PROFMAT **Departamento de Matemática**
Universidade Federal do Paraná
81531-980, Curitiba, PR
Brasil

Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos

por

Alessandra Beatriz P. Zavala
Anderson Oliveira de Almeida
Karin A. P. C. Mesquita

Preprint PROFMAT 1 (2013) 6 de Abril, 2013

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos

Alessandra B. P. Zavala
Anderson O. de Almeida
Karin A. P. C. Mesquita
Departamento de Matemática - UFPR
019081-980, Curitiba, PR
Brazil
ander_prof@hotmail.com
alebzavala@hotmail.com
karinandressa@hotmail.com

26 de abril de 2013

Resumo

Neste artigo, discute-se o uso da Modelagem Matemática como estratégia no ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas, com o objetivo de apresentá-la a professores e alunos como metodologia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.
Palavras-Chave: Modelagem Matemática, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Sequência Didática

1 Introdução

Neste artigo, discute-se o uso e a aplicação da Modelagem Matemática para o ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas em sala-de-aula, com o objetivo de apresentá-la a professores e alunos como metodologia auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

Para tanto, descreve-se os principais conceitos sobre a Modelagem Matemática, como propostos em [7] e [5]. Entretanto, em virtude das fragilidades da forma como a teoria é proposta em [7] e [6], seguiremos os pressupostos de [5], pois este dividiu a modelagem em três casos, dos quais escolhemos o primeiro que sugere apresentar a situação-problema direta ao aluno, auxiliando o professor que deseja iniciar o uso gradual da Modelagem em suas aulas.

Esse artigo está dividido em quatro seções, sendo que na primeira será apresentada definições sobre Modelagem; na segunda, será exibido uma lista de modelos Funções Exponenciais e Logarítmicas com sugestões de situações-problema; e já na terceira parte, duas sugestões de sequência didática. Por fim, conclui-se o presente texto apresentando as considerações finais sobre o trabalho proposto.

2 Modelagem Matemática

A inquietação dos professores perante a dificuldade dos alunos do Ensino Médio em compreender e aplicar os conceitos de Funções Exponenciais e Logaritmicas motivou a reflexão sobre o processo do ensino-aprendizagem desses dois assuntos específicos dos currículos da Matemática para o Ensino Médio.

Em geral, muitos professores enfatizam, durante as suas aulas, os procedimentos algorítmicos tentando em alguns momentos da aula contextualizar o conteúdo. Sendo assim, se o trabalho em sala não for contextualizado o conteúdo abordado torna-se artificial e desconectado da realidade. Quando fala-se de realidade não se trata especificamente da realidade do aluno, mas sim da real aplicação dos conceitos matemáticos aqui abordados. Percebe-se que em alguns livros didáticos, situações para contextualização são apresentadas apenas no fim dos capítulos correspondentes. Todavia, a contextualização não deveria ser apenas uma nota de rodapé, mas usada com maior destaque em todo o capítulo, quando possível.

Com efeito, acredita-se a aprendizagem só será efetiva no processo de construção dos conceitos matemáticos se for trabalhada de maneira que o aluno entenda-a no seu contexto e seja apresentada de forma significativa.

E com base nessa perspectiva, a Modelagem Matemática entra como uma solução na significação e na contextualização de conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio. Assim, tem-se na modelagem matemática um processo pelo qual se pode transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real e na linguagem Matemática. Em [7] a Modelagem Matemática é apresentada como "um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e generalização com a finalidade de previsão de tendências". Existem várias definições sobre Modelagem Matemática dentre elas destaca-se as citadas por [7] e [5].

Vejamos a seguir os conceitos que envolvem a Modelagem Matemática:

- **Modelagem Matemática**: segundo [7] "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo-real."

- **Modelagem Matemática**: segundo [5] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade de aprendizagem.

Como a proposta é apresentar uma forma de abordagem em sala-de-aula mais significativa para o aluno e mais conectada com a realidade, acredita-se que a definição de modelagem abordada por [5] seja mais prática e possa auxiliar o professor nesses primeiros passos de uma aula usando Modelagem como auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

Ao analisarmos alguns estudos realizados por [5], citamos que no ambiente da Modelagem Matemática, há "três níveis de possibilidades", os quais o autor chama de "casos", exibidos abaixo:

1º Caso: O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. Quando o aluno investiga, logo aparecem as indagações sobre o processo investigativo. Assim, a relação entre investigação e indagação não podem estar separadas, pois uma é consequência da outra.

Neste caso percebe-se que a coleta de dados fica dentro das situações-problema, não havendo necessidade de investigação fora de sala-de-aula.

2º Caso: O professor traz para a sala de aula um problema de outras áreas da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução. Os dados são obtidos fora da sala-de-aula e os alunos são responsáveis pela simplificação das situações-problema.

3º Caso: A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

É importante o professor perceber que ele fará várias intervenções durante o processo de resolução, estando presente com os alunos durante as investigações, e sempre dialogando com eles, deixando o aluno com a maior parte da responsabilidade sobre a resolução.

Já no 1º Caso, o professor perceberá que sua intervenção será maior, e é justamente esse caso que nos interessa, pois estamos galgando os primeiros passos no uso da modelagem matemática. Assim que o professor estiver familiarizado com as novas abordagens, ele poderá repensar sua prática usando o 2º e o 3º casos. Assim, o 1º Caso ficará em destaque em nossa abordagem.

Apesar de alguma dificuldade durante o uso da modelagem matemática, o professor deve perceber que ela apresenta inúmeras potencialidades que permitem aos alunos desenvolverem uma aprendizagem mais significativa e conectada com a realidade. Dentre os argumentos favoráveis à sua utilização no ensino, [6] e [7] destacam que a modelagem matemática:

- é prazerosa;
- torna os estudantes explorativos, criativos, habilidosos na resolução de problemas;
- dá significado ao conhecimento, no sentido de fundamentação de conceitos;
- facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações;
- faz com que o estudante vislumbre alternativas de direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica;
- alia teoria à prática, utilizando a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e problemas;

- motiva alunos e professores a procurarem entender a realidade que os cercam, a buscarem meios de agir sobre ela, e transformá-la;
- é um método que ajuda a preparar o indivíduo a assumir seu papel de cidadão;

Apesar de possuir inúmeros argumentos favoráveis ao uso dessa metodologia, algumas fragilidades podem aparecer, dentre elas destacam-se:

- é possível que o estudante se mostre inseguro e apático nas aulas pois é algo novo e diferente da rotina dele;
- corre-se o risco do tema escolhido não motivar o aluno e causar desinteresse na exploração do problema;
- pode-se despertar insegurança no professor por ser algo novo e diferente, pois eles não se sentem habilitados para desenvolver situações-problema com modelos matemáticos;
- por se tratar de uma aplicação do cotidiano, não se sabe inicialmente por onde o modelo passa;
- nem sempre a ferramenta matemática está ao alcance do aluno ou do professor;
- nem sempre a metodologia por modelagem está em adequação ao currículo legalmente estabelecido;
- há algumas dificuldades do acompanhamento simultâneo do professor, na aplicação dessa metodologia.

Tendo em vista as fragilidades da metodologia por modelagem matemática apresentadas acima, sugere-se aos professores uso o 1º Caso apresentado por [5], pois acredita-se que o mesmo pode sanar algumas das fragilidades apontadas por [7] e [6]. Por isso, consideremos alguns modelos de funções exponenciais e logarítmicas para que o professor possa utilizar em suas aulas e fazer uso da Modelagem Matemática, algumas retiradas de [7] e [2].

O motivo que nos levou a elencar modelos exponenciais está ligado ao fato deles surgirem de forma espontânea em diversas situações onde envolvem aumento ou diminuição de grandezas e as várias possibilidades de aplicações, dentre elas: juros contínuos, resfriamento e aquecimento, decaimento radioativo, reprodução de bactérias, crescimento populacional, acústica, escala Richter, magnitude de uma estrela, eliminação de àlcool ingerido.

3 Modelos Exponenciais

Nesta seção será apresentado alguns modelos exponenciais, envolvendo funções exponenciais e logarítmicas aplicadas à realidade e que poderão ser utilizadas com alunos do Ensino Médio e do Nível Superior.

Em geral, a função exponencial é apresentada na forma $f(x) = a^x$, onde a é uma base maior que zero, diferente de 1 e $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, a função logarítmica é dada pela função inversa da função exponencial da seguinte forma $f(x) = \log_a x$, lembrando que o logaritmo de um número positivo x, num sistema de base $a > 0$, é o expoente ao qual y deve-se elevar a base a de modo que se tenha $a^y = x$.

3.1 Juros Contínuos

Antes de ser considerado juros contínuos devemos perceber que, em geral, o regime de juros praticado no dia a dia é o de juros compostos, pois comumente a capitalização de quantias ocorre sempre em relação ao período anterior considerado. O fato de exibirmos o tema juros contínuos e compostos reside na relação com a função exponencial, e para entendermos melhor essa situação observemos o que acontece no seguinte exemplo:

imagine que desejamos capitalizar uma quantia de R$ 100,00 a uma taxa de 5% ao mês num regime de juros compostos, num período de 3 meses. Dessa maneira teremos a seguinte situação:

- Ao final de um mês teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05) = R\$\,105,00$

- Ao final de dois meses teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05 \cdot 1,05) = R\$(100 \cdot 1,05^2) = R\$110,25$

- Ao final de três meses teremos a quantia de: $R\$(100 \cdot 1,05 \cdot 1,05 \cdot 1,05) = R\$(100 \cdot 1,05^3) \approx R\$115,76$.

Nesse exemplo percebe-se realmente que a capitalização, por meio do regime de juros compostos, está associada a uma *progressão geométrica*, de razão $1,05$, que por sua vez, está ligada a uma função exponencial. Essa relação de discretização da função exponencial é apresentada em [2], pois é percebido que ao final de n meses (período discreto) teremos em mãos a quantia $100\cdot(1,05)^n$, em reais.

Agora o interesse está no estudo dos juros contínuos, pois é comum que em algumas instituições financeiras as políticas sobre a composição de juros sejam diferentes. Por exemplo, algumas capitalizam os juros mensalmente, outras semanalmente e outras ainda podem capitalizar diariamente. Dessa forma se faz necessário o cálculo dos juros de forma contínua, e para entender melhor o processo desse tipo de capitalização vamos recorrer à situação proposta por [2].

Um capital c, empregado a uma taxa de k por cento ao ano rende no fim de um ano juros no valor de $kc/100$. Pondo $\alpha = k/100$, temos que c renderá, no fim de um ano, juros no valor de αc. Decorrido um ano, o capital torna-se igual a $c+\alpha c$, ou seja, $c(1+\alpha)$. Passado dois anos, o novo capital $c_1 = c(1+\alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se-á igual a $c_1(1+\alpha) = c(1+\alpha)^2$. Logo, em m anos teremos o capital $c(1+\alpha)^m$. Devemos perceber que a fórmula $c(1+\alpha)^m$ é a generalização de capitalização composta.

Além da forma composta, pode-se usar essa generalização para capitalização mais vezes ao longo de um período, de tal forma que consigamos issor a cada instante n.

Tomando uma fração $1/n$ de ano, o capital c, empregado a mesma taxa de juros, deverá render $\alpha c/n$ de juros, de modo que, decorrida a fração $1/n$ de ano, o capital c transforma-se em

$$c_1 = c + \frac{\alpha c}{n} = c\left(1+\frac{\alpha}{n}\right).$$

Empregando o novo capital c_1 e esperando mais $1/n$ de ano, obtém-se $c_1(1+\alpha/n)$, ou seja, $c(1+\alpha/n)^2$. Prosseguindo assim, percebe-se que ao dividirmos o ano em n partes iguais, e decorridos cada um desses períodos de $1/n$ de ano, capitalizaremos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, teremos ao fim do ano, ao invés de $c(1+\alpha)$, um capital maior, a saber:

$$c\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Antes de contiuarmos, precisamos analisar o que acontece com a expressão

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n, \tag{1}$$

à medida que n se torna cada vez maior, pois esta é uma situação em que o professor pode explorar com o aluno, para verificar se algo de interessante ocorre mediante substituição de valores crescentes de n. Dessa forma podemos recorrer a uma tabela para perceber que a expressão (1) ficará cada vez mais próxima do número irracional $e = 2,718281828\ldots$.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,718146
100000	2,718268

Tabela 1: Alguns resultados da aplicação da função descrita em (1), para valores crescentes de n.

Analisando a tabela percebe-se que quando $\alpha = 100\%$ tem-se a expressão (1), quando n for cada vez maior, ou seja, $n \to \infty$ tem-se a seguinte situação:

$$c \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to c \cdot e,$$

generalizando temos:

$$c \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to c \cdot e^{\alpha}.$$

Assim, essa situação permite que uma instituição financeira calcule os juros a cada instante; ou seja, com juros capitalizados continuamente.

3.2 Decaimento radioativo

O processo de desintegração radioativa é aquele no qual os átomos de uma substância (como rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outras substâncias. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui. Isto é feito de tal maneira que, num determinando instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo é proporcional à quantidade de substância presente naquele momento. A constante de proporcionalidade α, que é uma medida da velocidade na qual determinada substância é decomposta com o passar do tempo, é determinada experimentalmente, pois essa constante varia de substância para substância, e de isótopo para isótopo.

Para entender melhor o que acontece na situação de desintegração, considere um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processa instantaneamente, então temos que decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haverá uma perda de αM_0 unidades de massa, restanto apenas a quantidade $M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0\,(1-\alpha)$. Decorridos 2 segundos, a massa restante é $M_2 = M_1\,(1-\alpha) = M_0\,(1-\alpha)^2$. E em geral, passados s segundos, restará a massa

$$M_s = M_0\,(1-\alpha)^s.$$

Procurando uma aproximação melhor para o fenômeno, fixe um inteiro $n > 0$ e imagine que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ de segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo a massa do corpo se reduzirá ao valor

$$M_0 - \left(\frac{\alpha}{n}\right) M_0 = M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Decorrido 1 segundo, ocorrerrão n desintegrações instantâneas e, efetuadas as n reduções, restará no corpo a massa $M_0\,(1-\alpha/n)^n$. Dividindo o intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partes iguais, chega-se à conclusão de que, ao final de 1 segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$\lim_{n\to\infty} M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Se o objetivo for calcular a massa ao fim de t segundos, deve-se dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda da massa será $M_0 \cdot \alpha t/n$. Repetindo o argumento acima chega-se à expressão

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}, \tag{2}$$

que fornece a massa do corpo depois de decorridos t segundos.

Perceba que nesses dois exemplos retirados de [2], temos duas formas de funções exponenciais: uma relacionando ao modelo de crescimento contínuo de juros compostos; e outra, relacionada ao modelo de decrescimento contínuo aplicado ao decaimento radioativo.

O número e será analisado de um ponto de vista mais teórico no final desta seção, pois até agora usamos um ponto de vista mais intuitivo. Acredita-se na importância do professor conheçer um pouco mais sobre o número e (*número de Euler*) e perceber que será um grande facilitador da modelagem, principalmente pelo fato de que ele aparece naturalmente em diversos modelos como os já mostrados.

3.3 O método do carbono 14

O método do Carbono 14 é um exemplo também retirado de [2] e representa mais um modelo de funções exponeciais, mas antes é importante entender o que é o método do Carbono 14, indicado por C^{14}. O Carbono 14 é um isótopo radioativo do Carbono, formado na atmosfera devido ao bombarderio da terra por raios cósmicos. Através dos tempo, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. O C^{14} é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira.

Para isto, sabe-se empiricamente que a meia-vida do C^{14} é 5730 anos. Mas o que é meia-vida? Meia-vida é um conceito fácil, porém os alunos na sua maioria não entendem a sua essência. Por isso, apresenta-se o conceito correspondente a seguir:

Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que uma dada quantidade da substância se reduza à metade.

O que precisa ficar claro para o aluno e também para o professor é que o tempo de meia-vida independe da massa da substância, conforme será visto a seguir.

Antes disso, encontra-se o tempo de *meia-vida* usando a equação (2). Sabendo que um certo elemento radioativo tem *meia-vida* igual a t_0 unidades de tempo, isto significa que uma unidade de massa desse elemento se reduz à metade no tempo t_0. Assim pela definição de *meia-vida* tem-se:

$$M(t) = \frac{M_0}{2} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}.$$

Aplicando logaritmos e suas propriedades, temos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha t_0,$$

ou ainda

$$-\ln 2 = -\alpha t_0.$$

Disso segue que:

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t_0}. \tag{3}$$

Analisando (3) e isolando t_0, temos t_0 em função da taxa de desintegração α, o que nos permite encontrar a meia-vida, a saber:

$$t_0 = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Agora que sabemos encontrar a meia-vida de uma substância qualquer, aplicar-se-a esse conhecimento para a constante de desintegração do C^{14}. Sabemos por experimentações que a meia-vida do C^{14} é 5730 anos. Usando (3), segue que a constante de desintegração é:

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5730} = \frac{0,6931}{5730} = 0,00012096. \tag{4}$$

Depois dessas informações será possível analisar um exemplo de [2], descrito a seguir. Nessa situação é apresentado como o uso modelo do C^{14} pode ser útil para acabar com a seguinte controvérsia: Foi encontrado num castelo inglês uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa $M = M(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é de 89,4% da massa de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa.

Sabe-se de (2) que $M = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$, donde $M/M_0 = e^{-\alpha t}$, fazendo as substituições temos que $0,894 M_0 = M_0 \cdot e^{(-0,00012096 t)}$. Portanto, conclui-se que o tempo em anos do pedaço de madeira encontrado é aproximadamente

$$t = -\frac{\ln(0,894)}{0,00012096} = \frac{0,1121}{0,00012096} = 926 anos.$$

Analisando a situação, percebe-se que se a mesa fosse da Távola Redonda, deveria ter mais de 1500 anos. Portanto conclui-se que o pedaço de madeira não é da referida Távola Redonda.

Deve-se perceber que na situação descrita acima, é necessário o conhecimento de logaritmos como uma ferramenta auxiliar na hora de resolver uma dada equação exponencial com bases diferentes. Uma outra situação onde o conhecimento de funções exponenciais pode ser usado, também retirado de [2], é do resfriamento de um corpo, onde é usada a *Lei do, Resfriamento de Newton*, conforme será visto a seguir.

3.4 Resfriamento de um corpo

O resfriamento de um corpo possui uma situação análoga à desintegração radioativa pois, pode-se associar a esse fenômeno um modelo de decaimento exponencial. Analisando a situação temos um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água por exemplo), e cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça praticamente constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. Sendo assim, a *Lei do Resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com um taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, esta lei se traduz matematicamente da seguinte forma: chamando D_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ a diferença num instante t qualquer, tem-se

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

onde a constante α depende do material de que é constituida a superfície do objeto[1].

3.5 Pressão atmosférica

A pressão atmosférica é outra situação em que aparece a função exponencial, e que o professor poderá usar como um modelo inédito para os alunos. O exemplo a seguir, retirado de [2] sobre pressão atmosférica, diz o seguinte: A pressão atmosférica é a pressão exercida pela camada de moléculas de ar. Como a grandeza pressão é a força exercida por unidade de área, temos que a pressão atmosférica num dado ponto do planeta mede a força exercida pelo ar numa região próxima daquele ponto. À medida que a altura h em relação ao nível do mar aumenta, a pressão atmosférica diminui, não somente porque a

[1] A Lei de Newton vale também com expoente positivo, onde ocorre o aquecimento de um corpo frio colocado numa ambiente mais quente.

coluna de ar acima do dado ponto diminui, mas também em virtude de o ar se tornar mais rarefeito, e portanto pesar menos. Prova-se, como consequência da Lei de Boyle, que se p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão a uma altitute h é

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h}, \tag{5}$$

onde α é uma constante. A pressão atmosférica $p = p(h)$ pode ser medida diretamente por um instrumento chamado *barômetro*.

Um exercício que pode ser proposto é aquele em que, medindo-se a pressão atmosférica em dois pontos cujas altitutes h_1 e h_2 são conhecidas, pede-se para determinar a constante α. Chamando de p_1 e p_2 as pressões verificadas nas alturas h_1, e h_2, respectivamente, temos de (5) que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \cdot e^{-\alpha h_1} \\ p_2 &= p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}. \end{aligned}$$

Dividindo uma equação pela outra, temos

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{-\alpha(h_1 - h_2)},$$

e por fim, ao aplicarmos o logaritmo a ambos os membros, podemos isolar a constante α pedida, a saber:

$$\alpha = \frac{\ln(p_1/p_2)}{h_2 - h_1} = \frac{\ln(p_2/p_1)}{h_1 - h_2}.$$

Pode-se notar que, por exemplo, conhecendo a constante α e possuindo um barômetro, podemos a cada momento determinar a que altura h um dado avião voa, por meio da fórmula abaixo, obtida ao isolarmos a altura h na equação (5):

$$h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right),$$

onde p_0 é a pressão ao nível do mar e $p = p(h)$ é a pressão medida pelo barômetro no momento dado, no avião.

3.6 Eliminação de álcool ingerido

O exemplo da eliminação do álcool, retirado de [7], foi realizado na PUC-CAMP em 1998 no curso de Modelagem. Nesse curso, foi mostrado que o álcool ingerido por um indivíduo sofre um processo de eliminação gradual através da urina, suor e respiração. O bafômetro, utilizado pela polícia rodoviária para detectar o teor alcoólico entre consumidores de bebida alcoólica, mede a concentração de álcool eliminado pelos pulmões. Durante esse período, os alunos do curso de Modelagem tomaram algumas medidas de concentração alcoólica, utilizando um bafômetro construído por eles. Dessa forma, a primeira medida foi tomada 70 minutos após terem ingerido aproximadamente 10 copos de cerveja. Após esta medida eles pararam de beber e foram feitas outras 2 medidas subsequentes. Os valores obtidos na tabela a seguir são médios, levando-se em conta o peso de cada participante:

Tempo (minuto)	concentração média de álcool (g/L)
70	0,95
75	0,76
155	0,46

Como estamos analisando funções exponenciais e logarítmicas, é de se esperar que a eliminação de álcool no organismo seja proporcional à quantidade existente em cada instante. Assim, o modelo proposto para essa situação é a da função exponencial que obedece a seguinte lei:

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-kt},$$

onde c_0 é a concentração inicial, ou seja, o valor obtido quando os indivíduos pararam de beber. Ao considerarmos o ajuste exponencial dos dados experimentais, chega-se ao seguinte modelo:

$$c = 1,472 \cdot e^{-0,0075t}, t \geq 70.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t - 70$ na equação acima, obtendo $\tau = 0$ quando $t = 70$, podemos escrever a equação acima como:

$$c(t) = 0,8683 \cdot e^{-0,0075\tau}, \tau \geq 0.$$

Dessa forma, obtem-se uma função que determina o tempo para eliminação do álcool ingerido. Vale ressaltar que essa função é válida para indivíduos com média de 72Kg, sendo essa a média obtida dos participantes do experimento.

3.7 Escala Richter

A escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e por seu colega Beno Gutenberg, ambos membros do California Institute of Technology (Caltech).

A escala Richter é uma escala logarítmica que mede a amplitude das ondas sísmicas (ondas causadas pela vibração do solo). A princípio, essa escala foi graduada de 1 a 9, porém, atualmente não existe limite teórico. Sendo assim, a Escala Richter é uma "escala aberta".

A escala utilizada é logarítmica de base 10, onde a magnitude corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro (ponto da superfície do globo mais próximo do centro de abalo de um terremoto), ou seja, é calculada pela equação:

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$$

onde A representa a amplitude medida num terremoto por um instrumento chamado sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência. Por ser uma escala logarítmica de base 10, à medida que a magnitude aumenta, temos uma amplitude 10 vezes maior. Por exemplo, um terremoto com magnitude 6, tem uma amplitude 10 vezes maior que um terremoto de magnitude 5. Dessa forma, o professor poderá utilizar a escala Richter como ferramenta de aplicação com os seus alunos.

3.8 Magnitude Aparente de Uma Estrela

Nesse exemplo retirado de [13], temos na astronomia uma aplicação de logaritmos, pois as estrelas são classificadas pelo brilho, usando um sistema de magnitudes, realizado da seguinte forma:

A estrela mais brilhante é de 1^a magnitude, as quais são vistas a olho nu com uma magnitude m_1 com brilho F_1; e as de menor brilho, são de 6^a magnitude com magnitude aparente m_6, e que correspondem a um fluxo F_6. Sabe-se que o brilho de uma estrela com m_1 é 100 vezes maior que o brilho de uma estrela com m_6. Assim temos $F_1 = 100 \cdot F_6$, sendo que um intervalo de 5 magnitudes corresponde a um fator de 100 no brilho. A diferença de 1 magnitude corresponde a um fator de $100^{1/5} \approx 2,5$. Como esta escala é baseada nas observações do olho humano, podemos dizer que ele corresponde a de um detetor logarítmico.

A escala de magnitudes inclui valores maiores (positivos) para representar estrelas fracas, por exemplo aquelas detectáveis pelo Observatório do Monte Palomar, cujo levantamento fotográfico realizado tem sensibilidade para magnitudes até $m_v = 23,5$. Por outro lado, a escala também se estende para valores negativos para representar objetos muito brilhantes. Dessa forma, pode-se deduzir a relação entre magnitude e brilho. Para isso, vamos primeiramente comparar as magnitudes m_1 e m_6. Chamando de Δ_m a diferença entre as magnitudes consideradas, nesse caso temos $\Delta_m = 5$. Com isso, a relação entre os brilhos correspondentes é

$$\frac{F_1}{F_6} = 100.$$

Assim, para $\Delta_m = 1$ temos que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{F_i}{F_{i+1}} = 100^{\frac{1}{5}} \approx 2,5.$$

Considerando agora magnitudes m_1 e m_2, tem-se $\Delta_m = 1$. Disso segue que:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\left(\frac{m_2 - m_1}{5}\right)}.$$

Aplicando logaritmo a ambos os membros temos:

$$\log \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{5}\right) \cdot \log 100 \approx 0,4(m_2 - m_1).$$

Assim obtem-se:

$$m_2 - m_1 = 2,5 \log \frac{F_1}{F_2}.$$

Agora é necessário encontrar uma expressão geral para magnitude m de uma estrela. Para este fim, supoem-se que seu brilho seja $F = F_2$ e que o brilho correspondente à magnitude zero ($m_1 = 0$) seja $F_0 = F_1$. Assim, temos: $m - 0 = 2,5 \log \frac{F_0}{F_2}$, ou seja, $m = 2,5 \log F_0 - 2,5 \log F$. Substituindo $C = 2,5 \log F_0$, que define-ses como o ponto zero na escala de magnitudes e dependendo do sistema fotométrico, teremos $m = C - 2,5 \log F$.

Lembrando que o brilho observado depende da distância, isto é,

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

onde L é uma constante positiva, temos

$$m = C' - 2,5 \log L + 5 \log d,$$

com $C' = C + (2,5 \log 4\pi)$ e m a magnitude aparente da estrela.

3.9 Escala Musical

Na escala musical, uma oitava, representa um fator de 2 na frequência dos sons, é dividida em 12 meio tons. Esses meio-tons são espaçados uniformemente cada um num fator de $\sqrt[12]{2}$ a partir do anterior. Por exemplo, retirado de [1] a quantidade de meio-tons que separam a frequência de 440 hertz de uma frequência de 329,6 hertz, pode ser obtida aplicando a diferença de logaritmos de base $\sqrt[12]{2}$ entre 440 e 329,6 hertz, isto é:

$$\log_{\sqrt[12]{2}} \frac{440}{329{,}6} \approx 5.$$

Esse resultado significa que a distância que separa 440 hertz de 329,6 na escala musical é 5 semitons.

3.9.1 O número *e*

Para começar, define-se o número e pela seguinte igualdade: $\exp 1 = e$. Dessa forma, percebe-se que

$$\exp n = \exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{\text{n vezes}}) = \underbrace{\exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1}_{\text{n vezes}} = e^n,$$

lembrando que: $\exp\left(x+y\right) = \left(\exp x\right)\cdot\left(\exp y\right)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Entretanto, se $n > 0$ é inteiro, veremos que: $\exp(-n) = \left(\exp n\right)^{-1} = (e^n)^{-1} = e^{-n}$. Se $r = \frac{p}{q}$ com p e $q > 0$ inteiros, então $\left(\exp r\right)^q = \exp(p) = e^p$; extraindo-se a raiz q-ésima de ambos os membros, temos $\exp(r) = e^r$. Provando assim a proposição a seguir:

Proposição 3.1 *Dado qualquer r racional tem-se que:* $\exp r = e^r$.

Ao analisar outra expressão para o número e tem-se que, pondo $f(x) = \ln(1+x)$, tem-se que a derivada de f em $x = 0$ é 1. Isso significa, pela definição de derivada, que:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Fazendo $x \to 0$ pela sequência $x_n = 1/n$, $n \geq 1$, segue que:

$$1 = \lim_{x\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left\{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right\}$ e exp é uma função contínua, segue que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp 1 = e.$$

Vamos mostrar agora que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e.$$

Para isso, escreve-se $a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para cada $n \geq 1$. Em primeiro lugar, como $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \geq 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2\cdot 1 = 2^{n-1}$, temos que

$$a_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \leq 3,$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ é convergente. Denotando por α sua soma, vemos que $2 \leq \alpha \leq 3$.

Agora será analisada a sequência b_n. Desenvolvendo b_n pelo binômio de Newton, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Cada termo da última soma é menor que os termos correspondentes na soma, definindo a_n, portanto, $b_n < a_n$ para todo $n \geq 1$. Como b_n converge para e, temos que: $e \leq \alpha$. Vamos provar que: $e = \alpha$.

De fato, dado $\epsilon > 0$ seja p tal que $\alpha - a_p < \epsilon$, isto é, $\alpha - \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right) < \epsilon$. Dado qualquer $n > p$, temos que:

$$b_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

Mantendo p fixo e fazendo $n \to \infty$ na última desigualdade, vemos que

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{p!} = a_p > \alpha - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $e \geq \alpha$, e portanto, $e = \alpha$, como queríamos. Logo,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

4 Aplicações de Exponenciais e Logaritmos em Sala de Aula

Nesta seção será apresentado duas sequências didáticas que envolve a *Lei de Resfriamento de Newton* no uso da modelagem matemática proposta por [5]. Assim, o professor deve apresentar ao aluno uma situação-problema, com todas as informações necessárias para investigações e resolução da mesma.

Para as situações propostas é importante que os alunos tenham familiaridade com assuntos trabalhados em outros bimestres, por exemplo, o conhecimento prévio sobre progressões geométricas ajudará o aluno a entender melhor as funções exponenciais e estabelecer conexões com assuntos já estudados. Convém lembrar neste momento que para a aprendizagem em matemática ser significativa, é muito importante apresentar relações entre assuntos estudados.

4.1 A temperatura ideal do café

A primeira situação-problema será o estudo da Lei de Resfriamento de Newton no caso de uma xícara de café quente, deixado para esfriar.

Para essa atividade sugerimos separar os alunos em duplas e apresentar o seguinte texto retirado de [10].

A Lenda do Café

> Não há evidências reais sobre a descoberta do café, mas há muitas lendas que relatam sua origem. Uma das mais divulgadas é do pastor Kaldi que viveu na Absínia, hoje Etiópia, há cerca de mil anos. Ela conta que Kaldi, observando suas cabras, notou que elas ficavam alegres e saltitantes e que esta energia extra se evidenciava sempre que mastigavam os frutos de coloração amarelo-avermelhada dos arbustos existentes em alguns campos de pastoreio. O pastor notou que as frutas eram fonte de alegria e motivação, e somente com a ajuda delas o rebanho conseguia caminhar por vários quilômetros por subidas infindáveis. Kaldi comentou sobre o comportamento dos animais a um monge da região, que decidiu experimentar o poder dos frutos. O monge apanhou um pouco das frutas e levou consigo até o monastério. Ele começou a utilizar os frutos na forma de infusão, percebendo que a bebida o ajudava a resistir ao sono enquanto orava ou em suas longas horas de leitura do breviário. Esta descoberta se espalhou rapidamente entre os monastérios, criando uma demanda pela

bebida. As evidências mostram que o café foi cultivado pela primeira vez em monastérios islâmicos no Iêmen. Agora para um bom preparo do seu café ao contrário do que se pensa, a água utilizada para fazer o café deve ser apenas aquecida, ou seja, não pode ferver, pois a perda de oxigênio altera a acidez do café. A temperatura ideal de preparo é próxima dos $90°C$ e a temperatura ideal para consumo é em torno de $65°C$, acima disso, além do risco de queimar a língua, o paladar humano tem dificuldades em distinguir sabores em temperaturas maiores.

A seguir, será proposto três exemplos de questionamentos que podem ser retiradas do texto:

Questionamento 1: Quanto tempo devemos esperar para que o café esfrie ao ponto de ser bebido sem risco de queimar a língua?

Questionamento 2: O que ocorre com a mudança de temperatura e qual a relação entre a temperatura do café e do ar que o cerca?

Questionamento 3: Por que o café esfria?

Para que os alunos iniciem a resposta dos questinamentos, sugere-se a apresentação do seguinte texto:

A Lei de resfriamento de Newton

A Lei de resfriamento de Newton é uma das leis básicas da física e de ampla aplicação. Por exemplo, essa lei garante que à medida que o café esfria, a taxa de esfriamento correspondente diminui, pois a diferença de temperatura entre o café e o ar diminui. A matemática ali encontrada ajuda a compreender muitos outros fenômenos, tais quais: decaimento radioativo, meia-vida de uma substância. A fórmula é simples e está associada ao nosso objeto de estudo: as funções exponenciais. É útil lembrar de aulas anteriores quando o tema progressões geométricas foi abordado. A relação entre esses dois assuntos é fundamental para que haja entendimento sobre o que está acontecendo, pois quando falamos de funções exponenciais estamos remetendo a variações de expoentes. Assim, a lei do resfriamento de Newton ajudará na determinação do tempo necessário para que, por exemplo, o leitor e sua família saboreiem uma boa xícara de café sem queimar a língua.

Assim, um objeto quando colocado em um ambiente com uma temperatura diferente da sua, tende a entrar em equilíbrio térmico com a vizinhança. Esse equilíbrio térmico segue a seguinte lógica: se este objeto estiver a uma temperatura mais alta do que a sua vizinhança, ele perderá calor para o ambiente e esfriará; caso contrário, esquentará. Dessa forma, a taxa de resfriamento de um objeto depende da diferença de temperatura entre este e o ambiente. A lei do resfriamento de Newton afirma que, para pequenas diferenças de temperaturas, a taxa de resfriamento é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura. Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em meio ambiente na temperatura T, tende àquela do meio que o cerca T_a (*temperatura ambiente*). Assim, se a temperatura $T < T_a$, esse corpo se aquecerá e caso, contrário, se resfriará.

A temperatura do corpo, considerada uniforme, será uma função do tempo $T = T(t)$. Verifica-se experimentalmente que quanto maior for o valor $|T - T_a|$ mais rápida será a variação de $T(t)$. Isto é evidenciado de forma precisa pela chamada Lei de resfriamento enunciada por Newton, que colocada em termos matemáticos fica assim:

$$T(t) = k \cdot e^{-\alpha t} + T_a, \tag{6}$$

ou

$$T(t) - T_a = k \cdot e^{-\alpha t},$$

onde fica mais evidente que a diferença entre a temperatura inicial e a temperatura do ambiente é proporcional a taxa de decaimento.

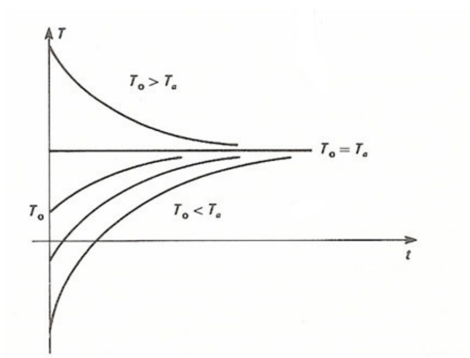

Figura 1: Algumas soluções da equação (6), com diferentes dados iniciais.

Com esses dois textos o professor deverá agir como mediador para que o aluno selecione todos os dados para responder o seguinte questionamento: "Se uma xícara de café estava a uma temperatura de 95°C e esfriou para 85°C em um minuto em uma sala a 20°C, em quanto tempo esse café atingirá a temperatura de 65°C, sendo possível tomá-lo sem riscos de queimadura?"

O aluno deve entender que T_0 em (6) representa a temperatura inicial; T_a representa a temperatura com ambiente que em geral deve-se manter constante; e o que queremos determinar é o tempo necessário para que a xícara com café a $95°C$ chegue à temperatura de $65°C$.

Com esses dados, espera-se que o aluno perceba que é necessário encontrar a taxa de decaimento antes de encontrar o tempo de resfriamento, pois esta taxa está relacionada com a diferença de temperatura. Assim, uma resolução que o professor deve esperar é:

Para determinar os valores de k e α os alunos devem usar os dados fornecidos pelo problema. Como $T(0) = 95$, temos:

$$95 = k \cdot e^{-\alpha \cdot 0} + 20 \Rightarrow 95 = k + 20 \Rightarrow k = 75.$$

Com isso, é de se esperar que a determinação da constante α ficará mais fácil e clara para o aluno e professor. De fato, temos:

$$85 = 20 + 75 \cdot e^{-\alpha} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{65}{75} = \frac{13}{15} \Rightarrow \alpha = -\ln\left(\frac{13}{15}\right) \approx 0,1431.$$

Dessa forma o aluno encontrou todas as constantes usando os dados encontrando nos textos, e nos questionamentos que o professor fez ao longo do desenvolvimento. Assim o aluno ao substituir as constantes encontrará a função:

$$T(t) = 75 \cdot e^{-0,1431t} + 20.$$

Com a função e suas respectivas constantes, o aluno terá condições de responder, por exemplo, ao primeiro questionamento; ou seja, encontrar o tempo para que o café atinja a temperatura de $65°C$. Fazendo $T(t) = 65$ o professor esperará a seguinte resposta:

$$75e^{-0,1431t} + 20 = 65 \Rightarrow 75e^{-0,1431t} = 45 \Rightarrow e^{-01431} = \frac{3}{5}.$$

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros temos:

$$-0,1431t = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow t = \frac{0,5108}{0,1431} \Rightarrow t = 3,57\text{min}.$$

A interpretação do resultado também faz parte do desenvolvimento da situação-problema; ou seja, o valor $t = 3,57$ min significa que esse é o tempo necessário para que o café mantenha o sabor sem riscos de queimaduras.

4.2 Criminalística - a hora da morte?

Nesta situação-problema continuaremos o estudo da Lei do Resfriamento de Newton no caso da morte de Dona Florinda Flores.

Para essa atividade sugere-se separar os alunos em duplas e apresentar o seguinte texto retirado de [12], que trata de crimes que ficam sem solução.

Em um ano, 10 mil crimes ficam sem solução no Paraná

> No ano passado, 16,9% dos inquéritos concluídos ficaram sem definição do criminoso. Para especialistas, é isso que traz a sensação de impunidade. Há quem diga que o Brasil teve uma aula de investigação com o caso da menina Isabella Nardoni, jogada do sexto andar de um prédio em São Paulo no dia 29 de março. A população pôde acompanhar ao vivo pela televisão a reconstituição do crime, o trabalho da perícia e as hipóteses levantadas. "Seria o sangue de Isabella o encontrado no apartamento?" "Qual objeto foi usado contra a menina?" "O crime levou quanto tempo?", foram perguntas que a polícia buscou responder. Dessa forma, o inquérito policial foi encerrado apontando os acusados, que serão julgados pela Justiça.
>
> Longe dos holofotes, porém, crimes continuam sem solução. No Paraná, por exemplo, não foram definidos os autores de 10,9 mil crimes em 2007. Do total de inquéritos concluídos no estado no ano passado, 16,9% ficaram sem definição do criminoso, segundo dados da Secretaria de Estado de Segurança Pública (Sesp).
>
> Para especialistas, a quantidade de crimes sem solução, que deveria ser zero, preocupa e traz consequências, como a sensação de impunidade. "A falta de responsabilização do autor do crime estimula ainda mais o crescimento da criminalidade", aponta o advogado criminal e doutor em Direito Penal pela Universidade Federal do Paraná, Juliano Breda.
>
> Para ele, o aumento do número de inquéritos demonstra o acréscimo do fenômeno delitivo. Na comparação de 2006 com 2007, o número de inquéritos instaurados passou de 46,3 mil para 57,5 mil, o significa um aumento de 24,6%. "Enquanto as estatísticas do Ministério da Justiça apontam uma redução da criminalidade em alguns estados, especialmente em São Paulo, o Paraná vive um momento dramático de insegurança social", diz o advogado.

Após a leitura, a próxima sugestão é apresentar o vídeo "Os Suspeitos"que tem como referência [11] que trata da morte de Dona Florinda Flores, pois assim o professor poderá usar outro recurso para apresentar uma nova situação-problema ao seu aluno.

Vamos descrever a situação encontrada no vídeo acima:

Caso Florinda Flores

"O corpo de Dona Florina Flores foi encontrado por volta das 18:15 por uma amiga, sendo que os vizinhos disseram que ela foi vista viva por volta das 12:30. O principal suspeito é o jardineiro, pois o mesmo foi visto trabalhando na casa de Dona Florinda por volta das 12:30, e ficou por lá até às 13:30. Logo após, ele foi visto pegando o ônibus em direção ao outro serviço, que fica do outro lado da cidade, às 14:30."[...] "Para determinar a hora da morte, o delegado informa que: a temperatura do corpo encontrado às 18:23 era de $32°C$ e a temperatura ambiente era de $28°C$. Partindo do fato que a temperatura média de uma pessoa sem febre é de $36,5°C$ e o tempo que levaria para que o corpo de Dona Florinda esfriar e chegar à temperatura de $28°C$ é de aproximadamente 6 horas, é possível determinar se o jardineiro foi o autor do crime?"

No vídeo mencionado acima, [11], foi apresentado a seguinte função:

$$T_c(t) = t_i(0) \cdot e^{r \cdot t}.$$

O professor deve esperar que o aluno entenda as variáveis. Caso isso não ocorra, o professor deve questioná-lo sobre o significado das variáveis encontradas no problema. Após o total entendimento o aluno deverá identificar:

- r = taxa de decaimento exponencial relacionada com a diferença de temperatura.
- t = tempo transcorrido.
- t_i = temperatura inicial de um corpo.

Após a apresentação das variáveis pelo aluno é esperado o início da resolução. Assim, o professor deverá perceber se o aluno conseguiu chegar à seguinte relação entre os dados do texto e a função apresentada.

$$T_c(t) = t_i(0) \cdot e^{r \cdot t} \Rightarrow 28 = 36,5 \cdot e^{6r} \Rightarrow e^{6r} = 0,767.$$

Aplicando o logaritmo a ambos os membros tem-se:

$$\ln e^{6r} = \ln 0,767 \Rightarrow 6r = -0,265 \Rightarrow r = -0,044.$$

Com isso, o professor deverá questionar os alunos sobre o significado de $r = -0,044$, pois é esperado uma resposta como, por exemplo: r é a taxa de decaimento exponencial para que o corpo atinja a temperatura ambiente. Entendido isso, o aluno está apto para encontrar o horário que Dona Florinda morreu, e com isso decidir se o jardineiro foi ou não o autor do assassinato.

Nessa etapa, o aluno deverá substituir o valor da taxa de variação da seguinte forma:

$$T_c(t) = t_i(0) \cdot e^{-0,044 \cdot t},$$

Usando essa função ele pode determinar quanto tempo o corpo levou para chegar à temperatura de $32°C$. Dessa forma, deve-se esperar a seguinte resolução:

$$T_c(t) = t_i(0) \cdot e^{-0,044 \cdot t} \Rightarrow 32 = 36.5 \cdot e^{-0,044t} \Rightarrow e^{-0,044t} = 0,876.$$

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros temos:

$$e^{-0,044t} = 0,876 \Rightarrow \ln e^{-0,044t} = \ln 0,876 \Rightarrow -0,044t = -0,132 \Rightarrow t = 3,$$

de posse desse resultado o aluno deve perceber que Dona Florinda morreu cerca de 3 horas antes dela ter sido encontrada por sua amiga. Isentando o jardineiro do crime.

Algo importante a ressaltar para os professores é o fato de que as funções exponenciais aqui apresentadas não são obtidas de forma trivial, pois a maioria são soluções de equações diferenciais, logo o professor que se interessar mais sobre esse assunto deve analisar melhor as referências de [8], [7] e livros sobre Equações Diferenciais.

5 Considerações Finais

Ao iniciar este artigo houve uma preocupação com o processo de ensino-aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas, mais especificamente a forma como que os professores aplicam esses conceitos. Para isso, indicamos o uso da Modelagem Matemática baseada nos pressupostos de [7], [5] e [6].

Conforme foi verificado e devido a de algumas fragilidades apontadas por [7] e [6] optou-se pela teoria apresentada por [5]. Ele aponta três casos sobre Modelagem Matemática, dos quais selecionamos para esse trabalho o primeiro, pois propõe que se apresente a situação-problema diretamente ao aluno. Este, por sua vez, pode encontrar todos os dados necessários para a resolução dessa situação.

Outro fato que nos fez escolher esse primeiro caso é a facilidade e a praticidade que o professor encontra ao utilizar a Modelagem Matemática como uma metodologia auxiliar. Porém, ele deverá ficar mais atento aos questionamentos que envolverão a prática. Por esse motivo, apresentou-se uma lista com sugestões de situações-problema que envolvem funções exponenciais e logarítmicas para que o professor as utilize nas aulas em que usará a Modelagem. Além disso, foi também apresentado duas sequências didáticas das quais pode-se perceber na Modelagem a possibilidade de apresentar os conceitos de Funções Exponenciais e Logarítmicas de forma satisfatória, contextualizada e que pode vir a ser mais significativa para o aluno.

Desta forma, esse artigo visa, dentre as várias teorias que envolvem a Modelagem, ser um auxiliador para o professor que deseja iniciar o uso dessa metodologia em sala de aula e avançar com pesquisas nessa área. É importante ressaltar que a Modelagem Matemática não pode ser vista como uma "tábua de salvação"no ensino da Matemática, ela é mais uma ferramenta para auxiliar nessa tarefa de ensinar de forma mais significativa e empolgante, tanto para professor quanto para o aluno.

Referências

[1] C. Kluepfel: *When are Logarithms used?,* The Mathematics Teacher, Vol. 74, No 4 (April, 1981), pp.250 - 253.

[2] E. L. Lima: *Logaritmos*, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[3] E. L. Lima: *A matemática do ensino médio Volume 1*/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, Rio de Janeiro, 2006.

[4] E. L. Lima: *Temas e Problemas*/ Paulo Cezar Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[5] J. C. Barbosa: *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para debate teórico*/In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Rio de Janeiro, 24, 2001.

[6] M. S. Biembengut: *Modelagem matemática no ensino*, Contexto, São Paulo, 2003.

[7] R. C. Bassanezi: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, Contexto, São Paulo, 2002.

[8] R. C. Bassanezi: *Equações Diferenciais: com Aplicações*, Harba, São Paulo, 1988

[9] Escala Richter, http://www.ufrgs.br/museudetopografia/artigos/Escala_Richter.pdf, acessado 07/02/2013

[10] ABIC - *Associação Brasileira da Indústira do café*, http://www.abic.com.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?sid=39, Acessado em 10/03/2013.

[11] http://www.youtube.com/watch?v=Vy36aCdV35s, acessado em: 23/03/2013.

[12] http://www.advocaciabittar.adv.br/noticias/item/em-um-ano-10-mil-crimes-ficam-sem-soluo-no-paran.html, Acessado em: 23/03/2013.

[13] http://astroweb.iag.usp.br/~dalpino/AGA215/APOSTILA/cap08cor.pdf, acessado em: 07/02/2013.