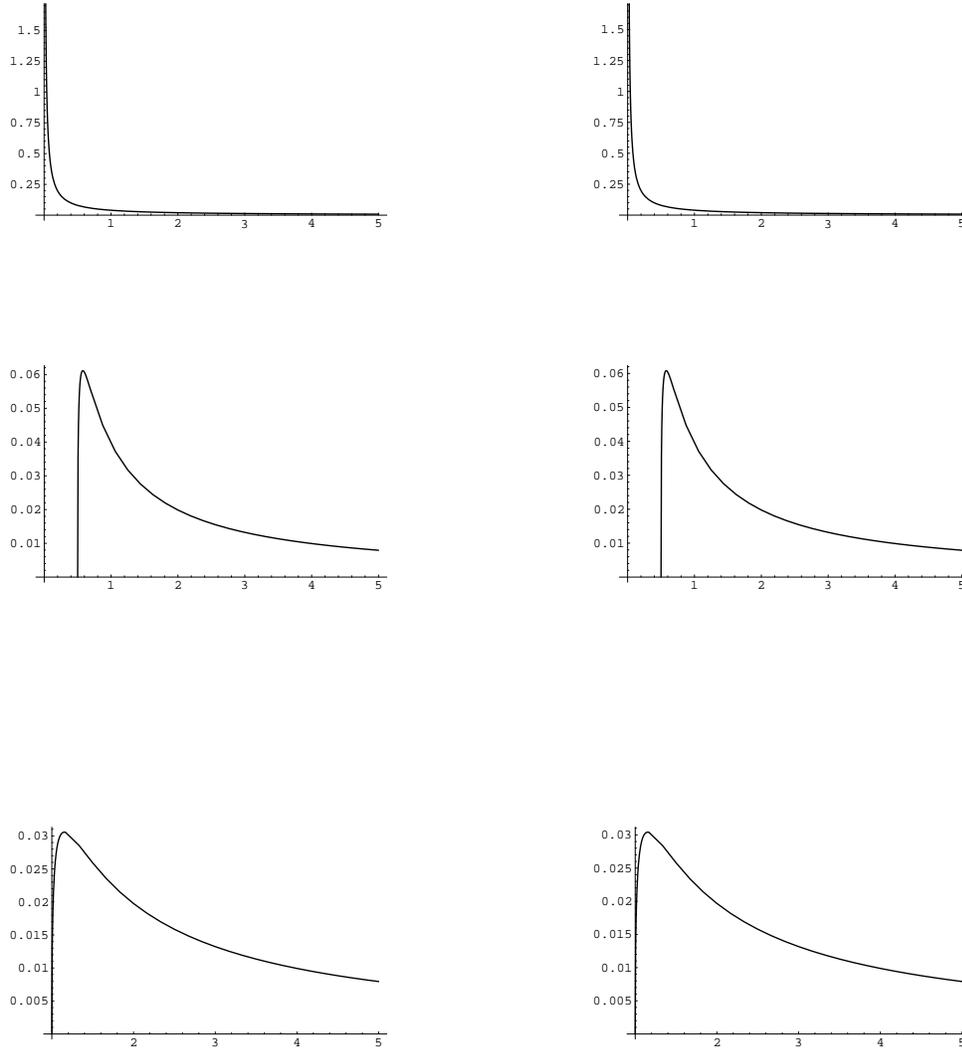


Figura 4.6: Gráficos de T em função de M , para $Q = 0, \alpha = 0.5$, $Q = 0, \alpha = 1.0$, $Q = 0.5, \alpha = 0.5$, $Q = 0.5, \alpha = 1.0$, $Q = 1.0, \alpha = 0.5$ e $Q = 1.0, \alpha = 1.0$. Os valores dos máximos, T_c , estão na Tabela 06. Reparar nos picos dos gráficos.

Em geral, temos as mesmas características dos gráficos de $C_{Q,J}$, a saber:

- De $M = M_0$ até $M = M_c^-$, $C_{\alpha,Q}$ é *positiva, e crescente*. O que ocorre é que

$$\lim_{M \rightarrow M_c^-} C_{Q,\alpha} = \infty$$

- Mas também temos

$$\lim_{M \rightarrow M_c^+} C_{Q,\alpha} = -\infty,$$

indicando singularidade em $M = M_c$.

- Após $M = M_c^+$, temos $C_{Q,\alpha}$ sempre *negativa*. Ocorre que ela alcança um máximo local para algum $M = M_x$, situado, como mostram os gráficos, sempre à direita de M_c . Passado este máximo, volta a decrescer de forma a termos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} C_{Q,\alpha} = \lim_{M \rightarrow \infty} -M^2 = -\infty$$

como se deduz da expressão para $C_{Q,\alpha}$, exatamente como ocorria no caso em que J e Q eram constantes, no limite em que $M \rightarrow \infty$ (limite de Schwarzschild).

Isto posto, podemos considerar outros casos, como aqueles onde J e χ (ou α, χ) são constantes. Para tanto, devemos recuperar a expressão de $\chi(M, Q, J)$:

$$\chi = \frac{\Phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q} = 2\pi Q \left[1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \right], \quad (4.31)$$

cujas inversão para se obter $\chi(M, Q, J)$ fornece uma equação de quarto grau, a saber,

$$4\rho^4 M^2 \pi^2 + 8\pi^2 \rho^3 M^3 + (4\pi^2 J^2 + \chi^2 M^2) \rho^2 + (-8M^5 \pi^2 + 8J^2 M \pi^2) \rho - 4M^6 \pi^2 + 4M^2 J^2 \pi^2 = 0, \quad (4.32)$$

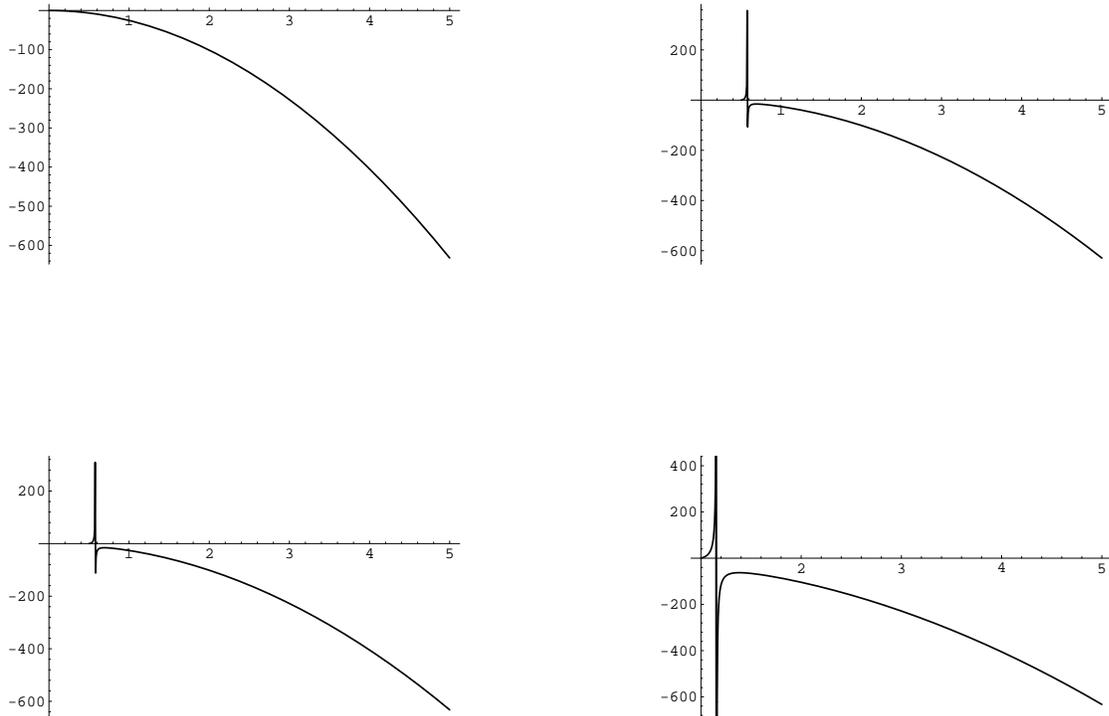


Figura 4.7: Gráficos de C em função de M para $Q = 0, \alpha = 1.0, Q = \alpha = 0.5, Q = 0.5, \alpha = 1.0$ e $Q = \alpha = 1.0$. Observar a singularidade para algum $M = M_c$.

82CAPÍTULO 4. TEMPERATURAS E CAPACIDADES TÉRMICAS

com ρ tal que

$$Q = \frac{\chi\rho}{2\pi(M + \rho)}. \quad (4.33)$$

A equação em ρ é muito difícil de se resolver exatamente, dando origem a um resultado muito extenso, algebricamente falando, e pouco ou nada prático. A situação é ainda complicada quando tentamos calcular $Q(M, \chi, \alpha)$, pois aí precisamos substituir $J(M, \alpha, Q)$ na expressão para χ , fornecendo

$$\chi = 2\pi Q \left[1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}} \right] = 2\pi Q \left[1 + \frac{M}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha^2 + 4\pi^2}{M^2 - Q^2}} \right], \quad (4.34)$$

após usar-se

$$J = M^2 \alpha \sqrt{\frac{1 - \frac{Q^2}{M^2}}{\alpha^2 + 4\pi^2}}. \quad (4.35)$$

Com esta expressão, temos, para $Q(M, \alpha, \chi)$:

$$4Q^4\pi^2 - 4Q^3\chi\pi + (\alpha^2 M^2 + \chi^2) Q^2 + 4M^2\chi Q\pi - M^2\chi^2 = 0, \quad (4.36)$$

que, igualmente, fornece uma solução pouco prática. Para tratar buracos negros com (J, χ) ou com (α, χ) constantes, seremos obrigados a mudar de tática. Vamos definir três variáveis adimensionais, h, h_j, h_q , por

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{Q^2 + \frac{J^2}{M^2}}}{M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \\ h_q &= \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \\ h_j &= \frac{J}{M^2 + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

relacionadas através de $h^2 = h_j^2 + h_q^2$. Em termos destes três parâmetros adimensionais, temos

$$\begin{aligned} J &= \frac{2M^2 h_j}{1 + h^2}, & Q &= \frac{2M h_q}{1 + h^2} \\ \alpha &= \frac{4\pi h_j}{1 - h^2}, & \chi &= \frac{8\pi M h_q}{(1 - h^4)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

o que deixa os potenciais termodinâmicos com a forma abaixo:

$$\begin{aligned}
S &= S_0 = \frac{4\pi M^2(1+h_j^2)}{(1+h^2)^2}, \\
S_1 &= S_0 + \alpha J = \frac{4\pi M^2(1+h_j^2)}{(1+h^2)^2} + \frac{8\pi M^2 h_j^2}{1-h^4}, \\
S_2 &= S_0 + \chi Q = \frac{4\pi M^2(1+h_j^2)}{(1+h^2)^2} + \frac{16\pi M^2(h^2-h_j^2)}{(1+h^2)(1-h^4)}, \\
S_3 &= S_0 + \alpha J + \chi Q = \frac{4\pi M^2(1+h_j^2)}{(1+h^2)^2} + \frac{16\pi M^2(h^2-h_j^2)}{(1+h^2)(1-h^4)} + \\
&\quad + \frac{8\pi M^2 h_j^2}{1-h^4}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

o que nos permite, a princípio, achar as temperaturas recíprocas, os β_i , por

$$\beta_i = \left(\frac{\partial S_i}{\partial M} \right)_i, \tag{4.40}$$

onde o índice inferior i está indicando o conjunto de variáveis mantidas constantes na derivação. Cabe enfatizar, outra vez, que estas temperaturas β_i são a *mesma* grandeza física, a temperatura do buraco negro, só que expressas em termos de variáveis distintas. Agora, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(M)}{\partial M} &= -\frac{(h^2(M) + h_j^2(M))(1+h^2(M))}{Mh(M)(1-h^2(M))} \\
\frac{\partial h_j(M)}{\partial M} &= -2\frac{h_j(M)(1+h_j^2(M))}{M(1-h^2(M))} \tag{4.41}
\end{aligned}$$

E assim, temos

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{\partial S_0}{\partial M} = -8\pi M \frac{1+h_j^2}{(-1+h^2)(1+h^2)}, \\
\beta_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial M} = \frac{8\pi M(-h^4 + h_j^2 h^4 + 2h^4 + 2h^2 + 2h_j^2 h^2 - 1 + h_j^2 + 4h_j^4)}{(1-h^2)(-1+h^4)}, \\
\beta_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial M} = \frac{8\pi M(h^4 h_j^2 - 3h^4 - 2h_j^2 h^2 - 2h^2 + 1 + h_j^2 + 4h_j^4)}{(1-h^2)^2(1-h^4)}, \\
\beta_3 &= \frac{\partial S_3}{\partial M} = \frac{8\pi M(-1+h_j^2+3h^2+h^2 h_j^2)}{(-1+h^2)^3}, \tag{4.42}
\end{aligned}$$

que era o que precisávamos. Só nos interessam, doravante, as expressões para β_2 e β_3 , pois os casos de β_0 e β_1 já foram separadamente analisados,

dada sua maior simplicidade algébrica. Como estes β_i são positivos, isto implica algumas restrições sobre os valores de h e h_j . No caso de β_2 , isto implica

$$h_j \geq \frac{\sqrt{-(1-h^2)^2 + \sqrt{(1-h^2)^4 - 16(1+h^2)(1-3h^2)}}}{2\sqrt{2}}, \quad (4.43)$$

para que se tenha $\beta_2 \geq 0$. Para β_3 a mesma restrição é

$$h_j^2 \leq \frac{-1 + 3h^2}{1 + h^2}. \quad (4.44)$$

Nos dois casos, no entanto, $h_j \leq h$. Agora, temos de obter derivadas destas funções com respeito a M , para obtermos as capacidades térmicas C_i , que, como vimos, são dadas por

$$C_i = -\beta_i^2 \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial M} \right)^{-1}, \quad (4.45)$$

e tais derivadas são

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\partial \beta_2}{\partial M} = \frac{8\pi(-9h^8 + 3h_j^2 h^8 - 20h^6 h_j^2 - 28h^6 - 14h^4 h_j^2 + 32h^4 h_j^4)}{(1-h^2)^4(-1+h^4)} + \\ &+ \frac{8\pi(-14h^4 - 16h^2 h_j^4 + 4h^2 - 20h_j^2 h^2 + 32h_j^4)}{(1-h^2)^4(-1+h^4)} + \\ &+ \frac{8\pi(-1 + 3h_j^2 + 48h_j^6)}{(1-h^2)^4(-1+h^4)} \\ \gamma_3 &= \frac{\partial \beta_3}{\partial M} = \frac{8\pi(1 + 12h_j^4 h^2 + 19h^4 - 5h^2 + 3h_j^2 + 3h_j^2 h^6 + 12h_j^4)}{(1-h^2)^5} + \\ &+ \frac{8\pi(9h^6 + 21h_j^2 h^2 + 21h_j^2 h^4)}{(1-h^2)^5}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

acarretando

$$C_2 = -\beta_2^2 \gamma_2^{-1} = \frac{-8\pi M^2 \left(h_j^2 h^4 - 3h^4 - 2h_j^2 h^2 - 2h^2 + 1 + h_j^2 + 4h_j^4 \right)^2}{r_1} \quad (4.47)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1 &= (-1 + h^4)(-9h^8 + 3h_j^2 h^8 - 20h^6 h_j^2 - 28h^6 - 14h_j^2 h^4 + \\ &+ 32h^4 h_j^4 - 14h^4 - 16h^2 h_j^4 + 4h^2 - 20h_j^2 h^2 + 32h_j^4 - 1 + \\ &+ 3h_j^2 + 48h_j^6) \end{aligned} \quad (4.48)$$

e

$$C_3 = -\beta_3^2 \gamma_3^{-1} = \frac{8\pi M^2 (-1 + h_j^2 + 3h^2 + h_j^2 h^2)^2}{r_2}, \quad (4.49)$$

onde

$$\begin{aligned} r_2 = & (-1 + h^2)(1 + 12h^2 h_j^4 + 19h^4 - 5h^2 + 3h_j^2 + 3h^6 h_j^2 + \\ & + 12h_j^4 + 9h^6 + 21h_j^2 h^2 + 21h_j^2 h^4) \end{aligned} \quad (4.50)$$

que são os resultados desejados. Lembrando ainda que o inverso da capacidade térmica, qualquer que seja o conjunto de parâmetros constantes, é sempre a inclinação da reta tangente ao gráfico de T contra M , $\frac{\partial T}{\partial M}$. O anulamento desta (e, por extensão, de $\frac{\partial \beta}{\partial M}$) implica uma singularidade na capacidade térmica para um valor específico de M , M_c . Assim, resolvendo a equação

$$\frac{-\gamma_i}{\beta_i^2} = 0, \quad (4.51)$$

temos como deduzir $M = M_c$, através de uma relação entre h e h_j (ou ao menos inferir que um tal ponto existe). Para o caso onde temos buracos negros a J, χ constantes, ele é dado por

$$\frac{-\gamma_2}{\beta_2^2} = 0 \quad (4.52)$$

ou

$$\frac{U}{V} = 0, \quad (4.53)$$

onde

$$\begin{aligned} U = & -9h^8 + 3h^8 h_j^2 - 20h^6 h_j^2 - 28h^6 - 14h^4 h_j^2 + 32h^4 h_j^4 - 14h^4 - \\ & - 16h^2 h_j^4 + 4h^2 - 20h^2 h_j^2 + 32h_j^4 - 1 + 3h_j^2 + 48h_j^6 \\ V = & -8\pi^2 (h_j^2 h^4 - 3h^4 - 2h_j^2 h^2 - 2h^2 + 1 + h_j^2 + 4h_j^4)^2 \times \\ & \times (-1 + h^4)^{-1} \end{aligned} \quad (4.54)$$

acarretando

$$\begin{aligned} W = & (1 - h^4)(-9h^8 + 3h^8 h_j^2 - 20h^6 h_j^2 - 28h^6 - 14h^4 h_j^2 + 32h^4 h_j^4 - \\ & - 16h^2 h_j^4 + 4h^2 - 20h^2 h_j^2 + 32h_j^4 - 1 + 3h_j^2 + 48h_j^6) = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

A solução $h = 1$ significa uma geometria de Kerr-Newman extrema, pois, da definição de h ,

$$h = \frac{\sqrt{Q^2 + \frac{J^2}{M^2}}}{M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}, \quad (4.56)$$

vem que $h = 1$ é obtido para $M^2 = Q^2 + \frac{J^2}{M^2}$, sendo o máximo valor permitido para h . O valor mínimo de h é $h = 0$, fazendo-se $Q = J = 0$. Nestas condições, um buraco negro com predomínio de M_{ir} (massa irreduzível) em sua composição, apresenta valores de $\frac{Q}{M}$ e de $\frac{J}{M^2}$ tendendo a zero, resultando em h próximo de zero. De outra forma, aqueles próximos de serem extremos têm h próximo de 1, embora menor que 1. Mas está em aberto a aceitabilidade da solução $h = 1$. Retomando a expressão para β_2 (temperatura recíproca a J, χ constantes), vem

$$\beta_2 = \frac{\partial S_2}{\partial M} = \frac{8\pi M(h^4 h_j^2 - 3h^4 - 2h_j^2 h^2 - 2h^2 + 1 + h_j^2 + 4h_j^4)}{(1 - h^2)^2(1 - h^4)}, \quad (4.57)$$

que, no limite $h \rightarrow 1^-$, é divergente. Assim, resta, como solução aceitável,

$$\begin{aligned} U &= -9h^8 + 3h_j^2 h^8 - 20h^6 h_j^2 - 28h^6 - 14h_j^2 h^4 + 32h^4 h_j^4 - 14h^4 - \\ &\quad - 16h^2 h_j^4 + 4h^2 - 20h_j^2 h^2 + 32h_j^4 - 1 + 3h_j^2 + 48h_j^6 = 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

devendo fornecer alguma relação entre h e h_j . Esta relação existe e é dada por

$$h_j = \frac{\sqrt{E}}{6D}, \quad (4.59)$$

onde

$$\begin{aligned} E &= D(C + D^2 + FD), \\ D &= (A + 9\sqrt{B})^{\frac{1}{3}}, \\ F &= -4 + 8h^2 - 4h^4, \\ C &= 37 + 116h^2 + 270h^4 + 116h^6 + 37h^8, \\ A &= 298 - 3498h^2 + 4776h^4 + 11644h^6 + 2346h^8 - \\ &\quad - 1554h^{10} - 188h^{12}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned} B &= 471 - 31620h^2 + 154074h^4 - 437820h^6 - 980043h^8 + 690456h^{10} + \\ &\quad + 1506972h^{12} + 38856h^{14} - 674223h^{16} - 255060h^{18} - 13206h^{20} + \\ &\quad + 1332h^{22} - 189h^{24}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

uma relação bastante complicada, por sinal. Para a última equação resultante,

$$\frac{-\gamma_3}{\beta_3^2} = 0, \quad (4.62)$$

teremos a relação entre h e h_j para o(s) extremo(s) de β_3 . A relação buscada é

$$\frac{\sqrt{-(\bar{6} + 6h^2)(3 + 3h^6 + 21h^2 + 21h^4 - \sqrt{V})}}{1\bar{2} + 12h^2} \quad (4.63)$$

onde

$$V = -105h^4 + 318h^2 + 135h^8 - 444h^6 - 39 + 9h^{12} + 126h^{10}, \quad (4.64)$$

que, no intervalo $0 \leq h \leq 1$ não representa uma solução aceitável, pois, numericamente (no programa Mathematica), obtém-se valores sempre *negativos* sob a raiz, tornando a resposta acima inválida. Mais precisamente, a função $f(h)$ sob a raiz principal, a saber,

$$f(h) = -6(1 + h^2)(3 + 3h^6 + 21h^2 + 21h^4 - \sqrt{V}), \quad (4.65)$$

atinge um valor máximo para $h = 0.4296$, valendo aí $f(h) = -27.9663$. Assim, conclui-se que não há extremos para β_3 , e que a capacidade térmica a (α, χ) constantes não apresenta singularidades (divergências) para nenhum M crítico, sendo sempre bem-comportada. Estas conclusões serão importantes no último capítulo deste trabalho, logo a seguir, já que trocas de sinais de capacidades térmicas estão relacionadas (embora nem sempre de modo direto, simples) às alterações de estabilidades termodinâmicas.

Capítulo 5

Estabilidade de Buracos Negros

Este capítulo está dividido em cinco seções: a primeira explica o que são ensembles termodinâmicos e séries lineares, a segunda descreve o método de Poincaré, a terceira discute a estabilidade termodinâmica de buracos de Schwarzschild, a quarta analisa o mesmo problema para os buracos de Kerr-Newman e a última apresenta as conclusões do capítulo.

5.1 Séries Lineares e Ensembles Termodinâmicos

O conceito de *ensemble* é muito comum em Termodinâmica e Mecânica Estatística, significando *conjunto*. Um ensemble *microcanônico* caracteriza-se por estar isolado e, portanto, manter constante a sua energia interna. Já um ensemble *canônico* caracteriza-se pelo contato com um reservatório térmico, e portanto mantém constante a sua temperatura. No contexto de buracos negros, um buraco negro isolado está no ensemble microcanônico, sendo fixa sua energia M . Mas por “isolado” entenda-se o buraco negro que está em uma cavidade de volume V , circundado por radiação que ele próprio emitiu, e que a reabsorve, em um equilíbrio dinâmico. Caso não houvesse tal cavidade, a radiação espalhar-se-ia para o meio externo ao buraco sem reabsorção. E assim o buraco negro, perdendo energia por irradiação, deixaria de estar em um ensemble microcanônico e seria instável, desaparecendo algum dia. Já um buraco negro sob um banho térmico infinito, que mantém fixa a sua temperatura recíproca β , enquadra-se no conceito de ensemble canônico. Nos dois casos, como veremos, o comportamento dos buracos difere.

Podemos definir agora o conceito de *séries lineares*. Estas séries são

funções de um parâmetro, neste caso a temperatura recíproca β ou a energia M , conforme estejamos lidando com ensembles canônicos ou microcanônicos, respectivamente. Para um ensemble microcanônico, temos a temperatura β_i em função de M , ou $\beta_i(M)$, como série linear. No caso canônico, a série linear é $-M(\beta_i)$, pois neste caso devemos efetuar uma transformação de Legendre sobre as funções (potenciais) S_i dos ensembles microcanônicos, a saber, em relação à energia M . Com efeito, teremos, para os ensembles canônicos, os potenciais

$$H_i = S_i - M \frac{\partial S_i}{\partial M} = S_i - M\beta_i \quad (5.1)$$

onde os índices i estão indicando que quantidades estão fixas - se (J, Q) , (α, Q) , (J, χ) ou (α, χ) . Assim, temos

$$-M = \frac{\partial H_i}{\partial \beta_i}, \quad (5.2)$$

como a variável canonicamente conjugada a β , e vice-versa. Pode parecer necessário gerar novos gráficos para as séries lineares $-M(\beta_i)$, mas não é este o caso, pois para obtê-los basta girar os gráficos das séries $\beta_i(M)$ de 90 graus, no sentido dos ponteiros do relógio, como veremos adiante. Podemos agora explicar como funciona o método de Poincaré.

5.2 O Método de Poincaré

Este é o método mais simples para se estudar questões de estabilidade de buracos negros, e por isso mesmo não permite conclusões definitivas em algumas circunstâncias. No entanto, fornece alguns resultados interessantes e mostra até que ponto podemos ir com as analogias entre física de Buracos Negros e a Termodinâmica Clássica.

Um estudo realmente rigoroso das propriedades termodinâmicas de buracos negros exigiria o conhecimento das funções de partição Z dos mesmos, coisa não realizada aqui devido à complexidade técnica do tema. Mas o método de Poincaré não exige o conhecimento detalhado da função de partição, pois apenas indica quando ocorrem *mudanças* de estabilidade em buracos negros, de menos instável (estável) para mais instável (instável), e vice-versa. Ele depende de uma suposição sobre a matriz das segundas derivadas de Z : esta não deve ter autovalores degenerados. Respeitada tal condição, o método indica quando um dos autovalores em questão passa de positivo a negativo (ou vice-versa), *sem especificar quantos e quais autovalores são positivos e negativos*. Assim, quando um autovalor passa de positivo

a negativo, o buraco negro torna-se *instável* ou mesmo *mais instável*, dependendo do seu grau de estabilidade anterior, se era *estável* ou se já era *instável*. Ou seja, o *grau exato* de estabilidade não é fornecido diretamente pelo corrente método, sendo necessário responder a tal questão com outros argumentos independentes. Isto é possível em alguns casos, como veremos, mas não em outros. Eis a limitação do método, dada a sua simplicidade.

Mas surge a questão de *como* esta detecção de pontos de troca de estabilidade ocorre na prática. Aqui entram os conceitos de séries lineares, vistos anteriormente. Devemos buscar, nestas séries, pontos onde há *tangentes verticais* às mesmas. Isto, para cada caso estudado. No caso de buracos isolados, devemos detectar tangentes verticais em cada uma das séries $\beta(M)$ contra M , conforme tenhamos (J, Q) , (α, Q) , (J, χ) ou (α, χ) constantes. No caso de buracos sob banho térmico, são os mesmos quatro casos, mas são séries $-M(\beta)$ contra β . Os gráficos de $\beta(M)$ contra M , ao menos para os casos em que (J, Q) e (α, Q) são constantes, já estão prontos. Aparentemente, seria necessário refazer tais gráficos para as séries $-M(\beta)$ contra β . Mas este não é o caso, pois basta tomarmos as curvas $\beta(M)$ e *rodá-las* de 90 graus, no sentido dos ponteiros do relógio, para obtermos as curvas $-M(\beta)$. Deste modo, tangentes horizontais em séries $\beta(M)$ transformar-se-ão em tangentes verticais nas séries $-M(\beta)$, e vice-versa. Tal constatação é fundamental para o que se segue.

Falta, ainda, um detalhe: localizada uma tangente vertical para valores críticos de M e β , denominados respectivamente M_c e β_c . falta saber qual ramo da série é mais instável (se o outro já era instável), ou instável, se o outro ramo era estável. Basta saber qual dos dois apresenta retas tangentes com coeficiente angular *negativo*. Este ramo será, seguramente, *instável*. O outro ramo ou é estável, ou simplesmente *menos instável*. Passemos à análise propriamente dita.

5.3 A Estabilidade do Buraco de Schwarzschild

Este caso é o mais simples de se tratar. No caso em que se encontra isolado, a série linear é

$$\beta(M) = 8\pi M, \quad (5.3)$$

linear em M . No caso em que está sob banho térmico infinito, isolando M , temos a série linear

$$-M(\beta) = -\frac{\beta}{8\pi}, \quad (5.4)$$

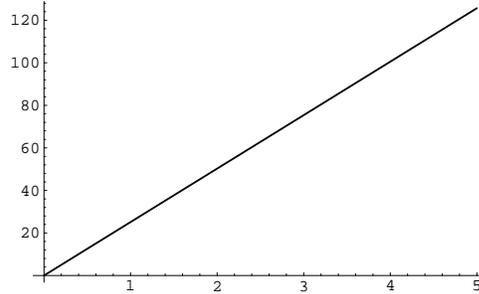


Figura 5.1: Este é o gráfico da série $\beta(M)$ em função de M , para buracos negros de Schwarzschild isolados. Não há tangentes verticais.

por sinal linear em β . Os gráficos estão nas figuras 5.1 e 5.2, respectivamente.

Em nenhum dos casos há tangentes verticais. Assim, ou se trata de sistemas estáveis ou instáveis, em cada um dos ensembles (canônico e microcanônico). No caso canônico, com temperatura da radiação externa, β_{ext} , fixa, ele é *instável*, por emitir mais do que absorve caso $\beta_{hole} < \beta_{ext}$. Deste modo, ele *esquenta*, em virtude da capacidade térmica negativa, e passa a emitir *cada vez mais*, até evaporar por completo. Se $\beta_{hole} > \beta_{ext}$, ocorre o contrário: o buraco *absorve* mais do que irradia, esfriando em virtude de sua capacidade térmica negativa. Com isso, emite *cada vez menos* e a absorção de radiação externa fá-lo-á crescer indefinidamente. Para mais detalhes, consultar Hawking [10]. Falta verificarmos o que acontece no caso microcanônico. Para tanto, vamos lançar mão dos argumentos de Hawking [10].

Seja um buraco de Schwarzschild de massa M , envolto por radiação que ele próprio emitiu, em uma cavidade de volume V . Suponhamos que estejam (buraco e radiação) em equilíbrio térmico. Seja T_{rad} a temperatura da radiação e T_{hole} a temperatura do buraco. Esta última é

$$T_{hole} = \frac{1}{8\pi M}, \quad (5.5)$$

de forma que a radiação por ele emitida apresenta uma densidade de energia

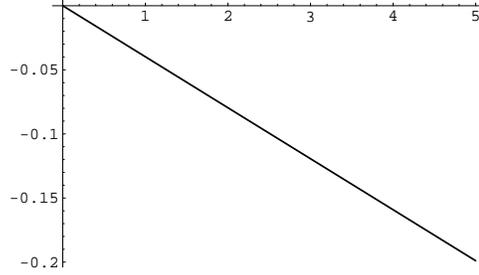


Figura 5.2: Este é o gráfico da série $-M(\beta)$ em função de β , para buracos negros de Schwarzschild sob banho térmico infinito.

ρ dada pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$\rho = \sigma T_{hole}^4, \quad (5.6)$$

onde

$$\sigma = \frac{\nu\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} = \frac{\nu\pi^2}{15}, \quad (5.7)$$

já que $k = \hbar = c = 1$. Aqui, ν é uma constante que depende do número de espécies que são irradiadas pelo buraco negro, a saber

$$\nu = n_b + \frac{7}{8}n_f, \quad (5.8)$$

onde n_b, n_f representam o número de espécies bosônicas de massa zero e as fermiônicas, respectivamente, presentes na radiação de Hawking. Com a expressão para T_{hole} , temos, para a energia total da radiação,

$$E_{rad} = E_2 = \frac{V\nu}{61440\pi^2 M^4}, \quad (5.9)$$

onde V é o volume da cavidade. Esta energia deve ser bem menor do que M , para a validade desta análise, para que possamos ignorar efeitos de

reação da radiação [18],[19] sobre a métrica (*back-reaction*). Estando o buraco (com sua energia E_1) em uma cavidade, ele não apenas emite, como também absorve radiação (equilíbrio termodinâmico). Vamos supor que uma flutuação estatística leve o buraco a emitir, instantaneamente, mais (ou menos) energia do que absorve. Como a variação total da energia é zero ($E_1 + E_2 = \text{constante}$), temos

$$dE_1 = -dE_2, \quad (5.10)$$

ou ainda

$$dM = -8\pi M^2 dT_1. \quad (5.11)$$

Para a radiação, temos a variação de temperatura dT_2 abaixo

$$dE_2 = 4V\sigma T_2^3 dT_2 = \frac{\nu V dT_2}{1920\pi M^3}. \quad (5.12)$$

De $dE_1 = -dE_2$, vem

$$\frac{dT_2}{dT_1} = \frac{dT_{rad}}{dT_{hole}} = \frac{15360\pi^2 M^5}{V\nu}. \quad (5.13)$$

Assim, se $V < V_c = 15360M^5\pi^2\nu^{-1}$, a temperatura da radiação sobe (desce) mais do que a do buraco, conforme este esquente (esfrie) em decorrência de uma maior emissão (absorção) instantânea, devido a uma flutuação estatística. No caso de o buraco emitir instantaneamente *mais* radiação do que absorve, ele *esquentará*, em virtude de sua capacidade térmica *negativa*. Mas, ao mesmo tempo, a temperatura da radiação subirá *mais* do que a do buraco negro, forçando-o a *absorver* mais radiação e, portanto, a *esfriar*. No caso oposto, uma maior absorção instantânea de radiação levará o buraco a *esfriar*, mas com a radiação *esfriando ainda mais*, forçando uma queda na taxa de absorção pelo buraco negro e, subsequentemente, a uma emissão posterior *maior* do que a absorção, *aquecendo* o buraco e restabelecendo o equilíbrio. Tudo isto, verificada a condição sobre o volume da cavidade, $V < V_c$. O que faz sentido, pois no limite $V \rightarrow \infty$ temos uma cavidade muito maior do que o buraco negro, onde a radiação por este emitida se dispersa e a absorção é insuficiente para compensar a emissão. Resumindo: verificada a condição sobre o volume V da cavidade, os buracos de Schwarzschild isolados são estáveis.

Por continuidade, é de se esperar que buracos negros com baixos valores de $\frac{Q}{M}$ e de $\frac{J}{M^2}$ apresentem comportamento semelhante ao dos buracos de Schwarzschild, sendo estáveis quando isolados e instáveis quando sob banho térmico infinito. Esta constatação será útil na próxima seção.

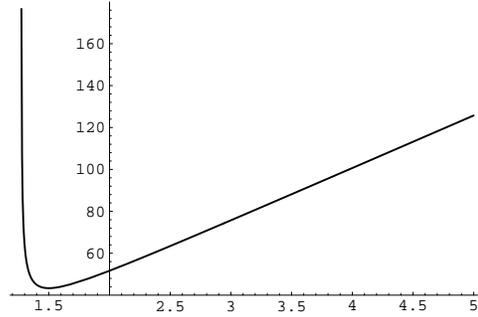


Figura 5.3: Gráfico da série linear $\beta_0(M)$ em função de M , para $Q = J = 1.0$.

5.4 A Estabilidade do Buraco de Kerr-Newman

5.4.1 Ensemble Microcanônico

Neste ensemble, M é o parâmetro de controle, e as séries lineares a serem utilizadas são as séries $\beta_i(M)$ em função de M , onde o índice i indica o conjunto de parâmetros mantidos constantes: (J, Q) , (α, Q) , (J, χ) e (α, χ) , dependendo do caso. Os dois primeiros casos já foram bastante estudados no último capítulo. Não havia tangentes verticais, apenas *horizontais*, correspondendo a mínimos de β . Nestas condições, nenhuma mudança de estabilidade ocorre, e temos buracos com (J, Q) ou (α, Q) constantes que são ou estáveis, ou instáveis. O limite onde $h, h_j \rightarrow 0$, ou limite de Schwarzschild já indica a resposta: se o ramo da série onde se encontra tal limite (ramo de capacidades térmicas negativas, com $M > M_c$, onde M_c é o valor de M que minimiza β) for estável, toda a série linear representa configurações estáveis, pois a tangente horizontal à série em $M = M_c$ não indica nenhuma mudança de estabilidade. Raciocínio análogo vale se o ramo $M > M_c$ for instável: toda a série representará configurações instáveis. Vejamos duas séries lineares distintas, uma da classe $\beta_0(M)$ e outra da classe $\beta_1(M)$.

Já vimos que, no ensemble microcanônico, temos buracos de Schwarzschild *estáveis*. Assim, o ramo $M > M_c$ das séries $\beta_0(M)$ e $\beta_1(M)$ é estável, por continuidade. Como nas duas séries há apenas uma tangente horizon-

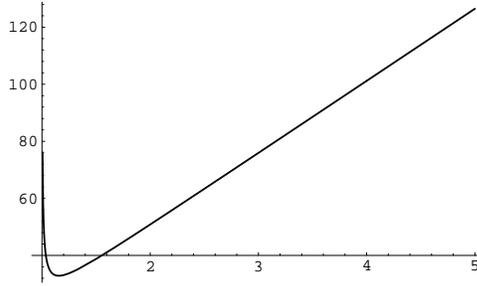


Figura 5.4: Gráfico da série linear $\beta_1(M)$ em função de M , para $Q = \alpha = 1.0$.

tal para $M = M_c$, conclui-se que o ramo $M < M_c$ é igualmente *estável*. Logo, buracos isolados apresentando (J, Q) ou (α, Q) constantes são sempre estáveis, independentemente do sinal da capacidade térmica em cada ramo da série. Esta constatação, por si só, já indica que sinais de capacidades térmicas, quando tomados isoladamente, não são indicadores seguros de estabilidade termodinâmica.

Para os buracos negros com (α, χ) constantes, não há nem tangentes verticais e nem horizontais à série linear ($\beta_3(M)$) correspondente. Não há, assim, qualquer mudança de estabilidade envolvida. Como estes buracos negros são estáveis no limite de Schwarzschild, eles serão automaticamente estáveis para quaisquer valores de α e de χ .

Falta o caso onde (J, χ) são constantes. Existe, de qualquer forma, o limite de Schwarzschild. Estes buracos são estáveis neste limite. Se não houver tangentes verticais aqui (e de acordo com Okamoto et al [13], não há) nenhuma mudança de estabilidade ocorrerá e todos os pontos da série linear associada, $\beta_2(M)$, representarão configurações estáveis.

Desta forma, temos até aqui uma conclusão parcial: *buracos negros em um ensemble microcanônico são estáveis*.

5.4.2 Ensemble Canônico

Agora o parâmetro de controle é a temperatura recíproca β , e as séries lineares a serem utilizadas são do tipo $-M(\beta_i)$ em função de β_i . Para os casos onde (J, Q) e (α, Q) são constantes, haverá tangentes verticais, pois as séries lineares conjugadas, $\beta_0(M)$ e $\beta_1(M)$ possuem tangentes horizontais para algum $M = M_c$. Isto implica mudanças de estabilidade para buracos sob banho térmico infinito, justamente em $M = M_c$, correspondendo às singularidades e trocas de sinal das capacidades térmicas correspondentes. Os ramos com

$$\frac{\partial(-M)}{\partial\beta_i} > 0 \quad (5.14)$$

correspondem a $M < M_c$, e portanto a capacidades térmicas *positivas*, tanto para (J, Q) quanto para (α, Q) constantes. Os ramos onde $M > M_c$ têm

$$\frac{\partial(-M)}{\partial\beta_i} < 0 \quad (5.15)$$

e capacidades térmicas *negativas*. De acordo com o exposto na seção sobre o método de Poincaré, estes ramos são *instáveis*, sendo os ramos com $M < M_c$ *menos instáveis*, ou eventualmente *estáveis*. O que faz sentido, porque no ramo $M > M_c$ está o limite de Schwarzschild ($h, h_j \rightarrow 0$), onde os buracos sob banho térmico infinito são instáveis. Isto vale, deve-se repetir, quando não se levam em conta efeitos de reação da radiação sobre a métrica. Não sabemos dizer, apenas com este método, se o ramo onde as capacidades térmicas são positivas é estável ou, simplesmente, menos instável do que o ramo oposto. De qualquer forma, conclui-se que altos valores de $\frac{Q}{M}$ e de $\frac{J}{M^2}$ têm um efeito estabilizador sobre buracos negros quando estes estão sob banho térmico infinito.

No caso onde (α, χ) são constantes, não havendo tangentes horizontais à série $\beta_3(M)$, não haverá tangentes verticais na série $-M(\beta_3)$. Isto acarreta uma instabilidade permanente para buracos negros com (α, χ) constantes no ensemble canônico, já que no limite de Schwarzschild eles são instáveis.

Resta o caso onde (χ, J) são constantes. No limite de Schwarzschild estes buracos são instáveis, como os demais. Se houver tangente horizontal na série $\beta_2(M)$, para algum $M = M_c$, como asseguram Okamoto et al. [13], haverá tangente vertical na série $-M(\beta_2)$ para este mesmo M_c , e conseqüentemente uma mudança de estabilidade aí ocorrerá. Este ramo da série, $M < M_c$, será então menos instável ou possivelmente estável. Não existindo a tangente vertical, a instabilidade será permanente. Os gráficos para as séries $-M(\beta_0)$ e $-M(\beta_1)$ estão nas figuras 5.4 e 5.5, respectivamente.

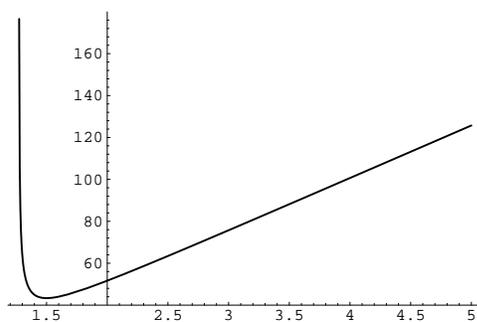


Figura 5.5: Gráfico da série $-M(\beta_0)$ em função de β_0 , para $Q = J = 1.0$. Temos M nas abscissas e β_0 nas ordenadas.

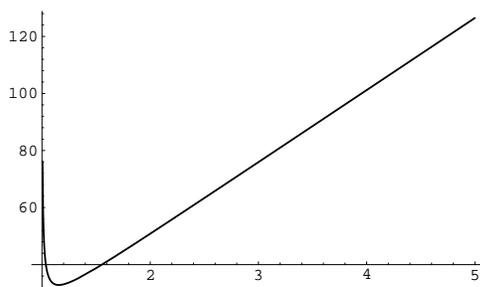


Figura 5.6: Gráfico da série $-M(\beta_1)$ em função de β_1 , para $Q = \alpha = 1.0$. Temos M nas abscissas e β_1 nas ordenadas.

5.5 Conclusões deste Capítulo

1. Buracos de Schwarzschild

Buracos de Schwarzschild são estáveis quando isolados, respeitada a condição sobre o volume V da cavidade onde se encontram, $V < V_c = 15360\nu^{-1}\pi^2 M^5$;

Se, no entanto, estiverem sob banho térmico infinito, serão instáveis, desaparecendo após algum tempo. Não levamos em conta efeitos da reação da radiação sobre a métrica.

2. Buracos de Kerr-Newman

Todos os buracos negros de Kerr-Newman isolados são *estáveis*. Isto porque as séries lineares $\beta_i(M)$ correspondentes não possuem tangentes verticais a elas. Sendo todos os buracos estáveis no limite de baixa carga e momento angular, conclui-se pela *estabilidade* desses buracos, mesmo no limite $h \rightarrow 1$;

Nos casos onde (α, Q) e (J, Q) são constantes, as séries lineares $-M(\beta)$ apresentam tangentes verticais. Os ramos das séries com capacidades térmicas negativas são *instáveis* e os ramos com capacidades térmicas positivas ou são menos instáveis ou são de fato estáveis. Não se sabe qual das duas possibilidades é a correta, pois esta é uma limitação do método. Assim, conclui-se que há, de fato, correlação entre trocas de sinal das capacidades térmicas e mudanças de estabilidade termodinâmica, mas ela não é tão clara quanto na Termodinâmica Clássica, onde capacidades térmicas negativas indicam sistemas instáveis, em colapso. Aqui, por exemplo, só ocorreu mudança de estabilidade nos ensembles canônicos, e não nos microcanônicos. De qualquer forma, carga ou momento angular elevados em relação à massa (limite $h \rightarrow 1$) têm um efeito estabilizador sobre buracos negros sob banho térmico infinito.

Para buracos com (α, χ) constantes, temos instabilidades permanentes no ensemble canônico, pois a série linear $-M(\beta)$ associada não tem tangentes verticais, e assim não há mudanças de estabilidade. Sendo instáveis no limite $h \rightarrow 0$, eles o serão em qualquer situação.

Buracos com (J, χ) constantes são instáveis no limite $h \rightarrow 0$, no ensemble canônico. Se a série linear $-M(\beta)$ correspondente realmente tiver uma tangente vertical para algum M crítico, conforme mencionado em [13], este ramo com $M < M_c$ será menos instável do que o ramo oposto, ou possivelmente estável.

Em geral, buracos negros de Kerr-Newman são instáveis sob banho térmico infinito, podendo ser menos instáveis ou até estáveis com altos valores de $\frac{Q}{M}$ ou $\frac{J}{M^2}$, que têm assim um efeito estabilizador.

3. Conclusão Final

Temos agora a última, e talvez mais importante, conclusão. Deve-se ter cautela com as analogias feitas entre a física de buracos negros e a Termodinâmica Clássica, por mais bem-sucedidas que sejam as analogias entre a Segunda Lei da Termodinâmica e a Lei das Áreas. Na Termodinâmica Clássica, como dissemos há pouco, capacidades térmicas negativas indicam um sistema instável, entrando em colapso. Isto não é necessariamente verdadeiro para buracos negros. Basta ver os buracos negros isolados, que podem ter capacidades térmicas positivas em um ramo e negativas no ramo oposto da série linear que os representa, sem alterações de estabilidade termodinâmica. Ou, ainda, capacidades térmicas sempre negativas (buraco negro de Schwarzschild), sendo estáveis. Há, sem dúvida, correlação entre trocas de sinal na capacidade térmica e mudanças de estabilidade, como ocorreu no ensemble canônico, sendo o ramo com capacidades térmicas negativas sempre instável. Mas não é uma relação tão clara e direta como na Termodinâmica Clássica, até porque o método de Poincaré é limitado e não nos permite dizer, ao certo, o grau de estabilidade de um sistema com buracos negros. Isto se deve, em última análise, à presença de fortes interações gravitacionais, que fazem com que qualquer parte do sistema, por menor que seja, não possa ser tratada como um subsistema em contato com um reservatório térmico (o restante do sistema), tal como se passava na termodinâmica clássica, onde tais interações muito intensas não existiam.

Apêndice A

A Métrica de Kruskal-Szekeres

Neste Apêndice estão cálculos detalhados acerca da solução de Schwarzschild que, dada sua extensão, poderiam atrapalhar a exposição das idéias no texto principal.

Primeiramente, vamos começar com a dedução da métrica de Kruskal-Szekeres, dada sem demonstração no texto principal. O tensor métrico transforma-se, em sua forma contravariante, por

$$g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.1})$$

onde x^α, x^β correspondem às coordenadas novas e x^μ, x^ν , às antigas. Devido à dupla prescrição para as coordenadas u e v de Kruskal-Szekeres, por conta das regiões distintas I e II, teremos de tratar separadamente estas duas regiões na dedução. Para a região I, nós tínhamos

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Para a região II,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para a métrica contravariante de Schwarzschild, temos

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(-\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, 1 - \frac{2M}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \right). \quad (\text{A.4})$$

Como as coordenadas θ e ϕ não se alteram nesta mudança de coordenadas, basta calcularmos as componentes g^{uu} , g^{uv} e g^{vv} . Assim,

$$\begin{aligned} g^{uu} &= g^{tt} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial t} + g^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r}, \\ g^{uv} &= g^{tt} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + g^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \\ g^{vv} &= g^{tt} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + g^{rr} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Precisamos obter estas derivadas parciais, para encontrarmos estes novos termos. Elas aparecem listadas na seqüência:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4M} \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} = \frac{1}{4M} v, \quad (\text{A.6})$$

na região I, e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4M} \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} = \frac{1}{4M} v, \quad (\text{A.7})$$

na região II. Analogamente,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{4M} \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} = \frac{1}{4M} u, \quad (\text{A.8})$$

na região I, e

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{4M} \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} = \frac{1}{4M} u, \quad (\text{A.9})$$

na região II. Derivando com relação a r , vem:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sqrt{-1 + \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \cosh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \left(\frac{1}{4M} \frac{1}{-1 + \frac{r}{2M}} - \frac{1}{4M} \right), \quad (\text{A.10})$$

na região I, e

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \exp\left\{-\frac{r}{4M}\right\} \sinh\left\{\frac{t}{4M}\right\} \left(-\frac{1}{4M} \frac{1}{1 - \frac{r}{2M}} - \frac{1}{4M} \right), \quad (\text{A.11})$$

na região II,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sqrt{-1 + \frac{r}{2M} \exp\{-\frac{r}{4M}\}} \sinh\{\frac{t}{4M}\} \left(\frac{1}{4M} \frac{1}{-1 + \frac{r}{2M}} - \frac{1}{4M} \right), \quad (\text{A.12})$$

na região I, e

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sqrt{1 - \frac{r}{2M} \exp\{-\frac{r}{4M}\}} \cosh\{\frac{t}{4M}\} \left(-\frac{1}{4M} \frac{1}{1 - \frac{r}{2M}} - \frac{1}{4M} \right), \quad (\text{A.13})$$

na região II. Agora, é só substituir nas expressões para g^{uu} , g^{uv} e g^{vv} . Para a região I, vem

$$\begin{aligned} g^{uu} &= -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{1}{4M} v \right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{1}{4M} \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{2M}} \right) u \right]^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{1}{16M^2} (-v^2 + u^2), \\ g^{uv} &= 0 \\ g^{vv} &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{1}{16M^2} (-u^2 + v^2). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Idem, para a região II. Para ambas as regiões, também valem

$$\begin{aligned} g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \\ g^{\phi\phi} &= \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Devido ao anulamento de g^{uv} , esta nova métrica é diagonal, o que facilita a obtenção do tensor métrico covariante, pela expressão $g^{\mu\nu} g_{\mu\eta} = \delta_{\eta}^{\nu}$. Facilmente achamos

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= r^2, \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2(\theta), \\ g_{uu} &= \frac{1}{g^{uu}} = 16M^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{u^2 - v^2} \\ g_{vv} &= \frac{1}{g^{vv}} = -16M^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{u^2 - v^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Usando

$$u^2 - v^2 = \left(-1 + \frac{r}{2M} \right) \exp\left\{ \frac{r}{2M} \right\}, \quad (\text{A.17})$$

podemos simplificar g_{uu} e g_{vv} , obtendo:

$$\begin{aligned}g_{uu} &= \frac{32M^3}{r} \exp\left\{-\frac{r}{2M}\right\} \\g_{vv} &= -\frac{32M^3}{r} \exp\left\{-\frac{r}{2M}\right\}.\end{aligned}\tag{A.18}$$

Assim, o elemento de linha na métrica de Kruskal-Szekeres fica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{32M^3}{r} \exp\left\{-\frac{r}{2M}\right\} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2,\tag{A.19}$$

completando a dedução.

Apêndice B

Extraindo Energia de Buracos Negros

Neste apêndice, vamos discutir rapidamente o problema da extração de energia de buracos negros, abordado por diversos autores, como Misner[9] e Penrose[4]. Há basicamente duas formas de se roubar energia de buracos negros, dependendo do tipo de buraco negro com o qual se lida: a Galáxia de Misner e a injeção de partículas.

B.1 A Galáxia de Misner

Neste processo, aplicável a todo tipo de buraco negro, temos inicialmente uma galáxia contendo 2^N buracos negros, todos com a mesma massa M . A idéia consiste em fazê-los colidir, *sempre aos pares*. Assim, num primeiro momento, após as primeiras colisões, teríamos 2^{N-1} buracos negros, de massa $M' = 2M(1 - k)$ cada, onde k representa a fração da energia inicial de cada buraco dissipada na forma de ondas gravitacionais durante o processo de colisão. Prosseguem-se as colisões, sempre aos pares. A seguir, teremos 2^{N-2} buracos de massa $M'' = 2M'(1 - k) = 2^2M(1 - k)^2$, e assim sucessivamente, até ficarmos com um único buraco negro de massa $M_f = 2^N M(1 - k)^N$. A diferença entre esta massa final e a massa inicial da galáxia, $M_0 = 2^N M$, é

$$\Delta M = M_0 - M_f = 2^N M[1 - (1 - k)^N] \quad (\text{B.1})$$

energia que pode ser capturada na forma de ondas gravitacionais. O problema é que, em geral, $k \ll 1$, o que tornaria a fração $\frac{\Delta M}{M_0}$ muito próxima de

zero. Isto poder-se-ia compensar por um valor de N suficientemente alto, de forma a tornar o processo acima compensador. Pode-se notar, entretanto, que não é uma forma prática de se extrair energia de buracos negros, sendo altamente idealizada desde o princípio, ao se exigirem massas iguais para 2^N buracos negros. Mas colisões de buracos negros são a única forma de se extrair energia de buracos de Schwarzschild, que não dispõem de ergosfera e nem de campos eletromagnéticos externos a eles causados por cargas em seu interior, com os quais cargas externas poderiam eventualmente interagir.

B.2 Injeção de Matéria no Buraco Negro

Este processo só pode ser realizado em buracos negros girantes, que possuem *ergosfera*. A princípio, poder-se-ia descer uma "partícula de prova", denominada doravante μ , a partir de um ponto X externo ao limite estático do buraco. Esta partícula desceria além do limite estático, sendo girada na direção do horizonte do buraco negro. Até um certo ponto dentro da ergosfera, ela poderia ser suspensa por meio de um fio operado por um observador em X . Ao chegar a este ponto, seria então *largada*, caindo no buraco negro. Poder-se-ia, para que o processo se torne atraente do ponto de vista energético, escolher um ponto de ejeção P tal que a energia-no-infinito de μ , E_μ , seja *negativa*. O buraco negro, absorvendo tal partícula, *perde* massa, enquanto o fio volta para o operador em X com uma energia-no-infinito *maior* do que a sua energia inicial, como explicado abaixo:

$$E_{fio}^{final} = (E_{fio}^{inicial} + E_\mu^{inicial}) - E_\mu^P(\text{ejetada}) > E_{fio}^{inicial} + E_\mu^{inicial}, \quad (\text{B.2})$$

já que é negativa a energia da partícula no ponto de ejeção, P . O fio, ao retroceder ao ponto inicial, pode transferir sua energia para algum dispositivo de conversão ou armazenamento de energia, para usufruto de quem estiver em X . O ganho líquido de energia no processo seria, assim,

$$\Delta E = E_{fio}^{final} - (E_{fio}^{inicial} + E_\mu^{inicial}) = -E_\mu^P(\text{ejetada}) > 0. \quad (\text{B.3})$$

Como a massa que caiu no buraco tem energia-no-infinito negativa, este perde energia e também perde momento angular, pois a Lei das Áreas assim exige, pois ela se expressa por

$$\delta M \geq \frac{Qr_+ \delta Q + a \delta J}{a^2 + r_+^2}, \quad (\text{B.4})$$

implicando, para δJ (supondo $\delta Q = 0$),

$$\delta J \leq \frac{\delta M}{\Omega}, \quad (\text{B.5})$$

onde $\Omega = \frac{a}{a^2 + r_+^2}$ é a velocidade angular do buraco negro. Há, assim, perda de momento angular com a perda de massa. E aí reside o principal problema do método: perdendo momento angular a cada vez que o processo acima ocorre, ele deixará de girar em determinado momento de sua existência, desaparecendo assim a ergosfera e tornando impossível a continuidade do processo. Trata-se, portanto, de uma fonte de energia *não-renovável*, tal como o petróleo e o carvão aqui na Terra.

A possibilidade de se ter $E_\mu < 0$ realmente existe. Para confirmar a idéia, vamos por partes.

1. Na ergosfera, o termo g_{tt} da métrica é *positivo*, pois o vetor de Killing ∂_t é tipo-espaço entre o limite estático e o horizonte de eventos, sendo tipo-tempo além do limite estático;
2. A energia E é dada por $E = -p \cdot \partial_t$, onde p representa o 4-momento da partícula. Sendo p sempre tipo-tempo, e ∂_t tipo-tempo fora da ergosfera, o produto $E = -p \cdot \partial_t$ será necessariamente positivo fora da ergosfera. Dentro desta, podemos ter, para escolhas determinadas de p , um produto $E = -p \cdot \partial_t < 0$, enquanto que para outras escolhas de p , temos $E > 0$. Por “escolha de quadrimomento p ”, entenda-se a escolha de órbitas de partículas de prova sem carga. Assim, para se extrair energia do buraco negro, a energia-no-infinito de μ deve passar de positiva a negativa, ou seja, sua órbita deve mudar, dentro da ergosfera, antes de ela ser ali abandonada e absorvida, pouco depois, pelo buraco;
3. Para partículas carregadas, forças eletromagnéticas alteram a região onde há órbitas de energia-no-infinito negativas. Se as cargas de μ e do buraco, Q , tiverem sinais opostos, a força será atrativa sobre a partícula, aumentando-lhe a energia cinética quando próxima do buraco negro. Assim, a energia-no-infinito de μ , passa a ser

$$E_\mu = -(p + eA) \cdot \partial_t = -p \cdot \partial_t - eA_t = -p \cdot \partial_t + \frac{eQr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}, \quad (\text{B.6})$$

onde o termo extra é negativo se e e Q têm cargas com sinais opostos e positivo se forem cargas de sinais iguais. No primeiro caso, órbitas

com $E_\mu < 0$ podem existir em uma região do espaço *maior* do que a ergosfera; no segundo, em uma região espacial *menor* do que a ergosfera.

Estas considerações fecham a seção.

Apêndice C

As Transformações de Legendre

C.1 Definição Geral

As transformações de Legendre são bastante utilizadas em Termodinâmica, pois permitem estudar uma ampla gama de problemas mediante o emprego de potenciais termodinâmicos diversos, construídos a partir da energia interna U ou da entropia S de um sistema físico. O problema determinará o potencial a ser empregado. Para uma descrição mais extensa e aprofundada do que aquela que se segue, consultar Callen[23].

Num contexto mais geral, dada uma função F de várias variáveis, denominadas X_1, X_2, \dots, X_N , isto é,

$$F = F(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (\text{C.1})$$

podemos definir sua transformada de Legendre com relação à variável X_j através de

$$L[F, X_j] = F - X_j \frac{\partial F}{\partial X_j}, \quad (\text{C.2})$$

onde $\frac{\partial F}{\partial X_j} = Y_j$ é a variável canonicamente conjugada (ou simplesmente conjugada) a X_j com relação à função F . Naturalmente, para que a transformação faça sentido, é preciso expressar a variável substituída, X_j , em termos da nova, Y_j , e das outras variáveis X_i , ou seja, é necessário obter

$$X_j = X_j(X_i, Y_j), \quad (\text{C.3})$$

onde X_i representa todas as variáveis originais de F , com exceção de X_j . Feita esta operação de eliminação da variável X_j , temos

$$L[F, X_j] = F - X_j Y_j = L[F](X_1, X_2, \dots, Y_j, \dots, X_N), \quad (\text{C.4})$$

que é a transformada desejada. Podemos ter transformações de Legendre de F com respeito a várias variáveis, também. Com efeito, temos

$$L[F, X_j, X_k, \dots, X_h] = F - X_j \frac{\partial F}{\partial X_j} - X_k \frac{\partial F}{\partial X_k} - \dots - X_h \frac{\partial F}{\partial X_h}, \quad (\text{C.5})$$

onde cada uma das derivadas $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ representa a variável Y_i conjugada a X_i . Com isto, após a eliminação das variáveis antigas, temos

$$L[F] = F - X_j Y_j - X_k Y_k - \dots - X_h Y_h = L(Y_j, Y_k, \dots, Y_h, X_p), \quad (\text{C.6})$$

onde X_p representa as variáveis antigas que não foram trocadas, isto é, que foram mantidas pela transformação de Legendre efetuada.

C.2 Alguns Exemplos

Na Termodinâmica Clássica, a energia interna U de um sistema físico pode ser expressa por

$$U = U(S, V), \quad (\text{C.7})$$

onde S e V representam, respectivamente, a entropia e o volume desse sistema. Assim, a expressão de U em termos de S, V permite a caracterização completa do mesmo. Pode-se igualmente bem utilizar como ponto de partida a entropia S , expressa em termos de U, V :

$$S = S(U, V). \quad (\text{C.8})$$

Tomemos $U(S, V)$. Para sistemas onde S e V sejam constantes, esta expressão fundamental de U é boa o bastante para a análise dos mesmos. Mas nem sempre é assim. Podemos ter sistemas onde a pressão, p , é constante, juntamente com a entropia S , ou com a temperatura absoluta T . Ou ainda onde T é constante, juntamente com V . Da Primeira Lei da Termodinâmica, temos

$$dU = TdS - pdV, \quad (\text{C.9})$$

de onde podemos obter

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V} \quad , \quad (\text{C.10})$$

que são as variáveis canonicamente conjugadas a S e a V com relação a U . Se efetuarmos a transformada de Legendre de U com relação a S , teremos

$$L[U, S] = U - S \frac{\partial U}{\partial S} = U - TS = F(T, V), \quad (\text{C.11})$$

onde F é o *potencial de Helmholtz*, representando o trabalho disponível para o sistema (isto é, quanta energia pode ser convertida em trabalho). Para sistemas onde a temperatura T e o volume V são constantes, é o potencial adequado, por manter-se constante, já que

$$dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT, \quad (\text{C.12})$$

acarretando $dF = 0$ se $dV = dT = 0$. A transformação de U com respeito a V fornece

$$L[F, V] = U - V \frac{\partial U}{\partial V} = U + pV = H(p, S), \quad (\text{C.13})$$

mais conhecida como a *entalpia* do sistema físico. Sistemas onde S e p são constantes podem ser tratados com o potencial H , pois

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp, \quad (\text{C.14})$$

acarretando $dH = 0$ se $dS = dp = 0$. Por último, se efetuarmos a transformação com respeito a S e a V simultaneamente, teremos

$$L[U, S, V] = U + pV - TS = G(T, p), \quad (\text{C.15})$$

que é a *energia livre de Gibbs*, útil para sistemas onde T e p são constantes, pois

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp = -SdT + Vdp, \quad (\text{C.16})$$

acarretando $dG = 0$ se $dT = dp = 0$. Para problemas envolvendo reações químicas na atmosfera, por exemplo, pode ser o potencial adequado, desde que tenhamos T, p constantes, o que pode ser uma boa aproximação, muitas vezes. E no estudo de transições de fase, melhor ainda: como a temperatura e a pressão permanecem constantes no processo, $dG = 0$, ou seja, para uma transição de fase, vale $G_{antes} = G_{depois}$.

Agora, para buracos negros, onde se define a entropia $S = S(M, Q, J)$, onde M representa o conteúdo de massa-energia dos mesmos, J representa o momento angular e Q , a carga, podemos ter potenciais novos (as *funções de Massieu*) obtidos por transformações de Legendre de S com relação a M , J ou Q . Assim, se definirmos

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \alpha = \frac{\Omega}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad \chi = \frac{\Phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad (\text{C.17})$$

teremos as variáveis conjugadas a M , J e Q , respectivamente, em relação a S . A transformada de Legendre de S com respeito a J fornece

$$L[S, \alpha] = S - J \frac{\partial S}{\partial J} = S + \alpha J = S_1(M, Q, \alpha), \quad (\text{C.18})$$

após a completa substituição de J por α . Buracos negros com Q e α constantes podem ser discutidos com este potencial termodinâmico. Analogamente, a transformada de S com respeito a Q fornece

$$L[S, Q] = S - Q \frac{\partial S}{\partial Q} = S + \chi Q = S_2(M, J, \chi), \quad (\text{C.19})$$

após a substituição de Q por χ . Por fim, existe ainda um terceiro potencial, útil se tivermos buracos negros com α, χ constantes. Ele se define por

$$L[S, Q, J] = S + \alpha J + \chi Q = S_3(M, \alpha, \chi), \quad (\text{C.20})$$

após a eliminação de Q e de J .

Referências Bibliográficas

- [1] Bekenstein, J.D., *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. D, v.7, n.8, 1973;
- [2] Bekenstein, J.D., *Statistical Black-Hole Thermodynamics*, Phys. Rev. D, v.12, n.10, 1975;
- [3] Hawking, S. W., *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys., 43, 1975;
- [4] Penrose, R., *Gravitational Collapse and the Role of General Relativity*, Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speciale, 1969;
- [5] Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, International Series of Monographs on Physics (69), Oxford Science Publications, 1983;
- [6] Novikov, I. D., *Physics of Black Holes*, Kluwer Academic Publishers, 1988;
- [7] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972;
- [8] Wald, R.M., *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984;
- [9] Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A., *Gravitation*, Ed. W.H. Freeman and Co., 1973;

- [10] Hawking, S.W., *Black Holes and Thermodynamics*, Phys. Rev. D, 13, 2, 1976;
- [11] Parentani, R., Katz, J. and Kaburaki, O., *Thermodynamics of a Black Hole in a Cavity*, gr-qc/9410015;
- [12] Katz, J., Okamoto, I. and Kaburaki, O., *Thermodynamic stability of Kerr Black Holes*, Phys. Rev. D, v.47, n.6, 1993;
- [13] Katz, J., Okamoto, I. and Kaburaki, O., *Thermodynamic Stability of Pure Black Holes*, Class. Quantum Grav., 10, 1993;
- [14] Bekenstein, J.D., *Ph. D. thesis*, Princeton University, 1972;
- [15] Christodoulou, D., *Ph. D. thesis*, Princeton University, 1971;
- [16] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Nature 238, 211, 1972;
- [17] H. Poincaré, Acta Math. 7, 259 (1885);
- [18] J.W. York, Jr, Phys. Rev. D 33, 2092 (1986);
- [19] B.F. Whiting and J.W. York, Jr, Phys. Rev. Lett. 61, 1336 (1988) ;
- [20] Christodoulou, D. *Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics*, Phys. Rev. Lett. 25, 1596-1597 (1970);
- [21] Christodoulou, D. and Ruffini, R., *Reversible Transformations of a Charged Black Hole*, Phys. Rev. D 4, 3552-3555 (1971);
- [22] Carter, B., *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*, Phys. Rev. 174, v.5, 1559-1571 (1968);

- [23] Callen, H.B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, Ed. John Wiley and Sons, 1984.

- [24] Khuri, N., unpublished calculation (1957), quoted in Lindquist and Wheeler, *Dynamics of a Lattice Universe by the Schwarzschild Cell Method*, Rev. Mod. Phys., 29, 432-433.