O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas

Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul/SP
normallev@uol.com.br

Introdução

Importantes pesquisas já foram e estão sendo desenvolvidas buscando compreender as implicações e formas de implementação da resolução de problemas no ensino de Matemática. Os problemas sempre ocuparam, invariavelmente, um lugar de destaque no ensino e nos currículos de Matemática, entretanto a finalidade e outros aspectos relacionados à resolução de problemas passaram por mudanças. Essas ocorreram, principalmente, para tentar acompanhar as diferentes visões sobre o porquê de se ensinar Matemática e, particularmente, de trabalhar com resolução de problemas em sala de aula. Atualmente algumas reflexões se voltam para a forma como a resolução de problemas está associada a outros recursos e elementos considerados na Educação Matemática: aos jogos, à modelagem, aos projetos, às tecnologias de informação e comunicação (TIC), entre outras. A estas últimas, especificamente ao computador, é que está voltado o presente texto.

Ele está estruturado de modo que na primeira parte da seção 1, destinada ao aporte teórico, são apresentados alguns aspectos destacados na literatura de pesquisa sobre os computadores na Educação Matemática. Em seguida são analisadas algumas pesquisas já desenvolvidas sobre resolução de problemas, também no âmbito da Educação Matemática. A seção 2, intitulada Apresentação e Análise de Alguns Exemplos, contém a descrição e análise de situações de resolução de problemas com a utilização do computador, destacando três aspectos: a formulação de problemas, a avaliação e a aprendizagem matemática. Finalmente são tecidas algumas considerações finais.

1 - Aporte teórico

1.1 - A Utilização dos Computadores na Educação Matemática

Ao empreender atividades de ensino com o computador, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade que será realizada com sua mediação. Assim, para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (e o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino.

Em geral, os matemáticos acreditam que a natureza dos objetos com que trabalham é determinada por conceitos imutáveis, cuja realidade independe de fatores culturais. É notório que em Matemática, historicamente, elementos conceituais têm conquistado supremacia sobre os observáveis. Entretanto, o caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelas tecnologias informáticas está, cada vez mais, ganhando destaque.

Encontramos em Borba e Villarreal (2005) um extenso estudo sobre visualização que, embora seja um processo bastante privilegiado pelo ambiente computacional, é, muitas vezes, menosprezado dentro da Educação Matemática. Os episódios apresentados pelos autores evidenciam, entre outros elementos, o pensamento matemático das estudantes em relação a esse processo. Em alguns deles foram percebidos conflitos entre o conceito de derivada da função e a reta tangente ao gráfico da função, e os relatos e análises dos episódios sugerem que a abordagem visual proporcionada pelo computador não era natural para as alunas. Elas recorriam, com freqüência, ao lápis e papel para resolver tais conflitos. Entretanto, as imagens fornecidas pelo computador permitiram questionar suas concepções e, a partir daí, foi possível pensar nos conceitos de maneira mais ampla.

Na realidade, o computador privilegia o pensamento visual sem, contudo, implicar na eliminação do algébrico. No Cálculo pode-se empregar informações gráficas para resolver questões que também podem ser abordadas algebricamente e relacioná-las: é o caso da representação gráfica da função derivada que possibilita interessantes análises sobre o comportamento e os extremos das funções. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados, dando espaço, portanto, à reflexão. Outros pesquisadores também concordam que visualização e manipulação simbólica devem complementar-se para que se obtenha uma compreensão matemática mais abrangente e profunda. (BENEDETTI, 2003; BORBA; VILLARREAL, 2005; PIERCE; STACEY, 2001)

Em seus estudos, Pierce e Stacey (2002) advogam que a exploração das representações múltiplas (numérica, algébrica e gráfica) aumenta a compreensão de conceitos por parte dos alunos. Seus recursos encorajam os estudantes a compreender os princípios envolvidos nos exemplos simples e a aplicá-los em problemas que consideram mais complicados. Além disso, o computador amplia a gama de problemas que os estudantes podem resolver.

Além desses fatores, Borba e Penteado (2001) destacam o enfoque experimental que o computador possibilita: "o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (p.43). A partir da investigação e da experimentação os alunos formulam, reformulam e rejeitam hipóteses; lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. As explorações implementadas conduzem-se, por vezes, por caminhos inesperados configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem.

Entretanto, somam-se a esses elementos, algumas dificuldades que podem surgir quando da utilização dos computadores no ensino de Matemática. Pierce e Stacey (2001) apontam as seguintes: possíveis confusões entre a notação matemática convencional e a sintaxe própria dos *softwares,* notadamente os *softwares* algébricos, e o problema de reconhecer quando o computador está errado. Alguns alunos, ou mesmo professores, podem incorrer no erro de considerar o computador como uma autoridade. A literatura de pesquisa nesta linha, em geral mostra que, contrariamente a uma crença inicial de que a chegada dos computadores "atrapalharia a aprendizagem" dos alunos, o conhecimento de conteúdos matemáticos se torna imprescindível no monitoramento das atividades realizadas e dos resultados obtidos com ele.

Tal conhecimento refere-se, por vezes, a conteúdos que não seriam necessariamente considerados ou valorizados no ensino sem a inclusão dos computadores. Decorre, portanto, que as características e possibilidades oferecidas pelos ambientes de ensino dito informatizados sugerem reestruturação ou, pelo menos, uma revisão dos conteúdos tratados em classe.

Essas autoras chamam de "*insight algébrico*" a parte do sentido simbólico necessário para encontrar uma solução matemática para um problema formulado matematicamente e que, provavelmente, é afetada quando se faz Matemática utilizando tecnologia CAS[1]. O *insight algébrico* inclui vários elementos; um deles refere-se ao reconhecimento de convenções e propriedades básicas, por exemplo, das diferenças entre a linguagem matemática escrita à mão e a sintaxe dos CAS. Um outro elemento refere-se à identificação de características-chave, identificação que resulta, muitas vezes, da coordenação entre representações múltiplas de funções, por exemplo, de que a função quadrática tem um extremo, ou de que uma função cúbica pode ter até três raízes reais.

Esses dois elementos, entre outros levantados pelas autoras, permitem aos alunos controlar e monitorar os resultados apresentados pelo computador. Eles se manifestaram nas atividades de resolução de problemas com a utilização desse recurso, mostrando-se essenciais a esse contexto.

1.2 - A Resolução de Problemas na Educação Matemática

Embora o termo "problema" esteja bastante presente no dia-a-dia de pessoas que trabalham com Matemática, percebe-se que nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado. Trago aqui as compreensões de Onuchic (1999) sobre o que é um problema: "[...]é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver" (p.215). Deste modo, uma questão será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à sua resolução, mas deseja resolvê-la.

Igualmente, os objetivos e a função de se trabalhar a resolução de problemas com os alunos em sala de aula de Matemática não têm sido considerados por muitos professores e educadores matemáticos. Ao analisar estes aspectos, alguns autores salientam que essa função é determinada pela abordagem ou pela concepção de ensino em geral, e de resolução de problemas, em particular, que configura a atividade do professor. Contreras e Carrillo(1998) utilizam categorias bem definidas para caracterizar e fazer um paralelo entre quatro tendências didáticas em resolução de problemas, não mutuamente exclusivas: tradicional, tecnicista, espontaneísta e investigativa.

No quadro a seguir, são apresentadas algumas características dessas concepções. Elas foram escolhidas entre muitas outras apresentadas pelos autores. Segundo minha leitura, elas caracterizam, sinteticamente, cada uma dessas concepções:

[1]CAS (*computer algebra sistem*) - Sistemas de computação algébrica são programas que, em contraste com os programas de computação numérica, permitem cálculos matemáticos com expressões simbólicas ou, como são também chamadas, expressões algébricas.

		Concepções			
Categorias	Indicadores	**Tradicional**	**Tecnicista**	**Espontaneísta**	**Investigativa**
Sentido da Matemática escolar	Tipo de problemas.	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	Problemas polivalentes que possibilitam modelar, sem um fim conceitual concreto; de processo e solução múltiplos.	Problemas polivalentes, incluindo os abertos. Condições iniciais modificáveis gerando novos problemas; de processo e solução múltiplos.
Metodologia	Quando e como se usam	Ao final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Ao final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Como veículo para potencializar o descobrimento espontâneo de noções.	Durante todo o processo como treinamento em unidades flexíveis de aquisição de conhecimento conceitual e procedimental.
Papel do aluno	O que faz.	Tenta identificar conceitos e algoritmos a aplicar.	Tenta assimilar os conceitos teóricos aplicando-os; reconstrói processos.	Desenvolve atividades de ensaio e erro.	Aborda o problema como uma investigação.
Papel do professor	Como reparte responsabilidades.	Inicia e protagoniza o processo de forma exclusiva.	Propõe e contextualiza o problema repartindo a função de protagonista com o aluno.	Sugere problemas.	Propõe problemas e envolve os alunos.
Avaliação	O que se avalia.	A aplicação mecânica de conceitos aprendidos.	Identificação e aplicação de algoritmos adequados.	Significado das noções construídas.	Relevância das noções construídas.

Vale destacar, concordando com as idéias expressas no quadro anterior, que o tipo de problema proposto está totalmente ligado aos objetivos da resolução de problemas, diferentes para cada uma dessas tendências que se configuram na Matemática escolar. É por essa razão que, com freqüência, são apresentadas classificações de problemas por tipos, quando se está tratando de seus objetivos. Isso ocorre em função da consideração de que tais objetivos são determinados, em grande parte, pelo tipo de problema proposto e reciprocamente.

Nessa perspectiva, alguns autores consideram a possibilidade de propor e resolver problemas abertos ou fechados, que teriam objetivos e implicações diferentes ao serem incorporados ao ensino. Van de Walle (2001) considera que os problemas abertos devem ser utilizados quando o objetivo é realizar explorações matemáticas. Ele considera que os problemas são abertos quando o processo é aberto (são explorados múltiplos caminhos para a solução), o final é aberto (há múltiplas respostas corretas a serem descobertas) ou a formulação de novos problemas é aberta (os alunos exploram novos problemas relacionados ao problema dado).

Também Pehkonen (2003) trata desses dois tipos de problemas apresentando a seguinte caracterização: nos problemas fechados tanto a situação inicial como o objetivo final (resposta) do problema são pré-determinados. Se a situação inicial ou o objetivo final (ou ambos), deixam "espaço" para o resolvedor fazer escolhas, então se tem um problema aberto.

No Brasil, um grupo de pesquisadores coordenados pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, da UNESP – Rio Claro/SP, do qual participa a autora do presente texto, têm trabalhado numa concepção bastante considerada nas recentes pequisas e fortemente recomendada nas orientações oficiais atuais, chamando-a Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Trata-se de uma metodologia de ensino,onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2007, 2008; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

A opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário.

Numa aula de Matemática realizada dentro dessa concepção, um problema proposto aos alunos – problema gerador – é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula. Reitere-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor, necessário ou mais apropriado à resolução do problema proposto. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos, é feita continuamente, durante a resolução do problema.

2 – Apresentação e Análise de Alguns Exemplos

Nesta seção serão analisadas algumas situações em que se fazem presentes aspectos que foram considerados nos estudos apresentados na seção 1 anterior

.2.1 – O Computador e a Formulação de Problemas

Os dados que serão agora apresentados compõem a pesquisa desenvolvida por Allevato (2005), que foi realizada em aulas de Matemática ministradas para alunos de Administração de Empresas. O professor responsável pela turma fundamentava seu ensino em resolução de problemas e utilizava, com seus alunos, o software *Winplot*[2].

Num trabalho que o professor propôs aos alunos para que fizessem utilizando o *Winplot*, um dos problemas pedia o seguinte:

Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

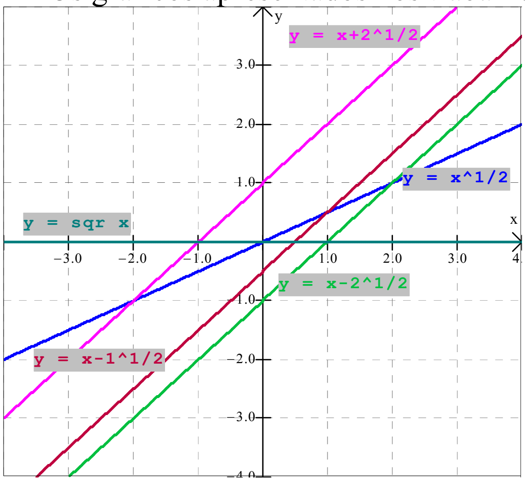
a)	b)
$\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	$\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

A sintaxe, no *Winplot*, para raiz quadrada é *sqr(x)* ou *x^(1/2),* considerando x elevado a meio. Foram freqüentes os erros causados pela falta dos parênteses ou pela sua colocação no lugar errado, ao digitar a expressão. A tabela a seguir traz as funções do item (a):

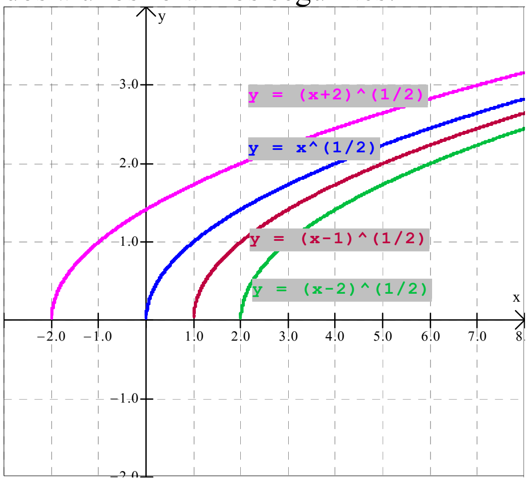
Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{x}$	*sqr x*	0	*sqr(x)*
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	x^1/2	$\frac{x^1}{2}$	x^(1/2)
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	x-1^1/2	$x - \frac{1^1}{2} = x - 0{,}5$	(x-1)^(1/2)
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	x-2^1/2	$x - \frac{2^1}{2} = x - 1$	(x-2)^(1/2)
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	x+2^1/2	$x + \frac{2^1}{2} = x + 1$	(x+2)^(1/2)

[2] Software gráfico, gratuito, voltado ao estudo de funções de uma ou duas variáveis, derivadas, integrais, equações diferenciais e outros assuntos. Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.

Os gráficos apresentados nos trabalhos dos alunos foram os seguintes:



Sem os parênteses



Com os parênteses

No caso registrado na primeira linha da tabela, quando o aluno digitou *sqr x*, sem os parênteses no x, o *Winplot* ignorou a expressão por não corresponder à sintaxe correta. O gráfico apresentado, da função f(x) = 0, foi obtido como se o aluno tivesse digitado *sqr* x + 0 , em que *sqr x* foi ignorado. Nos demais casos, a forma como os alunos digitaram as fórmulas das funções, as transformaram em funções afim. Os gráficos apresentaram-se como retas, e não como partes de parábolas, conforme deveria ocorrer.

Uma primeira alusão a esse exemplo apresentado refere-se a que, conforme já se tem percebido com freqüência no ensino de Matemática, a repetição de um procedimento, de um mesmo tipo de problema, etc, não leva, necessariamente, à compreensão do conteúdo ou do conceito envolvido na atividade, ou à aprendizagem. Neste caso específico, a forma como foi elaborado o problema fez com que os alunos repetissem as instruções dadas ao *Winplot* e esboçassem muitos gráficos sem, contudo, compreender o que estavam fazendo. Neste grupo de funções, os alunos não perceberam, por exemplo, que constantes positivas adicionadas ou subtraídas da variável independente x provoca translações para a esquerda ou para a direita – bsse era o objetivo do problema: compreender as transformações nos gráficos decorrentes de variações nos coeficientes e constantes da expressão algébrica correspondente. Além disso, os alunos não associaram corretamente as expressões que digitavam com o formato do gráfico das funções, entre outras coisas, ao aceitarem as retas como representações de funções envolvendo raiz quadrada.

Com este exemplo, envolvendo um problema sobre funções, queremos destacar que novos elementos devem ser considerados pelo professor ao elaborar problemas para serem resolvidos pelos alunos com a utilização de computadores: O que se pretende que os alunos aprendam com o problema? Que sub-habilidades são exigidas para sua resolução? Que tipo de problema e que questões devem ser elaboradas para que os alunos atinjam o objetivo proposto?

Um exemplo bastante interessante, neste sentido, pode ser encontrado em Santos (2006). Ao desenvolver uma pesquisa envolvendo conteúdos de geometria espacial, com alunos utilizando o *software Wingeom*[3], ela relata como foi modificando o enunciado de um problema a fim de ajustá-lo aos objetivos que tinha com a atividade. O problema, inicialmente, tinha o seguinte enunciado:

> Por um ponto qualquer da aresta AB de um tetraedro qualquer ABCD é traçado um plano paralelo às arestas AC e BD. Mostre que a secção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo

A pesquisadora pretendia que a atividade desencadeasse atitudes de busca e investigação nos alunos. Ela percebeu que muitas conjecturas poderiam ser investigadas a partir de uma situação como esta. Porém, do modo como se apresenta, o objetivo é "mostrar" algo que já está explicito, ou seja, que o "plano no tetraedro é um paralelogramo". Assim, a investigação consistiria em confirmar esta afirmação, entretanto, o interesse era que o próprio participante da pesquisa realizasse essa descoberta ou criasse outras conjecturas. Santos (2006) acreditava que a atividade deveria ser aberta, dando margem a um processo investigativo mais "flexível", desencadeado por questões como "o que você pode afirmar sobre...".

Além disso, Santos (2006) considerou que os participantes teriam pouco tempo de familiarização com o *Wingeom*, apesar de terem realizado algumas atividades introdutórias para um primeiro contato e reconhecimento dos menus. Se houvesse dúvidas de como realizar as construções geométricas, como a pesquisadora não estaria "presente" para orientar, poderia ser comprometido o processo de investigação matemática. Decidiu, então, por atividades que caracterizou como semi-abertas, devido ao fato de apresentarem os passos para a construção, mas que possibilitassem a investigação e elaboração de conjecturas.

Desta forma, a atividade foi reelaborada, adquirindo a seguinte forma:

> 1. Construa um tetraedro regular ABCD;
> 2. Marque na aresta AB um ponto E qualquer;
> 3. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD passando pelo ponto E;
> 4. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano?

[3] Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html

A autora achou, porém, que a mudança não havia sido suficiente para garantir a construção no *Wingeom*. Já era possível imaginá-la, mas ainda levaria tempo para descobrir que menus do *software* utilizar, e as dúvidas de construção poderiam desanimar e desmotivar os participantes a realizar toda a atividade. O problema foi discutido e resolvido por outros pesquisadores para que pudesse ser "testado" e aprimorado. Os comentários, críticas, sugestões e reflexões quanto ao objetivo ao propor a atividade, fizeram com que, após nova reformulação, ela chegasse ao seguinte:

1. Insira um tetraedro regular de aresta 1;
2. Usando o menu *Anim/Variação de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique fixar L. Do mesmo modo, digite 1 e clique fixar R;
3. Marque na aresta AB um ponto E de coordenada relativa #;
4. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD através do ponto E usando *Linear/Cortar plano*
5. Anime a sua construção e observe o que acontece;
6. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano? Justifique sua resposta.

Este raciocínio nos remete às idéias de Contreras e Carrillo (1998) que, ao considerarem a concepção investigativa na resolução de problemas, apontam que os problemas propostos devem ser polivalentes, incluindo os abertos, com condições iniciais modificáveis gerando novos problemas, de processo e solução múltiplos.

A"trajetória de elaboração" da atividade, realizada por Santos (2006), corrobora a perspectiva de alguns autores, quando afirmam que a proposição e resolução de problemas abertos ou fechados têm objetivos e implicações diferentes ao serem incorporados ao ensino. Ao imprimir, em sua atividade, um caráter mais aberto, a autora segue a mesma linha de pensamento de Van de Walle (2001), que considera que os problemas abertos devem ser utilizados quando o objetivo é realizar explorações matemáticas.

2.2 – O Computador, a Resolução de Problemas e a Avaliação

Para tratar da avaliação, retomemos o problema da construção de gráficos, já mencionado na seção anterior. A dificuldade dos alunos em reconhecer se é necessário ou não colocar parênteses na digitação da fórmula de uma função se manifestou nas dúvidas apresentadas pelos alunos, em vários momentos, durante as aulas no laboratório de informática. Quando a dúvida surgia, o professor e o pesquisador tentavam levar os alunos a pensarem sobre as características e propriedades da função envolvida no problema, de modo que fosse possível decidir sobre a necessidade dos parênteses naquele caso. Eram feitas questões como "Qual deve ser o formato do gráfico de uma função desse tipo, que envolve raiz quadrada?", "Por que você acha que o seu gráfico ficou uma reta?", para que os alunos refletissem e pudessem identificar as correções necessárias.

Os fatos aqui relatados, relacionados à resolução deste problema, nos remetem aos estudos de Pierce e Stacey (2001), que destacam a importância do conhecimento matemático no monitoramento do que se faz com o computador. Assim, os problemas resolvidos pelos alunos, especialmente por serem fechados e, deste modo, terem levado vários alunos a manifestarem dificuldades semelhantes, permitiu que o professor tivesse condições de detectar aspectos da aprendizagem sobre funções, conteúdo que estava sendo abordado naquele momento, que precisavam ser melhor trabalhados e esclarecidos com aqueles alunos. Ou seja, os problemas se constituíram em importantes instrumentos de avaliação.

Durante a resolução dos problemas, também aconteceu que, algumas vezes, os alunos digitaram a expressão da função de várias maneiras, isto é, com e sem parênteses, e com estes colocados em lugares diferentes na expressão. Representavam graficamente e comparavam os gráficos. Se os gráficos se mostravam iguais, então, concluíam que os parênteses eram dispensáveis. Trata-se da experimentação, procedimento bastante utilizado pelos alunos na presença do computador. Em virtude do rápido *feedback* (BORBA; PENTEADO, 2001) e das possibilidades de visualização de gráficos (BORBA; VILLARREAL, 2005) os alunos testam seus resultados e conjecturas continuamente. Agindo desta forma, alguns alunos tiveram, em muitos momentos, condições de avaliar suas próprias resoluções e decidir quanto à solução correta.

Ressalte-se que colocar ou não os parênteses era, de fato, um problema para aqueles alunos, apesar de não estar explicitamente enunciado ou entre os objetivos inicialmente definidos para o problema proposto. Mas era um problema, afinal os alunos em geral estavam diante de uma dificuldade que precisavam e queriam resolver, mas não tinham os recursos imediatamente disponíveis para a resolução. (ONUCHIC; 1999).

A maneira como o *software* executou os comandos dados pelos alunos ao digitarem as expressões das funções está de acordo com a hierarquia das operações matemáticas. De acordo com as leis da Álgebra, considerando expressões matemáticas envolvendo várias operações, sabemos que são efetuadas primeiramente as potências e raízes (obedecendo à ordem em que aparecem), depois as multiplicações e divisões (também na ordem em que aparecem) e, finalmente, as adições e subtrações (novamente, na ordem em que aparecem). Se essa ordem de execução precisa ser alterada, a linguagem algébrica convencionou que a ordenação seja feita através da utilização dos delimitadores, isto é, indicando as operações entre parênteses, colchetes e chaves, calculados nessa ordem.

Este raciocínio algébrico responderia às dúvidas dos alunos e evitaria os erros cometidos na representação gráfica das funções. Ele poderia ter sido adotado como a referência, como a regra geral de que os alunos precisavam para resolver os "problemas dos parênteses". Ou seja, respeitadas as especificidades próprias de sintaxe, a linguagem do *Winplot* não é totalmente diferente da linguagem matemática, mas é estruturada de acordo com as leis da Álgebra.

Considero relevante considerar que estes aspectos são relativos às sub-habilidades necessárias à resolução de um problema. A linguagem algébrica e a hierarquia das operações, supostamente, já deveriam ser dominadas por esses alunos. Se não apresentavam esse domínio, então a resolução dos problemas colocou em evidência essas "lacunas" de aprendizagem. De fato, as atividades de resolução de problemas fornecem, no entender também de Van de Walle (2001), importantes dados de avaliação que permitem ao professor partir de "onde o aluno está" e "não de onde o professor está".

Se os alunos dominavam a linguagem algébrica, mas não perceberam sua relação com a do software, então tiveram a oportunidade de desenvolver seu "*insight* algébrico", ou seja, a parte do sentido simbólico necessário para encontrar uma solução matemática para um problema formulado matematicamente e que, provavelmente, é afetada quando se faz Matemática utilizando *software* algébrico, no caso de Pierce e Stacey (2001), e *software* gráfico, neste caso. Ele inclui o que as autoras chamaram de expectativa algébrica, que envolve entre outros elementos:

- o reconhecimento de convenções e propriedades básicas, por exemplo, das diferenças entre a linguagem matemática escrita à mão e a sintaxe do *software*; e
- a identificação de características-chave, por exemplo, de que a função quadrática tem um extremo. Na situação analisada anteriormente, este segundo aspecto se fez presente quando os alunos não perceberam que as funções dadas, envolvendo raiz quadrada, não podiam ser representadas por retas.

Esses elementos permitem aos alunos controlar e monitorar os resultados apresentados pelo computador. Eles se manifestam, ou não, nas atividades de resolução de problemas com a utilização de tecnologias informáticas sendo, de qualquer modo, essenciais a esse contexto.

Além disso, os problemas propostos pelo professor, embora não fossem problemas abertos, conduziram a caminhos diferentes daqueles a que se propunham inicialmente, e esses novos caminhos foram condicionados pelo recurso informático que utilizavam, o *Winplot*. Penso que estes exemplos apresentados devem ser vistos como problemas que, ao serem resolvidos no computador, criam oportunidades importantes de avaliação e de aprendizagem de uma outra Matemática, ou seja, uma Matemática que envolve conteúdos diferentes daqueles a que, explicitamente, o problema se propõe a tratar.

2.3 – O Computador, a Resolução de Problemas e a Aprendizagem Matemática

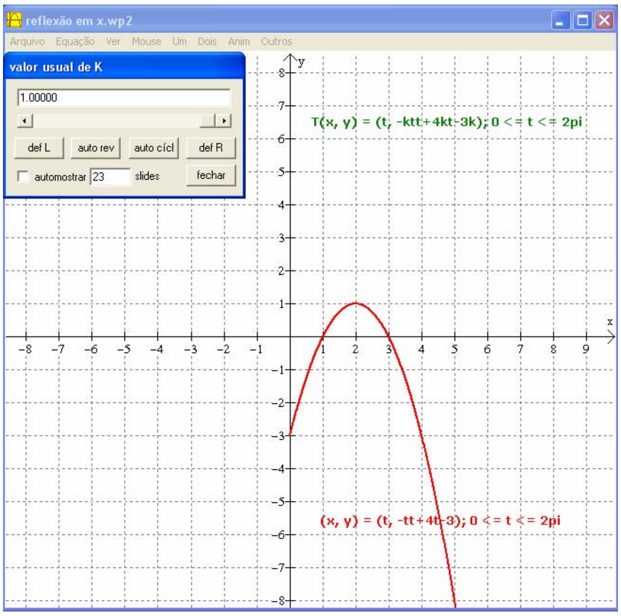
Este seção traz alguns dados relatados em uma pesquisa de iniciação científica desenvolvida com o objetivo de analisar as possibilidades de animações computacionais utilizando transformações lineares no plano, tendo como recurso informático o *Winplot*.

Animação computacional é a "simulação de movimento pela representação de uma série de imagens sucessivas na tela" (SAWAYA, 1999, p.25). As animações são um recurso computacional muito eficiente para compreender a construção e o comportamento de gráficos de funções e, por se referirem a movimentações no plano, as transformações lineares podem ser representadas através de tais animações, construídas no computador.

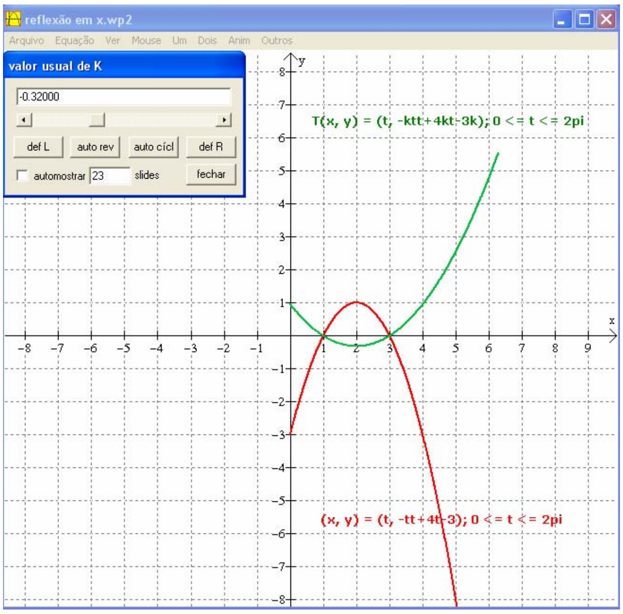
O aluno que realizou a pesquisa, inicialmente explorou os diversos tipos de transformações lineares (identidade, reflexões, homotetias, dilatações ou deformações, cisalhamento e rotação) por meio de animações aplicadas a funções simples.

O caso da reflexão através do eixo x, por exemplo, foi feita, inicialmente, do seguinte modo. Primeiro foi introduzida a equação paramétrica da curva que representa a função quadrática $y = -x^2 + 4x - 3$ no *Winplot*, ou seja, *(x,y) = (t, -tt+4t-3)*. Para obter a animação de sua reflexão através do eixo x, foi introduzida, também, a expressão contendo o parâmetro k de animação, que permite obter tal transformação: *(x,y) = (t, -ktt+4kt-3k)*. Em seguida, o parâmetro de animação *k* foi configurado para percorrer valores no intervalo de -1 até 1. Movimentando a barra de rolagem da janela "valor usual de k", foi obtido o efeito desejado

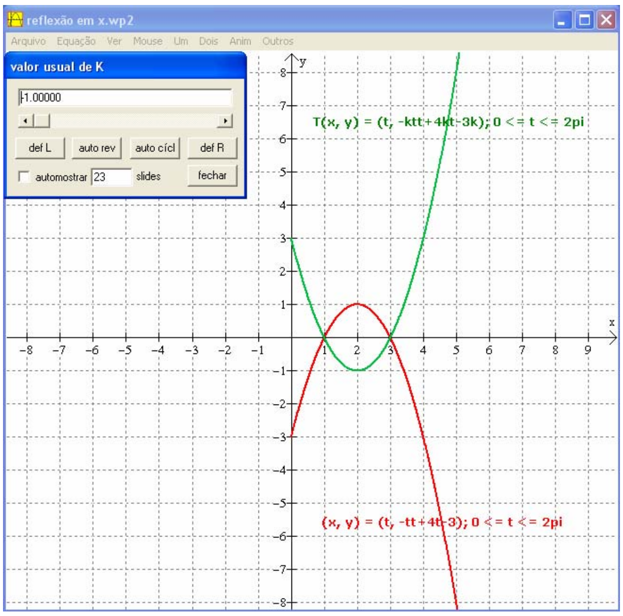
Assim, quando o valor de *k* for igual a *1*, estaremos vendo “antes” do processo de animação:



Quando o valor de *k* for igual a *-0.32*, por exemplo, estaremos vendo um momento “durante” o processo de animação:



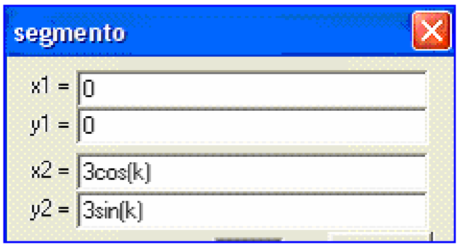
E, finalmente, quando o valor de *k* for igual a *-1*, veremos “depois” do processo de animação, o gráfico correspondente à reflexão da curva original através do eixo x, como mostra a figura ao lado:



Após a exploração dos diversos tipos de transformações lineares o problema proposto foi desenhar uma figura, um objeto ou outra coisa qualquer, que se movimentasse segundo as transformações estudadas, e tentar representá-la por animação no *Winplot*. Então surgiu a idéia de representar um cata-vento. Neste caso, entretanto, não foi possível utilizar simplesmente a forma paramétrica das equações. Percebeu-se uma grande complexidade nas equações que seriam necessárias para a apresentação inicial da figura. Além disso, após várias tentativas com esta forma de representar as equações, foi constatada a impossibilidade de obter o efeito de rotação desejado. A opção foi feira pela construção com segmentos de reta, opção que possibilitou obter o efeito da rotação para as hélices do cata-vento.

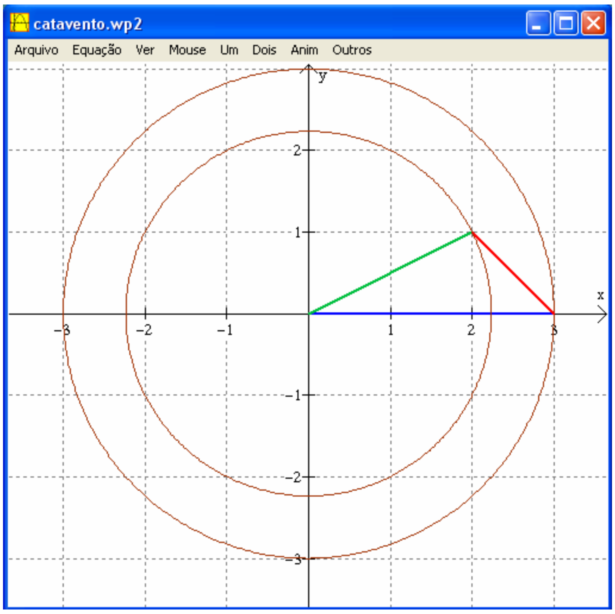
Foram inseridas as coordenadas $x1$, $y1$ e $x2$, $y2$ que representam os pontos inicial e final de cada segmento de reta que formaria cada hélice. Para a 1ª hélice, considerando o sentido anti-horário e a aplicação linear de rotação, foi feito:

1º segmento: $(x1,y1) = (0,0)$ *e* $(x2,y2) = (3cos(k),3sin(k))$; este segmento tem centro na origem e 3 unidades de comprimento, e corresponde ao segmento azul na figura a seguir.

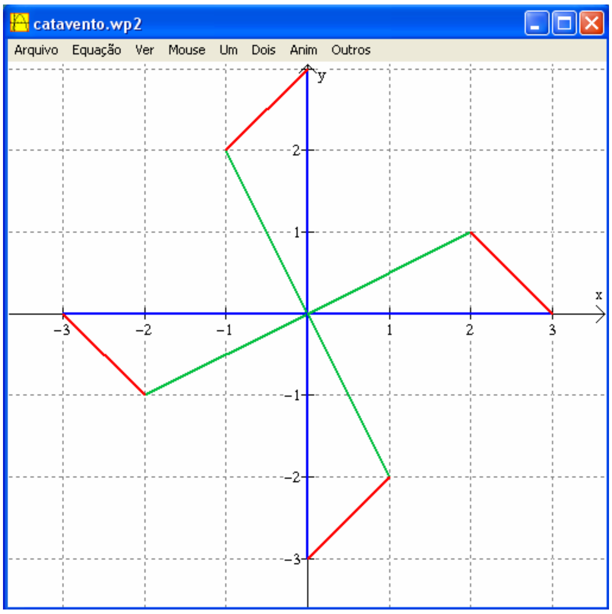


2º segmento: $(x1,y1) = (0,0)$ *e* $(x2,y2) = (2cos(k)-1sin(k),1cos(k)+2sin(k))$; este segmento tem centro na origem e 2 unidades de comprimento, e corresponde ao segmento verde na figura a seguir.

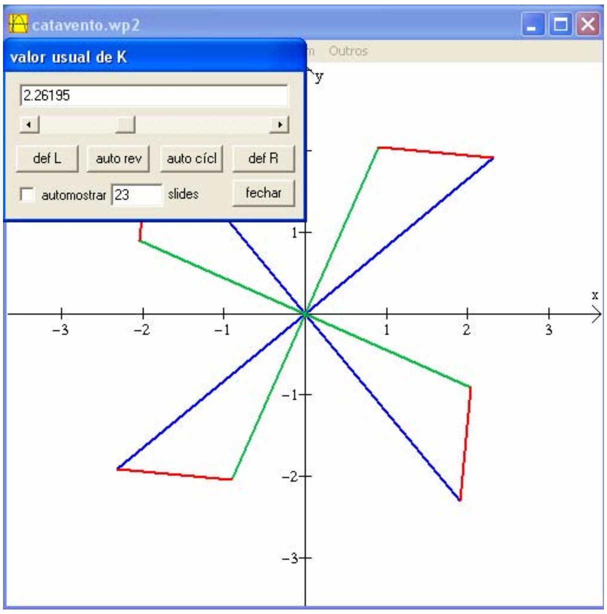
3º segmento: $(x1,y1) = (3cos(k),3sin(k))$ *e* $(x2,y2) = (2cos(k)-1sin(k),1cos(k)+2sin(k))$; este segmento (vermelho na figura) une as extremidades dos segmentos verde a azul compondo uma das hélices do cata-vento.



Procedendo do mesmo modo foi possível construir as demais hélices e o cata-vento apresentou-se como abaixo:



Foi preciso configurar o parâmetro de animação *k* para percorrer os valores de 0 até 2pi, para simular uma volta completa e, assim, foi possível observar o cata-vento girando. Quando o valor de *k* for igual a *2.26195*, por exemplo, o cata-vento está “durante” do processo de animação:



O trabalho de pesquisa citado foi desenvolvido por um estudante do curso de Ciência da Computação. Ele já havia cursado as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Entretanto, até desenvolver este trabalho, ele "via" essas disciplinas isoladamente, sem conexões. Durante a pesquisa, novos conteúdos matemáticos tiveram que ser estudados e explorados; alguns, já estudados no curso, precisaram ser relembrados e melhor compreendidos para que fosse possível criar as figuras e realizar as animações: conceito de função, propriedades das funções, tipos de funções, funções inversas; curvas no plano, representação cartesiana, paramétrica e polar de curvas; transformações geométricas, entre outros, além, é claro, dos conteúdos específicos de transformações lineares.

As investigações matemáticas que teve que realizar para conseguir animar figuras no software *Winplot* permitiu a percepção de vários aspectos. Inicialmente, vale destacar que embora o *Winplot* seja de fácil manejo e, particularmente, o recurso de animação seja simples, ele apresenta muitas possibilidades no estudo de temas matemáticos. O aluno manifestou que somente após realizar esta pesquisa foi que realmente entendeu o significado das transformações lineares e dos demais conteúdos que havia estudado no curso.

3 – Considerações Finais

Com o presente texto pretendeu-se desenvolver algumas reflexões acerca da utilização das tecnologias de informação e comunicação e sobre como a essas tecnologias (em particular, aos computadores) podem estar associadas algumas abordagens dadas à resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Foram desenvolvidas algumas análises sobre a importância de adequar o tipo de problema proposto ao objetivo que se pretende com a atividade que será realizada com a mediação do computador. Também foram descritos e analisados alguns momentos em que esse tipo de atividade forneceu importantes subsídios à avaliação, especialmente no tocante à detecção de lacunas de conhecimento. Finalmente, um exemplo foi apresentado em que a realização de atividade aberta envolvendo animações aplicadas a transformações lineares constituiu-se em importante oportunidade para o aluno construir relevante conhecimento matemático.

Apesar de todos os estudos já realizados, alguns professores e instituições de ensino ainda têm muitas dúvidas acerca da incorporação das TIC e, de fato, ainda há muito a pesquisar, esclarecer e entender. Por isso, embora as TIC e, especificamente, o computador, sejam elementos presentes no dia a dia das pessoas em geral e, em particular, no de muitos professores, sua efetiva utilização nos ambientes de ensino não se realiza.

Por outro lado, as pesquisas e as orientações oficiais atuais têm recomendado fortemente um consciente trabalho com resolução de problemas nas aulas de Matemática. Indicam a necessidade de renovar práticas e de propor atividades que estimulem os alunos a pensar, analisar resultados, e elaborar e apresentar conclusões bem fundamentadas. Argumenta-se que, desse modo, os alunos poderiam vivenciar experiências e processos de construção de conhecimento diferentes das que, usualmente, estão acostumados.

Cabe ao professor a nem sempre fácil tarefa de escolher e/ou elaborar problemas que atendam ao que ele pretende que os alunos trabalhem, e que aproveitem as possibilidades que as TIC oferecem. Assim, a partir da descrição e análise das situações aqui apresentadas, ainda ficam algumas questões: em que medida poder-se-ia analisar o que os alunos fazem quando utilizam o computador em atividades matemáticas sob a perspectiva da resolução de problemas? Seriam problemas tais atividades? Que concepções acerca da resolução de problemas estão explícitas ou implícitas em tais atividades? Que implicações decorrem daí? Este trabalho é uma tentativa de contribuir para estas reflexões

Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência.** 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. O Ensino de Números Racionais e Proporcionalidade através da Resolução de Problemas. In: Conferência Interamericana de

Educação Matemática, 12., 2007. **Anais ...** Santiago de Queretaro: Benemérita Escuela Normal de Querétaro, 2007. 1 Cd-rom.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Teaching Mathematics in the Classroom Through Problem Solving.** In: ICME11- International Congress on Mathematical Education, 11., 2008. Monterrey, México: Universidad Autónoma de Nuevo León. Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/453

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes.** 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**. EUA: Springer, 2005. 226p.

CONTRERAS, L.C.; CARRILLO, J. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. **Educación Matemática**, v.10, n.1, p.26-37. 1998.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

PEHKONEN, E. State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. In:. **Proceedings of ProMath 2003.** Berlin: Verlag Franzbecker, 2003. p.93-111.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. **Mathematics Education Research Journal,** Austrália, v.13, n.1, p.28-46, 2001.

PIERCE, R.; STACEY, K. Algebraic Insight: The Algebra Needed to Use Computer Algebra Systems. **Mathematics Teacher.** Reston, v.95, n.8, p.622-627, 2002.

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o Caso da Geometria Euclidiana Espacial.** 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2006.

SAWAYA, R. S. **Dicionário de Informática & Internet.** São Paulo: Nobel, 1999. 543p.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In: VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics.** New York: Longman, 2001. p.40-61.