

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JAIR LUIS SCHUVAAB

Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica

Maringá

2013

JAIR LUIS SCHUVAAB

Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi.

Maringá

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Faculdade Sul Brasil
Ficha catalográfica elaborada por Rute Teresinha Schio - CRB-9/1095

V383r Schuvaab, Jair Luis

Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica / Jair Luis Schuvaab. – Maringá, 2013.
39 fl. : il. : graf.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, - Universidade Estadual de Maringá.

1. Equações algébricas. 2. Problemas. 3. Solução. I Título.

CDD 512

JAIR LUIS SCHUVAAB

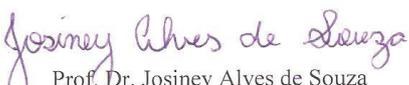
**RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATÉ QUARTO GRAU:
UMA ABORDAGEM HISTÓRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Wesley Wagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)


Prof. Dr. Jair da Silva
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – Campo Grande - MS


Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 12 de março de 2013.
Local de defesa: Sala 103, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos os professores e colegas que contribuíram para sua realização.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer aos meus pais, Lauro Schuvaab e Natalia Schuvaab e a minha namorada, Taisa Klein que sempre estão presentes na minha vida.

A CAPES, pela bolsa de estudos, sem a qual não teria condições financeiras para concluir o mestrado.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi (UEM), Prof. Dr. Josiney Alves de Souza (UEM) e Prof. Dr. Jair da Silva (UFMS) por aceitarem o convite para a avaliação deste trabalho.

E em especial ao Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi, pela orientação desde trabalho.

*A matemática é para mentes sensíveis,
capazes de ver espirais em girassóis,
ângulos em estrelas e Deus no infinito.*

(MANOEL RODRIGUES PAIVA)

Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica

RESUMO

Este trabalho apresentará alguns métodos para resolução de equações algébricas, por meio de radicais. Para as equações do primeiro grau, a regra da falsa posição usada pelos egípcios; para as equações do segundo grau, a fórmula de Bhaskara, que mesmo não tendo sido deduzida pelo próprio Bhaskara, levou o seu nome. As equações do terceiro grau são transformadas em uma forma reduzida, e resolvidas pelo método descoberto por Scipione Del Ferro e Nicola de Fontana (Tartaglia). Utilizando essa fórmula chega-se a necessidade de extrair a raiz quadrada de números negativos, que até então, se achava impossível, surgindo, assim, os números complexos. Para as equações do quarto grau, Ferrari encontrou uma forma para reduzir o grau para três e então aplicar a fórmula encontrada por Tartaglia.

Palavras-chaves: equações algébricas, problemas, solução.

Resolution of algebraic equations to fourth degree: a historical approach

ABSTRACT

This work presents some methods for solving algebraic equations, via radicals. For the equations of the first degree, the rule of false position used by the Egyptians, for quadratic equations, the quadratic formula, which even if not deduced by the Bhaskara, took his name. The equations of the third degree are transformed to a reduced form, and solved by the method discovered by Scipione del Ferro and Nicola Fontana (Tartaglia). Using this formula comes up the need to take the square root of negative numbers, which until then was thought impossible, appearing thus complex numbers. For the equations of the fourth degree, Ferrari, found a way to reduce the degree to three and then apply the formula found by Tartaglia.

Keywords: algebraic equations, problems, solution.

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	9
2. HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES.....	10
2.1. Origens primitivas.....	10
2.2. A matemática Grega.....	11
2.3. A matemática dos Árabes e dos Hindus.....	12
2.4. A matemática na Itália.....	16
3. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO 3 ^o GRAU E DO 4 ^o GRAU.....	18
3.1. Equações do 3 ^o grau.....	18
3.1.1. A insuficiência dos números reais.....	24
3.1.2. As outras raízes das equações do 3 ^o grau.....	27
3.2. Equações do 4 ^o grau.....	30
4. CONCLUSÃO.....	35
5. REFERÊNCIAS.....	36
6. ANEXOS.....	37

1. INTRODUÇÃO.

A busca por soluções de equações algébricas foi um problema de grande interesse para os matemáticos. Neste trabalho apresentamos um pouco da parte da história da resolução das equações algébricas, demonstraremos as fórmulas algébricas de resolver por meio de radicais as equações do primeiro, segundo e terceiro grau. A equação do quarto grau será demonstrada por meio de redução de grau.

O trabalho foi desenvolvido passeando-se, principalmente, nos livros: *História da Matemática* (Carl B. Boyer), *Introdução à História da Matemática* (Howard Eves) e *O Romance das Equações Algébricas* (Gilberto G. Garbi), como também, em alguns poucos casos, textos disponíveis na internet.

No Capítulo 2 descrevemos um pouco sobre a história das equações, desde os sumérios, passando pelos gregos, árabes e hindus até chegar à matemática italiana dos séculos XVI e XVII. No Capítulo 3 são apresentados os métodos de solução das equações de terceiro e quarto grau.

Não descrevemos as equações acima do 4^o grau, pois as mesmas, não podem ser resolvidas através de transformações algébricas dos radicais, isto é, não é possível encontrar uma fórmula geral ou algoritmo algébrico geral para resolver todas as equações de grau maior que 4, apesar de existirem alguns critérios que determinam quais são solúveis por operações algébricas. Entretanto, existem outros métodos para achar soluções recorrendo a métodos de Cálculo Numérico. Nos casos particulares em que existe fórmula, devido às operações bastante complicadas que se tem a fazer o método é pouco usado. Galois estudou a insolubilidade das equações de graus superiores a quatro, um problema já explorado por muitos matemáticos como Abel e Cardano, que apesar de muitos esforços não conseguiram dar uma generalização para a questão. Galois criou um objeto, conhecido hoje como "Grupo de Galois", que possibilita investigar se um polinômio qualquer pode ter suas raízes encontradas por meio de radicais ou não.

2. HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES.

Registros antigos, os chamados papiros, nos garantem que as equações algébricas existem há aproximadamente 4000 anos. Os egípcios utilizavam várias maneiras para resolver equações algébricas. Mas chegou-se ao método de resolução da equação do primeiro grau, utilizado até hoje, a partir dos axiomas enunciados na obra *Os Elementos de Euclides*. A obra de Euclides influenciou toda a produção científica posterior a ela e é o livro-texto mais antigo e que continua em vigor até os dias atuais. A fórmula que conhecemos como fórmula de Bhaskara na verdade não foi descoberta por Bhaskara, ela foi publicada pelo matemático hindu Sridhara um século antes de Bhaskara em uma obra que não chegou até nós.

2.1. Origens primitivas

A matemática surgiu como parte da vida diária do homem, onde sobreviviam os mais aptos, prevalecendo a lei de sobrevivência do mais forte. Acredita-se que a sobrevivência da raça humana esta relacionada com o desenvolvimento de conceitos matemáticos. O desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual. O processo de contar desenvolveu-se antes dos primeiros registros históricos. As mais antigas descobertas matemáticas conhecidas são registros numéricos feitos em tabletes de barro sumérios, de meados do IV milênio a.C. As primeiras operações com números foram encontrados em tabletes sumérios de 2200 a.C.

Entre os documentos matemáticos que temos conhecimento nos dias de hoje, provavelmente os mais famosos são os Papiros de Ahmes (ou de Rhind) e o Papiro de Moscou. O Papiro de Ahmes (ou Amose) é um papiro egípcio de cerca de 1600 a.C. e contém 85 problemas de Aritmética e Geometria. Este papiro foi descoberto em 1858, no templo mortuário de Ramsés II em Tebas, Egito, e esteve perdido durante muitos séculos até ser encontrado pelo advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, no final do século 19. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico onde está exposto até hoje. O Papiro de Moscou, com 25 problemas de Aritmética e Geometria, é de cerca de 1850 a.C. e apresenta uma descrição de como calcular o volume do tronco de uma pirâmide. Alguns dos problemas colocados mostram que nesse tempo já se dedicavam à resolução de equações lineares com uma incógnita. Esses problemas consistiam em exercícios numéricos envolvendo uma quantidade desconhecida, e por isso representam uma

aproximação à álgebra mais recente. Os símbolos algébricos não eram usados e a quantidade desconhecida era designada verbalmente. Usavam um artifício muito engenhoso para encontrar a resposta correta, hoje conhecida como “regra da falsa posição”. O método consistia da escolha de um número arbitrário para o valor desconhecido. A partir deste valor fazia-se o cálculo, e seu resultado era comparado com o resultado que deveria ser encontrado. Para finalizar, calculava-se um fator de correção para obter o valor desconhecido de modo a satisfazer a expressão original.

Exemplo: Qual o número que somado a terça parte dá 16? Pela regra da falsa posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Suponhamos, em nosso caso, que tal número fosse 6. Ora, 6 somado com a terça parte dá $6 + 2 = 8$, exatamente a metade dos 16 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 6, ou seja, 12.

Alguns problemas conhecidos dessa época mostram que eles resolviam, não só equações lineares, mas também equações quadráticas para as quais usavam o método do completamento do quadrado. Raciocínio também usado pelos hindus quase 3 milênios mais tarde.

2.2. A matemática Grega

Os conhecimentos matemáticos da Europa tiveram sua origem no Egito e na Mesopotâmia, e os primeiros povos europeus a assimilarem esses conhecimentos foram os gregos, que se interessaram pelas técnicas e reconheceram a utilidade da Geometria. Tales foi o primeiro grande matemático grego, visitou o Egito e a Babilônia trazendo para a Grécia o estudo da Geometria. Tales introduziu um conceito revolucionário dizendo que as verdades precisam ser demonstradas. A partir daí começaram as demonstrações dos teoremas. Tales provou que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, que qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, que o ângulo inscrito num semicírculo é sempre reto, que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais, etc. Poucas décadas depois, Pitágoras demonstrou o teorema dos triângulos retângulos. A demonstração que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, produziu pela primeira vez na Europa, uma equação do 2º grau. Euclides manteve o conceito que as verdades devem ser provadas, mas ressaltou que nem todas podem ser provadas, e que as mais

elementares devem ser admitidas sem demonstração. Euclides introduziu conceitos fundamentais na solução de equações. As noções comuns de Euclides foram:

- a) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
- b) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.
- c) Se iguais forem subtraídos a iguais, os resultados serão iguais.
- d) Coisas coincidentes são iguais entre si.
- e) O todo é maior do que a parte.
- f) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.

Essas verdades são a chave para a solução de equações do primeiro grau.

Suponha a equação:

$$5x + 7 = 37.$$

Pela noção comum (c), se subtrairmos dos dois lados o número 7, a igualdade se preserva. Daí:

$$5x + 7 - 7 = 37 - 7 \text{ ou } 5x = 30.$$

Pela verdade (f) se dividirmos os dois lados pelo número 5, a igualdade se preserva. Daí:

$$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5} \text{ ou } x = 6.$$

Encontrou-se então um método geral para a resolução de equações do primeiro grau.

Com o conhecimento que os Gregos tinham sobre geometria eles resolviam alguns tipos de equações do 2º grau apenas com régua e compasso.

2.3. A matemática dos Árabes e dos Hindus

Durante todo o período em que o império romano dominou o mundo conhecido da época, tanto economicamente quanto culturalmente, o oriente foi a parte mais desenvolvida. A parte ocidental não foi baseada em uma economia de irrigação, sua agricultura era extensiva, o que não estimulou o desenvolvimento da astronomia. Assim, o ocidente se contentou com um mínimo de astronomia, alguma aritmética e algumas medições para o comércio e

agrimensura. O estímulo para este desenvolvimento veio do oriente. Após a separação política entre ocidente e oriente este estímulo praticamente desapareceu.

Por volta do ano de 570, na Arábia, na cidade de Meca nasceu Maomé que criou um império que sacudiu o mundo desde a Europa até a Índia. Aos 40 anos, Maomé foi tomado de profundos sentimentos religiosos, começando seus ensinamentos religiosos por volta de 613. Maomé pregava o monoteísmo e os mandamentos que dizia lhe terem sido revelados pelo arcanjo Gabriel. Em Medina consegue o apoio de várias tribos árabes nômades e em 630 regressa e conquista Meca impondo a sua religião. Dois anos depois morre. Os sucessores do profeta, os califas, iniciam uma guerra santa, conquistando territórios com o intuito de divulgar o islamismo. Em menos de um século os muçulmanos conseguem conquistar um imenso território.

Após a queda de Alexandria frente aos muçulmanos, o califa Omar mandou queimar todos os manuscritos encontrados na biblioteca (cerca de 600.000) argumentando que os livros, ou repetiam os ensinamentos do Corão e eram supérfluos, ou os contrariavam e eram nocivos. Este triste episódio da História da Humanidade parecia prenunciar que o império árabe viria a tornar-se sinônimo de obscurantismo nas ciências e na cultura. O que ocorreu foi exatamente o contrário. Em pouco tempo os califas, palavra que significa sucessor (de Maomé), reconheceram a importância do saber e das artes e passaram a patrociná-los. O primeiro a fazê-lo foi Harum Al-Rachid, imortalizado nos Contos das 1001 Noites, que se cercou de sábios e artistas e, inclusive, ordenou que Os Elementos fossem vertidos para o árabe. Este fato foi de suma importância, pois muito mais tarde, esta foi a fonte a que a Europa recorreu para reencontrar os perdidos ensinamentos de Euclides. Seu filho, Al-Mamun, que reinou entre 813 e 833, continuou a obra do pai e determinou a pesquisa e a tradução em língua árabe de todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados, criando em Bagdá uma escola científica cuja biblioteca foi a melhor do mundo desde a que existira em Alexandria. Nas ciências, introduziram no mundo ocidental a numeração arábica, o conhecimento do zero e a utilização da álgebra. As escolas passaram a ensinar álgebra e, em algumas décadas, o novo sistema de numeração estava sendo usado pelas pessoas do povo, principalmente os comerciantes. Foi na extensa fronteira entre os mundos cristão e muçulmano que os europeus, tiveram seus primeiros contatos com um outro tipo de aritmética. Na astronomia, fundaram vários observatórios astronômicos, realizando estudos sobre eclipses solares e lunares. Nas artes, possuíam um rico e variado estilo arquitetônico com o uso de arcos, finas colunas e cúpulas, que caracterizavam as mesquitas e

os palácios, dentre os quais é admirável a Mesquita de Córdoba, com mais de mil colunas monolíticas.

Séculos antes do surgimento do Império Muçulmano, os hindus já desenvolviam sua própria matemática. A matemática hindu tem grande influência no mundo inteiro, os símbolos numéricos dos quais descendem nossos modernos algarismos são de origem hindu. Os hindus conheciam a extração da raiz quadrada e cúbica e tinham noções das leis fundamentais da trigonometria. Os conhecimentos matemáticos dos hindus, tão essenciais para várias ciências, foram divulgados na Europa pelos árabes. Uma das grandes influências da matemática indiana no ocidente é através do matemático Bhaskara, nascido em 1114, cujo nome evoca a solução de equações algébricas do segundo grau. Bhaskara foi também um importante astrônomo. A fórmula de Bhaskara foi encontrada pelo matemático hindu Sridhara por volta do ano de 991 e publicada numa obra que não chegou até nós.

A fórmula geral para resolver as equações do 2º grau fundamentou-se na ideia de buscar uma maneira de reduzir o grau da equação do 2º grau para o 1º grau, através da extração de raízes quadradas. Seja a equação geral do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{com } a \neq 0,$$

onde a, b e c são números reais quaisquer.

Assim subtraindo c em ambos os lados, temos:

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c .$$

Ou:

$$ax^2 + bx = -c .$$

Dividindo os dois lados da igualdade por a , obtemos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} .$$

Ou:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

A ideia agora é completar os quadrados do lado esquerdo da igualdade.

Dessa forma devemos somar $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados da igualdade:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser escrito como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, pois completamos a operação para que aparecesse um quadrado perfeito.

O lado direito também pode ser reescrito efetuando a adição das duas frações:

$$-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Logo ficamos com a seguinte igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Vamos extrair a raiz quadrada dos dois lados da igualdade:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Lembrando que números positivos ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos, temos que extrações de raízes quadradas geram sempre duas alternativas, uma com sinal + e outra com sinal -, logo:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Isolando x obtemos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ou:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta é a famosa fórmula de Bhaskara, que não foi deduzida por ele, mas levou seu nome. Na época de Bhaskara não existia a simbologia utilizada agora. Pelo menos duas constatações importantes decorreram da fórmula de Bhaskara:

- a) Equações acima do primeiro grau poderiam ter mais de uma solução;
- b) Em alguns casos, a aplicação da fórmula conduzia a raiz quadrada de um número negativo, coisa misteriosa para a época.

Considere, por exemplo, a equação $x^2 + 4x + 10 = 0$. Aplicando a fórmula de Bhaskara tem-se $x = 2 \pm \sqrt{-6}$. Mas quanto vale $\sqrt{-6}$? Não se sabia o valor, considerando assim que algumas equações do 2º grau eram impossíveis.

2.4. A matemática na Itália.

No início do segundo milênio tivemos uma nova era para as ciências do Ocidente. Durante a expansão e domínio do Império Romano na Europa o interesse pela Matemática foi muito reduzido e não existem grandes marcos históricos a registrar nessa área. A partir do século XII com a expansão iniciada pelas civilizações cristãs aumentou o contato com as culturas árabes e isso possibilitou a aquisição de conhecimentos matemáticos até aqui desconhecidos dos povos europeus. A tradução do livro, *Hisab al-jabr wal-mugabala*, de Al-Khowarazmi (780-850) do árabe para o latim pode ser tomada como o início da álgebra na Europa. As mais importantes cidades em termos de comércio com o oriente foram, naturalmente, o local onde surgiram os principais matemáticos e as principais descobertas da época. Genova, Pisa, Milão, Florença e Veneza foram, na Itália, os grandes centros comerciais e onde apareceram, em relativamente pouco tempo, muitos matemáticos a produzir trabalhos importantes no domínio da resolução de equações.

Foi nesta época que viveu o maior matemático europeu da Idade Média: Leonardo de Pisa (1175 – 1250) mais conhecido por Fibonacci. Leonardo Fibonacci nasceu em Pisa. Filho

de Guglielmo dei Bonacci, um próspero mercador, acompanhou as atividades do pai no porto de Pisa, que mantinha grande influência no comércio do Mediterrâneo. Através das atividades de comércio alfandegário, Fibonacci viajou pelo Oriente na sua atividade como mercador em consequência dos conhecimentos adquiridos escreveu o seu livro mais famoso, *Liber Abaci* em 1202. A principal virtude deste livro é sua contribuição para a introdução do sistema de numeração árabe que acabaria por substituir o sistema de numeração romano. No entanto, foca também questões relacionadas com equações do 2º e 3º grau apresentando o que aprendeu com autores árabes.

Por exemplo, Fibonacci estudou a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ e calculou uma aproximação da solução real embora não se saiba qual o método usado para encontrá-la.

Após Leonardo Fibonacci, o próximo grande matemático italiano foi o franciscano Fra. Luca Paciolo, também conhecido por Pacioli, o qual se interessou pela Aritmética, e foi conhecido como o pai da contabilidade moderna. Luca Pacioli nasceu em 1445, em um pequeno vilarejo chamado “Borgo di San Sepolcro”, hoje chamado apenas de “Sansepolcro”, vilarejo este que fica situado na cidade de Arezzo, na região central da Itália. No mesmo período nasce na Alemanha, Gutenberg que inventou a imprensa (1456), tornando possível a rápida multiplicação e divulgação dos livros. Luca Pacioli, aproveitou o momento histórico, e fez uma síntese do conhecimento matemático acumulado na Europa até o momento.

Sua obra, *Summa di Arithmetica Geometria Proportione e Proportionalita* (1494) motivou inúmeros matemáticos a somarem suas forças no desenvolvimento da matemática.

3. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO 3º GRAU E DO 4º GRAU

No século XVI surgiu na Europa um novo interesse pelo estudo da Matemática, mais especialmente na Itália. Na época, por volta de 1510, Scipione Del Ferro, um matemático italiano, encontrou uma fórmula para resolver as equações do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu antes de publicar sua descoberta. Seu aluno, Antonio Maria Fior, que conhecia o método tentou se apropriar do mérito de seu mestre. Na época eram comuns desafios entre os sábios e Fior decidiu desafiar Tartaglia, que era bastante conhecido por seu talento. Na mesma época, o matemático Bombelli, resolvendo a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ pela fórmula de Cardano e Tartaglia, percebeu que os números reais não eram suficientes e surgiram os números complexos.

3.1. Equações do 3º grau

Na história da Ciência, não foram raros os choques entre dois talentos em torno de disputas cuja essência era as vaidades ou outros sentimentos menos elevados. Considerando que a equação do 2º grau já não mais representava um problema a ser resolvido, a pesquisa dos matemáticos, a partir do século XVI, se volta para equações de grau maior ou igual a 3.

A grande novidade da época foi à criação de uma teoria sobre a resolução de equações do terceiro grau, as equações cúbicas. Scipione del Ferro (1465-1526) não tinha por hábito deixar os seus trabalhos escritos e apenas comunicava as suas descobertas a poucas pessoas, os seus amigos e alunos. Em 1515, Scipione del Ferro era professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ele não publicou o resultado, mas revelou o segredo a seu aluno Antônio Maria Fior.

Naquela época era frequente o lançamento de desafios entre sábios e Fior escolheu Nicola Fontana de Brescia, mais conhecido por Tartaglia como seu alvo, pois o mesmo era muito conhecido pelo seu talento. O desafio consistia em resolver problemas que um deveria propor ao outro. Fior acreditava que somente ele tinha solução daquele tipo de equações do 3º grau. Tartaglia não tinha muita consideração por Fior e acabou aceitando o desafio, mas antes mesmo da data marcada, descobriu que seu oponente estava armado de um método descoberto pelo falecido professor Scipione del Ferro. Sentindo-se ameaçado Tartaglia, por volta de 1535, aparentemente sem conhecer o método de del Ferro descobriu também como resolver as

equações cúbicas, além de resolver as do tipo $x^3 + px + q = 0$, também achou a fórmula para a resolução das equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$.

No desafio Tartaglia resolveu todos os problemas propostos por Fior, este não conseguiu resolver nada das equações apresentadas pelo primeiro.

Tartaglia tinha como costume divulgar apenas os resultados e não o método de resolução, mas acabou por comunicar esse método a um amigo seu, Gerolamo Cardano (1501-1576), um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, pedindo-lhe que guardasse segredo. Cardano concordou, mas ao tomar conhecimento do livro de apontamentos de del Ferro e descobrindo que Tartaglia não tinha sido o primeiro a descobrir como resolver equações cúbicas resolve tornar público o método. Sai então em 1545 o seu livro *Ars Magna*, um marco na história da matemática. Para os contemporâneos de Cardano este livro significava uma ruptura no campo da matemática, exibindo e publicando pela primeira vez os princípios para a resolução das equações cúbicas e também as equações do 4º grau, as quárticas, dando as raízes como expressões formadas por radicais, de forma similar ao método que era usado, na altura, para as equações do segundo grau. Cardano não reivindica para si estas duas novidades e apresenta os nomes dos seus descobridores: Scipione del Ferro para as cúbicas e Ludovico Ferrari (1522-1565) para as quárticas. Estas descobertas possibilitaram-lhe criar uma teoria geral que engloba todos os casos, casos esses produzidos pela necessidade de separar os argumentos para números positivos e negativos e por não possuir uma adequada notação algébrica. Era costume trabalhar apenas algumas das soluções, mas neste trabalho aparece ainda algo de novo: a clara aceitação da existência de soluções mais tarde chamadas imaginárias. Elas aparecem como consequência necessária das fórmulas e ele não as ignorava como era costume dos autores anteriores, pelo contrário constrói exemplos que mostram a necessidade de trabalhar com essas raízes imaginárias. Cardano complica as suas demonstrações por se basear em argumentos geométricos, utilizando o raciocínio de Euclides, o que atualmente não é necessário. No entanto, vivia-se uma época de veneração da matemática grega e dos Elementos de Euclides, em particular. A solução geométrica das equações do 2º grau, segundo Euclides, baseava-se na construção de um quadrado e, a proposta de resolução de equações do 3º grau deveria ser baseada na construção de um cubo, mas para grau superior deixa de haver representação geométrica.

No *Ars Magna*, Cardano analisou todo caso distinto da equação cúbica completa, transformando cada equação em uma sem o termo de segundo grau, dando um exemplo numérico em cada caso, e provando geometricamente a validade das soluções. O método Cardano-Tartaglia de resolução de equações do 3º grau aplica-se a equações do 3º grau que

podem ser escritas na forma $x^3 + px + q = 0$. Acontece que todas as equações do 3º grau podem ser reduzidas a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, pelo processo a seguir:

Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. O que se pretende é fazer uma mudança de variável de modo que nessa nova variável se obtenha uma equação sem termo do segundo grau.

Fazendo então $x = y + m$, obtemos:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0.$$

Ou:

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Calcula-se m de modo a anular o termo de 2º grau de:

$$b + 3am = 0.$$

Tem-se:

$$m = -\frac{b}{3a}.$$

Divide-se toda a equação por $a \neq 0$:

$$\frac{a}{a}y^3 + y^2\left(\frac{b + 3am}{a}\right) + y\left(\frac{3am^2 + 2bm + c}{a}\right) + \left(\frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}\right) = 0.$$

Obtemos:

$$y^3 + y^2\left(\frac{b + 3am}{a}\right) + y\left(\frac{3am^2 + 2bm + c}{a}\right) + \left(\frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}\right) = 0.$$

Substituindo m pelo valor encontrado temos:

$$y^3 + y^2\left(\frac{b + 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)}{a}\right) + y\left(\frac{3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c}{a}\right) + \left(\frac{a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d}{a}\right) = 0.$$

Ou seja:

$$y^3 + \frac{1}{a}\left(3a\left[-\frac{b}{3a}\right]^2 + 2a\left[-\frac{b}{3a}\right] + c\right)y + \frac{1}{a}\left(a\left[-\frac{b}{3a}\right]^3 + b\left[-\frac{b}{3a}\right]^2 + c\left[-\frac{b}{3a}\right] + d\right) = 0.$$

Vimos então que qualquer equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser escrita na forma $y^3 + py + q = 0$ sendo:

$$p = \frac{1}{a}\left(3a\left[-\frac{b}{3a}\right]^2 + 2a\left[-\frac{b}{3a}\right] + c\right) \text{ e } q = \frac{1}{a}\left(a\left[-\frac{b}{3a}\right]^3 + b\left[-\frac{b}{3a}\right]^2 + c\left[-\frac{b}{3a}\right] + d\right).$$

A nova equação do 3º grau em y é do tipo $y^3 + py + q = 0$ e, se soubermos resolvê-la acharemos x que é $y + m$. Portanto, quando encontrou a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, Tartaglia deu uma resposta geral e não apenas particular ao problema, o que aumenta seu mérito.

Tartaglia supôs que a solução procurada era composta de 2 parcelas, e escreveu:

$$x = A + B.$$

Os dois lados da equação sendo iguais, seus cubos também serão iguais.

$$x^3 = (A + B)^3.$$

Ou:

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

Como:

$$A + B = x,$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx.$$

Ou:

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0.$$

Mas, ao mesmo tempo:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Portanto:

$$p = -3AB \quad \text{e} \quad q = -(A^3 + B^3).$$

Ou:

$$A^3 B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -q.$$

Assim, A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e este problema pode se resolver com a equação do segundo grau. Pois:

$$x + y = S \quad \text{e} \quad x \cdot y = P.$$

Então:

$$y = S - x.$$

E substituindo y em $x \cdot y = P$ tem-se:

$$x(S - x) = P.$$

Então:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Isso permite concluir que A^3 e B^3 são as raízes desta equação:

$$x^2 - (-q)x + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0.$$

Portanto, elas podem ser escrita da seguinte forma:

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad e \quad B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como $x = A + B$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Esta é a chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele, mas sim por Tartaglia.

Esse caminho seguido não é exatamente o caminho seguido por Tartaglia, mas equivalente. A simbologia da época também não era a mesma, era uma simbologia muito difícil, como por exemplo $5x^3 + 3x = 15$, foi escrito por Cardano como *5cub'p: 3reb'aeqlis15*.

Vamos ver um exemplo concreto de como funciona o método de Tartaglia.

Considere a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

Altere a variável para $x = y + m$:

$$(y + m)^3 - 6(y + m)^2 + 6(y + m) - 5 = 0.$$

Ou:

$$y^3 + (-6 + 3m)y^2 + (3m^2 - 12m + 6)y + (m^3 - 6m^2 + 6m - 5) = 0.$$

Calcule m de modo a anular o termo de 2º grau:

$$-6 + 3m = 0 \Rightarrow m = 2.$$

Substitui-se m , obtendo-se:

$$y^3 + (-6 + 3(2))y^2 + (3(2)^2 - 12(2) + 6)y + ((2)^3 - 6(2)^2 + 6(2) - 5) = 0.$$

Ou:

$$y^3 - 6y - 9 = 0.$$

Agora a equação esta na forma que pode ser resolvida pela fórmula de Tartaglia, logo:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} \\
&= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\
&= 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Como $x = y + m$, temos $x = 3 + 2 = 5$.

Por simples verificação, constata-se que 5, realmente, é solução da equação:

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0.$$

Outro exemplo: resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Altere a variável para $x = y + m$:

$$(y + m)^3 - 6(y + m)^2 + 11(y + m) - 6 = 0.$$

Ou:

$$y^3 + (-6 + 3m)y^2 + (3m^2 - 12m + 11)y + (m^3 - 6m^2 + 11m - 6) = 0.$$

Calcule m de modo a anular o termo de 2º grau:

$$-6 + 3m = 0 \Rightarrow m = 2.$$

Substitui-se m , obtendo-se:

$$y^3 + (-6 + 3(2))y^2 + (3(2)^2 - 12(2) + 11)y + ((2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6) = 0.$$

Ou:

$$y^3 - y = 0.$$

Agora a equação esta na forma que pode ser resolvida pela fórmula de Tartaglia, logo:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{\frac{0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3}} \\
&= \sqrt[3]{0 + \sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{0 - \sqrt{-\frac{1}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}} \\
&= \sqrt[6]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[6]{-\frac{1}{27}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $x = y + m$, temos $x = 0 + 2 = 2$.

Por simples verificação, constata-se que 2, realmente, é solução da equação:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

3.1.1. A insuficiência dos números reais

Primeiramente imaginou-se que as equações do 3º grau estavam vencidas pela fórmula de Cardano (Tartaglia). Mas começaram a surgir dúvidas em relação a fórmula de Cardano (Tartaglia), como através da fórmula de Bhaskara encontramos, de maneira simples, duas raízes das equações do segundo grau, por que a de Cardano só apresenta uma raiz para as equações do terceiro grau? Como encontrar as demais raízes?

Na mesma época, outro matemático, de nome Bombelli, resolvendo a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, chegou a um impasse.

Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz da equação, pois:

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0,$$

e tentou verificar se encontrava essa raiz aplicando a fórmula de Cardano. No entanto, resultou:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121}$ não é um número real. No entanto, ele sabia que $x = 4$ era uma das raízes da equação.

Aqui estava um problema que não podia ser ignorado, na fórmula de Bhaskara quando obtidas raízes quadradas de números negativos dizia-se que a equação não tinha solução. Agora estava-se diante de equações do 3º grau com soluções, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos.

Para generalizar, considere o produto:

$$(x - a)(x - b)(x - c).$$

Se desenvolvermos o produto e igualarmos a zero teremos uma equação do 3º grau, cujas raízes são $x = a$, $x = b$ e $x = c$ pois para qualquer desses valores, o produto se anula.

Temos:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc.$$

Para anular o termo do segundo grau é preciso que:

$$a + b + c = 0 \text{ ou } c = -(a + b).$$

Substituindo o valor de c em:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0.$$

Obtemos:

$$(x - a)(x - b)(x + [a + b]) = 0.$$

Ou:

$$x^3 + [ab - (a + b)^2]x + ab(a + b) = 0.$$

Aplicando a fórmula de Cardano tem-se:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a + b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{ab(a + b)}{2} - \sqrt{\left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3}}.$$

Desenvolvendo a expressão devemos encontrar $x = a$, $x = b$ e $x = -(a + b)$ raízes já conhecidas de antemão.

Trabalhando somente com a expressão que se encontra sob a raiz quadrada e chamando-a de Δ temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{ab(a + b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a + b)^2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{ab(a^2 + 2ab + b^2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - a^2 - 2ab - b^2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{a^3b + 2a^2b^2 + ab^3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Efetuada as operações e simplificando o polinômio tem-se:

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}.$$

Portanto:

$$\Delta = -\frac{(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2}{108}.$$

Como a e b são reais, Δ nunca é positivo. Assim somos obrigados a trabalhar com raízes quadradas de números negativos, coisa que até o momento era considerado impossível.

Bombelli começou a tentar encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Seu método baseou-se no pensamento segundo o qual $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente.

Bombelli escreveu:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}.$$

E encontrou que $a = 2$ e $b = 1$ pois:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

Daí $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$, a solução já conhecida.

Bombelli passou a desenvolver regras para operar com esses números:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1,$$

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1,$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1,$$

$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1},$$

$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}.$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $a + b\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

Bombelli não foi o primeiro a trabalhar com números complexos. Cardano, em 1545, mencionou pela primeira vez os números complexos, na sua obra *Ars Magna*, falava do seguinte problema: "Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40". Diz Cardano que o problema pode ser resolvido do seguinte modo:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}.$$

Elevando ambos os membros da primeira equação ao quadrado, e multiplicando a segunda equação por 4, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4xy = 160 \end{cases}.$$

Subtraindo uma da outra temos:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60.$$

Ou:

$$(x - y)^2 = -60.$$

Logo:

$$x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Então:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases}.$$

Somando as duas equações obtemos:

$$2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}.$$

Consequentemente:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15},$$

e

$$y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

Mas Cardano considerou esse resultado inútil.

3.1.2. As outras raízes das equações do 3º grau

Em 1540 nasce em Fontenay, François Viète, o qual foi um grande algebrista e obteve importantes resultados no campo das equações algébricas. Era, também conhecedor da trigonometria e muitas das fórmulas que hoje utilizamos foram deduzidas por ele. No campo das equações algébricas fazia substituições de incógnitas para cair em problemas mais fáceis de serem resolvidos.

Usando trigonometria, Viète desenvolveu um método para calcular as três raízes reais da cúbica $x^3 + px + q = 0$ no caso em que a fórmula de Cardano “falha”, isto é, no caso em que o discriminante $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ for negativo.

Dada a equação $x^3 + px + q = 0$ onde os coeficientes p e q são reais não nulos, Viète no método trigonométrico fez a substituição $x = k \cos \theta$, com $k > 0$.

$$(k \cos \theta)^3 + p(k \cos \theta) + q = 0.$$

Note que o caso $k = 0$ ocorre quando $x = 0$ é uma solução da cúbica. Nesse caso, $q = 0$ e as outras duas raízes são as soluções complexas da equação $x^2 = -p$.

Usando a relação trigonométrica:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Temos então:

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta = 0.$$

A substituição de $x = k \cos \theta$ na cúbica $x^3 + px + q = 0$ nos fornece:

$$k^3 \cos^3 \theta + pk \cos \theta + q = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por:

$$\frac{4}{k^3},$$

obtemos:

$$4 \cos^3 \theta + \frac{4p}{k^2} \cos \theta + \frac{4q}{k^3} = 0.$$

Comparando esta equação com a identidade trigonométrica

$$4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta = 0,$$

Viète observou que $x = k \cos \theta$ será solução da cúbica dada desde que

$$\frac{4p}{k^2} = -3 \quad \text{e} \quad -\cos 3\theta = \frac{4q}{k^3}.$$

Estas últimas equações só terão solução se tivermos

$$p < 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{4q}{k^3} \right| \leq 1.$$

Ou:

$$p < 0 \quad \text{e} \quad \frac{16q^2}{k^6} \leq 1.$$

Como $k^2 = -\frac{4p}{3}$ temos que o discriminante $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$.

Sendo $q \neq 0$, então $D \leq 0 \Rightarrow p < 0$.

Sendo $D \leq 0$ o método de Viète nos dá três soluções reais da equação do 3º grau.

Primeiro precisamos calcular $k = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ e depois encontrar os três valores de θ , onde

$0 \leq \theta \leq 360^\circ$ satisfazendo $\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3}$. Encontrando θ_1, θ_2 e θ_3 teremos três soluções para a equação, dadas por $x_1 = k \cos \theta_1$, $x_2 = k \cos \theta_2$ e $x_3 = k \cos \theta_3$. Para o cálculo dos três valores de θ podemos tomar θ_1, θ_2 e θ_3 :

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos(3\theta),$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 120^\circ,$$

e

$$\theta_3 = \theta_1 + 240^\circ.$$

Com o uso de uma calculadora vamos resolver a equação estudada por Bombelli, pelo método de Viète.

Temos a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, onde $p = -15$ e $q = -4$.

Como $k = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ temos $k = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Temos $\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3}$ logo:

$$\cos 3\theta = -\frac{4 \times (-4)}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Assim:

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \approx 26,565^\circ,$$

$$\theta_2 \approx 26,565^\circ + 120^\circ = 146,565^\circ,$$

$$\theta_3 \approx 26,565^\circ + 240^\circ = 266,565^\circ.$$

Então, temos como raízes os valores:

$$x_1 = 2\sqrt{5} \times \cos 26,565^\circ = 4,$$

$$x_2 = 2\sqrt{5} \times \cos 146,565^\circ \approx -3,732048,$$

$$x_3 = 2\sqrt{5} \times \cos 266,565^\circ \approx -0,267953.$$

Vejamos outro exemplo: Vamos resolver a equação $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, pelo método de Viète.

Fazendo $x = y + m$, obtemos:

$$y^3 + (3m + 3)y^2 + (3m^2 + 6m - 4)y + (m^3 + 3m^2 - 4m - 12) = 0.$$

Calcula-se m de modo a anular o termo de 2º grau, então:

$$3m + 3 = 0.$$

Ou

$$m = -1.$$

Substituindo m pelo valor encontrado, temos a equação:

$$y^3 - 7y - 6 = 0.$$

Esta equação do 3º grau em y é do tipo $y^3 + py + q = 0$, e podemos resolver pelo método de Viète.

Temos a equação $y^3 - 7y - 6 = 0$, onde $p = -7$ e $q = -6$.

Como $k = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ temos $k = \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3,055$.

Agora, $\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3}$, logo:

$$\cos 3\theta = -\frac{4 \times (-6)}{\left(\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^3} \approx 0,84.$$

Assim:

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos(0,84) \approx 10,95329^\circ,$$

$$\theta_2 \approx 26,565^\circ + 120^\circ = 130,95329^\circ,$$

$$\theta_3 \approx 26,565^\circ + 240^\circ = 250,95329^\circ.$$

Então, temos como raízes os valores:

$$y_1 = 3,055 \times \cos 10,95329^\circ \approx 2,99934,$$

$$y_2 = 3,055 \times \cos 130,95329^\circ \approx -2,00238,$$

$$y_3 = 3,055 \times \cos 250,95329^\circ \approx -0,99697.$$

Como $x = y + m$, temos:

$$x_1 \approx 2,99934 - 1 \approx 1,99934 \approx 2,$$

$$x_2 \approx -2,00238 - 1 \approx -3,00238 \approx -3,$$

$$x_3 \approx -0,99697 - 1 \approx -1,99697 \approx -2.$$

3.2. Equações do 4º grau

Ludovico Ferrari (1522-1560), nascido em Bolonha, era de família muito humilde e aos 15 anos de idade foi trabalhar como servo na residência de Cardano, o qual percebendo sua notável inteligência, o promoveu a seu secretário. Como já dissemos, os matemáticos daquela época tinham o costume de promover desafios e certo Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano uma questão que envolvia a equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0.$$

Após inúmeras tentativas, Cardano não obteve êxito e passou a questão a seu aluno Ferrari, que acabou por encontrar a fórmula geral para a solução das equações do 4º grau. Este método encontrado por Ferrari também foi publicado por Cardano na *Ars Magna*, em continuidade à solução das equações do 3º grau. Ferrari buscou reescrever a equação, usando as operações permitidas pelos axiomas de Euclides, de modo a obter quadrados perfeitos e assim reduzir o problema a resolução de uma equação do 2º grau que era possível usando a fórmula de Bhaskara. Este método permite a exibição das quatro raízes da equação, assim como a fórmula de Bhaskara permite a exibição das duas raízes da equação do 2º grau.

A equação geral do 4º grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

sempre pode ser transformada em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

fazendo $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 3º grau.

Ferrari olhou a equação:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Completando a equação de forma que os dois lados da igualdade sejam quadrados perfeitos temos:

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = ax^2 - qx + \beta.$$

para que os dois lados sejam quadrados perfeitos, é preciso que os discriminantes sejam iguais a zero simultaneamente:

$$\begin{cases} (p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \\ q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha} \end{cases}$$

Substituindo o valor de β na primeira expressão temos:

$$\begin{aligned} (p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 &= 0. \end{aligned}$$

que é uma equação do 3º grau em α . Como as equações de 3º grau podem ser resolvidas (fórmula de Cardano), acha-se α e em seguida β e extraem-se as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta)} = \pm\sqrt{ax^2 - qx + \beta}.$$

Para cada alternativa de sinal + ou - tem-se uma equação do 2º grau, ambas com duas soluções. Portanto o método fornece 4 raízes.

O caso de cada valor de α corresponder a 4 raízes, não tem problemas em relação a equação fornecer mais de 4 raízes.

Chamamos as raízes da equação do 4º grau de x_1, x_2, x_3 e x_4 . O método de Ferrari, ao reduzir o problema em um par de equações do segundo grau, coloca duas raízes em uma delas e as outras duas raízes na outra. Este agrupamento pode ser feito exatamente de 3 formas diferentes.

	1ª equação	2ª equação
Forma 1	x_1x_2	x_3x_4
Forma 2	x_1x_3	x_2x_4

Forma 3	x_1x_4	x_2x_3
---------	----------	----------

Logo, cada valor de α corresponde apenas a uma das três possíveis formas diferentes de se fazer o agrupamento das raízes duas a duas, mas as raízes são sempre as mesmas, não importando qual raiz α for usada no método de Ferrari.

Veja um exemplo concreto para facilitar a visualização deste fato.

Considere a equação:

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Aplique o método de Ferrari para encontrar α e β tais que:

$$x^4 - (15 - \alpha)x^2 + (24 + \beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta,$$

com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos.

Para isto é preciso que os discriminantes sejam iguais à zero simultaneamente

$$\begin{cases} (15 - \alpha)^2 - 4(24 + \beta) = 0 \\ (10)^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha} \end{cases}$$

Substituindo β no primeiro discriminante obtemos:

$$(15 - \alpha)^2 - 4\left(24 + \frac{25}{\alpha}\right) = 0.$$

O que nos leva à equação do 3º grau em α que sabemos resolver:

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0.$$

Altera-se a variável para $\alpha = y + m$:

$$(y + m)^3 - 30(y + m)^2 + 129(y + m) - 100 = 0.$$

Logo:

$$y^3 + (3m - 30)y^2 + (3m^2 - 60m + 129)y + (m^3 - 30m^2 + 129m - 100) = 0.$$

Calcula-se m de modo a anular o termo de 2º grau:

$$3m - 30 = 0 \Rightarrow m = 10.$$

Substitui-se m , obtendo:

$$y^3 - 171y - 810 = 0.$$

Pela fórmula de Viète, temos: $p = -171$ e $q = -810$, logo:

$$k = \sqrt{-\frac{4p}{3}} = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$$

e

$$\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3} = \frac{3240}{(2\sqrt{57})^3} = \frac{135}{19\sqrt{57}}.$$

Então

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos \frac{135}{19\sqrt{57}} \approx 6,58678^\circ,$$

$$\theta_2 = 6,58678^\circ + 120^\circ \approx 126,58678^\circ,$$

$$\theta_3 = 6,58678^\circ + 240^\circ \approx 246,58678^\circ.$$

Logo, temos como raízes da equação $y^3 - 171y - 810 = 0$:

$$y_1 = 2\sqrt{57} \times \cos 6,58678^\circ = 15,$$

$$y_2 = 2\sqrt{57} \times \cos 126,58678^\circ = -9,$$

$$y_3 = 2\sqrt{57} \times \cos 246,58678^\circ = -6.$$

Para encontrar as raízes da equação $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$, temos que:

$$\alpha = y + m \text{ onde } m = 10.$$

Logo:

$$\alpha_1 = -9 + 10 = 1,$$

$$\alpha_2 = -6 + 10 = 4,$$

$$\alpha_3 = 15 + 10 = 25.$$

Voltando para a equação $x^4 - (15 - \alpha)x^2 + (24 + \beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta$, onde $\beta = \frac{25}{\alpha}$. Para $\alpha_1 = 1$, temos $\beta_1 = 25$ e os dois lados da igualdade ficam:

$$x^4 - (15 - 1)x^2 + (24 + 25) = x^2 + 10x + 25$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2.$$

Assim:

$$(x^2 - 7) = (x + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Ou:

$$(x^2 - 7) = -(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Para $\alpha_2 = 4$, temos $\beta_2 = \frac{25}{4}$ e os dois lados da igualdade ficam:

$$x^4 - (15 - 4)x^2 + \left(24 + \frac{25}{4}\right) = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2.$$

Assim:

$$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = \left(2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Ou:

$$\left(x^2 - \frac{11}{2}\right) = -\left(2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Para $\alpha_3 = 25$, temos $\beta_1=1$ e os dois lados da igualdade ficam:

$$x^4 - (15-25)x^2 + (24 + 1) = 25x^2 + 10x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 10x^2 + 25 = x25^2 + 10x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2.$$

Assim:

$$(x^2 + 5) = (5x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Ou:

$$(x^2 + 5) = -(5x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = -2 \end{cases}.$$

Ou seja, as raízes sempre são $-3, -2, 1$ e 4 . O que muda são as maneiras de reagrupar os termos da equação de modo a formar um quadrado perfeito em ambos os lados da equação.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos alguns métodos de resolução de equações algébricas desenvolvidas ao longo dos tempos.

As fórmulas das equações de primeiro e segundo grau foram mais fáceis de serem encontradas, pois vários povos já trabalhavam com essas equações. Para as equações de grau três e quatro, apenas nos séculos XVI e XVII, foram encontradas as fórmulas para resolvê-las por radicais.

Tentando resolver equações de grau três e quatro, os matemáticos acabavam caindo em outro problema, apareciam raízes de números negativos, que se achava impossível, até que Bombelli criou o conjunto dos números complexos.

Muitos dos métodos usados na álgebra atual são exatamente os mesmos usados há alguns milênios, diferenciando apenas na notação com que são apresentados.

5. REFERÊNCIAS

[1] BOYER, CARL. B. *História da matemática*, tradução: Elza F. Gomide, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[2] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[3] GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas*, 4 edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

SITES:

<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/WellingtonJoseFerreira.pdf> (acessado dia 10/01/2013)

<http://www.tutomania.com.br/artigo/a-matematica-oriental-arabes-hindus-e-chineses>
(acessado dia 12/01/2013)

<http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2003/hm/page03.htm> (acessado dia 15/01/2013)

http://www.cursorazes.com.br/resources/a_historia_da_matematica.pdf (acessado dia 17/01/2013)

6. ANEXOS

Atividades para serem desenvolvidas com os alunos.

Resolva os problemas abaixo, do Papiro de Rhind, pelo Método da Falsa Posição:

1. (Problema 24) Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade?
2. (Problema 25) Uma quantidade e sua metade, somadas juntas, resultam 16. Qual é a quantidade?
3. (Problema 26) Uma quantidade e $\frac{2}{3}$ dela são somadas. Subtraindo-se, desta soma, $\frac{1}{3}$ dela, restam 10. Qual é a quantidade?

Questões complementares:

1. Resolva os problemas 2 e 3 acima, utilizando os métodos algébricos usuais.
2. Porque o método da falsa posição funciona na resolução dos problemas acima? Ele funciona para quaisquer equações do 1º grau?
3. Questão para discussão: Você acha que o método da falsa posição, é um método adequado para a resolução das equações do primeiro grau?
4. Um industrial fabrica um produto com um custo de 0,65 euros e vende-o a 1,20 euros por unidade. O investimento inicial para fabricar o produto foi de 10000 euros. Quantas unidades deve vender para atingir o ponto de equilíbrio?

Resolva os exercícios abaixo utilizando a fórmula de Bhaskara:

1. Determine a solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. A soma de um número com o seu quadrado é 90. Calcule esse numero.
3. O quadrado de um número aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule esse número.
4. Uma mulher tinha 20 anos quando nasceu seu filho. Hoje, o produto das idades, menos a idade da mãe, é 100. Calcule a idade do filho.
5. Uma quadra retangular de futebol de salão tem como área da quadra $117m^2$ e seu comprimento é 4m maior que sua largura. Deseja-se cercá-la com um alambrado que custa R\$ 12,00 o metro linear. Qual o custo do cercado?
6. Perguntada sobre sua idade, Juliana respondeu: “o quadrado de minha idade menos o quántuplo dela é igual a 104”. Qual é a idade de Juliana?
7. (NOVO ENEM-2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55

peessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

8. (FUVEST-2007) Os estudantes de uma classe organizaram sua festa de final de ano, devendo cada um contribuir com R\$135,00 para as despesas. Como 7 alunos deixaram a escola antes da arrecadação e as despesas permaneceram as mesmas, cada um dos estudantes restantes teria de pagar R\$ 27,00 a mais. No entanto, o diretor, para ajudar, colaborou com R\$630,00. Quanto pagou cada aluno participante da festa?

9. (Unicamp-1994) Retiraram x litros de vinho de um barril de 100 litros e adicionam-se, ao mesmo barril, x litros de água. Da mistura resultante no barril, retiram-se outros x litros e adicionam-se outros x litros de água. Agora o barril contém 64 litros de vinho e 36 de água. Calcule o valor de x .

10. Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível. Os níveis de combustível, H_1 e H_2 , em cada tanque, são dados pelas expressões: $H_1(t) = 150t^2 - 190t + 30$ e $H_2(t) = 50t^2 + 35t + 30$, sendo t o tempo em hora. O nível de combustível de um tanque é igual ao do outro no instante inicial ($t = 0$). Calcule o outro instante em que o nível de combustível dos tanques é igual?

Exercícios sobre equações do 3º grau:

1. Reescreva as equações a seguir, fazendo as mudanças de variável solicitadas em cada caso:

a) $y^3 + 4y + 3 = 0$, fazendo $y = x - 2$.

b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, fazendo $x = y + 1$.

c) $y^3 + 6y^2 + 10y - 10 = 0$, fazendo $y = x - 2$.

d) $x^3 = 2x - 6$, fazendo $x = y - 1$.

2. Encontre, utilizando a fórmula de Cardano, uma solução real de cada equação a seguir:

a) $x^3 = 3x + 2$

b) $x^3 = 6x + 6$

c) $x^3 = 15x + 4$

3. Sabe-se que um aumento de 1 cm nas arestas de um determinado cubo, faz com que seu volume aumente em 91 cm^3 , e sua área aumente em $x cm^2$. Determine o valor de x .

4. Resolva a equação $2x^3 + 6x^2 - 8x - 24 = 0$, pelo método de Viète.