

MARCUS HENRIQUE BIRCKHOLZ CHRISTMANN

Perturbações Cosmológicas de um Fluido de van der Waals

Curitiba

2015

MARCUS HENRIQUE BIRCKHOLZ CHRISTMANN

Perturbações Cosmológicas de um Fluido de van der Waals

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

Curitiba

2015

RESUMO

O interesse em equações de estado exóticas em cosmologia está na possibilidade de simular diferentes eras cosmológicas com apenas uma equação de estado. A equação de van der Waals é uma destas equações e apresenta as seguintes propriedades interessantes: descreve um Universo primordial inflacionário, que realiza naturalmente a transição para um regime de expansão desacelerada, simulando um regime de domínio de radiação ou de matéria para tempos tardios; a densidade de energia correspondente ao início da expansão das dimensões espaciais (Big Bang) converge para um valor finito, evitando uma singularidade inicial. Por meio do formalismo da teoria linear de perturbações, exploramos os limites assintóticos das equações para as perturbações escalares utilizando as variáveis de Mukhanov-Sasaki.

ABSTRACT

Exotic state equations are popular in cosmology. The interest lies on the possibility to describe different cosmological eras with a single equation of state. The van der Waals equation is one of these equations and exhibits some interesting features. First, it describes an initial inflationary regime, followed by a decelerated expansion phase that could simulate a matter dominated period or a radiation dominated period. Second, it has a finite initial energy density, despite the fact that the corresponding initial cosmological scale factor is zero, avoiding an initial singularity. Using the linear perturbation theory formalism, we explore the asymptotic limits of the perturbation equations by means of the Mukhanov-Sasaki variables.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Dr. Gilberto Medeiros Kremer, pela infinita paciência;
- Ao Dr. Rudinei Celso de Souza Jantsch, pelas infinitas dicas e conselhos;
- A CAPES pelo apoio financeiro;
- À coordenação da pós-graduação;
- Aos colegas da pós-graduação;
- À minha família.

Sumário

Agradecimentos	iv
1 Introdução	2
2 Relatividade Geral	6
2.1 O Princípio da Relatividade	6
2.1.1 Transformações de Lorentz	7
2.2 Coordenadas Curvilíneas	9
2.3 Geodésicas	11
2.4 Princípio da Equivalência	12
2.5 Transporte Paralelo	13
2.6 Derivada Covariante	15
2.6.1 Teorema de Gauss e Teorema de Stokes	16
2.7 Curvatura	17
2.8 Equações do Campo Gravitacional	19
2.8.1 A Ação para a Matéria	20
2.8.2 A Ação para o Campo Gravitacional	22
2.8.3 Equações do Campo Gravitacional	23
3 Cosmologia	26
3.1 Princípio Cosmológico	26
3.2 Métrica de Robertson-Walker	28
3.2.1 Desvio para o Vermelho	30
3.3 Dinâmica Cosmológica	31
3.3.1 Fluido Cosmológico	33
3.3.2 Equações de Friedmann	33
3.3.3 Matéria Bariônica	34
3.3.4 Radiação	35

3.3.5	Matéria Bariônica e Radiação	36
3.4	Inflação	38
3.5	Setor Escuro	39
3.5.1	Energia Escura	39
3.5.2	Matéria Escura	40
3.6	Equação de Estado de van der Waals	40
4	Instabilidade Gravitacional	46
4.1	Equações de Campo Perturbadas	47
4.1.1	Transformações de Gauge	48
4.1.2	Perturbações da Métrica	50
4.1.3	Perturbações do Tensor de Einstein	52
4.1.4	Perturbação do Tensor Energia-Momento	54
4.1.5	Equações de Campo Perturbadas	55
4.1.6	Variável de Mukhanov-Sasaki	58
5	Fluido de Van der Waals Perturbado	60
5.1	Equações de Perturbação	60
5.1.1	Comprimentos de Onda Curtos	61
5.1.2	Comprimentos de Onda Longos	61
5.2	$\omega = 0$	63
5.3	$\omega = 1/8$	64
6	Conclusão	70

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia é a ciência que descreve o Universo, sua composição, evolução, origem e destino. Seu *status* científico foi consolidado com a adoção da relatividade geral como teoria para a gravidade, levando a previsões para escalas cosmológicas em excelente acordo com as observações. Com sua confirmação observacional em 1919, a relatividade geral forneceu à gravidade um elegante mecanismo físico, a curvatura do *espaço-tempo*, [1].

O primeiro modelo cosmológico baseado nas soluções das equações de campo da relatividade geral surge com A. Friedmann em 1922, [2]. Considerando uma distribuição espacial uniforme de matéria no Universo, o modelo de Friedmann fornece um resultado interessante: o Universo apresenta uma geometria não-estacionária. Esta característica não-estacionária levou Einstein a introduzir o famoso termo de constante cosmológica nas equações de campo da relatividade geral como meio de obter uma solução estática.

Observações das vizinhanças da Via-Láctea feitas em 1929 por E. Hubble [3] revelaram um desvio na luz das raias de emissão atômicas para o vermelho de galáxias vizinhas à Via-Láctea. Este desvio pode ser facilmente explicado com a idéia de um Universo não-estacionário em expansão, onde o desvio para o vermelho é interpretado como um desvio Doppler devido ao movimento recessional das galáxias sobre um pano de fundo que se expande.

A expansão cosmológica permite então que se especule sobre um início para o Universo, com a densidade de energia tendendo ao infinito quando as dimensões espaciais tendem para um ponto singular, o Big Bang [4].

Esta é a base do *modelo cosmológico padrão*, que estabelece a evolução do Universo em larga escala a partir de uma distribuição *espacial homogênea e isotrópica*

de matéria, o fluido cosmológico. Para descrever as propriedades características deste fluido, é necessária uma equação de estado para a matéria, que relaciona a pressão do fluido com sua densidade de energia.

Para que o modelo cosmológico padrão determine a evolução do Universo desde tempos remotos, é necessária uma descrição do comportamento da matéria a altas temperaturas. Esta descrição da matéria a altas energias é feita pelo *modelo padrão de partículas elementares*. O casamento entre o modelo cosmológico padrão e o modelo padrão de partículas elementares consegue com sucesso prever a formação de prótons e nêutrons pelo confinamento de Quarks (hadronização), a nucleossíntese primordial e a consequente abundância de elementos leves no Universo observável, [5], [6]. Através do modelo padrão de partículas temos a formação das primeiras estruturas no Universo, hádrons, núcleos atômicos e átomos leves (Hidrogênio, Deutério, Hélio, Lítio).

Porém, o requisito de homogeneidade e isotopia em larga escala do modelo cosmológico padrão não é suficiente para explicar como a matéria se aglomerou para dar origem às estruturas observáveis como galáxias, aglomerados de galáxias, superaglomerados de galáxias e também grandes "vazios" (*voids*), formando estruturas da ordem de até $10^{21}km$ de extensão, como a Grande Muralha [7], uma das maiores estruturas conhecidas, formada por superaglomerados de galáxias.

A escala de homogeneidade, $d_H = c/H_0 \simeq 10^{22}km$, definida pela velocidade da luz, c e pelo parâmetro de Hubble H_0 , é a escala a partir da qual o Universo se mostra homogêneo e isotrópico. Abaixo desta escala, as estruturas se formam por estados ligados gravitacionalmente, cuja evolução pode ser então modelada via mecânica Newtoniana, [8].

A homogeneidade e isotopia em larga escala traz à tona a questão de regiões causalmente desconexas no passado que, ao entrarem em contato, apresentam a mesma uniformidade na *radiação cósmica de fundo*. Para resolver esta questão, juntamente com a evidência de uma curvatura espacial nula, foi proposto por A. Guth [9] o cenário inflacionário, um período de crescimento exponencial do Universo. A inflação cosmológica separa regiões inicialmente causalmente conectadas, as quais entrarão em contato causal novamente em tempos futuros e também torna o espaço plano por inflação, em acordo com as medidas observacionais, [10].

É no período inflacionário que surgem as sementes para as flutuações iniciais de densidade de energia responsáveis por gerar as futuras estruturas. Flutuações quânticas [11] são amplificadas pela expansão durante a inflação.

A evolução destas flutuações é descrita por uma teoria perturbativa, linear e não-linear com base na teoria de Jeans para instabilidade gravitacional [12], mas, diferentemente do proposto por Jeans, agora com um *background* em expansão, [13]. A teoria perturbativa é aplicada tanto na descrição Newtoniana para perturbações não-lineares, quanto na descrição relativística para perturbações lineares, [14] e não-lineares [15].

Observações recentes das raias de emissão de estrelas supernovas tipo 1A revelaram que o Universo atual se encontra em um período de expansão acelerada, [16]. O regime atual foi precedido por um período de expansão desacelerada composto de uma era de domínio de densidade de energia de radiação, seguida de uma era dominada por matéria não interagente (*matéria bariônica*). Atualmente, a expansão acelerada corresponde ao domínio de um fluido com pressão negativa chamado *energia escura*, do qual não há observação direta; somente o desvio Doppler das supernovas é observado.

A evolução das perturbações em cada era cosmológica depende da equação de estado correspondente ao fluido dominante. Para modelar as diferentes eras cosmológicas, foram propostas na literatura diversas possibilidades além da usual equação barotrópia de estado, que relaciona a pressão hidrostática com a densidade de energia do fluido. Equações de estado exóticas para descrever diferentes regimes de aceleração como a equação de Chaplygin, capaz de simular matéria bariônica e energia escura, [17], [18] e a equação de van der Waals, que simula um regime de expansão inflacionária seguido de um regime desacelerado, [19], ou um regime transitando de desacelerado a acelerado, [20] são interessantes para uma tentativa de descrição unificada do Universo.

Neste trabalho analisamos a evolução de perturbações em um fluido cosmológico de *van der Waals*, que em seus limites assintóticos pode descrever um período inflacionário seguido de um período de desaceleração para o Universo. Originalmente, a equação de van der Waals¹ foi proposta para uma descrição mais realística de fluidos, ao incluir termos de interação intermolecular de repulsão a curtas distâncias e atração a longas distâncias. Sua projeção em escala cosmológica se deve à versatilidade com que descreve dois regimes de aceleração e nosso interesse está em analisar o comportamento de suas perturbações hidrodinâmicas.

As perturbações são tratadas por uma teoria perturbativa linear, de maneira que podemos decompor a geometria do espaço-tempo em um termo corres-

¹Johannes D. van der Waals, 1873.

pondente ao *espaço-tempo* não-perturbado mais um termo correspondente à perturbação da métrica. Do mesmo modo, as equações de campo podem ser separadas em equações de campo não-perturbadas e equações de campo para as perturbações. Para tanto, usaremos o formalismo de perturbações invariantes de gauge com a introdução das variáveis de Mukhanov-Sasaki [11] para explorar os limites assintóticos das perturbações de um fluido de van der Waals.

O texto está estruturado da seguinte forma. Primeiramente, exporemos as propriedades básicas da relatividade geral, teoria de gravitação utilizada. Em seguida desenvolveremos o cenário criado pelo *modelo cosmológico padrão* e seus problemas, para então passar à teoria das perturbações lineares. Por fim, os resultados e as conclusões da análise.

Capítulo 2

Relatividade Geral

2.1 O Princípio da Relatividade

O *princípio da relatividade* descreve de forma invariante fenômenos físicos observados de diferentes referenciais inerciais¹.

Na mecânica Newtoniana, a conexão entre referenciais inerciais é feita pelas *transformações de Galileu*,

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t, \quad (2.1)$$

$$t' = t, \quad (2.2)$$

e o conjunto destas transformações forma um grupo, o *grupo de Galileu*.

A teoria da Relatividade Restrita generaliza a mecânica Newtoniana ao propor um princípio da relatividade construído sobre a invariância da velocidade da luz por transformações entre referenciais inerciais (experiência de Michelson-Morley, [21]). Este resultado experimental pode ser expresso matematicamente como

$$s_{12}^2 = (x_2^0 - x_1^0)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2 = 0, \quad (2.3)$$

onde $x^0 = ct$ é a coordenada temporal e as demais, espaciais. A equação acima expressa o *intervalo* entre os eventos de emissão e recepção de um sinal luminoso entre dois pontos no *espaço-tempo*. Outros dois eventos para os quais o intervalo $s_{12}^2 \neq 0$ são classificados por suas relações causais em $s_{12}^2 < 0$ (intervalo tipo tempo/eventos causalmente conectados) e $s_{12}^2 > 0$ (intervalo tipo espaço/eventos causalmente desconectados), [22]. A equação (2.3) define um "cone" em quatro dimensões (*cone de luz*). Por simplicidade, de agora em diante usaremos $c = 1$.

¹Referenciais que se movem com velocidade relativa constante.

Da invariância de s^2 segue-se que para um referencial com coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 ,

$$s_{12}^{\prime 2} = s_{12}^2. \quad (2.4)$$

A quantidade $(x_2^0 - x_1^0)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2$ é um invariante quadridimensional assim como $(x_2^1 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_1^3)^2$ é um invariante no espaço euclidiano tridimensional. Chamamos de *intervalo* s_{12}^2 o intervalo entre dois eventos quaisquer de coordenadas x_1 e x_2 , respectivamente:

$$s_{12}^2 = (x_2^0 - x_1^0)^2 - (x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^2 - x_1^2)^2 - (x_2^3 - x_1^3)^2. \quad (2.5)$$

Para dois eventos infinitamente próximos,

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (2.6)$$

Reescrevendo de forma mais compacta,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.7)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é chamado de *tensor métrico de Minkowski* e está implícito o somatório sobre os índices gregos repetidos, que correm de 0 a 3 (convenção de Einstein). A geometria plana no *espaço-tempo* é dita *pseudoeuclidiana* devido à diferença de sinal entre as componentes quando comparada com a geometria *euclidiana* no espaço tridimensional.

2.1.1 Transformações de Lorentz

Transformações entre referenciais inerciais devem manter o intervalo invariante. Translações e rotações garantem a invariância de ds . Translações apenas redefinem a origem do referencial e por isto não trazem nenhuma informação; rotações, por outro lado, conectam os eixos coordenados de forma não-trivial. Em três dimensões, uma rotação pode ser descrita por três rotações em três planos; em quatro dimensões, uma rotação é descrita por rotações em seis planos de rotação, $(x^1x^0, x^2x^0, x^3x^0,$

x^1x^2 , x^1x^3 e x^2x^3), [22]. Por simplicidade, vamos supor que o movimento relativo entre dois referenciais K e K', está na direção x^1 , de maneira que consideraremos apenas rotações no plano x^0x^1 . Os eixos coordenados se conectam por

$$x^0 = x'^0 \cosh \theta + x'^1 \sinh \theta \quad (2.8)$$

$$x^1 = x'^0 \sinh \theta + x'^1 \cosh \theta \quad (2.9)$$

$$x^2 = x'^2 \quad (2.10)$$

$$x^3 = x'^3. \quad (2.11)$$

O ângulo θ pode ser relacionado com a velocidade relativa, V , entre os referenciais. A origem de K' ($x'^1 = x'^2 = x'^3 = 0$), vista do referencial K, move-se com velocidade relativa

$$\frac{V}{c} = \frac{x^1}{x^0} = \tanh \theta. \quad (2.12)$$

Usando a relação hiperbólica

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1, \quad (2.13)$$

temos

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \sinh \theta = \frac{V}{c}, \quad (2.14)$$

que substituídos em (2.8) e (2.9) fornecem

$$x^0 = \frac{x'^0 + \frac{V}{c}x'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.15)$$

$$x^1 = \frac{x'^1 + \frac{V}{c}x'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.16)$$

$$x^2 = x'^2 \quad (2.17)$$

$$x^3 = x'^3. \quad (2.18)$$

Estas são as *transformações de Lorentz* entre dois referenciais inerciais. As transformações inversas podem ser obtidas por meio da troca $V \rightarrow -V$ em (2.15) e (2.16). Notemos que no limite de baixas velocidades, $v^2/c^2 \ll 1$, as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileu (2.2). Em forma matricial, podemos representar o sistema de equações acima por

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \quad (2.19)$$

e para a forma diferencial quadrática,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda_\nu^\mu \Lambda_\sigma^\rho dx'^\rho dx'^\sigma, \quad (2.20)$$

e da invariância do intervalo segue que

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu. \quad (2.21)$$

As transformações (2.19) constituem o *grupo homogêneo de Lorentz* (um subgrupo do *grupo de Poincaré*²), responsável pelas transformações entre referenciais inerciais (Λ_0^i) e rotações espaciais (Λ_j^i); são as transformações que tornam as leis físicas invariantes.

2.2 Coordenadas Curvilíneas

A relatividade restrita pode ser escrita no formalismo da álgebra tensorial, o que permite a transposição para a relatividade geral de forma mais cômoda.

Para este fim, vamos dar atenção aos invariantes construídos com o produto escalar e com o produto tensorial³.

O intervalo infinitesimal entre dois eventos em um referencial inercial é um escalar construído com o tensor métrico de Minkowski, (2.7). Podemos definir um novo "tipo de vetor" de maneira que o invariante ds^2 possa ser tratado como um produto escalar,

$$ds^2 = (dx, dx) \equiv dx_\mu dx^\mu, \quad (2.22)$$

com

$$dx_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\nu \quad (2.23)$$

sendo um vetor *covariante*. Componentes com índice sobrescrito se referem a um vetor *contravariante*.

As transformações de Lorentz são as transformações de coordenadas que preservam a métrica de Minkowski (2.21) e se referem às relações entre referenciais inerciais. É interessante perguntar como uma classe mais ampla de transformações pode ser acomodada no formalismo visto até agora. Para este fim, vamos agora considerar transformações gerais de coordenadas. Estas podem ser transformações para

²O *grupo de Poincaré* é formado pelas transformações $x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x'^\nu + a^\mu$.

³A terminologia produto interno e produto externo também é utilizada na literatura.

um sistema de coordenadas curvilíneas, um referencial em rotação, um referencial acelerado, etc. Uma transformação geral de coordenadas é expressa por

$$x^\mu = f^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \quad (2.24)$$

Os diferenciais contravariante dx^μ se transformam da maneira usual de acordo com

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \quad (2.25)$$

Da invariância do produto escalar podemos determinar a lei de transformação para os diferenciais covariantes,

$$dx_\mu dx^\mu = dx'_\nu dx'^\nu, \quad (2.26)$$

$$dx_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = dx'_\mu dx'^\mu \quad (2.27)$$

de maneira que

$$dx_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dx'_\nu, \quad (2.28)$$

onde usamos $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ ⁴.

O intervalo infinitesimal entre dois eventos

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \quad (2.29)$$

pode ser escrito de forma mais compacta com a introdução do *tensor métrico* $g_{\rho\sigma}$:

$$ds^2 = g_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma, \quad (2.30)$$

$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}. \quad (2.31)$$

A invariância do intervalo implica na simetria do tensor métrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Notemos que, fazendo a transposição $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$, a métrica do espaço-tempo deixa de ser constante, sendo agora uma função das coordenadas x^μ . O determinante de $g_{\mu\nu}$ é representado por g .

Da definição de $\eta_{\mu\nu}$ e da invariância do produto escalar encontramos a relação

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho. \quad (2.32)$$

As leis de transformação (2.28) e (2.25) valem para quaisquer 4-vetores, devido à invariância do produto escalar,

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu \quad (2.33)$$

⁴ δ_ν^μ é o *delta de Kroenecker*, que assume valor 1 quando $\mu = \nu$ e 0 quando $\mu \neq \nu$.

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \quad (2.34)$$

A generalização para tensores de ordens superiores se faz por meio das matrizes de transformação. Tensores de ordens superiores são objetos geométricos que obedecem a lei de transformação

$$T^{\mu\nu\rho\dots} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\gamma} \dots T'^{\alpha\beta\gamma\dots} \quad (2.35)$$

para componentes *contravariantes* e

$$T_{\mu\nu\rho\dots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} \dots T'_{\alpha\beta\gamma\dots} \quad (2.36)$$

$$T_{\mu\dots}{}^{\nu\rho\dots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\gamma} \dots T'_{\alpha\dots}{}^{\beta\gamma\dots} \quad (2.37)$$

para as componentes *covariantes* e *mistas*, respectivamente.

A redução de índices livres em um tensor é chamada de *contração*. A contração ocorre ao fazermos um índice contravariante igual a um índice covariante. Por exemplo, o tensor de 3ª ordem, $T^\mu_{\alpha\rho}$, possui 64 componentes; contrair os índices ρ e μ significa fazer $\rho = \mu$ e reduzir o número de componentes para 16, $T^\mu_{\alpha\mu}$, reduzindo a ordem do tensor. Índices contraídos devem aparecer somente aos pares em uma equação.

2.3 Geodésicas

Vejamos como o formalismo descrito acima (2.2) pode trazer informações sobre a cinemática de uma partícula. A trajetória que uma partícula descreve no espaço-tempo é chamada *linha de mundo*. Esta trajetória deve obedecer ao princípio da ação mínima.

A ação para uma partícula no espaço-tempo é um escalar construído com o invariante ds , [23]:

$$S = -m \int ds, \quad (2.38)$$

onde m é a massa da partícula. Variando a ação e impondo a condição de extremo,

$$\delta S = -m \delta \int ds = 0. \quad (2.39)$$

Para efetuar a variação do integrando acima vamos precisar de

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}dx^\mu \delta dx^\nu \quad (2.40)$$

onde fizemos uso da simetria de $g_{\mu\nu}$. Substituindo em (2.39) e lembrando que $\delta dx = d\delta x$,

$$\delta S = -m \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\lambda + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d\delta x^\nu}{ds} \right] ds \quad (2.41)$$

Integrando por partes o segundo termo ($\delta x^\lambda = 0$ nos limites de integração) e trocando ν por λ ganhamos

$$\int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\lambda - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\lambda \right] ds. \quad (2.42)$$

Definindo a *4-velocidade* da partícula, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, o integrando acima resulta em

$$\left[\frac{1}{2} u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{ds} (g_{\mu\lambda} u^\mu) \right] \delta x^\lambda = \left[-g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} u^\mu \right] \delta x^\lambda = 0. \quad (2.43)$$

Os dois últimos termos acima podem ser agrupados se notarmos que o último pode ser escrito como $-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} u^\mu = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right) u^\mu u^\nu$, onde fizemos a troca μ por ν em que trocamos μ com ν . Como os δx^λ são arbitrários, chegamos à igualdade

$$g_{\mu\lambda} \frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) u^\mu u^\nu = 0. \quad (2.44)$$

Levantando o índice λ com $g^{\lambda\sigma}$ é possível colocar a equação acima em uma forma conhecida como *equação da geodésica*,

$$\frac{du^\sigma}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (2.46)$$

onde os $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ são os *símbolos de Christoffel*. Uma linha *geodésica* corresponde a menor distância entre dois pontos em um espaço-tempo curvo. É interessante notar que, na ausência do 2º termo em (2.45), temos a equação de movimento que esperaríamos para uma partícula livre, uma linha reta. Os efeitos da geometria do espaço-tempo aparecem no 2º termo através das derivadas da métrica, resultando em um efeito de aceleração sobre a partícula.

2.4 Princípio da Equivalência

O princípio físico que faz a conexão entre a relatividade restrita e a relatividade geral é o *princípio da equivalência*, [24]. Este princípio é enunciado em sua forma fraca e forte.

Forma Fraca: Um observador em queda livre não é capaz de distinguir a presença ou não de um campo gravitacional *estático e homogêneo*. Em outras palavras, o princípio nos fala da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. Na presença de um campo gravitacional não-estático e não-homogêneo, é sempre possível escolher um referencial *localmente inercial*, isto é, na vizinhança de um ponto, onde as equações de movimento em queda livre são as mesmas que na ausência de gravidade, [13].

Forma Forte: É sempre possível escolher um referencial *localmente inercial* na vizinhança de um ponto, onde as *leis da natureza* são as mesmas que na ausência de gravidade, [13].

Para implementarmos o princípio da equivalência em sua forma fraca, partimos de um referencial localmente inercial de coordenadas x^μ , onde as equações de movimento para uma partícula são

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \quad (2.47)$$

para um referencial qualquer de coordenadas x'^μ , encontramos

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu}{ds} \right) = 0 \quad (2.48)$$

que se desdobra em

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{d^2 x'^\nu}{ds^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \frac{dx'^\nu}{ds} \frac{dx'^\alpha}{ds} = 0. \quad (2.49)$$

Multiplicando a igualdade acima por $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}$ encontramos a forma familiar

$$\frac{d^2 x'^\rho}{ds^2} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \frac{dx'^\nu}{ds} \frac{dx'^\alpha}{ds} = 0 \quad (2.50)$$

onde identificamos de (2.45)

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha}. \quad (2.51)$$

2.5 Transporte Paralelo

Vetores em espaços planos não alteram sua orientação ao serem transportados de um ponto a outro, já em espaços curvos, a orientação muda. Percebemos de (2.45) que a aceleração sentida por uma partícula em queda livre é um efeito geométrico; o 4-vetor velocidade varia ponto a ponto. Vejamos como tratar a variação de um vetor em espaços curvos [25].

Seja um 4-vetor covariante X_μ em um referencial local inercial. Ao transportarmos X_μ de um ponto a outro infinitamente próximo, suas componentes não variam, $\delta X^\mu = 0$. Uma transformação geral de coordenadas em X_μ fornece

$$X_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \quad (2.52)$$

e a transformação inversa,

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} X_\mu. \quad (2.53)$$

O desvio no transporte de A'_ν devido ao caráter não-euclidiano das novas coordenadas será representado por $\delta A'_\nu$ e chamado de *transporte paralelo* do vetor A'_ν ,

$$A'_\nu + \delta A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} X_\mu + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda X_\mu. \quad (2.54)$$

O termo

$$\delta A'_\nu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda X_\mu \quad (2.55)$$

corresponde à variação do vetor A'_ν ao ser transportado de um ponto a outro infinitamente próximo. Eliminando X_μ na equação acima utilizando $X_\mu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A'_\alpha$ obtemos

$$\delta A'_\nu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda A'_\alpha, \quad (2.56)$$

que é a expressão explícita para o transporte paralelo de um vetor em um espaço curvo. Com o auxílio de (2.51) podemos escrever $\delta A'_\nu$ em termos dos símbolos de Christoffel

$$\delta A'_\nu = \Gamma'^\alpha_{\nu\lambda} \delta x'^\lambda A'_\alpha. \quad (2.57)$$

Para o transporte paralelo de um vetor contravariante, partimos da invariância do produto escalar,

$$\delta(A_\nu B^\nu) = 0, \quad \delta A_\nu B^\nu + A_\nu \delta B^\nu = 0, \quad (2.58)$$

e com o auxílio de (2.57),

$$A_\nu \delta B^\nu = -B^\nu \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \delta x^\lambda A_\alpha, \quad (2.59)$$

encontramos então

$$\delta B^\nu = -\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} B^\nu \delta x^\lambda. \quad (2.60)$$

2.6 Derivada Covariante

Um vetor covariante e sua lei de transformação

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \quad (2.61)$$

implicam em um diferencial

$$dA_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} dA'_\nu + A'_\nu \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} dx^\lambda \quad (2.62)$$

que não se transforma como um vetor devido à presença do 2º termo no lado direito da equação acima [22]. Estamos comparando o vetor em dois pontos distintos infinitamente próximos sem levar em conta o processo de transporte paralelo ao transportar o vetor de um ponto a outro, o que é usual em um espaço plano. Com a definição de transporte paralelo, é possível generalizar a noção de derivada para espaços curvos.

A variação de A_μ entre dois pontos P e Q infinitamente próximos é, [25],

$$(A_\mu)_Q - (A_\mu)_P = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = dA_\mu. \quad (2.63)$$

O transporte paralelo de P até Q, de acordo com (2.57), implica na seguinte variação de A_μ :

$$(A_\mu)'_Q - (A_\mu)_P = \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \delta x^\lambda A_\alpha = \delta A_\mu \quad (2.64)$$

A diferença entre as duas expressões acima fornece a comparação em um mesmo ponto, [23]

$$(A_\mu)_Q - (A_\mu)'_Q = dA_\mu - \delta A_\mu \equiv DA_\mu, \quad (2.65)$$

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha A_\alpha \right) \delta x^\lambda \quad (2.66)$$

A quantidade DA_μ (derivada absoluta) nos dá a diferença entre a variação do vetor e a variação que este vetor sofre no transporte paralelo. A equação (2.65) nos diz que DA_μ é um vetor, pois estamos efetuando a diferença de dois vetores no mesmo ponto Q. Logo, como DA_μ e δx^λ são vetores, a quantidade

$$A_{\mu;\lambda} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha A_\alpha \quad (2.67)$$

é um tensor. A este tensor chamamos de *derivada covariante* do vetor A_μ . Para a derivada covariante de um vetor contravariante, basta lembrarmos da invariância do produto escalar $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$. Variando o produto e substituindo (2.57):

$$A^\mu{}_{;\lambda} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \quad (2.68)$$

Seguindo o mesmo raciocínio acima, podemos encontrar as expressões para a derivada covariante de tensores de ordem superior. Necessitamos apenas lembrar que podemos construir um tensor de ordem dois com o produto de dois tensores de ordem um e assim sucessivamente para ordens mais elevadas. A expressão para a derivada covariante de um tensor covariante de ordem dois é

$$A_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha A_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha A_{\mu\alpha} \quad (2.69)$$

e para um contravariante

$$A^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu A^{\mu\alpha} \quad (2.70)$$

Uma consequência da definição de derivada covariante é

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (2.71)$$

que pode ser visto a partir de $DA_\mu = g_{\mu\nu}DA^\nu$ e $DA_\mu = D(g_{\mu\nu}A^\nu)$ combinadas. Esta relação é chamada de *condição de metricidade*.

Por fim, definimos o divergente covariante de um vetor contravariante como

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu A^\lambda, \quad (2.72)$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda} \quad (2.73)$$

Esta relação será útil mais a frente.

2.6.1 Teorema de Gauss e Teorema de Stokes

Com a definição de derivada em espaços curvos podemos generalizar os teoremas de Gauss e Stokes.

Da diferenciação de determinantes,

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -g g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \quad (2.74)$$

Substituindo (2.73) e (2.74) em (2.72) chegamos a

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^\mu)}{\partial x^\mu} \quad (2.75)$$

que nos permite enunciar o teorema de Gauss na forma covariante

$$\int A^\mu{}_{;\mu} \sqrt{-g} d\Omega = \oint A^\mu \sqrt{-g} dS_\mu \quad (2.76)$$

Na expressão acima, $\sqrt{-g}dS_\mu$ é um elemento orientado de superfície invariante e $\sqrt{-g}d\Omega$ é um elemento de volume invariante⁵.

O rotacional em coordenadas curvilíneas, devido à simetria de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, é o próprio rotacional ordinário

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.77)$$

e podemos escrever o teorema de Stokes na forma covariante

$$\oint A_\mu dx^\mu = \int dS^{\mu\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2} \int dS^{\mu\nu} (A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}). \quad (2.78)$$

onde $dS^{\mu\nu}$ é um elemento de superfície.

2.7 Curvatura

A diferença fundamental entre um espaço plano e um espaço curvo é o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma linha geodésica. Em um espaço plano, a variação de um vetor no transporte paralelo ao longo de uma curva fechada é zero [25]. Em um espaço curvo esta variação é, em geral, diferente de zero. Então, ao transportarmos paralelamente um vetor ao longo de um caminho fechado, ao retornarmos ao ponto de partida o vetor transportado não será mais igual ao vetor inicial.

Vejam os como se comporta um certo vetor A_μ no transporte paralelo ao longo de um contorno infinitesimal fechado [22]

$$\Delta A_\mu = \oint \delta A_\mu \quad (2.79)$$

De (2.57),

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda dx^\nu \quad (2.80)$$

e então aplicando o teorema de Stokes (2.78), a integração fica

$$\begin{aligned} \Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial(\Gamma_{\mu\rho}^\lambda A_\lambda)}{\partial x^\nu} \right] dS^{\rho\nu} \\ &= \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\rho} A_\lambda - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\lambda}{\partial x^\nu} A_\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} \right] dS^{\rho\nu} \end{aligned} \quad (2.81)$$

⁵ $\sqrt{-g}d\Omega$ é uma *densidade tensorial*.

Considerando a área englobada pelo contorno como infinitesimal,

$$\begin{aligned}\Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial(\Gamma_{\mu\rho}^\lambda A_\lambda)}{\partial x^\nu} \right] \Delta S^{\rho\nu} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\rho} A_\lambda - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\lambda}{\partial x^\nu} A_\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} \right] \Delta S^{\rho\nu}\end{aligned}\quad (2.82)$$

Reescrevendo (2.57),

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} = \Gamma_{\mu\rho}^\lambda A_\lambda \quad (2.83)$$

e substituindo em (2.82)

$$\begin{aligned}\Delta A_\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \right] A_\lambda \Delta S^{\rho\nu} \\ &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho}^\lambda A_\lambda \Delta S^{\rho\nu},\end{aligned}\quad (2.84)$$

onde

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \quad (2.85)$$

é o tensor de *Riemann* ou tensor de curvatura. Quando o tensor de Riemann é nulo, o espaço é plano.

Da definição (2.85) verifica-se que

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = -R_{\mu\rho\nu}^\lambda \quad (2.86)$$

e sua soma cíclica é nula:

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda + R_{\rho\mu\nu}^\lambda + R_{\nu\rho\mu}^\lambda = 0 \quad (2.87)$$

Abaixando o índice contravariante do tensor de Riemann podemos escrevê-lo na forma covariante

$$g_{\eta\lambda} R_{\mu\nu\rho}^\lambda = R_{\eta\mu\nu\rho} \quad (2.88)$$

para que possamos ilustrar suas propriedades de simetria. Segue-se que

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\nu\rho}, \quad (2.89)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu}, \quad (2.90)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}. \quad (2.91)$$

Sua soma cíclica também é nula,

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\nu\rho\mu} = 0. \quad (2.92)$$

O tensor de Riemann é simétrico em relação a troca dos pares de índice e antisimétrico em relação a troca de índices em cada par. Como consequência, a contração das componentes do mesmo par, $\lambda = \rho$ ou $\nu = \mu$, é zero.

Das propriedades de simetria acima para $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, temos que os pares possíveis de índices $\mu \neq \nu$ e $\rho \neq \sigma$ para $\mu\nu = \rho\sigma$ correspondem a seis componentes independentes e os pares possíveis para $\mu\nu \neq \rho\sigma$ correspondem a mais quinze componentes independentes. A identidade (2.92) conecta ainda as componentes com todos os índices distintos, restando ao todo para o tensor de curvatura em um espaço quadridimensional vinte componentes independentes.

Destacamos ainda as seguintes propriedades do tensor de Riemann:

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^\lambda_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0. \quad (2.93)$$

Estas identidades geométricas são conhecidas como *identidades de Bianchi*.

Podemos construir um tensor de segunda ordem contraindo os índices de pares diferentes do tensor de Riemann

$$R^\lambda_{\mu\lambda\rho} = R_{\mu\rho} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \quad (2.94)$$

e o tensor simétrico resultante recebe o nome de *tensor de Ricci*. Finalmente, da contração do tensor de Ricci obtemos a *curvatura escalar do espaço*,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.95)$$

Por fim, uma relação que conecta o tensor de Riemann com derivadas covariantes de um vetor covariante qualquer,

$$A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = A_\rho R^\rho_{\mu\nu\lambda} \quad (2.96)$$

e para um vetor contravariante

$$A^\mu_{;\nu;\lambda} - A^\mu_{;\lambda;\nu} = -A^\rho R^\mu_{\rho\nu\lambda}. \quad (2.97)$$

2.8 Equações do Campo Gravitacional

Com a definição do tensor de curvatura, temos as ferramentas matemáticas necessárias para determinar as equações do campo gravitacional. A motivação física vem da equação de Poisson, [22],

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_m \quad (2.98)$$

que associa derivadas segundas do potencial gravitacional com a densidade de matéria ρ_m .

Vamos propor um princípio variacional para determinar as equações de campo. Para tanto, recorremos às palavras de John Wheeler (1908-2008), “*o espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar*” [24] para enunciar a ação que leva às equações de campo da relatividade geral. A ação total deve então conter uma contribuição puramente geométrica e uma contribuição devido aos campos de matéria. Na parte geométrica, identificamos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como “potencial gravitacional” em analogia com o potencial gravitacional ϕ . Os campos de matéria contribuem com uma densidade de Lagrangiana para a matéria. Desta maneira,

$$S = S_g + S_m. \quad (2.99)$$

2.8.1 A Ação para a Matéria

O princípio de Hamilton em coordenadas curvilíneas necessita da correção do elemento de volume invariante,

$$S_m = \frac{1}{c} \int L \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.100)$$

em que L é a densidade de Lagrangiana da matéria.

Sabemos que L descreve um sistema físico que é fonte de campo gravitacional. Sabemos também, de (2.98), que uma certa distribuição de matéria é responsável por uma variação no potencial gravitacional. Identificamos no início da seção (2.8) as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como “potenciais gravitacionais”. Efetuaremos então a variação em S em relação aos potenciais do campo gravitacional e suas derivadas primeiras.

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta (L \sqrt{-g}) d\Omega \quad (2.101)$$

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \delta \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right] d\Omega \quad (2.102)$$

Usando o teorema de Gauss (2.76) e integrando por partes ($\delta g^{\mu\nu} = 0$ nos limites de integração) obtemos

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega \quad (2.103)$$

Definindo

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \quad (2.104)$$

podemos escrever

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.105)$$

A grandeza $T_{\mu\nu}$ é chamada de *tensor energia-momento*. O fator $1/2$ aparece porque na soma $T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ entram duas vezes os termos com as componentes $\mu \neq \nu$.

Leis de Conservação

Entretanto, de (2.105) as variações $\delta g^{\mu\nu}$ não são arbitrárias. Os $\delta g^{\mu\nu}$ dependem das transformações das quatro coordenadas. Seja uma transformação infinitesimal de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$. Então,

$$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x) \quad (2.106)$$

e

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\mu\nu}(x) \left[\delta_\rho^\mu + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\rho} \right] \left[\delta_\sigma^\nu + \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\sigma} \right]. \quad (2.107)$$

Desprezando o termo de ordem superior,

$$g'^{\mu\nu}(x') = g^{\rho\sigma}(x) + g^{\mu\sigma} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\sigma} + g^{\nu\rho} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\rho} \quad (2.108)$$

Expandindo $g'^{\mu\nu}(x + \zeta)$ em potências de ζ para que os argumentos sejam iguais e novamente desprezando os termos de ordem superior, temos

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \zeta^\rho, \quad (2.109)$$

onde substituímos $g'^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ no termo de correção, pois a expansão é em torno do ponto x . Igualando as duas expressões acima,

$$\delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\rho} + g^{\nu\rho} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial x^\rho} - \zeta^\rho \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \quad (2.110)$$

e podemos escrever esta equação como

$$\delta g^{\mu\nu} = \zeta^{\mu;\nu} + \zeta^{\nu;\mu}. \quad (2.111)$$

Para as componentes covariantes,

$$\delta g_{\mu\nu} = -\zeta_{\mu;\nu} - \zeta_{\nu;\mu}. \quad (2.112)$$

Substituindo em (2.105) e lembrando que $T_{\mu\nu}$ é simétrico,

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} (\zeta^{\mu;\nu} + \zeta^{\nu;\mu}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{\mu}^{\nu} \zeta^{\mu;\nu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.113)$$

Reescrevendo a equação acima,

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int (T_{\mu}^{\nu} \zeta^{\mu})_{;\nu} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{c} \int T_{\mu;\nu}^{\nu} \zeta^{\mu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.114)$$

Aplicando o teorema de Gauss à primeira integral e lembrando que nos limites $\zeta^{\mu} = 0$, temos

$$\delta S_m = -\frac{1}{c} \int T_{\mu;\nu}^{\nu} \zeta^{\mu} \sqrt{-g} d\Omega = 0 \quad (2.115)$$

e segue, devido à arbitrariedade de ζ^{μ} , a lei de conservação

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.116)$$

A expressão acima contém 4 equações independentes; $T^{0\nu}_{;\nu} = 0$, correspondendo à conservação da energia e as três equações $T^{i\nu}_{;\nu} = 0$ fornecendo a conservação do momento.

2.8.2 A Ação para o Campo Gravitacional

Para a ação do campo gravitacional precisamos de um escalar que dependa dos potenciais do campo, $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas primeiras. A curvatura escalar (2.95) satisfaz nossos requisitos, mas contém também termos com derivadas segunda da métrica. Porém, estas derivadas segunda podem ser removidas via teorema de Gauss, como veremos abaixo.

Tomando R como a densidade de lagrangiana para o campo gravitacional:

$$S_g = C \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.117)$$

onde C é uma constante. Partindo de (2.94), chegamos à seguinte expressão para $R\sqrt{-g}$:

$$\sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\eta}^{\eta} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right] \quad (2.118)$$

Os termos que contém as derivadas dos símbolos de Christoffel podem ser escritos como

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \quad (2.119)$$

e

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\frac{\partial\sqrt{-g}g^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.120)$$

Transformamos os termos com derivadas segundas em divergências. Renomeando os índices, podemos agrupar estes dois termos em uma divergência de um certo vetor que se anula pelo teorema de Gauss quando é feita a variação, já que nos limites a variação é nula

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{\partial\sqrt{-g}\xi^{\nu}}{\partial x^{\nu}}d\Omega. \quad (2.121)$$

Segue que

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}d\Omega \quad (2.122)$$

Utilizando (2.51) e (2.71), após manipulações chegamos a

$$G = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\eta}^{\eta}) \quad (2.123)$$

que é a lagrangiana para o campo gravitacional.

2.8.3 Equações do Campo Gravitacional

De acordo com o que foi visto nas duas seções precedentes, podemos escrever a variação da ação total $\delta S = \delta S_m + \delta S_g = 0$ como

$$\delta \int (R + L) \sqrt{-g}d\Omega = 0 \quad (2.124)$$

A variação de L em relação a $g^{\mu\nu}$ nos leva a

$$\delta \int L\sqrt{-g}d\Omega = \int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d\Omega \quad (2.125)$$

Para a variação de $R\sqrt{-g}$ temos

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega \quad (2.126)$$

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \int [R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}]d\Omega \quad (2.127)$$

Utilizando (2.74) obtemos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.128)$$

Substituindo em (2.127),

$$\delta S_g = \int \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \right] d\Omega. \quad (2.129)$$

É mais simples calcularmos $\delta R_{\mu\nu}$ em um referencial local-inercial:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.130)$$

e podemos escrever

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right] = g^{\mu\nu} \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}. \quad (2.131)$$

Temos acima a divergência de um vetor e o termo (2.130) se anula pelo teorema de Gauss (2.76). Para a variação da ação temos então

$$\delta S_g = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.132)$$

É possível ainda acrescentar um termo constante 2Λ a integral (2.117) sem alterarmos as equações de movimento, visto que a ação continua sendo um escalar:

$$\delta \int (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.133)$$

Chamamos a constante Λ de constante cosmológica, justamente por ter sido incluída originalmente por Einstein por razões cosmológicas. A variação da ação total (2.124) em relação a $\delta g^{\mu\nu}$ nos fornece

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.134)$$

que são as equações de campo procuradas. As equações acima são chamadas *Equações de Einstein* e a constante κ é identificada com a constante gravitacional de Newton, $\kappa = 8\pi G$. O tensor definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.135)$$

é chamado *tensor de Einstein*.

As Equações de Einstein são não-lineares, fato este devido ao próprio campo gravitacional ser também fonte de campo gravitacional, pois o campo carrega energia.

As equações de movimento são obtidas das leis de conservação $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, sendo que a divergência do primeiro membro de (2.134) também é nula devido às identidades de Bianchi (2.93). Logo, as leis de conservação estão contidas nas equações de campo.

Para a solução das equações de Einstein é preciso, juntamente com as equações de campo, uma equação de estado para a matéria, que relaciona pressão com densidade de energia, ou seja, determina a distribuição e o estado de movimento da matéria.

Capítulo 3

Cosmologia

3.1 Princípio Cosmológico

A cosmologia moderna tem como objetivo descrever a evolução do Universo com base em teorias físicas. A maior responsável por ditar a dinâmica do Cosmos é a gravidade, já que, das quatro forças fundamentais, é a de mais longo alcance. A relatividade geral é a teoria gravitacional com maior sucesso observacional e por isto é usada como base na maioria dos modelos cosmológicos.

O *princípio cosmológico* é a primeira suposição da física moderna sobre a estrutura em larga escala do Universo. Inicialmente conhecido como princípio copernicano¹, sustentava que a Terra não ocupava lugar privilegiado no Universo (que à época era considerado como sendo basicamente o sistema solar). A versão atual do princípio cosmológico é de que a estrutura do Universo em larga escala (superior a $100Mpc^2$) é homogênea e isotrópica; o Universo é igual ponto a ponto e em todas as direções.

Para reforçar o *princípio cosmológico*, observações na faixa de microondas, [26], revelaram um espectro de corpo negro de temperatura média da ordem de $2,7K$ altamente homogêneo e isotrópico (figura 3.1). Esta radiação foi chamada *Radiação Cósmica de Fundo*.

Outro fato fundamental para a descrição da larga escala do Universo vem das observações das raia de emissão de galáxias distantes. Estas observações revelam um desvio Doppler para o vermelho na luz emitida por estas galáxias [3]. A causa deste desvio Doppler é a expansão das dimensões espaciais do Universo.

¹Nicolau Copérnico, 1473-1543

² $1pc = 1 \text{ parsec} = 3,08 \times 10^{16}m$.

A expansão cosmológica remete naturalmente a um passado de maior densidade e, conseqüentemente, maior temperatura. Ao retrocedermos no tempo, as interações entre os constituintes do fluido cosmológico se tornam cada vez mais energéticas. Quando a escala de energia de ionização do H e He é atingida, $\sim 10\text{eV}$, o fluido cosmológico passa a se comportar como um plasma de bárions e elétrons, tornando-se opaco à radiação. Temos então um limite observacional na escala cosmológica.

A *Radiação Cósmica de Fundo* é um instantâneo da época em que o Universo resfriou do plasma de bárions e elétrons para um fluido neutro de átomos e radiação. A radiação então se desacoplou da matéria e pode se propagar livremente, preenchendo uniformemente o espaço, mas carregando a informação das flutuações de densidade, como mostra a figura 3.1. Esta transição é chamada *desacoplamento*. Observações recentes da Radiação Cósmica de Fundo revelam flutuações na homogeneidade e isotropia da ordem de 10^{-5} , [10].

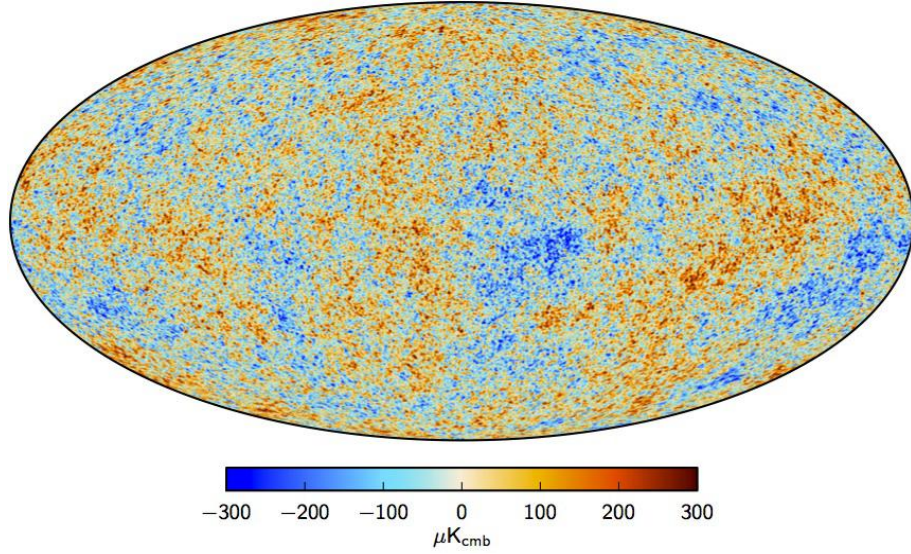


Figura 3.1: Flutuações na radiação de fundo de microondas 2,7K. Fonte: *Planck Collaboration*, fevereiro de 2015.

Para escalas ainda mais energéticas, quando a velocidade dos constituintes passa a ser da ordem de c , a matéria entra no regime *ultrarrelativístico*³, Como veremos na seção (3.3.4), a densidade de energia neste caso é proporcional a t^{-2} , que juntamente com a *lei de Stefan-Boltzmann*, $\rho = \sigma T^4$, fornece uma relação entre tempo e temperatura, $t \sim T^{-2}$.

³A equação de estado é a mesma de um fluido de radiação.

Além do limite observacional, experimentos em aceleradores de partículas reproduzem as condições de energia do Universo até escalas da ordem de 1TeV , correspondendo a um tempo da ordem de até 10^{-12}s . O *modelo padrão de partículas elementares* faz previsões para a *hadronização*, que é o confinamento de quarks em mésons e bárions, e a subsequente formação de estados ligados entre hádrons, resultando nos núcleos atômicos de elementos leves, *nucleossíntese*, em excelente acordo com as observações da densidade de matéria bariônica no Universo [5], [10].

Evento	Tempo (segundos)	$T(K)$
Tempo de Planck**	10^{-43}	10^{32}
Bariogênese**	10^{-37}	10^{29}
Hadronização	10^{-4}	10^{12}
Nucleossíntese	$10^{-2} - 10^2$	$10^{11} - 10^9$
Igualdade matéria-radiação	10^{11}	10^4
Recombinação - Desacoplamento dos fótons	10^{13}	10^3
Primeiras estrelas e galáxias - formação de H_2	10^{15}	10^2
Aglomerados de galáxias	10^{17}	10
Hoje	4×10^{17}	2, 7

Tabela 3.1: Breve história térmica do Universo. ** Não há evidência experimental; fora das escalas de energia dos aceleradores de partículas.

A tabela (3.1) mostra os principais eventos da história térmica do Universo, da escala de Planck, onde uma teoria quântica da gravidade se faz necessária, passando pelas previsões do modelo padrão de partículas até as estruturas do Universo observável [27].

Em larga escala, a homogeneidade e isotropia espacial e a expansão das dimensões espaciais são os elementos básicos para a descrição da evolução do Universo. A partir destas informações podemos atribuir simetrias para a métrica e para a distribuição de matéria-energia no Universo.

3.2 Métrica de Robertson-Walker

A hipótese de homogeneidade e isotropia do espaço impõe simetrias sobre o setor espacial da métrica. Homogeneidade implica em simetria de translação e isotropia em simetria de rotação.

É possível mostrar que as simetrias acima são possíveis somente em um espaço plano, esférico ou hiperbólico [13]. A métrica plana é óbvia, $g_{ik}^{(3)} = \delta_{ik}$; as métricas espaciais esférica e hiperbólica são determinadas a partir de um espaço de imersão 4-dimensional, com raio de curvatura $r^2 = 1$ que vincula uma superfície 3-dimensional, onde o sinal da 4ª componente fixa a geometria em esférica (+) ou hiperbólica (-),

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm x_4^2, \quad dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \pm dx_4^2. \quad (3.1)$$

Na expressão acima, dl é o elemento de linha no espaço 4-dimensional de imersão. Combinando as duas equações para eliminar x_4 temos

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \pm \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{1 \mp (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \quad (3.2)$$

ou, de forma mais compacta

$$dl^2 = d\vec{x}^2 + \kappa \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - \kappa \vec{x}^2} \quad (3.3)$$

onde introduzimos a constante κ , que pode assumir os valores 0, 1 e -1 representando, respectivamente, um espaço plano, esférico e hiperbólico. Chegamos então à seguinte forma para a métrica 3-dimensional

$$g_{ij}^{(3)} = \delta_{ij} + \kappa \frac{x_i x_j}{1 - \kappa \vec{x}^2} \quad (3.4)$$

Adicionando as componentes com dependência temporal para formar o intervalo no espaço-tempo, temos

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 - 2g_{0i}dx^i dt - a^2(t)g_{ij}^{(3)}dx^i dx^j \quad (3.5)$$

onde faremos a escolha de coordenadas para fixar $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$, definindo o *tempo cosmológico*, t , de maneira que a coordenada temporal seja ortonormal às 3-superfícies espaciais. Este é o referencial síncrono [22] ou comóvel [13],

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)g_{ij}^{(3)}dx^i dx^j. \quad (3.6)$$

Transformando x_1 , x_2 e x_3 para coordenadas esféricas r , θ e ϕ , podemos ainda escrever o intervalo como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (3.7)$$

cujo tensor métrico correspondente é a métrica de *Robertson-Walker*, [29], [30]. A função $a(t)$ reescala as distâncias espaciais e por isso recebe o nome de *fator de escala do Universo*.

Uma forma conveniente de reescrever a métrica de Robertson-Walker é usando o *tempo conforme*,

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.8)$$

resultando em

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (3.9)$$

Parâmetros Cosmológicos

É interessante expandir $a(t)$ em um intervalo $t - t_0$, com t próximo de t_0 , onde o índice "0" se refere ao tempo atual

$$a(t) = a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (3.10)$$

onde introduzimos o *parâmetro de Hubble* e o *parâmetro de desaceleração*

$$H(t_0) = H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}, \quad q(t_0) = q_0 \equiv -\dot{a}_0 \frac{a_0}{\ddot{a}_0}. \quad (3.11)$$

O parâmetro $H(t)$ corresponde à taxa com que o Universo é reescalado; a taxa de expansão. H possui dimensão de s^{-1} . Por conveniência observacional, H é normalmente expresso em $kms^{-1}Mpc^{-1}$ e seu valor atual está contido no intervalo $H_0 = 67,8 \pm 0,9 kms^{-1}Mpc^{-1}$, [10].

O parâmetro q_0 informa o regime de aceleração da expansão cosmológica, assumindo valores *negativos* para expansão *acelerada* e valores *positivos* para expansão *desacelerada*.

3.2.1 Desvio para o Vermelho

As observações das raías de emissão de galáxias distantes revelam um desvio Doppler para o vermelho. Em [3], Edwin Hubble argumentou que a expansão das dimensões espaciais é uma possível explicação para este desvio Doppler.

O fator de escala $a(t)$ reescala as distâncias e consequentemente, comprimentos de onda, de maneira que

$$\frac{\lambda}{a} = \text{constante}. \quad (3.12)$$

Um sinal luminoso com λ_e emitido por uma fonte comóvel (que se move juntamente com a expansão) e detectado em determinado ponto de recepção com λ_0 se relacionam por

$$\frac{\lambda_0}{a_0} = \frac{\lambda_e}{a(t_e)} \quad (3.13)$$

Quando comparamos a diferença entre o sinal emitido e recebido com o sinal emitido, estamos olhando para o *efeito Doppler* sofrido pelo sinal luminoso. A relação

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a(t_e)} - 1 \quad (3.14)$$

é chamada *desvio para o vermelho* da luz.

Identificando em $\vec{r} = a\vec{x}$ as coordenadas de um referencial qualquer $\vec{r}$ e as coordenadas comóveis $\vec{x}$, e derivando em relação ao tempo cosmológico:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{r} + \vec{v}_p \quad (3.15)$$

Podemos distinguir $\vec{v}_p$, a *velocidade peculiar* do movimento das galáxias devido à interação com suas vizinhanças e a *velocidade de recessão* ou *velocidade comóvel*, $\vec{v}_r = H\vec{r}$, com a qual as galáxias se afastam umas das outras, comóveis com o fluido cosmológico. Na média, as velocidades peculiares se cancelam de maneira que na escala de homogeneidade temos um desvio para o vermelho medido (Lei de Hubble).

3.3 Dinâmica Cosmológica

As equações de Einstein (2.134) conectam a variação da geometria do espaço-tempo com a densidade de matéria-energia dada por (2.105). Usando sua forma contraída, $R^\mu_\mu = -8\pi G T^\mu_\mu$, podemos reescrevê-las como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\rho_\rho). \quad (3.16)$$

As componentes de $R_{\mu\nu}$ são dadas de (2.94). Para determiná-las, precisamos das componentes da métrica do espaço-tempo (3.6) e da métrica espacial (3.4),

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a^2(t)g_{ij}^{(3)}, \quad g_{ij}^{(3)} = \delta_{ij} + \kappa \frac{x_i x_j}{1 - \kappa \vec{x}^2}. \quad (3.17)$$

Os símbolos de Christoffel (2.46) não-nulos correspondentes são

$$\Gamma^i_{jk} = \kappa g_{jk}^{(3)} x^i, \quad \Gamma^0_{jk} = -a\dot{a}g_{jk}^{(3)}, \quad \Gamma^i_{0k} = -\frac{\dot{a}}{a}\delta^i_k. \quad (3.18)$$

As componentes não-nulas $R_{\mu\nu}$ são determinadas com a ajuda dos termos

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^0}{\partial t} = g_{jk}^{(3)} \frac{d}{dt}(a\dot{a}), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{k0}^k}{\partial t} = 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \quad (3.20)$$

e

$$\Gamma_{j0}^i \Gamma_{0k}^i = g_{jk}^{(3)} \dot{a}^2, \quad \Gamma_{jk}^0 \Gamma_{0i}^i = 3g_{jk}^{(3)} \dot{a}^2, \quad \Gamma_{0j}^k \Gamma_{k0}^j = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2, \quad (3.21)$$

resultando em

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^0}{\partial t} - \Gamma_{0j}^k \Gamma_{k0}^j, \quad (3.22)$$

$$R_{ij} = \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} + \quad (3.23)$$

$$- [\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k] + \quad (3.24)$$

$$+ [\Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{k0}^k] \quad (3.25)$$

Reorganizando, podemos agrupar os termos de maneira que

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.26)$$

$$R_{ij} = 2\dot{a}^2 g_{ij}^{(3)} + a\ddot{a} g_{ij}^{(3)} + R_{ij}^{(3)}, \quad (3.27)$$

sendo $R_{ij}^{(3)}$ o tensor de Ricci 3-dimensional. $R_{ij}^{(3)}$ é mais facilmente determinado em um referencial localmente inercial em que os Γ 's são nulos,

$$R_{ij}^{(3)} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} = 2\kappa \delta_{ij} \quad (3.28)$$

onde usamos (3.4). Com uma transformação geral de coordenadas temos

$$R_{ij}^{(3)} = 2\kappa g_{ij}^{(3)} \quad (3.29)$$

que é válida em qualquer referencial. (3.27) fica então

$$R_{ij} = (2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) g_{ij}^{(3)} \quad (3.30)$$

e o lado esquerdo de (3.16) está determinado.

Para o lado direito de (3.16) precisamos de uma descrição do conteúdo material do Universo. Vejamos como novamente o princípio cosmológico vai nos servir de guia.

3.3.1 Fluido Cosmológico

Estados ligados como galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados de galáxias se tornam pontuais em escalas da ordem de centenas de MPc . A partir desta escala, a homogeneidade e isotropia sugerem descrever a matéria como um fluido, o *fluido cosmológico*. As simetrias do fluido sugerem um *fluido perfeito*⁴.

Para um observador em repouso em relação a este fluido (referencial comóvel, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$), a distribuição isotrópica de *densidade de matéria-energia*, ρ , e *pressão hidrostática*, p , leva a um tensor energia-momento de componentes [24]

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Em termos da 4-velocidade u_μ , podemos escrever as componentes de $T_{\mu\nu}$ como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

que é a forma covariante do *tensor energia-momento para um fluido perfeito*, [22], [13]. Vemos que a definição acima se reduz a forma (3.31) para um referencial comóvel $u_i = 0$. O traço correspondente é

$$T^\nu_\nu = (\rho + p)u^\nu u_\nu - p\delta^\nu_\nu = \rho - 3p. \quad (3.33)$$

e as componentes espaciais fornecem

$$T_{ij} = -a^2 pg_{ij}^{(3)}. \quad (3.34)$$

3.3.2 Equações de Friedmann

Podemos agora completar as equações de Einstein (3.16) com (3.32) e (3.33),

$$R_{00} = 8\pi G(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T^\mu_\mu) \quad (3.35)$$

$$R_{ij} = 4\pi G(\rho - p). \quad (3.36)$$

Substituindo (3.26) e (3.30) nas igualdades acima, as equações de Einstein resultam em duas equações independentes,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \quad (3.37)$$

⁴Não há produção de entropia. Fluido em que não ocorrem processos dissipativos.

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (3.38)$$

chamadas *equações de Friedmann*. Eliminando $\ddot{a}$ de (3.37) e (3.38) resulta na forma muitas vezes mais conveniente

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.39)$$

A lei de conservação da energia pode ser obtida das equações de campo (3.37) e (3.38) ou de $T^{0\nu}_{;\nu} = 0$,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.40)$$

Temos então duas equações independentes para três funções a determinar, $a(t)$, ρ e p . Para completar o sistema de equações, é necessário ainda uma relação entre ρ e p ; esta relação é dada por uma *equação de estado* para a matéria.

Em termos do parâmetro cosmológico observacional H_0 , (3.11), a equação de Friedmann permite fixar um critério para determinar a curvatura espacial k ,

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (3.41)$$

que corresponde à densidade de energia crítica atual, ρ_{cr} , para a qual a curvatura espacial é zero (espaço plano). Se $\rho_0 > \rho_{cr}$, $k = 1$ e o espaço é esférico e se $\rho_0 < \rho_{cr}$, $k = -1$ e o espaço é hiperbólico.

Em forma adimensional, a equação de Friedmann (3.39) pode ser escrita em termos do parâmetro cosmológico H_0 ,

$$\Omega_m + \Omega_k = 1 \quad (3.42)$$

em que $\Omega_m = 8\pi G\rho/3H_0^2$ e $\Omega_k = -\kappa/H_0^2 a_0^2$. As observações atuais se mostram a favor de um Universo espacialmente plano, com precisão da ordem de 1% [6]. No que se segue, assumiremos $\kappa = 0$ para a curvatura escalar do espaço.

Vejamos então como as equações de Friedmann levam à evolução do fator de escala, dada uma equação de estado para a matéria.

3.3.3 Matéria Bariônica

A mais simples equação de estado é a de um fluido que não exerce pressão, $p = 0$. Um fluido de galáxias em escala cosmológica se comporta como um fluido sem pressão. As galáxias e aglomerados são, a princípio, formados pela matéria visível (que interage

eletromagneticamente) e é chamada *matéria bariônica*, composta basicamente de prótons, nêutrons e elétrons.

Para um Universo preenchido por um fluido de matéria bariônica $p = 0$, a conservação da energia (3.40) fornece

$$\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} = -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.43)$$

que integrada

$$\ln \rho_m = -3 \ln a + C, \quad \rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (3.44)$$

e substituída na equação de Friedmann (3.39) leva a

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3a_0^{-3}} \right) a^{-1/2}, \quad (3.45)$$

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (3.46)$$

De (3.38), vemos que, como $\rho > 0$,

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho < 0 \quad (3.47)$$

levando a uma desaceleração na taxa de expansão. Os parâmetros cosmológicos podem então ser determinados,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (3.48)$$

$$H = \frac{2}{3t}, \quad (3.49)$$

$$q_0 = 1/2, \quad (3.50)$$

$$\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (3.51)$$

3.3.4 Radiação

O tensor energia-momento para o campo eletromagnético é construído com o tensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, [23],

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} + \frac{1}{4} F^{\sigma\rho} F_{\sigma\rho} g_{\mu\nu} \right]. \quad (3.52)$$

$F^{\mu\nu}$ é antissimétrico e consequentemente apresenta traço nulo. Impondo a condição de traço nulo a (3.33)

$$\rho - 3p = 0, \quad (3.53)$$

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad (3.54)$$

ganhamos a equação de estado para um fluido de radiação. Com a relação entre pressão e densidade de energia determinada podemos integrar a lei de conservação da energia (3.40),

$$\dot{\rho}_r = -4\frac{\dot{a}}{a}(\rho_r) \quad (3.55)$$

e chegar à evolução de ρ_r

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}. \quad (3.56)$$

A densidade de energia da radiação cai com a^{-4} , mais rapidamente que a matéria bariônica. Substituindo este resultado nas equações de Friedmann encontramos a evolução temporal do fator de escala

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3a_0^{-4}} \right) a^{-2}, \quad (3.57)$$

$$a \propto t^{1/2}, \quad (3.58)$$

e a equação para a aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.59)$$

e novamente temos uma expansão desacelerada. Os parâmetros cosmológicos correspondentes são

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}, \quad (3.60)$$

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (3.61)$$

$$H = \frac{1}{2t}, \quad (3.62)$$

$$q_0 = 1, \quad (3.63)$$

$$\rho_r = \frac{3}{32\pi G t^2}. \quad (3.64)$$

3.3.5 Matéria Bariônica e Radiação

Para uma mistura de matéria e radiação não-interagentes vamos escrever as equações de estado em função de um parâmetro ω para uma notação mais concisa. Deste modo, para a matéria bariônica e radiação temos

$$p = \omega \rho \quad (3.65)$$

com

$$\omega_m = 0, \quad \omega_r = 1/3, \quad (3.66)$$

respectivamente. $p = \omega\rho$ é chamada uma *equação barotrópica de estado*. De (3.39) e (3.40)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r), \quad (3.67)$$

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_m), \quad (3.68)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \omega), \quad (3.69)$$

onde a energia se conserva separadamente para cada fluido (não-interagentes). Em termos dos parâmetros cosmológicos temos que

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_r \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}}. \quad (3.70)$$

Modelando o Universo com matéria usual (radiação e matéria bariônica) percebemos que:

- A soma das contribuições de radiação e matéria bariônica matéria visível interage eletromagneticamente perfaz um total da ordem de 5% da densidade crítica, [10]. O Universo necessita de um ajuste hiperfino nas condições iniciais de densidade de energia para que tenhamos $\kappa = 0$. Este é o *problema da planura*.
- O horizonte de partículas,

$$d_p(t) = a(t) \int \frac{cdt'}{a(t')}, \quad (3.71)$$

define a esfera causal de um observador. Regiões que hoje estão entrando em nosso horizonte causal apresentam a mesma uniformidade na RCF que regiões anteriormente causalmente desconexas. Este é o *problema do horizonte*.

Somam-se a estes problemas mais dois fatos observacionais: a dinâmica de galáxias e a expansão acelerada.

Na dinâmica de galáxias citamos dois casos. As curvas de rotação de galáxias não se mostram condizentes com a distribuição de matéria visível observada [34] e

interações entre galáxias apresentam distorção por efeito de lente gravitacional não condizente com a matéria visível observada [28]. Em ambos os casos há um déficit de matéria. Por não ser observada, esta forma de matéria não interage eletromagneticamente, e por isso é chamada de *matéria escura*. Este problema observado em escala galáctica é também fundamental em escala cosmológica, como veremos mais abaixo.

Outro fato observacional veio mudar radicalmente o panorama da cosmologia; a aceleração do fator de escala do Universo. Observações de velas-padrão *supernovas Tipo 1A* revelaram que o Universo está em expansão acelerada [16]. Algum tipo de componente com pressão negativa ($\omega < -1/3$) não observado está acelerando o Universo atual ($\ddot{a} > 0$). Este componente recebeu o nome de *energia escura*.

Separamos os problemas acima em duas partes, *inflação* e *setor escuro*.

3.4 Inflação

Para tratar os dois primeiros problemas acima, foi proposta por Alan Guth, [9], a idéia de inflação cosmológica. A inflação seria um período da evolução do Universo em que a expansão do fator de escala teria sido exponencial.

O problema da planura é resolvido pela inflação já que uma região com certa curvatura, quando esticada para uma escala muito maior irá se mostrar espacialmente plana⁵.

O problema do horizonte causal é reinterpretado pelo paradigma inflacionário, que afasta regiões causalmente conectadas no início da inflação para além do horizonte de partículas ao fim do período inflacionário. Estas regiões voltam a entrar em contato quando seus horizontes de partícula se encontram em determinado tempo t .

Para gerar um período inflacionário, é usual partir de um componente de matéria descrito por um campo escalar, genericamente chamado de *inflaton*. Tal campo escalar apresenta a seguinte densidade de Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.72)$$

que junto com (2.104) e (3.32) fornece a relação entre pressão e densidade de energia deste campo escalar

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.73)$$

⁵A analogia é a de um balão que é inflado para muitas vezes o seu tamanho inicial.

Se assumirmos que $\dot{\phi}^2$ varia lentamente em relação ao potencial V , $\dot{\phi}^2 \ll V$, e temos a relação

$$p = -\rho, \quad (3.74)$$

garantindo que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.75)$$

levando a uma expansão acelerada do fator de escala. De (3.39)

$$\frac{\dot{a}}{a} = \text{constante}, \quad (3.76)$$

$$a(t) \propto e^{t/\tau} \quad (3.77)$$

ganhamos uma expansão exponencial para o fator de escala.

3.5 Setor Escuro

3.5.1 Energia Escura

Para descrever a atual expansão acelerada observada, é necessário termos uma pressão negativa $\omega < -1/3$ no caso de uma equação barotrópica de estado (3.65) para que $\ddot{a} > 0$. Das muitas propostas para modelar a atual aceleração do Universo (quintessência, gás de Chaplygin, teorias alternativas para a gravidade entre outras), mostraremos a mais consagrada, o modelo da *constante cosmológica*. Este segue diretamente de uma constante nas equações de Einstein (2.134), conhecido como termo da constante cosmológica Λ . A este termo está associada uma densidade de energia

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.78)$$

e assim como em (3.74) uma pressão

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad (3.79)$$

que da equação de Friedmann (3.38) leva a $\ddot{a} > 0$. Associa-se ρ_Λ a uma energia de vácuo, mas a previsão de teoria quântica de campos para esta energia de vácuo é 120 ordens de grandeza maior que o valor necessário para explicar a atual aceleração do Universo, $\rho_\Lambda = 10^{-47} GeV$ [31], para $q_0 = -0,58$. Seu valor estimado atualmente corresponde a cerca de 68% da densidade de energia atual do Universo [6]. Este é o problema da constante cosmológica.

Em termos de parâmetros cosmológicos, a evolução do fator de escala é dada por

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_r \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_\Lambda}. \quad (3.80)$$

3.5.2 Matéria Escura

A matéria escura é descrita apenas por sua característica de interação gravitacional. Por não interagir eletromagneticamente⁶ a matéria escura é modelada por um fluido sem pressão ($\omega = 0$).

As estimativas da presença de matéria escura no Universo apontam para $\Omega_{me} \sim 27\%$; uma abundância muito maior que a da matéria bariônica, $\Omega_{mb} \sim 5\%$ da densidade total de energia [6].

Assim como em (3.59), a contribuição da matéria escura para a dinâmica do Universo é de desacelerar a expansão. Sua relevância no contexto cosmológico surge também como necessidade na descrição dos processos de formação de estruturas (4).

Como a densidade de matéria escura é muito maior que a densidade de matéria bariônica e radiação, $\rho_{me} \gg \rho_m$, podemos expressar a dinâmica do fator de escala por

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{me} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_\Lambda} \quad (3.81)$$

Este é o modelo Λ CDM⁷, que é o que melhor se encaixa com os dados observacionais [10].

3.6 Equação de Estado de van der Waals

A equação de estado de *van der Waals* usada no contexto cosmológico [20], [19] e faz parte do grupo das equações de estado *exóticas*. Sua forma usual é

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (3.82)$$

onde $v = V/N$ é o recíproco da densidade de número de partículas com N sendo o número de partículas, R é a constante dos gases, T , a temperatura e a e b constantes

⁶Ou por sua interação eletromagnética ser desprezível.

⁷CDM é a sigla em inglês para Cold Dark Matter, matéria escura fria (não-relativística).

que caracterizam a atração intermolecular e o volume excluído em colisões binárias, respectivamente.

Expressando a (3.82) em relação às variáveis críticas [32]

$$p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad v_c = 3b, \quad T_r = \frac{8a}{27Rb} \quad (3.83)$$

temos a equação em sua forma reduzida

$$p_r = \frac{8T_r}{3v_r - 1} - \frac{3}{v_r^2}. \quad (3.84)$$

É usual definir o parâmetro $\omega(T)$, assim como no caso da equação de estado barotrópica, associado à temperatura, e também realizar a troca $v^{-1} = \rho$, de maneira que

$$p = \frac{8\omega\rho}{3 - \rho} - 3\rho^2 \quad (3.85)$$

é a forma da equação de van der Waals usada no contexto cosmológico.

Substituindo (3.85) na equação de conservação da energia (3.40) e integrando, obtemos

$$\int d\rho \frac{(\rho - 3)}{\rho(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)} = 3 \int \frac{da}{a}. \quad (3.86)$$

Para o lado esquerdo da integral acima vamos precisar de

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\rho}{\rho(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)} = \\ & \frac{1}{2(8\omega + 3)} \ln \left(\frac{\rho^2}{3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3} \right) + \frac{5}{8\omega + 3} \int \frac{d\rho}{3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3} \end{aligned} \quad (3.87)$$

juntamente com

$$\int \frac{d\rho}{(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)} \quad (3.88)$$

que possui as soluções a seguir, dependentes do parâmetro ω ,

$$\begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{4-6\omega}} \ln \left(\frac{3\rho + 5 - 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho + 5 + 2\sqrt{4-6\omega}} \right) & \text{para } \omega < 2/3 \\ \frac{1}{2\sqrt{4-6\omega}} \arctan \left(\frac{3\rho - 5}{2\sqrt{6\omega - 4}} \right) & \text{para } \omega > 2/3 \end{cases} \quad (3.89)$$

Para $\omega = 2/3$, o polinômio no denominador das integrais (3.87) e (5.13) pode ser agrupado em um quadrado perfeito e usamos as soluções

$$\int \frac{d\rho}{(\rho - 5/3)^2} = -\frac{1}{(\rho - 5/3)}, \quad (3.90)$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho(\rho - 5/3)^2} = -\frac{3}{5(\rho - 5/3)} + \frac{9}{25} \ln \left(\frac{\rho}{\rho - 5/3} \right) \quad (3.91)$$

Chegamos então às seguintes soluções para $0 < \omega < \frac{2}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3} < \omega$:

- $0 < \omega < \frac{2}{3}$:

$$a(\rho) = C_1 \rho^{-\frac{1}{8\omega+3}} (3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{\frac{1}{2(8\omega+3)}} \left(\frac{3\rho + 5 - 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}} \quad (3.92)$$

- $\omega = \frac{2}{3}$

$$a(\rho) = C_2 \left(\frac{\rho - 5/3}{\rho} \right)^{3/25} \exp \left[\frac{4}{15} \left(\frac{1}{3\rho - 5} \right) \right], \quad (3.93)$$

- $\omega > \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \frac{C_3}{\rho^{\frac{1}{8\omega+3}}} (3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{\frac{1}{2(8\omega+3)}} \\ &\times \exp \left[\frac{4\omega - 6}{3(8\omega + 3)\sqrt{6\omega - 4}} \arctan \left[\frac{3\rho - 5}{2\sqrt{6\omega - 4}} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

No limite assintótico $\rho \rightarrow 0$, a equação de van der Waals tende a

$$p \rightarrow \frac{8\omega}{3} \rho, \quad (3.95)$$

e as soluções acima fornecem

$$a(\rho) \rightarrow \rho^{-\frac{1}{8\omega+3}}. \quad (3.96)$$

Para $\omega = 0$, a pressão corresponde a $-3\rho^2$ e a conservação da energia fornece

$$3 \frac{da}{a} = \frac{d\rho}{\rho(3\rho - 1)}. \quad (3.97)$$

Integrando a expressão acima encontramos a dependência do fator de escala com a densidade de energia,

$$a(\rho) = C_4^{-1/3} \left(\frac{3\rho - 1}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (3.98)$$

Isolando ρ e substituindo na equação de Friedmann obtemos

$$\frac{\sqrt{C_4^* a^3 + 3}}{a} da = \frac{1}{\sqrt{3}} dt \quad (3.99)$$

que tem como solução

$$\frac{\sqrt{3}}{2} t = \sqrt{C_4 a^3 + 3} + \sqrt{3} \ln \left[\frac{a^{3/2}}{2\sqrt{3(C_4 a^3 + 3)} + 6} \right] + C_0. \quad (3.100)$$

A equação acima apresenta limites assintóticos interessantes; para $a \ll 1$ temos

$$\ln a^{3/2} = \frac{t}{2} + C_5, \quad (3.101)$$

$$a \propto \exp \frac{t}{3}, \quad (3.102)$$

correspondendo a um regime inflacionário e para $a \gg 1$,

$$a \propto t^{2/3}, \quad (3.103)$$

correspondendo a um regime de domínio de matéria ($p \simeq 0$).

Da conservação da energia impomos $\dot{\rho} < 0$ para que a densidade de energia decresça com o tempo, resultando em

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho \left[\frac{3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3}{3 - \rho} \right] < 0, \quad (3.104)$$

e

$$\rho < \frac{5 - 2\sqrt{4 - 6\omega}}{3} \quad ou \quad \rho > \frac{5 + 2\sqrt{4 - 6\omega}}{3} \quad (3.105)$$

Para um regime de aceleração positiva temos a condição $\rho + 3p < 0$ que implica em

$$\ddot{a} = -4\pi G a \rho \left[\frac{9\rho^2 - 28\rho + 24\omega + 3}{3 - \rho} \right] > 0 \quad (3.106)$$

e

$$\frac{28 - \sqrt{28^2 - 36(24\omega + 3)}}{18} < \rho < \frac{28 + \sqrt{28^2 - 36(24\omega + 3)}}{18}. \quad (3.107)$$

Da relação (3.105) acima temos, para a condição de densidade de energia inicial,

$$\rho_0 = \frac{5 - 2\sqrt{4 - 6\omega}}{3} \quad (3.108)$$

que fornece uma densidade de energia finita correspondendo ao início da expansão cosmológica. Com a densidade de energia inicial substituída na equação de van der Waals encontramos, para a pressão inicial,

$$p_0 = -\frac{5 - 2\sqrt{4 - 6\omega}}{3} = -\rho_0 \quad (3.109)$$

resultando em um período de inflação cosmológica.

Outra solução assintótica interessante surge de (3.92) para $\omega = 1/8$. No limite $\rho \rightarrow 0$,

$$a \propto \rho^{-1/4}, \quad (3.110)$$

$$a \propto t^{1/2}, \quad (3.111)$$

recaindo em um regime de radiação.

A dinâmica é dada pelo sistema (3.39) e (3.40) que resulta em

$$\dot{H} + \frac{3}{2} \left[H^2 + \frac{8\omega H^2}{3 - 3H^2/8\pi G} - 9H^2/8\pi G \right] = 0 \quad (3.112)$$

onde diferenciamos (3.39) e substituímos (3.40). A seguir temos como exemplo o caso $\omega = 1/8$, $\rho_0 = (5 - \sqrt{13})/3$, cuja solução numérica fornece a evolução da densidade de energia e da pressão, $\rho(t)$ e $p(t)$, do fator de escala, $a(t)$ e da aceleração $\ddot{a}(t)$.

A figura (3.2) mostra a evolução temporal da pressão e da densidade de energia e a figura seguinte, (3.3), evidencia a mudança no regime de aceleração, de acelerado para desacelerado, a medida em que a pressão transita de valores negativos para positivos e a densidade de energia se dilui. Na figura (3.4) temos o comportamento do fator de escala, cuja taxa de expansão diminui devido ao início do período desacelerado.

Este é o pano de fundo — de agora em diante, *background* — de um Universo preenchido por um fluido de van der Waals.

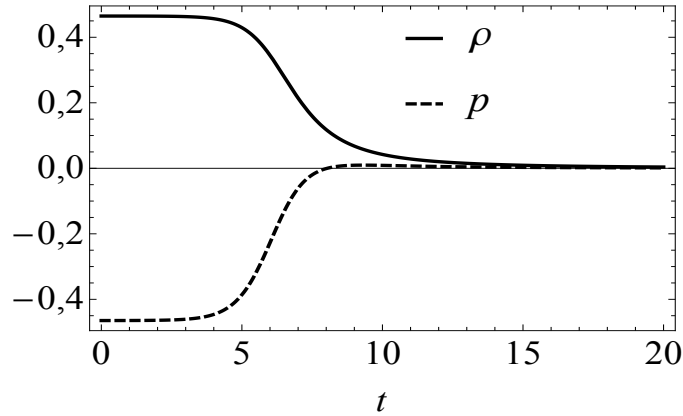


Figura 3.2: Densidade de energia $\rho(t)$ e pressão $p(t)$

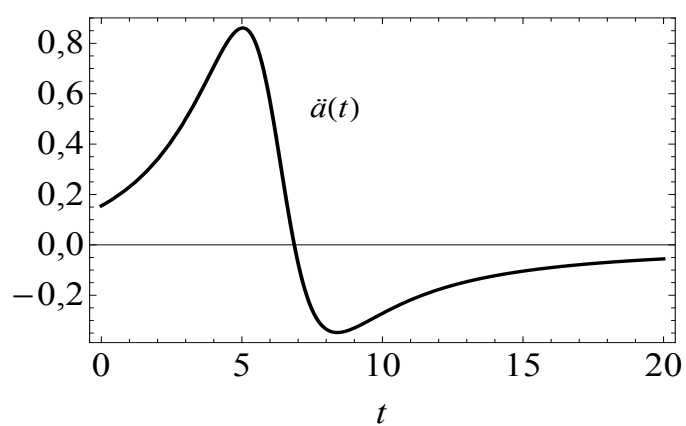


Figura 3.3: Aceleração $\ddot{a}(t)$

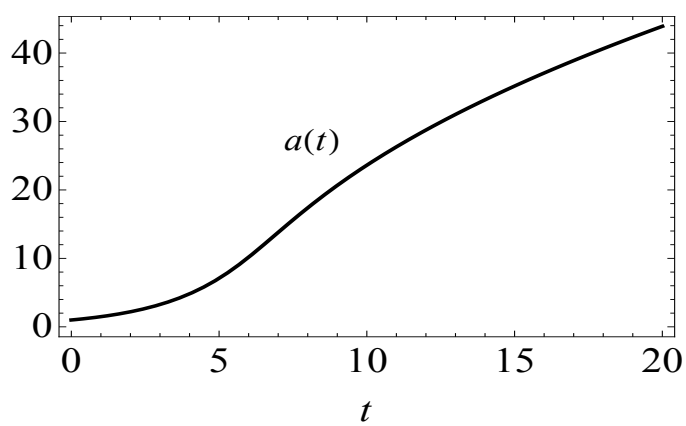


Figura 3.4: Evolução temporal do fator de escala $a(t)$

Capítulo 4

Instabilidade Gravitacional

A evolução do *background* do espaço-tempo dada pelas equações de Friedmann leva em conta homogeneidade e isotopia da geometria espacial. Uma simples observação do céu a olho nu nos mostra uma distribuição não-homogênea e anisotrópica de matéria no espaço. Esta distribuição de matéria é parte das *estruturas* observáveis — sistemas estelares, aglomerados, galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados de galáxias.

A observação do céu na faixa de micro-ondas (figura 3.1) mostra inhomogeneidades da ordem de 10^{-5} [10]. Estas flutuações na densidade, $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}$ ¹, gravadas na radiação cósmica de fundo quando o Universo era jovem (época da recombinação, $\sim 3 \times 10^5$ anos) evoluíram para as estruturas observadas atualmente.

As flutuações na densidade de matéria escura formam poços gravitacionais que aglutinam o fluido ionizado de bárions e elétrons que, ao se combinarem em átomos neutros, permitem que a radiação se propague livremente, levando impressas as flutuações de densidade de matéria bariônica.

A instabilidade gravitacional é responsável pela formação destas estruturas. Heuristicamente, podemos visualizar a instabilidade gravitacional como resultado do balanço entre a força gravitacional e a força devido à pressão hidrostática. Pequenas flutuações de densidade $\delta\rho$ em uma região de escala λ_{fis} sobre um *background* de densidade homogênea ρ dão origem a pequenas variações de força gravitacional e de pressão. Em termos de força por unidade de massa, quando a força gravitacional é maior que a pressão do fluido,

$$F_g > F_p, \quad (4.1)$$

¹ δ recebe o nome de contraste de densidade.

$$\frac{GM}{\lambda_{fis}^2} > \frac{p\lambda_{fis}^2}{\rho\lambda_{fis}^3}, \quad (4.2)$$

temos o colapso gravitacional desta região. Esta análise nos dá um critério para a formação de estruturas, o *comprimento de Jeans*, λ_J ,

$$\lambda_J = \frac{v_s}{\sqrt{G\rho}}, \quad (4.3)$$

onde usamos $v_s^2 \simeq p/\rho$ no lado direito da desigualdade (4.2). Associado a λ_J temos o *número de onda de Jeans* e a *massa de Jeans*,

$$k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J}, \quad M_J = \rho V_J = \frac{4\pi}{3}\rho \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3. \quad (4.4)$$

Para uma região de tamanho característico $\lambda_{fis} < \lambda_J$, as flutuações crescem, para $\lambda_{fis} > \lambda_J$, as perturbações se propagam como ondas acústicas, [33], [34], [13]. O *raio de Hubble*, d_H

$$d_H = \frac{1}{H} \quad (4.5)$$

permite distinguir dois regimes para as flutuações; $\lambda_{fis} < d_H$ corresponde a perturbações dentro da escala de Hubble e $\lambda_{fis} > d_H$ corresponde a perturbações fora da escala de Hubble que adentrarão esta escala em tempos futuros. Flutuações para as quais $\lambda_{fis} < d_H$ podem ser tratadas pela descrição Newtoniana e flutuações para as quais $\lambda_{fis} > d_H$ são tratadas apenas relativisticamente.

As flutuações são tratadas por uma teoria perturbativa, linear e não-linear. A teoria linear de perturbações opera no regime $\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 1$ e é capaz de modelar a formação de estruturas em larga escala² $\sim 10^{23}m$ sobre um *background* homogêneo. Estruturas menores, aglomerados de galáxias e galáxias, são descritas pelo regime não-linear, $\frac{\delta\rho}{\rho} \gg 1$, apresentando uma dinâmica muito mais complexa, [27].

Exporemos aqui a teoria de perturbações lineares em que as flutuações de densidade são pequenas e não são influenciadas pela dinâmica das estruturas de escalas menores, mas sim pela dinâmica da expansão do *background*.

4.1 Equações de Campo Perturbadas

Para pequenas perturbações, o tensor de Einstein e o tensor energia-momento podem ser escritos, em aproximação de primeira ordem de perturbação, como $\dot{G}_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu$,

²Superaglomerados de galáxias, filamentos, vazios e paredes [35].

$\dot{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$ devido a uma perturbação na métrica e nos potenciais hidrodinâmicos. $\dot{G}_\nu^\mu$ e $\dot{T}_\nu^\mu$ são a ordem zero de perturbação, e são invariantes por transformações de coordenadas. Ao explorarmos o comportamento de δG_ν^μ e δT_ν^μ sob transformações gerais de coordenadas, podemos construir uma descrição invariante que leva a um sistema de equações diferenciais para as perturbações.

4.1.1 Transformações de Gauge

Sob uma transformação infinitesimal de coordenadas

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \quad (4.6)$$

o tensor métrico sofre uma transformação dada por (2.106). Considerando pequenas perturbações, $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$, e retendo apenas a primeira ordem de perturbação, é possível decompor a métrica como uma perturbação $\delta g_{\mu\nu}$ sobre o *background* homogêneo e isotrópico $\dot{g}_{\mu\nu}$,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \dot{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Seguindo o desenvolvimento (2.106)–(2.110) para as componentes covariantes da métrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (4.8)$$

e substituindo a decomposição (4.7), encontramos a transformação das perturbações sob (4.6), $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu}$,

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \zeta^\rho \frac{\partial \dot{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \dot{g}_{\rho\nu} \frac{\partial \zeta^\rho}{\partial x^\mu} - \dot{g}_{\mu\rho} \frac{\partial \zeta^\rho}{\partial x^\nu}. \quad (4.9)$$

É interessante decompor a parte espacial de $\zeta^\mu = (\zeta^0, \zeta^i)$ em vetor longitudinal e vetor transversal,

$$\zeta^i = \zeta_\perp^i + \zeta_\parallel^i \quad (4.10)$$

o vetor transversal tem divergência nula, $\partial_i \zeta_\parallel^i = 0$ e o vetor longitudinal, rotacional nulo, e por isso pode ser escrito como o gradiente de um escalar ζ ,

$$\zeta^i = \zeta_\perp^i + \partial^i \zeta \quad (4.11)$$

de modo que a parte espacial de ζ^μ está decomposta em uma contribuição puramente vetorial e outra derivada de um escalar.

Vejamos como se comportam as perturbações de primeira ordem para o tensor energia-momento e para o tensor de Einstein sob uma transformação de gauge. Por praticidade, trabalharemos com as componentes mistas.

T_ν^μ se transforma sob (4.6) como

$$\tilde{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} T_\sigma^\rho \quad (4.12)$$

juntamente com a decomposição $g_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ levam a

$$\delta \tilde{T}_\nu^\mu = \delta T_\nu^\mu - \zeta^\rho \partial_\rho \dot{T}_\nu^\mu - \dot{T}_\rho^\mu \partial_\nu \zeta^\rho + \dot{T}_\nu^\rho \partial_\rho \zeta^\mu. \quad (4.13)$$

Das simetrias espaciais, T_j^i é proporcional ao delta de Kronecker, $T_i^j = C \delta_i^j$ então, $C = T_j^j/3$ e as equações acima podem ser separadas em

$$\delta \tilde{T}_0^0 = \delta T_0^0 - \partial_0(\dot{T}_0^0) \zeta^0, \quad (4.14)$$

$$\delta \tilde{T}_i^0 = \delta T_0^i - (\dot{T}_0^0 - \dot{T}_k^k/3) \partial_i \zeta^0, \quad (4.15)$$

$$\delta \tilde{T}_j^i = \delta T_i^j - \partial_0(\dot{T}_j^i) \zeta^0. \quad (4.16)$$

Como T_ν^μ e R_ν^μ possuem as mesmas simetrias espaciais, o procedimento para determinar $\delta \tilde{T}_{\mu\nu} \rightarrow \delta T_{\mu\nu}$ e $\delta \tilde{G}_{\mu\nu} \rightarrow \delta G_{\mu\nu}$ é análogo,

$$\delta \tilde{G}_0^0 = \delta G_0^0 - \partial_0(\dot{G}_0^0) \zeta^0, \quad (4.17)$$

$$\delta \tilde{G}_i^0 = \delta G_0^i - (\dot{G}_0^0 - \dot{G}_k^k/3) \partial_i \zeta^0, \quad (4.18)$$

$$\delta \tilde{G}_j^i = \delta G_i^j - \partial_0(\dot{G}_j^i) \zeta^0. \quad (4.19)$$

Podemos também inferir o comportamento de perturbações escalares e vectoriais sob uma transformação de gauge. Decompondo em termo de perturbação e termo de *background*,

$$s(x) = \dot{s}(x) + \delta s, \quad (4.20)$$

$$v_\mu(x) = \dot{v}_\mu(x) + \delta v_\mu, \quad (4.21)$$

e aplicando a transformação (4.6), seguimos o mesmo procedimento de (2.106)–(2.109) e chegamos às transformações

$$\delta \tilde{s} = \delta s - \zeta^\mu \partial_\mu \dot{s}, \quad (4.22)$$

$$\delta \tilde{v}_\mu = \delta v_\mu - \dot{v}_\rho \partial_\mu \zeta^\rho - \zeta^\rho \partial_\rho \dot{v}_\mu. \quad (4.23)$$

Notemos que as transformações (4.9), (4.22) e (4.21) dependem apenas das quantidades do *background* e de ζ^μ . Toda a responsabilidade sobre a forma de representar as perturbações está sobre ζ^μ .

4.1.2 Perturbações da Métrica

A decomposição da métrica $g_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ permite, devido à homogeneidade e isotropia espacial de $\dot{g}_{\mu\nu}$, desacoplar as componentes da métrica perturbada $\delta g_{\mu\nu}$ nos modos *escalar*, *vetorial* e *tensorial* [35], [28].

Para preservar a invariância sob rotações espaciais, δg_{00} se comporta como um escalar, δg_{0i} como um 3-vetor e δg_{ij} como um 3-tensor. Escolhemos $\delta g_{00} = 2\phi$ e representamos δg_{0i} e δg_{ij} em forma irredutível como

$$\delta g_{0i} = a^2(\partial_i E + C_i), \quad (4.24)$$

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j B + \partial_j D_i + \partial_i D_j + h_{ij}). \quad (4.25)$$

As funções independentes da perturbação da métrica correspondem aos *potenciais de perturbação gravitacional* ϕ , E , C_i , B , ψ , D_i e h_{ij} , com $h_{ij} = h_{ji}$, que juntamente com os vínculos

$$\partial^i C_i = \partial^i D_i = 0, \quad h_i^i = \partial^i h_{ij} = 0, \quad (4.26)$$

garantem a simetria de $\delta g_{\mu\nu}$ e nos deixam 10 funções independentes das 16 componentes da métrica perturbada (4 funções escalares, 6-2=4 componentes vetoriais e 9-3-1-3=2 componentes tensoriais).

Reescrevendo a métrica em termos das perturbações *escalares*, *vetoriais* e *tensoriais*

$$g_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}^{(e)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)}, \quad (4.27)$$

encontramos

$$\delta g_{\mu\nu}^{(e)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & \partial_i E \\ \partial_i E & 2\psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j B \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & C_i \\ C_i & \partial_j D_i + \partial_i D_j \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Cada modo de perturbações evolui separadamente. O modo escalar (4.28) é o modo mais interessante para formação de estruturas, pois é onde a instabilidade gravitacional é manifesta. O modo vetorial da origem a perturbações que decaem com o fator de escala e por isso não são interessantes para a formação de estruturas, [28], [35]. O modo tensorial representa ondas gravitacionais e a densidade de energia irradiada cai com a^{-4} , não contribuindo para o aumento das flutuações.

Perturbações Escalares da Métrica

As perturbações escalares apresentam maior interesse pois possibilitam formação de estruturas amplificando flutuações de densidade. Vejamos como construir uma descrição invariante destas perturbações [35]. Da equação (4.9) determinamos como as perturbações da métrica se transformam sob (4.6). Fazendo uso da decomposição $\zeta^i = \zeta_{\perp}^i + \zeta_{\parallel}^i = \zeta_{\perp}^i + \partial^i \zeta$ encontramos, para as transformações das perturbações

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\zeta^0)' \quad (4.31)$$

$$\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2[\zeta'_{\perp i} + \partial_i(\zeta' - \zeta^0)] \quad (4.32)$$

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2 \left[2\frac{a'}{a}\zeta^0\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j\zeta + (\partial_i\zeta_{\perp j} + \partial_j\zeta_{\perp i}) \right] \quad (4.33)$$

Das equações acima juntamente com (4.28) é possível então determinar a transformação das *perturbações escalares* ψ , ϕ , A e B sob (4.6), desconsiderando as contribuições vetoriais de $\zeta_{\perp}^i$ e tensoriais h_{ij}

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\zeta^0)' \quad (4.34)$$

$$\partial_i \tilde{E} = \partial_i E + \partial_i(\zeta' - \zeta^0) \quad (4.35)$$

$$\tilde{\psi}\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\tilde{B} + \tilde{h}_{ij} = \psi\delta_{ij} + \partial_i\partial_j B + h_{ij} + \left[\frac{a'}{a}\zeta^0\delta_{ij} + \partial_i\partial_j\zeta \right] \quad (4.36)$$

resultando em

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\zeta^0)' \quad (4.37)$$

$$\tilde{E} = E + \zeta' - \zeta^0 \quad (4.38)$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\zeta^0, \quad (4.39)$$

$$\tilde{B} = B + \zeta. \quad (4.40)$$

Das equações acima obtemos

$$\zeta^0 = \tilde{E}' - \tilde{B} + B - E' \quad (4.41)$$

e eliminando ζ e ζ^0 ganhamos

$$\tilde{\phi} - \phi = -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{a'} (\tilde{\psi} - \psi) \right]' \quad (4.42)$$

$$\tilde{\psi} - \psi = \frac{a'}{a} (\tilde{E}' - \tilde{B} + B - E') \quad (4.43)$$

que se rearranjam em

$$\tilde{\phi} - \frac{1}{a}[a(\tilde{B} - \tilde{E}')] = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')] \quad (4.44)$$

$$\tilde{\psi} + \frac{a'}{a}(\tilde{B} - \tilde{E}') = \psi + \frac{a'}{a}(B - E') \quad (4.45)$$

mostrando que as perturbações escalares definidas como

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')] \quad (4.46)$$

$$\Psi = \psi + \frac{a'}{a}(B - E') \quad (4.47)$$

são invariantes de gauge.

Uma escolha de gauge que se mostra muito conveniente para a determinação das equações de perturbação é o *gauge longitudinal*, em que fazemos

$$E = 0 \quad B = 0. \quad (4.48)$$

A perturbação escalar da métrica neste caso fica

$$\delta g_{\mu\nu}^{(e)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & 0 \\ 0 & 2\psi\delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

4.1.3 Perturbações do Tensor de Einstein

A transformação das perturbações do tensor de Einstein (4.17)-(4.19) permite, com o auxílio de (4.41), reescrever a perturbação na forma invariante

$$\overline{\delta G_0^0} = \delta G_0^0 - \partial_i(\dot{G}_0^0)(B - E'), \quad (4.50)$$

$$\overline{\delta G_i^0} = \delta G_i^0 - (\dot{G}_0^0 - \dot{G}_k^k/3)\partial_i(B - E'), \quad (4.51)$$

$$\overline{\delta G_j^i} = \delta G_j^i - \partial_0(\dot{G}_j^i)(B - E'). \quad (4.52)$$

No *gauge longitudinal*,

$$\overline{\delta G_0^0} = \delta G_0^0, \quad \overline{\delta G_i^0} = \delta G_i^0, \quad \overline{\delta G_j^i} = \delta G_j^i \quad (4.53)$$

e é suficiente então determinar as componentes de δG_ν^μ a partir das perturbações escalares (4.28) para uma descrição invariante das perturbações do tensor de Einstein.

Com as componentes da métrica não-perturbada (3.9) espacialmente plana, $\kappa = 0$,

$$g_{00} = a^2, \quad g_{ij} = -a^2\delta_{ij} \quad (4.54)$$

determinamos a 4-velocidade comóvel, $u_\mu = (a, 0, 0, 0)$, os símbolos de Christoffel não-perturbados (2.46) não-nulos

$$\dot{\Gamma}_{ij}^0 = -a'\delta_{ij}, \quad \dot{\Gamma}_{0j}^i = -\frac{a'}{a^2}\delta_j^i, \quad (4.55)$$

o tensor de Ricci (2.94) e a curvatura escalar (2.95)

$$\dot{R}_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad \dot{R}_{ij} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij}, \quad \dot{R} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right), \quad (4.56)$$

que em função do tempo conforme ficam

$$\dot{R}_{00} = -3\left(\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4}\right), \quad (4.57)$$

$$\dot{R}_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right)\delta_{ij}, \quad (4.58)$$

$$\dot{R} = -6\frac{a''}{a^3}. \quad (4.59)$$

Os símbolos de Christoffel perturbados são construídos de

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu \delta g_{\nu\rho} + \partial_\nu \delta g_{\mu\rho} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}) \quad (4.60)$$

juntamente com a perturbação escalar da métrica (4.28). As componentes não-nulas são

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = [2\mathcal{H}(\phi - \psi) + \psi']\delta_{ij}, \quad (4.61)$$

$$\delta\Gamma_{00}^0 = \phi', \quad (4.62)$$

$$\delta\Gamma_{0j}^i = \psi'\delta_j^i, \quad (4.63)$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 = \delta\Gamma_{00}^i = \partial^i\phi, \quad (4.64)$$

onde definimos $\mathcal{H} \equiv a'/a$, de modo que $\mathcal{H} = aH$. Com os símbolos de Christoffel perturbados e não-perturbados (4.55)-(4.64) determinamos a perturbação do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \dot{\Gamma}_{\rho\lambda}^\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \dot{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho \delta\Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \dot{\Gamma}_{\rho\mu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \dot{\Gamma}_{\lambda\nu}^\rho \delta\Gamma_{\rho\mu}^\lambda \quad (4.65)$$

e a perturbação do escalar de curvatura

$$\delta R = \dot{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \dot{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (4.66)$$

A relação $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$ com a decomposição

$$g_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (4.67)$$

resulta na relação entre as componentes covariantes e contravariantes da perturbação da métrica,

$$\delta g^{\mu\nu} = -\dot{g}^{\mu\alpha}\dot{g}^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \quad (4.68)$$

Podemos agora determinar a perturbação do tensor de Einstein

$$\delta G_\nu^\mu = \delta g^{\mu\rho}\dot{R}_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\dot{g}_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}\dot{R} + \dot{g}^{\mu\rho}\delta R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\dot{g}_{\mu\rho}\dot{g}^{\mu\rho}\delta R - \frac{1}{2}\dot{g}^{\mu\rho}\delta g_{\mu\rho}\dot{R} \quad (4.69)$$

que leva às componentes

$$\delta G_0^0 = \nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi), \quad (4.70)$$

$$\delta G_i^0 = \partial_i(\Psi' + \mathcal{H}\Phi), \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= [\Psi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)]\delta_j^i \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^i\partial_j(\Phi - \Psi). \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.1.4 Perturbação do Tensor Energia-Momento

De (4.41) e (4.17)-(4.19) podemos construir a perturbação invariante do tensor energia-momento,

$$\overline{\delta T_j^i} = \delta T_0^0 - (\dot{T}_0^0)'(B - E') \quad (4.73)$$

$$\overline{\delta T_j^i} = \delta T_0^j - (\dot{T}_0^0 - T_k^k/3)\partial_i(B - E') \quad (4.74)$$

$$\overline{\delta T_j^i} = \delta T_i^j - (\dot{T}_j^i)'(B - E'). \quad (4.75)$$

que no *gauge longitudinal* ficam

$$\overline{\delta T_0^0} = \delta T_0^0, \quad \overline{\delta T_i^0} = \delta T_i^0, \quad \overline{\delta T_j^i} = \delta T_j^i. \quad (4.76)$$

Perturbando o tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$\delta T_\nu^\mu = (\delta\rho + \delta p)u^\mu u_\nu + (\rho + p)(u^\mu\delta u_\nu + u_\nu\delta u^\mu) - \delta p\delta_\nu^\mu \quad (4.77)$$

e fazendo a decomposição $\delta u^i = \delta u_\parallel^i + \delta u_\perp^i = \partial^i\delta u + \delta u_\perp^i$ vemos que as quantidades perturbadas são funções escalares, salvo a contribuição puramente vetorial $\delta u_\perp^i$. O modo tensorial está desacoplado da perturbação do tensor energia-momento de um fluido perfeito.

Com as transformações para perturbações escalares e vetoriais (4.22) e (4.23) temos que

$$\delta\tilde{\rho} = \delta\rho - \partial_0\dot{\rho}\zeta^0, \quad (4.78)$$

$$\delta\tilde{u}_0 = \delta u_0 - [a\zeta^0]', \quad (4.79)$$

$$\delta\tilde{u}_i = \delta u_i - \partial_i\zeta^0 \quad (4.80)$$

e a relação (4.41) leva às quantidades invariantes

$$\overline{\delta\rho} = \delta\rho - \partial_0\dot{\rho}(B - E'), \quad (4.81)$$

$$\overline{\delta u_0} = \delta u_0 - [a(B - E')]', \quad (4.82)$$

$$\overline{\delta u_i} = \delta u_i - a\partial_i(B - E'). \quad (4.83)$$

No *gauge longitudinal*, temos

$$\overline{\delta\rho} = \delta\rho, \quad \overline{\delta u_0} = \delta u_0, \quad \overline{\delta u_i} = \delta u_i \quad (4.84)$$

e podemos fazer a identificação

$$\delta T_0^0 = \delta\rho, \quad \delta T_i^0 = (\rho + p)u^0\delta u_{\parallel i}, \quad \delta T_j^i = -\delta p\delta_j^i. \quad (4.85)$$

4.1.5 Equações de Campo Perturbadas

Podemos agora construir as equações de campo para perturbações escalares invariantes de gauge. Com os invariantes (4.73)–(4.75) e (4.50)–(4.52), as equações de Einstein perturbadas podem ser reescritas como

$$\overline{\delta G_\nu^\mu} = 8\pi G\overline{\delta T_\nu^\mu} \quad (4.86)$$

A última igualdade de (4.85) resulta em $\delta T_j^i = 0$ para $i \neq j$, que junto com δG_j^i (4.72) levam ao vínculo

$$\partial^i\partial_j(\Phi - \Psi) = 0 \quad (4.87)$$

cuja solução fornece $\Psi = \Phi$.

Substituindo nas equações de campo perturbadas os resultados (4.70)–(4.72) e considerando apenas as contribuições escalares de (4.85), chegamos ao sistema acoplado para as perturbações escalares da métrica e perturbações hidrodinâmicas,

$$\nabla^2\phi - 3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}^2\phi = 4\pi Ga^2\overline{\delta\rho}, \quad (4.88)$$

$$\partial_i(a\phi)' = 4\pi Ga^2(\rho + p)\overline{\delta u_{\parallel i}}, \quad (4.89)$$

$$\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + 2\mathcal{H}'\phi + \mathcal{H}^2\phi = 4\pi Ga^2\overline{\delta p} \quad (4.90)$$

Na ausência de processos dissipativos, as flutuações de pressão e as flutuações de densidade de energia se relacionam através da velocidade do som

$$\overline{\delta p} = v_s^2 \overline{\delta \rho}. \quad (4.91)$$

Um possível termo de dissipação pode ser incluído [22], [28],

$$\overline{\delta p} = v_s^2 \overline{\delta \rho} + \tau \delta S \quad (4.92)$$

onde δS é um termo de produção de entropia e $\tau = \partial p / \partial S$ é um parâmetro de relaxação.

Combinando (4.88) e (4.90) juntamente com (4.92) chegamos a uma equação para a perturbação escalar gravitacional Φ ,

$$\Phi'' + 3(1 + v_s^2)\mathcal{H}\Phi' - v_s^2 \nabla^2 \Phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3v_s^2)\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S. \quad (4.93)$$

Resolvendo para Φ , determinamos $\delta\rho/\rho$ e δu de (4.88) e (4.89).

Para pequenas perturbações é possível expandir as perturbações em modos de Fourier. Cada modo k corresponde a uma solução de onda plana e evolui separadamente. Desta maneira, separamos a parte temporal da parte espacial e para um determinado k temos

$$\Phi(x, t) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Phi(\eta), \quad (4.94)$$

o mesmo valendo para as demais perturbações.

Matéria Escura e Matéria Bariônica

Como exemplo de perturbações, vejamos o caso de um Universo preenchido por matéria bariônica, ou seja, um fluido sem pressão. Neste caso, $\omega = v_s^2 = 0$. Em um Universo espacialmente plano, as equações de Friedmann para o *background* fornecem a evolução do fator de escala (3.46) que em função do tempo conforme fica

$$a \propto \eta^2, \quad \mathcal{H} = \frac{2}{\eta}. \quad (4.95)$$

Substituindo em (4.93) temos a equação para a perturbação Φ ,

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta} \Phi' = 0, \quad (4.96)$$

que tem como solução

$$\Phi = A(x) + \frac{B(x)}{\eta^5}. \quad (4.97)$$

Podemos determinar o comportamento das flutuações de densidade substituindo o resultado acima em (4.88),

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{6} \left[(\nabla^2 A(x)\eta^2 - 12A(x)) + \left(\frac{\nabla^2 B(x)}{\eta^3} + \frac{18B(x)}{\eta^5} \right) \right]. \quad (4.98)$$

A solução acima está separada em um modo de crescimento e um modo de decaimento. A dependência das perturbações de densidade com a escala está nas constantes de integração $A(x)$ e $B(x)$, que são proporcionais a $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. Para escalas muito menores que a escala de Hubble, $k \gg 1$ temos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq -\frac{k^2}{6} \left(A(x)\eta^2 + \frac{B(x)}{\eta^{-3}} \right). \quad (4.99)$$

Para escalas muito menores que a escala de Hubble, $k \ll 1$ temos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq -2A(x) + \frac{3B(x)}{\eta^5}. \quad (4.100)$$

É interessante neste caso olhar para as leis de conservação, $\delta T_{0;\mu}^\mu = 0$ e $\delta T_{i;\mu}^\mu$ e ver seu comportamento em escalas muito menores que a escala de Hubble, $k \gg \mathcal{H}$. Em primeira ordem de perturbação,

$$\delta T_{0;\mu}^\mu = \partial_\mu \delta T_0^\mu - T_\alpha^\beta \delta \Gamma_{0\beta}^\alpha - \Gamma_{0\beta}^\alpha \delta T_\alpha^\beta + T_0^\alpha \delta \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \delta T_0^\beta = 0, \quad (4.101)$$

$$\delta T_{i;\mu}^\mu = \partial_\mu \delta T_i^\mu - T_\alpha^\beta \delta \Gamma_{i\beta}^\alpha - \Gamma_{i\beta}^\alpha \delta T_\alpha^\beta + T_i^\alpha \delta \Gamma_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \delta T_i^\beta = 0. \quad (4.102)$$

Com o auxílio de (4.64) as leis de conservação nos dão

$$\delta' = -\nabla^2 \delta u - \Phi', \quad (4.103)$$

$$\nabla^2 \Phi = (\nabla^2 \delta u)' + \mathcal{H} \nabla^2 \delta u. \quad (4.104)$$

No limite $\frac{\mathcal{H}}{k} \ll 1$ (4.88) se reduz a

$$k^2 \Phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \delta. \quad (4.105)$$

Derivando a equação acima em relação a η é possível ver que $\Phi' \simeq 0$ e as leis de conservação ficam

$$\delta' = -\nabla \delta u, \quad (4.106)$$

$$(\partial^i \delta u)' = \mathcal{H} \nabla \delta u - k^2 \Phi. \quad (4.107)$$

Derivando a primeira equação e substituindo na segunda juntamente com (4.105) temos, em termos de Ω ,

$$\delta'' + \mathcal{H} \delta' - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega \delta = 0. \quad (4.108)$$

O resultado acima chama a atenção quando aplicado a uma mistura de dois fluidos não-interagentes, um de matéria bariônica e outro de matéria escura, $\rho = \rho_{mb} + \rho_{me}$, ambos com $\omega = 0$. Como a energia se conserva separadamente para cada componente podemos escrever a partir de (4.109)

$$\delta''_{mb} + \mathcal{H}\delta'_{mb} - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\Omega_{mb}\delta_{mb} + \Omega_{me}\delta_{me}) = 0, \quad (4.109)$$

$$\delta''_{me} + \mathcal{H}\delta'_{me} - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\Omega_{mb}\delta_{mb} + \Omega_{me}\delta_{me}) = 0. \quad (4.110)$$

Sabemos que a densidade de energia da matéria bariônica é muito menor que a densidade de energia da matéria escura, $\Omega_{mb} \ll \Omega_{me}$, o que permite desprezar Ω_{mb} frente a Ω_{me} . O resultado é que o termo de forçamento depende apenas de Ω_{me} , fazendo com que no limite assintótico δ_{mb} tenda para δ_{me} . Fisicamente, as perturbações da matéria bariônica se alojam nos poços gravitacionais de matéria escura.

4.1.6 Variável de Mukhanov-Sasaki

A equação diferencial para Φ é de solução complicada devido ao termo de fricção, Φ' . É possível eliminar este termo através de uma conveniente mudança de variável chamada *variável de Mukhanov-Sasaki*. Seguiremos aqui o exposto em [35].

Com a mudança $u = \phi(\rho + p)^{-\frac{1}{2}}$, e identificando

$$\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho + p}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.111)$$

o termo Φ' se anula e podemos agrupar os termos restantes em

$$u'' - v_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0. \quad (4.112)$$

Reescrevendo com a substituição $\nabla^2 u = -k^2 u$,

$$u'' + \left(v_s^2 k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u = 0, \quad (4.113)$$

iremos considerar seu comportamento nos limites assintóticos.

Comprimentos de onda longos: Em escalas superiores à escala de Hubble, $k \ll \mathcal{H}$, o termo em k é muito maior que o termo $\theta''/\theta \sim \mathcal{H}^2$ e a equação se reduz a

$$u'' - \frac{\theta''}{\theta} u = 0. \quad (4.114)$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(\eta) = C_1 \theta_1(\eta) + C_2 \theta_2(\eta), \quad (4.115)$$

lembrando que as constantes de integração dependem das coordenadas espaciais. A primeira solução é direta, $u = C_1\theta$. Para a segunda solução, linearmente independente da primeira, temos

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \int \frac{W(\eta)}{\theta_1^2} d\eta, \quad (4.116)$$

onde $W(\eta)$ é o *Wronskiano*, $W(\eta) = W_0 \exp[-\int_\eta P(\xi) d\xi]$. A solução geral fica então

$$u = C_1\theta + W_0\theta \int_\eta \frac{W(\eta)}{\theta_1^2} d\eta \quad (4.117)$$

Absorvendo o modo C_1 no limite de integração,

$$u = C\theta \int_{\tilde{\eta}} \frac{e^{-\int P(\xi) d\xi}}{\theta^2} d\eta. \quad (4.118)$$

Como o termo de fricção $P(\xi)$ é nulo, a equação fica

$$u = C(x)\theta \int_{\tilde{\eta}} \frac{d\eta}{\theta^2}. \quad (4.119)$$

Comprimentos de onda curtos: Em escalas muito menores que a escala de Hubble, $k \gg \mathcal{H}$ e a equação diferencial fica

$$u'' + v_s^2 k^2 u = 0. \quad (4.120)$$

Se considerarmos uma variação suave de v_s , a solução pode ser obtida pelo método WKB, a saber

$$u = \frac{1}{\sqrt{k v_s}} e^{\pm i k \int v_s(x') dx'}. \quad (4.121)$$

O maior interesse está no limite de comprimentos de onda longos, que correspondem a perturbações em escalas além do raio de Hubble e são previsões exclusivas dos modelos relativísticos.

Capítulo 5

Fluido de Van der Waals Perturbado

Por simplicidade, neste capítulo faremos $8\pi G = 1$.

5.1 Equações de Perturbação

As soluções da seção (3.6) nos fornecem o *background* para analisar perturbações lineares escalares de um fluido de van der Waals. Vamos escrever a perturbação escalar da métrica no gauge longitudinal (4.49) sobre um *background* espacialmente plano $\kappa = 0$, homogêneo e isotrópico em coordenadas conformes (3.9),

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \dot{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}^{(e)}, \\ ds^2 &= a^2[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

O fator de escala a é a função independente do *background* e o potencial de perturbação gravitacional Φ é a função independente da perturbação linear escalar da métrica.

A evolução do fator de escala com a densidade de energia foi determinada na seção (3.6). O comportamento do potencial de perturbação Φ é dado pela equação (4.93), que pode ser posta na forma

$$u'' + \left(v_s^2 k^2 - \frac{\theta''}{\theta} \right) u = 0 \quad (5.2)$$

pela mudança de variáveis de *Mukhanov-Sasaki*

$$\Phi = u (\rho + p)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho + p}{\rho} \right)^{-1/2}. \quad (5.3)$$

A partir de Φ podemos determinar o contraste de densidade $\delta\rho/\rho$ por meio da equação para a perturbação da densidade de energia, (4.88),

$$\frac{a^2}{2}\delta\rho = -3\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}^2\Phi + \nabla^2\Phi. \quad (5.4)$$

Como foi visto na seção (4.1.6), a equação diferencial (5.2) assume formas mais simples nos limites assintóticos $k \gg \mathcal{H}$ e $k \ll \mathcal{H}$, correspondendo aos limites de comprimentos de onda curtos e comprimentos de onda longos, respectivamente.

5.1.1 Comprimentos de Onda Curtos

Para comprimentos de onda pequenos, $k \gg \mathcal{H}$, muito menores que a esfera de Hubble, a equação (5.2) se reduz a (4.120). Considerando variações suaves de v_s , podemos aplicar o método WKB que leva às soluções

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{kv_s}} e^{\pm ik \int v_s d\rho} \quad (5.5)$$

sendo u_0 uma constante e v_s , a velocidade do som, dada por (4.91). Para um fluido descrito pela equação de estado de van der Waals (3.85) temos

$$v_s = \sqrt{\frac{24\omega}{(3-\rho)^2} - 6\rho}. \quad (5.6)$$

Então, no limite de comprimentos de onda curtos, o potencial de perturbação Φ se comporta como ondas acústicas, modulada por $\sqrt{\frac{\rho+p}{kv_s}}$.

5.1.2 Comprimentos de Onda Longos

Para comprimentos de onda longos, $k \ll \mathcal{H}$, muito maiores que a escala de Hubble, a equação (5.2) se reduz a (4.114). Procedendo como em (4.119), a solução para o potencial de perturbação fica

$$\Phi = C\sqrt{\rho+p}\theta \int \frac{d\eta}{\theta^2}. \quad (5.7)$$

A relação para o contraste de densidade no limite $k \ll \mathcal{H}$ segue de (5.4),

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\rho}}\Phi' - 2\Phi, \quad (5.8)$$

onde fizemos uso da equação de Friedmann $3\mathcal{H}^2 = a^2\rho$.

Para determinarmos o potencial de perturbação Φ e a densidade de contraste $\delta\rho/\rho$ precisamos avaliar a integral na solução (5.7). Notemos que

$$\theta^{-2} = a^2 \left(\frac{\rho + p}{\rho} \right), \quad (5.9)$$

e que a derivada em relação a η da equação de Friedmann, juntamente com a conservação da energia (3.40) fornecem a relação

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = \frac{a^2}{2}(\rho + p). \quad (5.10)$$

Com o auxílio de $(1/\mathcal{H})' = -\mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$, a equação para θ^{-2} pode ser escrita em termos do parâmetro de Hubble conforme $\mathcal{H}$,

$$\theta^{-2} = \frac{2}{3}a^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \right)' \right], \quad (5.11)$$

e podemos integrar por partes a integral na equação (5.7) para Φ ,

$$\int \frac{d\eta}{\theta^2} = \frac{2}{3} \left[\frac{a^2}{\mathcal{H}} - \int a^2 d\eta \right] \quad (5.12)$$

resultando na seguinte expressão para o potencial de perturbação,

$$\Phi = C\sqrt{\rho + p} \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} = \frac{2C\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\rho}{3}} \int a^2 d\eta \right) \quad (5.13)$$

Como as soluções para o *background* nos fornecem apenas o fator de escala como função da densidade de energia, é necessário transformar a integral de (5.7) em uma integração na variável ρ . Para tanto, utilizaremos a equação da conservação da energia na forma (3.40)

$$\frac{da}{d\rho} = -\frac{a}{3(\rho + p)}, \quad (5.14)$$

que substituída na equação de Friedmann

$$\frac{da}{d\eta} = \sqrt{\frac{\rho}{3}} a^2 \quad (5.15)$$

fornece a relação

$$\frac{d\eta}{d\rho} = -\frac{1}{a\sqrt{3\rho}(\rho + p)}. \quad (5.16)$$

O potencial de perturbação pode então, com o auxílio de $d\eta = (d\eta/d\rho)d\rho$ e (5.16), ser escrito em termos de uma integral em ρ ,

$$\Phi = C^* \left(1 + \frac{\sqrt{\rho}}{a} \int \frac{ad\rho}{3\sqrt{\rho}(\rho+p)} \right). \quad (5.17)$$

Para a densidade de contraste, primeiramente substituímos a derivada em η de (5.8) pela derivada em relação a ρ por meio de $d\Phi/d\eta = (d\rho/d\eta)d\Phi/d\rho$ e (5.16),

$$\Phi' = -a(\rho+p)\sqrt{3\rho}\frac{d\Phi}{d\rho}. \quad (5.18)$$

Temos então densidade de contraste (5.8) na forma

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 6(\rho+p)\frac{d\Phi}{d\rho} - 2\Phi. \quad (5.19)$$

A derivada $d\Phi/d\rho$ corresponde a

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = C^* \left[\frac{1}{2a\sqrt{\rho}} \int \frac{ad\rho}{3\sqrt{\rho}(\rho+p)} + \frac{\sqrt{\rho}}{3a(\rho+p)} \int \frac{ad\rho}{3\sqrt{\rho}(\rho+p)} + \frac{1}{3(\rho+p)} \right], \quad (5.20)$$

onde fizemos uso de (5.14). Substituindo na equação (5.19) para o contraste de densidade, chegamos a

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = C^* \left[\frac{(\rho+p)}{a\sqrt{\rho}} \int \frac{ad\rho}{\sqrt{\rho}(\rho+p)} \right] \quad (5.21)$$

que expressa o contraste de densidade em função da densidade de energia.

Com as soluções para o *background* da seção (3.6), analisaremos as perturbações para dois casos de interesse físico, $\omega = 0$ e $\omega = 1/8$. Seus limites assintóticos para $\rho \rightarrow 1$ correspondem a regimes de domínio de matéria, $p \simeq 0$ e domínio de radiação, $p \simeq \rho/3$, respectivamente.

5.2 $\omega = 0$

O caso $\omega = 0$ corresponde à solução (3.98) para o *background*,

$$a(\rho) = A^{-1/3} \left(\frac{3\rho-1}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (5.22)$$

Os limites assintóticos desta solução descrevem o *background* de um Universo jovem, com densidade de energia inicial $\rho_0 = 1/3$ dada por (3.105) e expansão inflacionária (3.102), transitando para um Universo dominado pela matéria não-interagente, $a \rightarrow \rho^{-1/3}$ e $a \propto t^{2/3}$.

Comprimentos de Onda Curtos

De (5.6) segue-se que a velocidade do som neste caso corresponde a

$$v_s = \sqrt{-6\rho}, \quad (5.23)$$

resultando em uma velocidade do som imaginária. As perturbações com k menores que o raio de Hubble, comprimentos de onda curtos (5.5), tornam-se exponenciais reais,

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{k}v_s} e^{\pm k \int v_s d\rho}, \quad (5.24)$$

levando à soluções instáveis, com o potencial de perturbação decaindo rapidamente ou explodindo.

Comprimentos de Onda Longos

Para perturbações com $k \ll \mathcal{H}$, o potencial de perturbação (5.17) é

$$\Phi = B \frac{\rho^{5/6}}{(1-3\rho)^{1/3}} \int d\rho (3\rho-1)^{1/3} \rho^{-11/6}, \quad (5.25)$$

mas estas perturbações são destruídas ao entrarem no raio de Hubble, pois a velocidade do som permanece sempre imaginária.

5.3 $\omega = 1/8$

O caso $\omega = 1/8$ é o de maior interesse devido ao limite assintótico da equação de estado de van der Waals, $p \rightarrow \rho/3$. Este caso caracteriza um *background* (3.111) inicialmente inflacionário ($p_0 = -\rho_0$), seguido de uma transição para um domínio de radiação ($\rho \rightarrow 0$, $p \rightarrow \rho/3$). A condição de energia (3.105) implica em um densidade de energia inicial $\rho_0 = \frac{5-\sqrt{13}}{3}$. O fator de escala corresponde à solução $0 < \omega < 2/3$ da seção (3.85), a saber

$$a(\rho) = \rho^{-\frac{1}{8\omega+3}} (3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{\frac{1}{2(8\omega+3)}} \left(\frac{3\rho - 5 + 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}}. \quad (5.26)$$

Comprimentos de Onda Curtos

No limite de comprimentos de onda curtos, $k \gg \mathcal{H}$, o potencial de perturbação gravitacional apresenta solução pelo método WKB para variações suaves da velocidade

do som. Inicialmente, a velocidade do som é imaginária, resultando em soluções instáveis como em (5.24). Com a densidade de energia suficientemente diluída, a velocidade do som assume então valores reais e as perturbações se comportam como ondas acústicas de amplitude modulada.

Comprimentos de Onda Longos

No limite $k \ll \mathcal{H}$, as perturbações obedecem à equação diferencial (4.114) e as soluções para o potencial de perturbação são dadas por (5.17). Substituindo o fator de escala (5.26) na equação (5.17) para Φ encontramos, para o potencial de perturbação,

$$\begin{aligned} \Phi = & C^* + C^* \rho^{\frac{8\omega+5}{2(8\omega+3)}} (3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{-\frac{1}{2(8\omega+3)}} \left(\frac{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 + 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}} \\ & \times \int \frac{(3-\rho)\rho^{-\frac{24\omega+11}{2(8\omega+3)}}}{(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{-\frac{16\omega+5}{2(8\omega+3)}}} \left(\frac{3\rho - 5 + 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}} d\rho. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para o contraste de densidade necessitamos da equação de estado de van der Waals para determinar $\rho + p$,

$$\rho + p = \rho \left(\frac{3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3}{3 - \rho} \right). \quad (5.28)$$

Da relação acima, podemos escrever o contraste de densidade (5.21) como

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\rho} = & C^* \frac{(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{\frac{16\omega+5}{2(8\omega+3)}}}{3\rho^{-\frac{8\omega+5}{2(8\omega+3)}} (3-\rho)} \left(\frac{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 + 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}} \\ & \times \int \frac{(3-\rho)\rho^{-\frac{24\omega+11}{2(8\omega+3)}}}{(3\rho^2 - 10\rho + 8\omega + 3)^{-\frac{16\omega+5}{2(8\omega+3)}}} \left(\frac{3\rho - 5 + 2\sqrt{4-6\omega}}{3\rho - 5 - 2\sqrt{4-6\omega}} \right)^{\frac{3-2\omega}{3(8\omega+3)\sqrt{4-6\omega}}} d\rho. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para $\omega = 1/8$, o potencial de perturbação resulta em

$$\begin{aligned} \Phi = & 1 + \rho^{3/4} (3\rho^2 - 10\rho + 4)^{-1/8} \left(\frac{3\rho - 5 - \sqrt{13}}{3\rho - 5 + \sqrt{13}} \right)^{\frac{11}{24\sqrt{13}}} \\ & \times \int_{\rho_0} \frac{\rho^{-7/4} (3-\rho)}{(3\rho^2 - 10\rho + 4)^{7/8}} \left(\frac{3\rho - 5 + \sqrt{13}}{3\rho - 5 - \sqrt{13}} \right)^{\frac{11}{24\sqrt{13}}} d\rho, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde fixamos a constante C^* igual à unidade sem perda de generalidade. Graficamente, temos na figura abaixo a evolução de Φ com a densidade de energia:

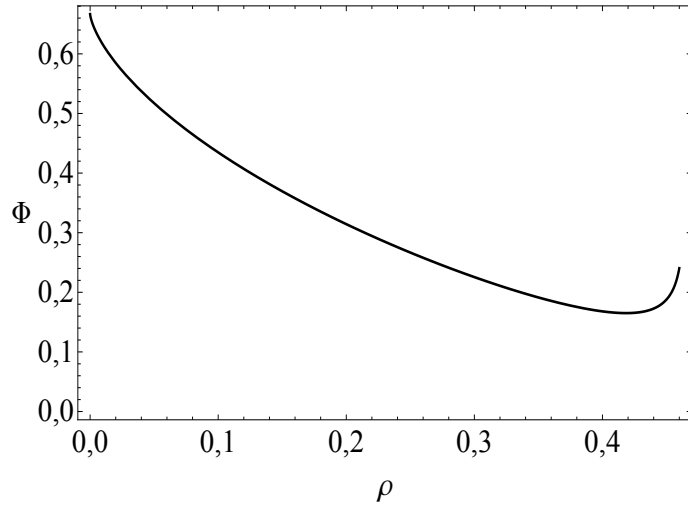


Figura 5.1: Potencial de Perturbação em função de ρ

O potencial de perturbação decresce ligeiramente para valores de densidade de energia próximos de ρ_0 mas então aumenta gradualmente a medida que a densidade de energia é diluída.

Na figura abaixo, temos a representação do potencial Φ com o fator de escala, com a amplitude crescendo a medida que a taxa de expansão evolui.

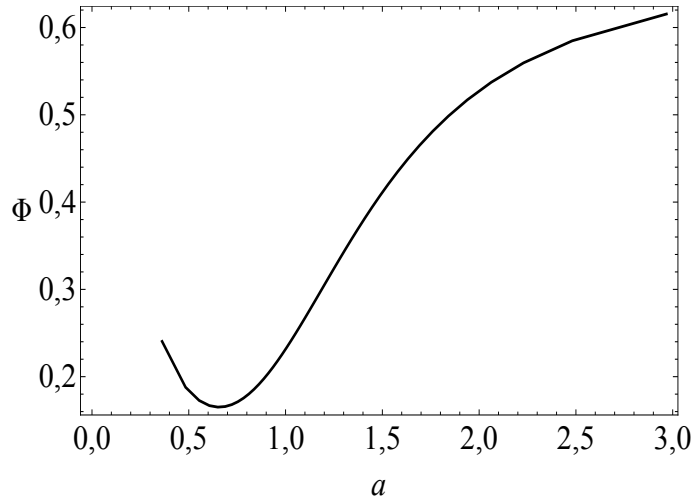


Figura 5.2: Potencial de Perturbação em função de a

Para o contraste de densidade, fazendo $\omega = 1/8$ em (5.29) temos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 3\rho^{3/4} \frac{(3\rho^2 - 10\rho + 4)^{7/8}}{(3 - \rho)} \left(\frac{3\rho - 5 - \sqrt{13}}{3\rho - 5 + \sqrt{13}} \right)^{\frac{11}{24\sqrt{13}}}$$

$$\times \int_{\rho_0} \frac{\rho^{-7/4}(3-\rho)}{(3\rho^2-10\rho+4)^{7/8}} \left(\frac{3\rho-5+\sqrt{13}}{3\rho-5-\sqrt{13}} \right)^{\frac{11}{24\sqrt{13}}} . \quad (5.31)$$

A figura (5.3) mostra a evolução do contraste de densidade em função da densidade de energia.

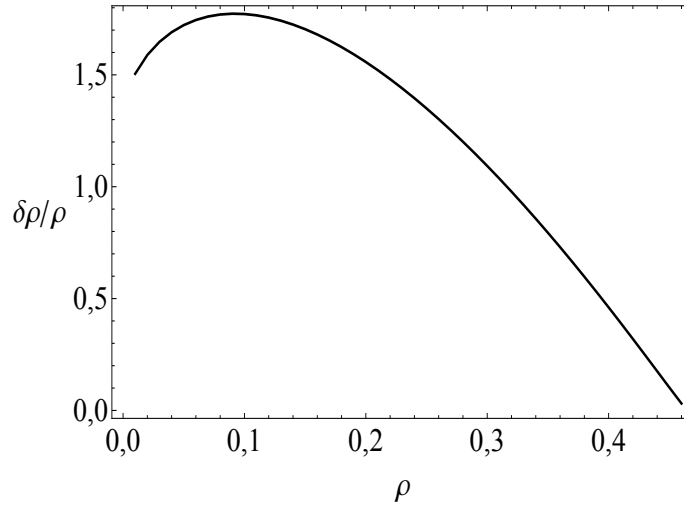


Figura 5.3: Contraste de densidade em função de ρ

O contraste de densidade cresce inicialmente, passando por um máximo e então decresce a medida em que a densidade de energia se dilui.

Na figura (5.4) podemos visualizar a evolução de $\delta\rho/\rho$ em função do fator de escala a .

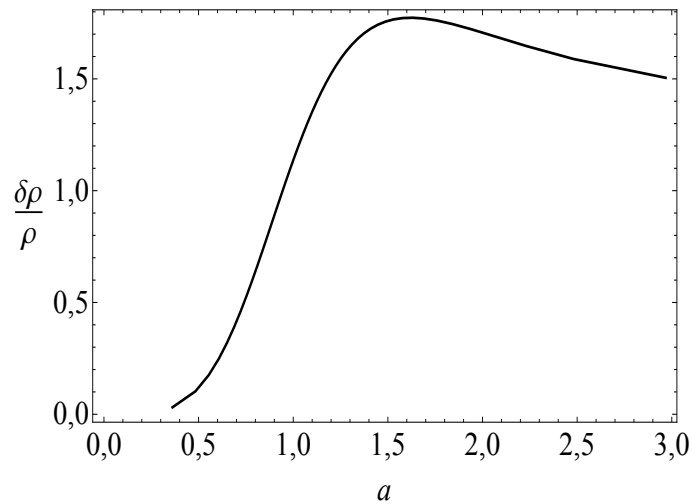


Figura 5.4: Contraste de densidade em função de a

Na fase inicial da expansão, o contraste de densidade é muito amplificado, atingindo um máximo que limita o crescimento da perturbação, decaindo então suavemente com o aumento do fator de escala.

Na figura (5.5) temos o fator de escala, o potencial de perturbação e o contraste de densidade em função de ρ e em seguida, na figura (5.6), o potencial e o contraste de densidade em função de a .

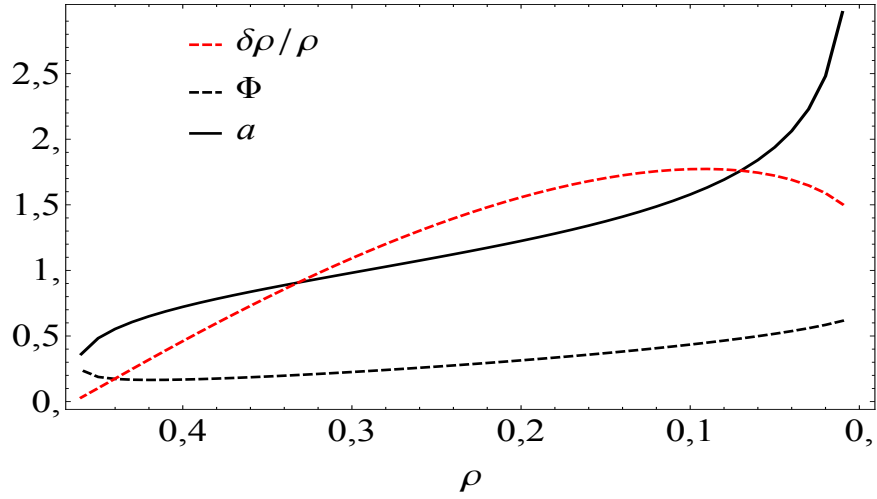


Figura 5.5: Potencial, Contraste de Densidade e Fator de Escala em função de ρ

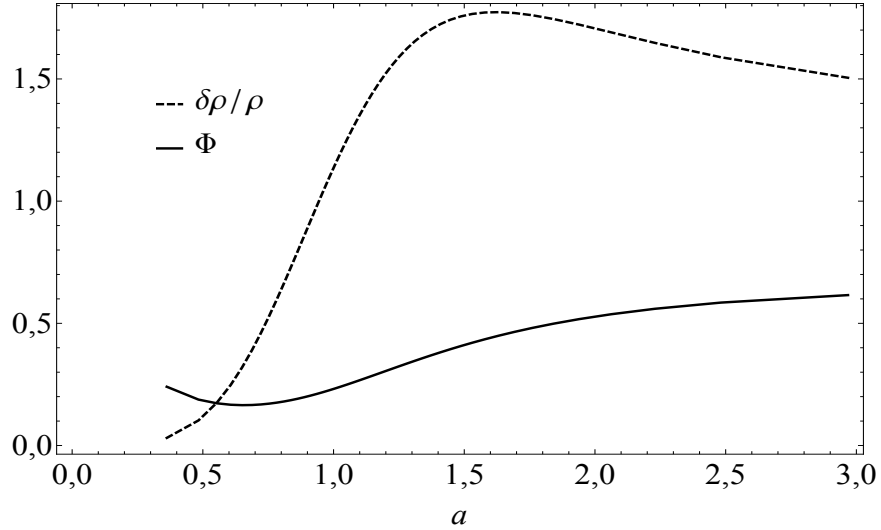


Figura 5.6: Potencial e contraste de densidade em função de a .

Nas figuras (5.5) e (5.6) a amplitude do potencial de perturbação, após passar por um mínimo, cresce lentamente a medida que ρ se dilui e a aumenta. O contraste

de densidade cresce inicialmente, atinge um máximo e decresce suavemente com o aumento do fator de escala, após um período de intensa amplificação, favorecendo o crescimento das flutuações de densidade durante o regime inflacionário.

Os resultados acima mostram que o fluido de van der Waals com o parâmetro $\omega = 1/8$ se mostra estável para pequenas perturbações no limite de comprimentos de onda longos em um Universo inicialmente inflacionário que evolui para um Universo dominado por radiação com a diluição da densidade de energia do fluido.

Capítulo 6

Conclusão

O *background* de um Universo preenchido por um fluido cosmológico obedecendo a equação de estado de van der Waals foi determinado.

Os diferentes casos correspondendo aos possíveis valores do parâmetro ω fornecem a evolução do fator de escala em função da densidade de energia, $a(\rho)$, que são funções não-inversíveis, com exceção do caso $\omega = 0$, em que $a(\rho)$ pode ser invertida. A integração no tempo das equações de Friedmann resultam em relações $t(\rho)$, também não-inversíveis.

Ao selecionar os casos correspondentes a condição de densidade de energia decrescendo com o tempo, $d\rho/dt < 0$, vemos que a densidade de energia inicial possui a seguinte relação com o parâmetro ω ,

$$\rho_0 = \frac{5 - 2\sqrt{4 - 6\omega}}{3}. \quad (6.1)$$

As seguintes conclusões decorrem da relação acima.

A densidade de energia de um fluido de van der Waals converge para a igualdade acima a medida em que o fator de escala tende a zero, de modo que temos uma densidade de energia inicial finita, evitando a singularidade inicial.

A densidade de energia inicial corresponde a uma pressão inicial negativa $p_0 = -\rho_0$, implicando em uma fase inflacionária, seguida então por uma fase desacelerada quando $p > -\rho/3$.

Para as perturbações, selecionamos dois casos de interesse cosmológico da equação de van der Waals, $\omega = 0$ e $\omega = 1/8$, devido aos seus limites assintóticos.

- $\omega = 0$

Para valores pequenos de densidade de energia, a pressão tende a zero e temos a transição da fase inflacionária para uma fase de domínio de matéria.

As perturbações de comprimentos de onda curtos são instáveis devido à velocidade do som imaginária. Esta instabilidade destrói os modos de comprimentos de onda longos que entram no raio de Hubble em tempos remotos.

- $\omega = 1/8$

Neste caso, temos a transição de um regime inflacionário para um regime desacelerado levando a uma era de domínio de radiação com a diluição da densidade de energia.

As perturbações de comprimentos de onda curtos são inicialmente instáveis, mas com a diluição da densidade de energia a velocidade do som assume valores reais e as perturbações passam a se comportar como ondas acústicas de amplitude modulada.

Para perturbações de comprimentos de onda longos, a amplitude do potencial de perturbação gravitacional cresce com o aumento do fator de escala e a diluição da densidade de energia. Já a amplitude do contraste de densidade é amplificada durante o regime inflacionário, favorecendo a formação de estruturas.

Trabalhos Futuros

Analisar o comportamento cosmológico da equação de estado de Redlich-Kwong, uma modificação da equação de van der Waals.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Hawking; *Uma Breve História do Tempo*, Editora Rocco, 1988.
- [2] A. Friedmann, *Z. Phys.*, **10**, 377, 1922.
- [3] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Volume 15, Número 3, 15 de Março, 1929.
- [4] Alpher, R. A., H. Bethe and G. Gamow; *Physical Review*, **73**, 803, 1948.
- [5] Liddle, A.; *Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley & Sons, 2003.
- [6] Planck Collaboration, *Astronomy & Astrophysics*, manuscript no. final "params" paper, March 21, 2014; arXiv [astro-ph.CO]: 1303.5076v3 <http://arxiv.org/pdf/1303.5076v3.pdf>.
- [7] Geller, M. J., Huchra, J.; *Science*, **246**, 897, 1989.
- [8] Zel'dovich, Ya.B.; *Astronomy & Astrophysics*, **5**, 84, 1970.
- [9] Guth, A. H.; *Phys. Rev. D*, **23**, 347, 1981.
- [10] Planck Collaboration, *Astronomy & Astrophysics*, manuscript no. PlanckMission2014 arXiv, February 6, 2015.
- [11] Mukhanov, V.; Feldman, H. A.; Brandenberger, R. H.; *Physics Reports* **215**, (203), 1992.
- [12] J. Jeans; *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **199A**, 49, 1902.
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972.
- [14] E. Lifshitz; *J. Phys. U.S.S.R.*, **10**, 116, 1946.

- [15] K. Tomita; *Phys. Rev. D*, **71**, 3504, 2005; N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto; *J. Cosm. & Astropart. Phys.*, 0606, 024, 2006, [astro-ph/0604416].
- [16] S. Perlmutter *et al.*; *The Astrophysical Journal*, **586**, 517:565, Junho de 1999.
- [17] Zimdahl, W.; Fabris, J. C.; *Classical and Quantum Gravity*, **22**, 20, 2005.
- [18] G. M. Kremer; *General Relativity and Gravitation*, **35**, 1459-1466, 2003.
- [19] G. M. Kremer; *Phys. Rev. D* **68**, 123507, 2003.
- [20] S. Capozziello, S. De Martino, M. Falanga; *Physics Letters A*, **299**, 494–498, 2002.
- [21] Michelson, A.; Morley, E.; *American Journal of Science*, **203**, 333-345 (1887).
- [22] Landau, L.; Lifschitz, E.; *The Classical Theory of Fields* . Pergamon Press, 1971.
- [23] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1975.
- [24] Misner, C.; Thorne, K.; Wheeler, J. A.; *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [25] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press, 1964.
- [26] Penzias, A. A.; Wilson, R. W.; *Astrophysical Journal Letters*, vol. **142**, p.419-421, 1965.
- [27] Makler, M.; *Cosmologia: Fenomenologia*, Novello, M.; Pinto Neto, N.; Bergliaffa, S.E.P.; Organizadores; *Programa Mínimo de Cosmologia*. Jauá Editora, 2010.
- [28] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [29] H. P. Robertson, *Astrophys. Journal*, **82**, 284, 1935; *ibid.*, **83**, 187, 257 (1936).
- [30] A. G. Walker, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **42**, 90, 1936.
- [31] Kolb, ; Turner, *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990.
- [32] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 1987.

- [33] Padmanabhan, T.; *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [34] Peebles, P. J. E.; Ratra, B.; *The Cosmological Constant and Dark Energy*. Rev. Mod. Phys. **75**, 559 2003.
- [35] V. Mukhanov, *Physyical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.