

História da Física e Ciências Afins

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}?!!$ O nascimento da lei dinâmica ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}?!!$ The birth of the dynamic law)

Penha Maria Cardoso Dias¹

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ

Recebido em 13/7/2005; Revisado em 6/2/2005; Aceito em 14/3/2005

Neste artigo, faço uma revisão dos métodos de resolução de problemas dinâmicos usados antes que as equações de Newton fossem descobertas, escritas na forma diferencial e fossem universalmente aceitas. Os argumentos que fundamentam essas soluções tornam inteligíveis equações, que, de outra forma, permaneceriam misteriosas e frutos de um pensamento mágico.

Palavras-chave: força, lagrangiana, métodos dinâmicos.

In this paper I review the methods used to solve problems in dynamics that were used before the newtonian equations were found, put in differential form, and universally accepted. The arguments on which the laws of dynamics were founded are rationale that make intelligible equations that otherwise would remain mysterious and magic.

Keywords: force, lagrangian, dynamic methods.

1. Introdução

*Artigo dedicado aos gigantes em cujos ombros
Isaac Newton diz ter subido.
Em particular, a Robert Hooke, que
— muitos acreditam hoje —
ensinou a Newton o método dinâmico*

1.1. Motivação

O título deste artigo é o espanto que um pensador deveria sentir, quando apresentado à *Segunda Lei da Mecânica*, proposta por Isaac Newton em seu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*; afinal, por que não poderia ser a lei do movimento algo como $\mathbf{F} = m\frac{2}{3}\mathbf{a}$? De fato, a lei não foi imediatamente aceita [1]. A principal crítica à *Segunda Lei da Mecânica* veio, sobretudo, da França. Deixando de lado a intolerância gerada pela camisa de força do cartesianismo, que, até hoje, ainda reprime o pensamento ocidental, principalmente na Filosofia, a principal dificuldade foi a *ontologia* do conceito de *força* [2]. Para muitos cartesianos, o conceito de *força* ecoava as qualidades ocultas do que se chamava o pensamento comum. Padre Pierre Mersenne, o líder do cartesianismo, clamava que só uma ciência descritiva (assertórica) do movimento

seria possível [2], descartando a possibilidade de uma ciência apodítica. Esse ceticismo filosófico desenvolve-se na *Doutrina do Ocasionalismo*, cujo representante foi Nicolas de Malebranche [2]: Empurrões e puxões são ocasiões para a ação de Deus; embora Ele seja consistente em seus atos, as leis são Sua escolha e há espaço para o milagre, logo não podem ser deduzidas *a-priori*. Até mesmo Jean Le Rond D'Alembert considerou que \mathbf{F} não é, senão, um nome para $m\mathbf{a}$, de modo que a quantidade \mathbf{F} não tem “vida própria” [3]².

Entretanto, a falta de uma Dinâmica bem fundamentada e universalmente aceita não impediu que, antes mesmo do *Principia*, sistemas dinâmicos tivessem sido corretamente descritos, em particular a queda dos corpos na superfície terrestre (Galileu Galilei) e o movimento dos planetas (Johann Kepler). Além disso, no século XVIII foram desenvolvidos vários métodos para tratar sistemas dinâmicos. Em 1740, Pierre-Louis-Moreau de Maupertuis fundamentou a Estática no *Princípio do Repouso* e, em 1744, ele fundamentou a Dinâmica no *Princípio da Ação Mínima* [3]; entretanto, a base de seu raciocínio era metafísica [3]. Em 1751, Leonhard Euler colocou os dois princípios de Maupertuis em “harmonia” [4, 5]; mostrei [6] que dessa “harmonia” se seguem os fundamentos da *mecânica analítica* e

¹E-mail: penha@if.ufrj.br.

²Não é, pois, de se admirar que a Filosofia Natural, de Newton tivesse entrado na Europa continental pelas mãos dos holandeses, principalmente Wilhelm Jacob van 's Gravesande (a quem Voltaire chamava de o professor “cujo nome começa com um apóstrofo”) e Pieter van Musschenbroek ([2], p. 6).

uma interpretação física de sua grandeza básica, a *Lagrangiana*. Em 1744, o próprio Euler colocou em forma diferencial a equação de Newton [7, 8]; é interessante que Euler considera sua equação “um novo princípio”, não dando créditos a Newton [3]. Em 1744, Jean le Rond D’Alembert apresentou um novo princípio, que, hoje, leva seu nome [9]. Em 1788, Joseph-Louis Lagrange apresentou uma nova formulação da mecânica [10], na qual o leitor moderno pode reconhecer um desenvolvimento das idéias de Euler e sua relação com o *Princípio de D’Alembert* [3].

Este artigo é uma escavação arqueológica da História da Física, em busca do fundamento do conceito de *força* e da lei que rege seu comportamento e dos fundamentos dos métodos dinâmicos acima citados. O artigo apresenta uma revisão desses métodos, enfatizando o desenvolvimento dos formalismos; a intenção é reproduzir (em linguagem atual) cada passo seguido pelos que introduziram esses métodos.

A importância desse tipo de história para o aprendizado da Física já foi por mim expressa em artigo nesta mesma revista [11]; sua ligação com métodos de aprendizagem é a base de outra linha de trabalho que venho desenvolvendo [12, 13, 14]. Entretanto, nunca é demais repetir que a história de uma ciência fornece um foro, senão o único foro apropriado, para discutir seus fundamentos. Como venho defendendo, os argumentos que fundamentam as soluções dadas aos problemas propostos e as heurísticas correspondentes são *rationale* que tornam inteligíveis as leis de uma ciência (no caso, a mecânica), as quais, de outra forma, permanecem misteriosas e frutos do pensamento mágico³.

1.2. Heurísticas

O sistema físico padrão da Estática era a *balança*. Desde a Antigüidade Grega já se conhecia a lei do equilíbrio e, durante a Idade Média, várias tentativas de demonstrá-la foram feitas [15, 16] (seção 2.1). Galileu [17], embora não tivesse o conceito de *força*, engenhosamente, mede “aquilo que impele para baixo” um corpo em um plano inclinado, pelo peso necessário para contrabalançar o movimento (seção 2.2). Em uma criativa interpretação do *Princípio da Balança*, Gottfried Wilhelm Leibniz [18, 19, 20], seguido por Johann Bernoulli [21], identifica mv como a grandeza gerada pela quebra do equilíbrio de uma balança (seção 2.3).

O século XVIII chamou de *Teorema de Galileu* à expressão $v^2 = 2gh$, embora a forma $s = \frac{1}{2}gt^2$ do teorema tivesse sido, também, largamente usada. Esse

teorema foi demonstrado por Galileu como corolário do teorema medieval que descreve *movimentos uniformemente diformes* ou uniformemente acelerados (seção 3.1). Leonhard Euler reconheceu que qualquer movimento, em cada instante tomado isoladamente, é uniformemente acelerado [3]; então, usa esse teorema para fundamentar a forma diferencial da lei dinâmica (seção 3.2); mas sua medida de *força* é, ainda, o peso; com isso, fundamenta um *Princípio da Equivalência* primeiro [3]. Euler dá, ainda, um outro uso ao teorema: Partindo dele, fundamenta a *mecânica analítica*; incidentalmente, seu cálculo mostra o significado físico da *Lagrangiana*, embora ele não tivesse reconhecido uma nova entidade física e, menos ainda, ter-lhe dado esse nome [6] (seção 3.3).

No século XVII, René Descartes [22, 23] concebeu uma descrição do movimento circular que influenciou seu tempo (seção 4.1); ele reconheceu a tendência que corpos em um movimento circular têm de se afastar do centro do círculo, mas não forneceu uma expressão matemática para ela; nem interpretou fisicamente essa tendência: Era, tão somente, uma “tendência natural” [24]. Christiaan Huygens inventa o nome *tendência centrífuga*, enquanto Newton a chama de *conatus recedendi à centro*. Sua expressão foi calculada por Newton e por Huygens, independentemente. A demonstração de Newton (seção 4.2), não publicada, foi achada em seus rascunhos [25], provavelmente escritos em cerca de 1664-1665. Posteriormente, em 1669, Newton trata o movimento circular uniforme (seção 4.3), usando o *Teorema de Galileu* na forma $s \propto t^2$; de qualquer modo, ele somente apresentaria a expressão $\frac{v^2}{r}$ no *Principia*. Huygens [26] demonstrou uma série de teoremas, que, juntos, resultam na expressão $\frac{v^2}{r}$ (seção 4.4); os enunciados foram publicados em 1673 [27], mas as demonstrações somente o foram em 1703, postumamente [26]; as demonstrações dos teoremas não são apresentadas aqui, mas o ponto é que, nelas, Huygens usa o *Teorema de Galileu*. A motivação de Huygens é discutida por Joella Yoder [28]⁴.

No Livro I do *Principia* [29], Newton enuncia as leis da mecânica, apresenta, ainda, pela primeira vez, o conceito de *força* da Física hodierna, junto com o conceito de *massa* e de *força central*. Ele apresenta, ainda, muitos outros resultados importantes; na Proposição 1, ele demonstra a *Lei das Áreas*, de Kepler⁵; na Proposição 11, Livro 1, Newton demonstra o chamado *Problema Direto*: Se a órbita for elíptica, a força central atrativa é do tipo $\frac{1}{r^2}$; na Proposição 43, ele demonstra o chamado *Problema Inverso*: Dada uma expressão para

³Infelizmente, a prática nos departamentos de Física esquece os ensinamentos dos grandes mestres. As leis da natureza são ensinadas como se fossem fruto de uma presumida “genialidade” de alguns eleitos. É comum ouvir-se, por exemplo, que experimentos com carrinhos em colisão “provam” a lei. No máximo, esses experimentos corroboram, mas nada provam, como mostrou Edmund Hume em 1739.

⁴Huygens interessou-se pelo estudo do movimento circular, a fim de entender o movimento do pêndulo para projetar o relógio. O problema da construção do relógio foi um desafio colocado na época, valendo prêmio monetário.

⁵A *Lei das Áreas* não era aceita, na época. Foi Newton quem lhe deu credibilidade [30].

⁶Subrahmanyan Chandrasekhar [31] colocou o *Principia* em roupagem moderna, mas, ao fazê-lo, subtraiu ao leitor a informação de

a força, achar a órbita. A seção 5 é dedicada à apresentação da estrutura conceitual do *Principia*⁶. Essa estrutura conceitual é construída em uma série de definições e proposições, aqui apresentadas, sem as quais é impossível entender como Newton caracteriza, usa e mede o conceito de *força*; a despeito do enunciado da *Segunda Lei*, no formalismo do *Principia* a *força* é (proporcional a) a aceleração de “queda” da tangente à curva, por uma linha passando pelo centro do círculo osculador, em uma aplicação imediata e explícita do *Teorema de Galileu*⁷.

Sobre a dificuldade de ler o livro de Newton, assim se expressou Bernard Cohen ([29], p. 318):

Cada uma das provas de Newton apresenta uma série de enigmas ao leitor em perspectiva. Primeiro de tudo, há o problema de seguir a lógica da prova, passo a passo, o que, frequentemente, significa expandir cada uma das afirmativas de Newton, [enunciadas em] seu estilo “telegráfico” ou compacto, no qual ele combina várias relações geométricas ou proporções em uma simples expressão.

Além disso, ([29], p. 317):

O mais alto nível de entendimento e compreensão [do livro de Newton] teria de levar em conta o estado do conhecimento nos dias de Newton e deveria resultar em um reconhecimento do significado total de cada proposição, junto com a habilidade de detetar faltas e limitações nos argumentos de Newton e de reconhecer hipótese escondidas.

Esse percurso mostra duas linhas nítidas que fundamentaram as heurísticas [3]:

1. **Estática.** Ela fundamenta a equação do movimento, na medida em que identifica o que se ganha, quando equilíbrio cessa.
2. **Teorema de Galileu.** Esse teorema depende do *Teorema da Velocidade Média* e o leitor moderno pode reconhecer em ambos a solução do problema do movimento uniformemente acelerado. Sua riqueza e importância para a Física depende do fato de que todo e qualquer movimento é — em cada instante tomado separadamente — uniformemente acelerado (uma decorrência das equações diferenciais serem de segunda ordem no tempo).

O uso do *Teorema de Galileu* nessas heurísticas pressupõe uma analogia entre o campo gravitacional na superfície da Terra e *força*, qualquer que seja sua natureza. Além disso, pode-se dizer, em termos modernos,

que Galileu já havia usado o *peso* como medida de *força* (seção 2.2). Portanto, já existia o uso de um *Princípio da Equivalência*, embora esse nome e a atenção para o fato sejam (erroneamente) atribuídos a Albert Einstein.

O *Princípio de D’Alembert* parte de outra motivação. Em manuais de *mecânica analítica* [32], é comum ler-se que D’Alembert tentava reduzir a Dinâmica à Estática, mas tal afirmação é, quando menos, desatenta: Como uma teoria mais abrangente pode ser reduzida a uma teoria menos abrangente? Esse mito talvez tenha-se originado naquilo que Clifford Ambrose Truesdell chamou de “princípio da aceleração reversa” [1]: Consiste em se escrever a equação do movimento na forma $(\mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}) = 0$, de modo que a massa pode ser considerada em repouso; isso permitiria aplicar a condição de equilíbrio, de Maupertuis, que, como será visto, é $(\mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}) \cdot d\mathbf{r} = 0$. Mas como observado por Truesdell e desenvolvido por mim [3], o grande mérito de D’Alembert foi separar as equações em dois conjuntos: *Equações do movimento* e *equações de vínculo* (seção 6); na verdade, o “princípio da aceleração reversa” significa que o lado direito, 0, é a resultante das *forças de vínculo*. Posteriormente, Lagrange [10] inventou um método elegantíssimo para obter as equações de movimento, após eliminação dos vínculos, isto é, de escrever as equações na *superfície de vínculo*, no *espaço de configuração*.

A seção 7 é dedicada à gênese do conceito de *força*. A discussão do status epistêmico do conceito de *força* foge ao escopo deste artigo. Análises eruditas podem ser lidas em Thomas L. Hankins [33] e em J.L. Heilbron [2]. A fundamentação filosófica do conceito de *força* foi feita por Leibniz [18, 19, 20, 34, 35], no final do século XVII e início do XVIII; esse conceito está no centro da metafísica e da dinâmica de Leibniz [3]. O pensamento de Leibniz é analisado no belíssimo artigo de Daniel Garber [36]. Nas seções 7.1 a 7.4, apresento e fundamento uma conjectura: Newton só foi capaz de formular o conceito de *força*, quando aprendeu a tratar órbitas não retilíneas, com Robert Hooke; em outras palavras, a *força* é a irmã gêmea do método de cálculo.

Minha tese permanece uma conjectura por existir um problema que Newton teria solucionado de modo aparentemente correto, antes de aprender o método de Hooke. O problema gerou uma polêmica na História da Física: Para alguns, Newton já possuía um método para traçar órbitas, quando teve conhecimento do método de Hooke; para outros (entre os quais me incluo), não. A polêmica ultrapassa o limite do preciosismo de historiadores. Inicialmente, a discussão do problema ajuda a esclarecer o aparato conceitual disponível a Newton, antes de sua interação com Hooke; além disso, o pro-

como Newton calculava, de sua ferramenta conceitual e suas motivações; o resultado é um trabalho hermético.

⁷Historiadores discutem, ainda, se o cálculo foi ou não utilizado no *Principia* [29]; não há dúvida de que o foi, mas certamente não de um modo direto, analítico, como nós fazemos, isto é, escrevendo uma equação diferencial e integrando-a; o livro de Newton é escrito na linguagem da Geometria e um exemplo maravilhoso é a Proposição 43, acima mencionada, onde o método de integração é geométrico.

blema é interessante *qua* problema de Física. O problema é discutido no Apêndice.

2. A estática

2.1. O princípio da alavanca e o princípio da velocidade virtual

A Estática já era estudada desde a Antigüidade Greco-romana. Ela era descrita pelo *Princípio da Alavanca* e um dos problemas era justificar essa lei [15].

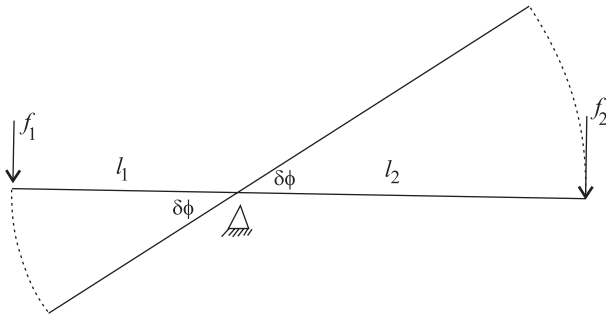


Figura 1 - **A alavanca.** Os l_j 's são os *braços de alavanca*; os f_j 's são pesos aplicados nas extremidades, respectivamente; o ângulo de rotação é $\delta\phi$; os s_j 's são os comprimentos dos arcos de rotação.

Considere uma balança em equilíbrio; o *Princípio da Alavanca* é: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2}{l_1}$. Suponha, agora, que a alavanca gire um ângulo infinitesimal $\delta\phi$: $\delta s = l\delta\phi$. Segue-se: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2}{l_1} \equiv \frac{l_2 \times \delta\phi}{l_1 \times \delta\phi} = \frac{\delta s_2}{\delta s_1} \equiv \frac{\delta s_2 \times \delta t}{\delta s_1 \times \delta t} = \frac{v_2}{v_1}$; os v 's são *velocidades virtuais*, pois são, respectivamente, as velocidades com que os braços se moveriam no primeiro instante após equilíbrio ter sido quebrado. O *Princípio da Velocidade Virtual* é: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{v_2}{v_1}$. Se $f = mg$, então $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$ ou $m_1 v_1 = m_2 v_2$.

2.2. Galileu Galilei e a medida da força pelo peso (1638)

Na segunda edição de seu *Discurso sobre Duas Novas Ciências* [17], Galileu adicionou uma nota de pé de página, escrita, a seu pedido, por seu pupilo Vincenzio Viviani. Nessa nota, Galileu calcula a “força que impele para baixo” um corpo colocado sobre um plano inclinado.

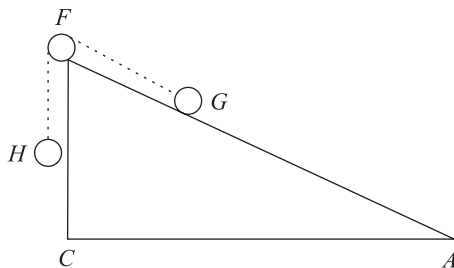


Figura 2 - **O plano inclinado.** O peso H é ligado ao corpo G por um fio, passando por uma polia (F). As forças estão em equilíbrio, de modo que H cancela a “força impulsionadora” de G , para baixo.

Parafraçando o raciocínio de Galileu ([17], p. 209):

princípio da velocidade virtual:

$$\frac{\text{força no corpo } m (= mg)}{\text{força no corpo } M (= Mg)} = \frac{\text{dist. vert. de queda de } M}{\text{dist. vert. de queda de } m}$$

O vínculo devido ao barbante que liga as massas é:

$$\begin{aligned} \text{distância percorrida por } M \text{ no plano} &= \\ \text{distância vertical de queda de } m &\equiv \delta s. \end{aligned}$$

Então, o *princípio da velocidade virtual* pode ser escrito:

$$\frac{mg}{Mg} = \frac{\delta s \sin \phi}{\delta s} \quad \text{ou} \quad mg = Mg \sin \phi.$$

Como

$$\text{peso que equilibra a 'força que impele'} = mg,$$

segue-se

$$\text{'força que impele'} \equiv Mg \sin \phi.$$

O ponto crucial é o entendimento de que essa força pode ser medida pelo peso que mantém o corpo em equilíbrio. Max Jammer ([37], p. 101) reconhece, nesse cálculo, “[...] talvez a primeira expressão de um conceito unificado de forças estáticas e dinâmicas”.

2.3. A geração do movimento: Gottfried Wilhelm Leibniz e Johann Bernoulli (1690-1727)

Johann Bernoulli [21] interpretou equilíbrio como uma contínua criação e destruição de movimento, em cada instante tomado isoladamente; exemplificando com a balança: Em cada instante tomado isoladamente, um braço da alavanca está caindo, devido ao peso nele colocado, mas o peso do outro lado o faz voltar.

A força que age em sistemas em equilíbrio é o que Leibniz chamou de *força morta*; portanto, ela é, também, a força que age no braço da alavanca, no instante em que equilíbrio é quebrado e o corpo começa a se mover [3]. A conclusão é que *força morta* é a *força* que gera movimento e que entra na expressão moderna $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Quando o corpo já se move, sobre ele atua a *força viva*, mv^2 , ou “força do corpo em movimento” [34, 35].

Há instâncias nas obras de Leibniz e de Bernoulli, em que eles reconhecem que, no instante em que movimento é gerado, o corpo ganha mv (a notação vetorial é minha) [3]. As leis do movimento são, então, obtidas pelo seguinte silogismo, que pode ser reconhecido em uma passagem do *De Ipsa Natura* ([20], p. 105) (a notação vetorial é minha) [3]:

	resultado da quebra de equilíbrio \equiv “ser colocado em movimento”	significa	adquirir ($m\delta v$) no tempo virtual δt
ou:	o “efeito” da “causa” do movimento agindo durante δt	é gerar	$m \delta v$
	premissa:		causa = efeito
logo:	“causa” do movimento (agindo durante δt)	=	$m \delta v$

A conclusão requer, como premissa menor, o princípio metafísico de que um *efeito* deve ser igual a sua *causa*. Ora, isso não foi óbvio, no século XVIII: D’Alembert critica a equação de Newton, justamente por parecer requerer que causas e seus efeitos se igualem [3]. Por outro lado, a igualdade de causas e efeitos é um princípio indissociável da metafísica leibniziana: Está na base de sua crítica à medida cartesiana de “força” e em sua justificativa da existência de “forças” [3, 38].

3. O teorema de Galileu (1638)

3.1. O movimento uniformemente diforme

Uma modificação profunda do entendimento do movimento foi feita no século XIV, em Oxford, na Inglaterra [15, 16, 39]. William of Ockham, um teólogo e frade franciscano, definiu o movimento com conceitos bem diferentes dos aristotélicos. Ele enuncia um princípio epistemológico, que ficou conhecido como *Navalha de Ockham*, que significa algo como (*apud* [39], p. 537) “[...] é fútil usar mais entidades [para explicar alguma coisa], se for possível usar menos [...]”. Segundo Ockham, “movimento” pode ser concebido como o mero deslocamento do corpo (no tempo), o que torna “fútil” o uso de outras “entidades”⁸.

As idéias de Ockham influenciaram seus contemporâneos, em Oxford. Um grupo de pensadores pertencentes ao Colégio de Merton inventou o que se chama, hoje, *Cinemática* [15, 16]. Embora não tivessem as categorias matemáticas para desenvolver um tratamento matemático analítico, puderam utilizar Geometria. Importantes contribuições foram [15, 16]:

1. Uma clara distinção entre *descrição* do movimento e *causa* do movimento. Obviamente, isso decorre da definição de *movimento* dada por Ockham.
2. A definição de *velocidade* (no sentido de “rapidez” ou de “vagarosidade”) como deslocamento no tempo e a conceitualização de *velocidade instantânea*.
3. A definição de *aceleração* como variação de velocidade no tempo.
4. A consideração de *movimentos uniformes* e *movimentos uniformemente acelerados*. Traçaram os gráficos $v \times t$ desses movimentos e entenderam que as *distâncias percorridas* nesses movimentos são dadas, respectivamente, pelas *áreas* do retângulo

e do triângulo, formados pelo conjunto das ordenadas (velocidade).

5. A formulação e demonstração do Teorema da Velocidade Média.

O problema colocado pelos Mertonianos foi o de como **qualidades** podem ser somadas ou subtraídas [15, 16]. Para tratar esse problema, os Mertonianos atribuíram a uma qualidade uma *intensidade* e uma *extensão*: A *intensidade* é medida por *graus*; saber como uma qualidade varia consiste, agora, em saber como o grau de sua *intensidade* varia ao longo de uma linha arbitrária e imaginária, chamada *extensão*. Uma felicidade na História da Física foi terem concebido o movimento como uma qualidade: O grau é a *velocidade instantânea* e a *extensão*, o tempo, embora se saiba que, durante muitos anos, Galileu usou a *distância* ao invés do tempo [16].

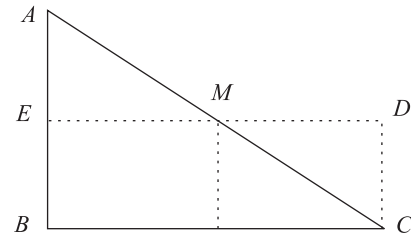


Figura 3 - Teorema da Velocidade Média. A área do triângulo AEM é igual à área do triângulo MDC, de modo que o triângulo ABC e o retângulo BCDE têm a mesma área.

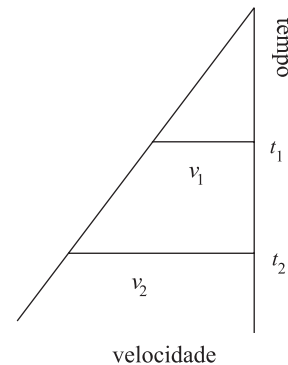


Figura 4 - Demonstração da Lei da Queda dos Corpos. Pelo Teorema da Velocidade Média: $\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right) \times \left(\frac{t_1}{t_2}\right)$; pela semelhança de triângulos: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$; logo: $\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$. Segue-se um corolário: $\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$.

Galileu usou as idéias Mertonianas de maneira original. Ele deu ao Teorema da Velocidade Média uma

⁸Ockham critica a tradição aristotélica, segundo a qual a definição de “movimento” exigiria a introdução de “entidades desnecessárias”, tais como *lugar natural*, *corpo pesado*, *corpo leve*, um “algo” para empurrar o corpo de modo que ele se mantenha em movimento [15, 16, 39].

aplicação que jamais seria concebida no século XIV: Ele o usou para resolver o problema da queda dos corpos [15, 16]. O teorema diz que a distância percorrida em um movimento uniformemente acelerado é igual à distância que seria percorrida no movimento uniforme feito com a velocidade média.

3.2. Um “novo princípio” da dinâmica: Leonhard Euler (1747 e 1752)

Euler publicou a forma diferencial da equação do movimento em 1747 [7]; em 1752, ele publicou um outro artigo [8], no qual propõe um “novo princípio” da mecânica, o qual, claramente, é a equação de Newton. Parafraçando o raciocínio de Euler [3]: A variação de uma das coordenadas (x , y ou z) pode ser entendida como uma “altura de queda” e como, em cada instante tomado isoladamente, qualquer movimento acelerado é uniformemente acelerado, o *Teorema de Galileu* pode ser aplicado, em cada instante isoladamente, a cada eixo independentemente. Logo:

$$\text{teorema de Galileu:} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \alpha x$$

$$\text{derivada primeira:} \quad 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\text{cancelando termos:} \quad 2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \alpha$$

Posto isso, Euler faz $\alpha = \frac{\text{força}}{\text{massa}}$. Mas ele não invoca as equações de Newton, pelo contrário, refere-se a um “novo princípio”. Euler parece fazer uma analogia com a gravitação em cada instante tomado isoladamente [3]: A aceleração α , “instantaneamente constante” ao longo de cada eixo tomado separadamente pode ser medida em unidades de \mathcal{G} , a aceleração de uma “gravidade” generalizada: medida de $\alpha = \mathcal{G}$; portanto, $\frac{F}{m}$ é medida nas mesmas unidades e a força aplicada, F , tem o mesmo conteúdo ontológico de um peso. Nesse raciocínio, pode ser reconhecido um “princípio de equivalência primevo”, no sentido de uma equivalência ontológica entre uma força qualquer e um peso [3].

3.3. “Harmonia” entre os dois princípios de Maupertuis: Leonhard Euler e o nascimento da mecânica analítica (1752)

Em 1740, Pierre-Louis-Moreau de Maupertuis fundamentou a estática no *Princípio do Repouso*. Inicialmente, por definição,

$$\Phi \equiv \text{esforço} = \sum_j \int_{\text{trajetória}} \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j,$$

onde \mathbf{F}_j e $\delta \mathbf{r}$ são, respectivamente, a força agindo na j -ésima massa e o deslocamento virtual que sofreria, se começasse a se mover; posto isso, o *Princípio do Repouso* é:

$$\text{Equilíbrio} \Leftrightarrow \text{esforço é nulo.}$$

Em 1744, Maupertuis fundamentou a Dinâmica, no *Princípio da Ação Mínima*. Como corrigido por Euler [6], por definição:

$$\text{ação} \equiv \int_{\mathbf{r}_{\text{inicial}}}^{\mathbf{r}_{\text{final}}} m \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{t_{\text{inicial}}}^{t_{\text{final}}} mv^2 dt$$

Princípio da Mínima Ação: ação é mínima

Em 1752, Euler colocou os dois princípios em “harmonia”. Inicialmente, ele entende que o *esforço*, definido acima, vale, apenas, em um instante genérico, t , de modo que

$$\text{esforço entre } t_1 (t_1 = 0) \text{ e } t_2 (t_2 = t) = \int_0^t \Phi dt.$$

“Harmonia” consiste em se fazer [7]:

$$2m\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = - \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j;$$

integrando ao longo da trajetória,

$$mv^2 = C - \Phi,$$

onde C é a constante de integração, logo dependente das posições inicial e final, apenas; considerando, ainda, C independente de t e integrando no tempo, a expressão final para a “harmonia” é:

$$\int_0^t mv^2 dt = Ct - \int_0^t \Phi dt;$$

isso pode ser escrito:

$$\int_0^t T dt = Ct + \int_0^t V dt,$$

onde, em termos modernos, T é a *energia cinética* (a menos do fator 2 que, no século XVIII, nem sempre era incluído ou o era no lugar errado) e $V = -\Phi$ é a *energia potencial*. Finalmente,

$$\text{ação} = Ct - \text{esforço},$$

de forma que, se a *ação* for mínima (máxima), o *esforço* é máximo (mínimo). Deve-se notar que o resultado depende de [6]:

1. O sinal $-$ antes de $\int \Phi dt$. Se Euler tivesse escrito $2m\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = + \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j$, “harmonia” seria o teorema de conversão de *trabalho* em *energia cinética*. Mas ele escreveu o sinal $-$, o que me levou a perguntar qual o significado desse cálculo [6].
2. Ct não tem influência no resultado da extremização.

Inicialmente, pode ser verificado, em qualquer livro de *mecânica analítica*, que:

$$\delta T = \delta V + \frac{d}{dt} \sum_j (p_j \delta q_j),$$

onde os q_j 's e p_j 's são as *coordenadas generalizadas* de *configuração* e *momento*, respectivamente, e os δ 's são *deslocamentos virtuais*. Integrando no tempo e em trajetória,

$$\int_0^t T dt = \sum_j \int_{\text{trajetória}} [p_j \delta q_j]_0^t + \int_0^t V dt.$$

Ora, fazendo $Ct = \sum_j \int_{\text{trajetória}} [p_j \delta q_j]_0^t$, isso é a expressão da “harmonia”; portanto, “harmonia” resulta nas *Equações de Lagrange*, da *mecânica analítica* [6].

Argumento ([6], p. 75) que a inspiração de Euler para o sinal – foi o *Teorema de Galileu*, escrito na forma $T = mgh$, pois ele interpreta o lado direito da expressão $\int_0^t T dt = + \int_0^t V dt + Ct$ como “a altura devida à velocidade”. Essa interpretação de Euler permite entender a expressão $L = T - V$, a *Lagrangiana* [6]: No começo de um intervalo de tempo δt , a massa tem *energia potencial* disponível para uso igual a δV ; a condição de validade das leis da mecânica é que, ao final do intervalo, toda essa energia tenha sido convertida em “movimento” (isto é, *energia cinética*), de forma que $\delta V = \delta T$; para toda a duração finita do movimento, $\int_0^t (\delta T - \delta V) dt \equiv \int_0^t \delta(T - V) = 0$ ou, em linguagem formal, as leis da mecânica são tais que $L = T - V$ é um extremo [6]; como o termo $\frac{d}{dt} \sum_j (p_j \delta q_j)$ tem de ser nulo para ser $\delta V = \delta T$, o processo de extremização tem de ser tal que $\delta q_j = 0$ nos extremos [6].

4. O movimento circular

4.1. A “tendência centrífuga”: René Descartes (1644)

Para o leitor moderno, a *Lei da Inércia* significa que, se um corpo não se move uniformemente em linha reta, então uma força deve atuar sobre ele. Mas essa leitura não foi óbvia. Segundo George Smith [40], Descartes e Huygens entenderam a *Lei da Inércia* em um ([40], p. 148) “sentido contrapositivo”. Para entender o significado dessa expressão, é preciso analisar o tratamento do movimento circular, feito por Descartes.

Descartes [22, 23] decompõe a velocidade uniforme com a qual uma pedra se move ao longo de uma linha reta, ao deixar uma funda, em duas componentes (vide Fig. 5): Em linguagem moderna, a componente ao longo do raio vetor e a componente perpendicular a ele.

Movimento circular ocorre, quando a componente radial é “impedida” (pela funda, por exemplo); portanto, Descartes chama a componente radial da velocidade de componente ([22], p. 131) “cujo efeito é impedido pela funda” e a componente tangencial, de componente “cujo efeito não é, assim, impedido”. O “sentido

contrapositivo” é o seguinte: Para que um movimento circular ocorra, não é necessário afirmar a existência de uma nova entidade — a *força*, em nosso sentido — mas é suficiente impedir um movimento ou “tendência” ou *conatus* (para Newton) que está naturalmente presente; nas palavras de Descartes ([23], p. 46), “são as diversas disposições da matéria que [...] tornam [os movimentos] irregulares e curvos”.

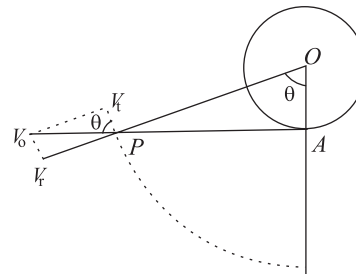


Figura 5 - **As componentes do movimento circular (Descartes)**. O corpo está em P , movendo com velocidade uniforme v_0 : $v_0 = v_r + v_\theta$. Se a componente v_r for “impedida”, o corpo move-se em um círculo de raio OP .

4.2. “Conatus recedendi à centro”: Isaac Newton (c. 1664-1665)

Newton demonstra (Fig. 6) [25]:

$$\frac{P_e}{F_m} = \frac{\text{perímetro do círculo}}{\text{raio do círculo}},$$

onde P_e é a pressão da esfera sobre a tangente ao círculo em um percurso completo e F_m é a ‘força’ do movimento. Em notação moderna, isso é $d \frac{\Delta(mv)}{mv} = 2\pi$, o que significa: Se τ for o período, r , o raio e v , a velocidade em um movimento circular uniforme, $\frac{\Delta(mv)}{\tau} = \frac{2\pi(mv)}{\tau} = m \left(\frac{2\pi r}{\tau} \right) \frac{v}{r} \equiv m \times \left(\frac{v^2}{r} \right)$.

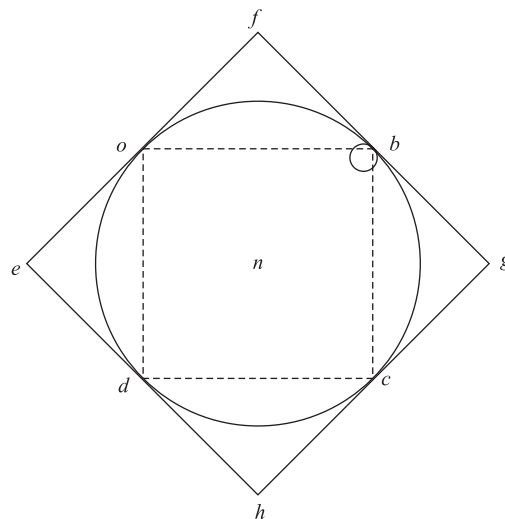


Figura 6 - **O conatus**. Uma pequena esfera move-se dentro de um círculo. A esfera colide com o círculo — de dentro para fora, de modo que Newton pensa em termos de um efeito centrífugo — percorrendo o quadrado inscrito.

Demonstração. Da figura,

$$\begin{aligned} \text{triângulo } abd &\sim \text{triângulo } afb \\ 2fa &= bd = \text{raio do círculo} \\ \text{força do movimento} &\parallel ab \\ \text{pressão} &\parallel db \perp fg. \end{aligned}$$

Logo: $\frac{2fa}{ab} = \frac{ab}{fa} \equiv \frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{força do movimento}} \implies$
 $\frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{força do movimento}} = \frac{\text{lado } (ab)}{\text{raio } (fa)}$. Após
 as 4 colisões, respectivamente em b ,
 c , d e a : $\frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{força do movimento}} =$
 $\frac{\text{perímetro}}{\text{raio } (r)} \xrightarrow{\text{número de lados} \rightarrow \infty} \frac{c}{r} \equiv \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

4.3. Movimento circular: Isaac Newton (1669)

Considere a Fig. 7 [41]. No tempo infinitesimal (t) em que o corpo percorre o arco \widehat{AD} , com velocidade uniforme v , a “tendência centrífuga” faz com que o corpo se mova \widehat{BD} , radialmente (para tempos infinitesimais, $\widehat{AB} \approx \widehat{AD}$). Em um tempo igual ao período (τ), o corpo percorre a circunferência ($C = 2\pi r$), com velocidade uniforme v , logo: $\frac{\widehat{AB}}{C} = \frac{t}{\tau}$. Newton coloca o problema de achar a distância x tal que: $\frac{\widehat{BD}}{x} = \frac{t^2}{\tau^2} = \frac{(\widehat{AB})^2}{C^2}$.

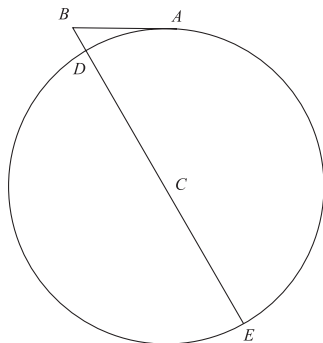


Figura 7 - **Movimento circular (Newton)**. Da geometria do círculo, $(\widehat{AB})^2 = (\widehat{BD}) \times (\widehat{BE})$. Para pequeno arco \widehat{AD} , pode-se considerar $\widehat{BE} \approx \widehat{DE} = 2r \implies (\widehat{AB})^2 \approx (\widehat{BD}) \times (\widehat{DE})$.

Cálculo. Da Geometria do círculo, $\frac{(\widehat{AB})^2}{C^2} \approx \frac{(\widehat{BD}) \times (\widehat{DE})}{C^2} \equiv \frac{(\widehat{BD})}{\frac{C^2}{(\widehat{DE})}} \implies x \equiv \frac{C^2}{(\widehat{DE})}$.

Interpretação. É possível tirar desse resultado uma consequência, que leva a uma interpretação moderna do cálculo de Newton: $x \equiv \frac{C^2}{(\widehat{DE})} \approx \frac{(v\tau)^2}{2r} = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r}\right) \tau^2 \implies \widehat{BD} \approx x \times \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r}\right) t^2$; assim, a distância **infinitesimal** \widehat{BD} é percorrida com aceleração (instantaneamente) constante $\frac{v^2}{r}$: Em cada instante tomado isoladamente, o *conatus* é análogo a uma “força gravitacional”.

O uso do *Teorema de Galileu* e, portanto, a analogia com a queda dos corpos, não significa que Newton esteja interpretando BD como “queda”, isto é, como movimento em direção ao centro do círculo; na verdade, ele parece pensar em termos de um movimento de “afastamento” do círculo, como Descartes, antes dele, e como Huygens, seu contemporâneo. De acordo com Bernard Cohen, ([42], p. 249; [30]):

Se ele [Newton] trabalhou, então [década de 1660 ou década de 1670, antes dos rascunhos do *Principia*] a relação entre a lei do inverso do quadrado e as órbitas elípticas, como, em geral, é suposto, hoje em dia, ele poderia tê-lo feito, possivelmente, em termos de “força centrífuga” em vez de “força centrípeta”; mas, à luz das sugestões reais de Hooke e do texto *De Motu*, parece mais provável que ele tivesse concebido a “força centrípeta” não mais tarde do que [1779-1780] [...].

Eu acrescento que, no texto em Latim [41], Newton usa a expressão *conatus recedendi*, portanto, o corpo está-se afastando do centro e não em queda.

Desses cálculos, Newton tira a seguinte consequência ([41], p. 197):

Finalmente, como, nos planetas primários, os cubos de suas distâncias ao Sol estão entre si na razão inversa dos números de revoluções em um dado tempo, a tendência de se afastar do Sol está na razão inversa dos quadrados das distâncias ao Sol.

Interpretação. Em termos modernos:

$$F = m \times \frac{v^2}{r} ; v = \frac{2\pi r}{\tau}$$

onde τ é o período e $\frac{r^3}{\tau^2}$ é constante, pela *Terceira Lei* de Kepler.

$$F = m \times \frac{\left(\frac{2\pi r}{\tau}\right)^2}{r} \equiv m \times (2\pi)^2 \left(\frac{r^3}{\tau^2}\right) \frac{1}{r^2}$$

$$F = m \times \text{constante} \times \frac{1}{r^2}$$

Isaac Bernard Cohen [30] argumenta que esse resultado indica que a expressão matemática da *Gravitação Universal*, constante $\times \frac{1}{r^2}$, não só era plausível, mas também conhecida, no século XVII. O mérito de Newton foi estender a idéia de um “poder” entre o Sol e cada um dos planetas, sugerido por Johann Kepler, em um efeito universal entre massas (além, é claro, dos conceitos de *força*, *massa* e outras novidades).

4.4. A tendência centrífuga e a queda dos corpos: Christiaan Huygens (1673)

4.4.1. Analogia com o peso

Huygens [26] supõe uma pessoa de pé em B (Fig. 8). Essa pessoa segura um barbante, do qual pende uma esfera pequena. Se a esfera se soltar do barbante, em B ,

ela se move ao longo da linha $BCDH$, com a velocidade do círculo em B . Como a pessoa e a esfera têm a mesma velocidade, as distâncias percorridas no mesmo tempo, respectivamente, no círculo e na linha, são iguais. Pode-se considerar que, no começo do movimento, quando os arcos são pequenos, enquanto a pessoa está em \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{M} , a esfera está, respectivamente, em $\mathcal{C} \approx \mathcal{K}$, $\mathcal{D} \approx \mathcal{L}$, $\mathcal{S} \approx \mathcal{N}$. Portanto, a esfera se afasta do centro ao longo de $\overline{\mathcal{EC}}$, $\overline{\mathcal{FD}}$ e $\overline{\mathcal{MS}}$. Por outro lado, se a esfera não se soltasse e a pessoa segurasse o barbante firmemente, enquanto a roda girasse, a tensão no barbante seria igual ao peso, isto é, a *tendência centrífuga* seria anulada pelo peso ([26], p. 266):

Mas essa tendência da qual falamos é absolutamente semelhante àquela tendência com a qual os corpos ponderáveis suspensos por um fio aspiram a descer.

Conseqüentemente, as *tendências centrífugas* de dois corpos desiguais que têm a mesma velocidade e se movem em círculos de mesmo raio estão uma para a outra como “as gravidades ou quantidades sólidas desses corpos” [26]: $\frac{F_{c1}}{F_{c2}} = \frac{m_1}{m_2}$, onde os m 's são “quantidades sólidas” e os F_c 's são *tendências centrífugas*.

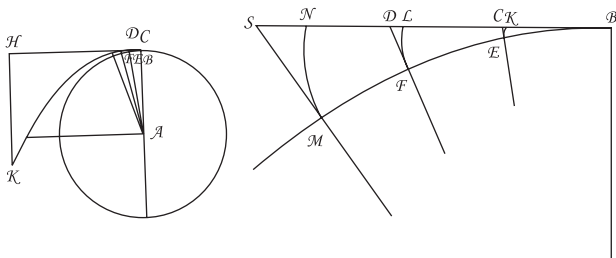


Figura 8 - **A Tendência centrífuga.** $BEFG$ é um círculo vertical, com centro em A , que gira com rotação uniforme em torno de seu centro. Na figura da direita, por construção, $\overline{BK} = \overline{BE}$, $\overline{BL} = \overline{BF}$, $\overline{BN} = \overline{BM}$, isto é, os arcos \widehat{EK} , \widehat{FL} e \widehat{MN} são arcos de círculo com centro em B ; para pequenos arcos, $\overline{BK} \approx \overline{BE}$, $\overline{BL} \approx \overline{BF}$, $\overline{BN} \approx \overline{BM}$. Além disso, as linhas AEC , AFD e AMS , ligando E , F e M ao centro, tendem, para pequenos arcos, para as tangentes aos arcos \widehat{EK} , \widehat{FL} e \widehat{MN} , de modo que $\widehat{EK} \approx \widehat{EC}$, $\widehat{FL} \approx \widehat{FD}$ e $\widehat{MN} \approx \widehat{MS}$.

Huygens, então, demonstra alguns teoremas; quatro deles levam à expressão $\frac{v^2}{r}$. Usando notação e conceitos modernos, seja m a massa, v a velocidade, r o raio da trajetória circular, τ o período, F_c a *força centrífuga* e sejam os ϕ_j 's funções desconhecidas de seus argumentos; os teoremas podem, então, ser enunciados:

$$F_c = \phi_1(m, \tau) r \quad F_c = \phi_2(m, r) v^2$$

$$F_c = \frac{\phi_3(m, v)}{r} \quad \tau = \phi_4(m, F_c) \sqrt{r}.$$

Interpretação. As considerações acima podem ser feitas rigorosas por uma paráfrase moderna ([16], p. 369). Seja $CE = x$, $BC = v\Delta t$ e seja r o raio (Fig. 8, esquerda); como o triângulo ABC é retângulo:

$$(x+r)^2 = (v\Delta t)^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + (2r)x - (v\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = r \pm r \times \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{r^2}\right) \Delta t^2} \Rightarrow$$

$$x \approx -r \pm r \times \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r}\right) \times \frac{1}{r} \times \Delta t^2\right)$$

$$x \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r}\right) \Delta t^2$$

onde o sinal $+$ é escolhido, pois $x \geq 0$.

4.4.2. O pêndulo cônico

Um uso da Estática similar ao da seção 3 é feito no tratamento do *Pêndulo Cônico*.

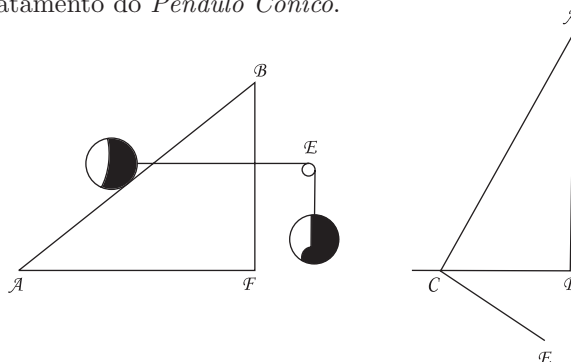


Figura 9 - **Pêndulo cônico.** No plano inclinado (esquerda): $\phi \equiv \widehat{BAF}$ é o ângulo do plano com a horizontal; M , sobre o plano, está em equilíbrio sob a ação de seu peso ($-Mg\mathbf{j}$), da normal ao plano (\mathbf{N}) e de uma força horizontal ($+mg\mathbf{i}$) igual, em módulo ao peso da outra massa; logo $\mathbf{N} - Mg\mathbf{j} = +mg\mathbf{i}$. Na massa do pêndulo cônico ABC (direita) age a tensão (\mathbf{T}) no fio (AC) e o peso ($Mg\mathbf{j}$); a resultante é $\mathbf{F}_{\text{centrípeta}} = \mathbf{T} - Mg\mathbf{j}$.

Inicialmente, Huygens prova o seguinte lema ([26], p. 280) (Fig. 9, esquerda): Se um peso (massa M) é mantido em repouso, sobre um plano inclinado, por outro peso (massa m), ligado ao primeiro por um fio horizontal passando por uma polia, então $\frac{m}{M} = \tan \phi$.

Considere, agora, o pêndulo cônico ABC (Fig. 9, direita), pivotado em A e seja M a massa do pêndulo. Seja CE um plano inclinado, perpendicular a AC em C ; claramente, $\widehat{CAB} = \phi$, o ângulo do plano inclinado, e \mathbf{T} faz o papel da normal. Por analogia com o plano inclinado à esquerda, o bulbo do pêndulo (M) estará em equilíbrio nesse plano inclinado, se se pendurar uma massa m , como na figura à esquerda: $\mathbf{T} - Mg\mathbf{j} = -mg\mathbf{i}$, pois, pela configuração, a roldana E só poderá ser colocada à esquerda; a medida da *tendência centrífuga* é, pois, $mg = M \tan \phi$.

5. A dinâmica no “Principia”: Isaac Newton (1686)

5.1. A estória do “Principia”

Em 1679, Robert Hooke escreveu a Newton, convidando-o a comentar sobre um método de sua autoria

para descrever movimentos curvilíneos [29, 30, 43, 44]. A idéia de Hooke consiste em separar o movimento de um corpo que é atraído para um centro em duas componentes: Uma componente inercial, o movimento que o corpo teria, se continuasse a se mover com a velocidade instantânea, sem atuação da atração; um “soco” em direção ao centro de atração, o que nós chamaríamos “impulso instantâneo”, radial, na direção de um centro de forças. Em carta anterior, Hooke havia proposto um problema a Newton que pode ser parafraseado como se segue: Se um corpo sofre uma atração em direção a um centro, que tipo de curva seria sua órbita, se o “poder de atração” variasse inversamente com o quadrado da distância?

Newton respondeu a Hooke que seu método lhe era desconhecido; e, em vez de discutir o problema proposto por Hooke, apresentou um outro problema (apêndice). Quando, em 1684, Edmund Halley, o astrônomo, visitou Newton e lhe fez a mesma pergunta, Newton teria respondido, imediatamente, que, segundo seus cálculos, era uma elipse, porém não achou os cálculos. Halley insistiu, então, que ele os escrevesse; o resultado, após alguns pequenos tratados (rascunhos do trabalho maior), foi o *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

5.2. Os fundamentos da mecânica

Newton começa o livro com uma série de definições, nas quais são introduzidos os conceitos de *massa*, *força*, *força centrípeta* (na verdade, *central*), entre outros ([29], p. 403-407).

Massa

Definição 1. Quantidade de matéria é a medida da matéria que surge da densidade e volume, conjuntamente.

Segundo I. Bernard Cohen ([43], p. 59), Newton procurava uma definição de matéria que não fosse uma “qualidade acidental”.

Quantidade de movimento

Definição 2. Quantidade de movimento é a medida de movimento que surge da velocidade e da quantidade de matéria, conjuntamente.

Força impressa

Definição 4. Força impressa é a ação exercida em um corpo para mudar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme para a frente. [...] Além disso, há várias fontes de força impressa, tais como percussão, pressão ou força centrípeta [central].

Força central

Definição 5. Força centrípeta [central] é a força pela qual corpos são levados para todos os lados, são impelidos ou tendem, de alguma forma, para algum ponto como centro.

Uma força desse tipo é a gravidade, pela qual corpos tendem em direção ao centro da [T]erra; outra é a força magnética, pela qual o ferro procura uma [pedra magnética ou magnetita]; e, no entanto, outra é aquela força, o quê quer que seja que ela possa ser, pela qual os planetas são continuamente retirados de movimentos retilíneos e compelidos a revolver em linhas curvas.

Medida da força motriz

Definição 8. A quantidade motiva da força centrípeta [central] é a medida dessa força que é proporcional ao movimento que ela gera em um dado tempo.

Leis do movimento ([29], p. 416-417)

Lei 1. Todo corpo persevera em seu estado de repouso ou de movimento uniformemente retilíneo para a frente, exceto quando ele for compelido a mudar seu estado por forças impressas.

Lei 2. Uma mudança no movimento é proporcional à força motriz impressa e se dá ao longo da linha reta na qual essa força é impressa.

Lei 3. A uma ação corresponde sempre uma reação igual e oposta; em outras palavras, as ações de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e sempre opostas em direção.

Composição de forças ([29], p. 417)

Corolário 1. Um corpo no qual atuam [duas] forças agindo conjuntamente descreve a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo no qual ele descreveria os lados, se as forças agissem separadamente.

Medida da distância da “queda” da tangente à curva até a curva ([29], p. 439-440)

Lema 11. Em todas as curvas que têm curvatura finita no ponto de contato [da tangente], o segmento evanescente subtendido pelo ângulo de contato está, ao final, na razão da corda subtendida pelo arco adjacente ao quadrado.

Demonstração. Os pontos B , D e G aproximam-se de b , d e g , quando $B \rightarrow A$; seja J o limite de G , quando B e D alcançam A . Por construção: triângulo $ABD \sim$ triângulo AGD , de modo que $\frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AG} = \frac{AD}{BG} \Rightarrow \overline{AB}^2 =$

$\overline{AG} \times \overline{BD}$; similarmente, $\overline{ab}^2 = \overline{ag} \times \overline{bd}$. Logo $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{AG}}{\overline{ag}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{bd}}$. Em outras palavras, $\overline{DB} \propto \frac{\overline{AB}^2}{\text{diâmetro}}$ ($\overline{AG} = 2R$, onde R é o raio da curva). A seguir, Newton argumenta que \overline{BD} pode ter qualquer inclinação com a tangente (AD) (vide Fig. 10).

Interpretação. No limite, a “queda” da tangente a uma curva, no ponto A , até a própria curva pode ser medida pela vertical \overline{AB} ou por qualquer linha inclinada ligando B à tangente.

Corolário 1. Então, como tangentes \overline{AD} e \overline{Ad} , arcos \overline{AB} e \overline{Ab} e seus senos, [bem como] \overline{BC} e \overline{bc} tornam-se, ao final [do limite] iguais às cordas \overline{AB} e \overline{Ab} , seus quadrados também serão, ao final, como os segmentos subtendidos \overline{BD} e \overline{bd} .

Interpretação. Do triângulo inscrito no semi-círculo do círculo osculador (triângulo AGB): $\overline{AB} = 2R \sin \Phi$; mas do Lema: $\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{2R}$; logo $\overline{BD} = 2R (\sin \Phi)^2$.

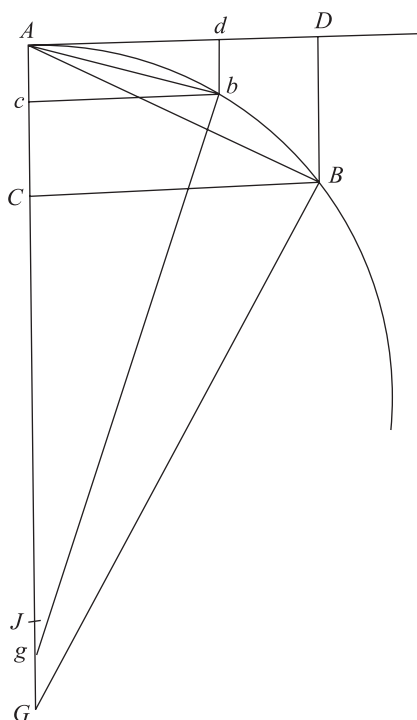


Figura 10 - O círculo osculador. \overline{AB} é um arco de círculo com centro em $\frac{AG}{2}$; $BG \perp \overline{AB} \Rightarrow \widehat{ABG} = 90^\circ$. O ângulo de contato é $\Phi \equiv \widehat{DAB} = \widehat{AGB} = \frac{1}{2}$ medida \overline{AB} . O arco adjacente é \overline{Ab} ; a corda adjacente é \overline{AB} ; o segmento subtendido pelo ângulo \widehat{BAD} é \overline{BD} .

Corolário 2. Os quadrados desses arcos, tangentes e senos também estão, no limite, como as flexas dos arcos, a qual bissecta as cordas e converge para um dado ponto. Pois essas flexas

estão como os segmentos subtendidos BD e bd .

Corolário 3. E, assim, a *sagitta* está na razão do quadrado do tempo no qual um corpo descreve o arco com uma dada velocidade.

Interpretação. A flexa ou *sagitta* é o segmento do meio de \overline{AB} até o círculo (logo, sua extensão passa pelo centro do círculo osculador); no limite, flexa $\approx \overline{BD} \approx \frac{(\overline{AB})^2}{2R}$ (lema 11); como $\overline{AB} \approx \overline{Ab} = v\Delta t$, segue-se flexa $\propto (\Delta t)^2$. O sentido último do Lema 11 e seus Corolários é provar que a distância de “queda” da tangente para o círculo osculador pela flexa é dada pelo *Teorema de Galileu*, como Huygens já descobrira: flexa $\approx \overline{BD} \approx \frac{1}{2} \frac{(\overline{AB})^2}{R} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{R}\right) \Delta t^2$ ou flexa $\approx \frac{1}{2} \mathcal{G} (\Delta t)^2$, onde \mathcal{G} é uma “gravidade” genérica. Em outras palavras, raio de curvatura $\equiv R \propto \frac{v^2}{\mathcal{G}}$.

Lei das áreas no movimento central ([29], p. 444)

Proposição 1. Teorema 1. As áreas que corpos constrangidos a se moverem em órbitas [geram, as quais são] descritas pelos raios traçados para um centro de forças, imóvel, jazem em planos fixos e são proporcionais aos tempos.

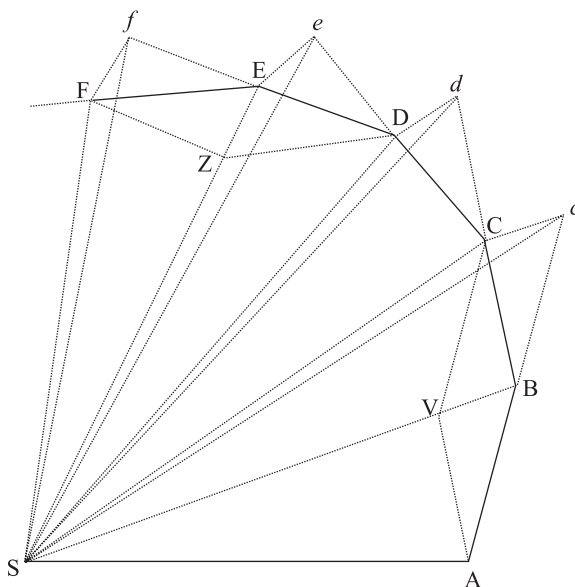


Figura 11 - O Método de Hooke. S é um centro de forças. Uma massa percorre AB em tempo Δt . Em B , a massa sofre um soco (impulso instantâneo) em direção a S . O movimento resultante, BC , pelo método de Hooke, é a composição de dois movimentos: BV , na direção BS , e o outro, Bc , que a massa já possuía, na direção AB . Em um tempo Δt , igual ao anterior, é claro que $AB = Bc$, de modo que o movimento resultante BC é a diagonal do paralelogramo $BVCc$, logo $BV = cC$, $Bc = VC$, $BV \parallel cC$ e $Bc \parallel VC$.

Demonstração. Área do triângulo $SAB =$ área do triângulo SBC , pois têm bases iguais ($AB = Bc$) e mesma altura (perpendicular de

S à direção comum ABC). O restante da prova consiste em mostrar que

$$\text{área do triângulo } SBc = \text{área do triângulo } SBC,$$

pois o processo pode ser repetido, até terminarem os triângulos. Ora,

$$\begin{aligned} \text{área do trapézio } SBcC &= \text{área do triângulo } SBc + \\ &\text{área do triângulo } SCc \equiv \text{área do triângulo } SBC + \\ &\text{área do triângulo } BCc; \end{aligned}$$

porém,

$$\text{área do triângulo } BCc = \text{área do triângulo } SCc,$$

pois têm base comum (Cc) e a altura de B a essa base é igual à altura de S à mesma base (pois $SB \parallel Cc$); cancelando termos iguais em lados opostos da expressão acima para a área do trapézio:

$$\text{área do triângulo } SBc = \text{área do triângulo } SBC.$$

Interpretação. A área infinitesimal é $\delta A = \frac{1}{2}r\delta s = \frac{1}{2}rv_\theta\delta t$; pela Proposição 1: $A = \text{constante} \times \delta t \implies v_\theta = \frac{\text{constante}'}{r}$, um resultado que vai ser largamente usado por Newton. Um outro resultado é: $\delta s = r\delta\theta$, logo $\delta A = \frac{1}{2}r^2\delta\theta \implies \dot{\theta} = \frac{\text{constante}'}{r^2}$.

Definição geométrica da força central ([29], p. 445-446)

Corolário 3. Se as cordas AB , BC e DE , EF , de arcos descritos em tempos iguais, em espaços que não resistem, são completadas [formando] paralelogramos $ABCV$ e $DEFZ$, então as forças em B e E estão uma para a outra na razão final das diagonais BV e EZ , quando os arcos diminuem indefinidamente. Pois os movimentos BC e EF do corpo são (pelo corolário 1 das leis) composto dos movimentos Bc , BV e Ef , EZ ; mas na demonstração dessa proposição, BV e EZ , iguais a Cc e Ff , são gerados pelos impulsos da força centrípeta em B e E e, assim, são proporcionais a esses impulsos.

Corolário 4. As forças pelas quais corpos, em espaços não resistentes, são desviados de movimentos retilíneos e defletidos em órbitas curvas estão uma para a outra como as flexas dos arcos descritos em tempos iguais, as quais convergem para o centro de forças e bissectam as cordas, quando os arcos decrescem indefinidamente. Pois essas flexas são metade das diagonais com que se lidou no Corolário 3.

Interpretação. A semi diagonal BV é a flexa que passa pelo centro de forças e bissecta a corda. Pelo método de Hooke, força central $\propto BV$.

Proposição 2. Teorema 2. Todo corpo que se move em alguma linha curvada, descrita em um plano, [de tal modo que] um raio traçado de um ponto $[B]$, o qual ou está imóvel ou se move uniformemente para a frente com um movimento retilíneo [na direção a Bc], descreve áreas em torno desse ponto proporcionais ao tempo, é atuado por uma força centrípeta [central] tendendo ao ponto.

Demonstração. A força em B age ao longo de cC , pela composição de movimentos (Corolário 2). Mas como as áreas são iguais, refazendo de trás para diante o teorema anterior, $cC \parallel BV$; logo a força age ao longo de SB .

Interpretação. É o teorema inverso do Teorema 1.

Definição geométrica e medida da força centrípeta ([29], p. 449)⁹

Proposição 4. Teorema 4. As forças centrípetas de corpos que descrevem círculos diferentes com movimentos uniformes tendem para os centros desses círculos e estão uma para a outra como os quadrados dos arcos descritos no mesmo tempo, divididos pelos raios dos círculos.

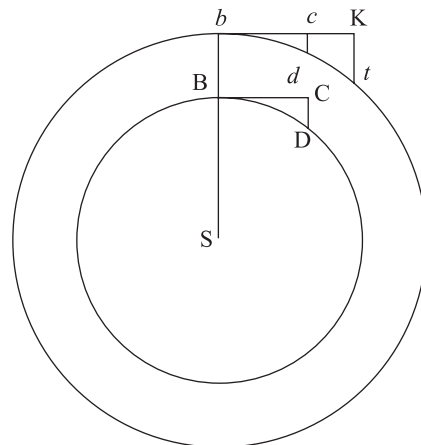


Figura 12 - **A Força Centrípeta.** Newton mostra que, no caso de um círculo percorrido com velocidade uniforme (v), a força é $\frac{v^2}{R}$.

Demonstração. Pelas Proposições 1 e 2, essas forças tendem para o centro do círculo e, pelo Corolário 4 da Proposição 1, são proporcionais às flexas que bissectam os arcos. Pelo Lema 11, as flexas são proporcionais a $\frac{\text{arco}^2}{\text{raio}}$ ou $\frac{\text{força em } b}{\text{raio } Sb} = \frac{\widetilde{bd}^2}{\widetilde{BD}^2}$ como arcos \widetilde{bd} e \widetilde{BD}

⁹Essa é a primeira vez em que Newton escreve a *força centrípeta* como $\propto \frac{v^2}{r}$.

percorridos no mesmo tempo são proporcionais à velocidade: força $\propto \frac{v^2}{\text{raio}}$.

Medida analítica da força central ([29], p. 453-455)

Proposição 6. Teorema 5. Se um corpo revolve, em um espaço não resistente, em alguma órbita em torno de um centro imóvel e descreve algum arco justamente nascente em um tempo minimamente pequeno e, se a flexa do arco for traçada de modo a bissectar a corda, e, quando traçada, passar pelo centro de forças, a força centrípeta [central] no meio do arco será como a flexa diretamente e como o tempo duas vezes [isto é, como o quadrado do tempo].

Demonstração. Pela Proposição 1, Corolário 4: flexa $BV \propto$ força central. Pelo Lema 11, Corolário 2 e Corolário 3: flexa $\propto \Delta t^2$. Logo, flexa \propto (força central) $\times (\Delta t)^2 \Rightarrow$ força central $\propto \frac{\text{flexa}}{(\Delta t)^2}$.

Interpretação. Essa proposição generaliza o Teorema de Galileu para o caso do movimento central: flexa $\approx \frac{1}{2}G\Delta t^2$. Isso é verdade, porém a proposição confunde o leitor, pois as flexas a que se referem o Lema 11 e o Corolário 4 da Proposição 1 são conceitualmente diferentes: Naquele, é a *força centrípeta*, dirigida para o centro do círculo osculador; nesse, é a *força central*, dirigida para um centro; e não se pode fazer uma força proporcional à outra¹⁰. O próprio Newton vem em socorro de seu leitor ([29], p. 454): “Essa proposição é, também, facilmente provada pelo lem. 10, corol. 4”. De fato, fica claro que a *força central* é dada pelo Teorema de Galileu.

Medida analítica da força central: Demonstração alternativa da proposição 6 ([29], p. 437-439)

Lema 10. Os espaços que um corpo descreve, quando movido por uma força finita, seja essa força determinada e imutável, seja ela continuamente crescente ou decrescente, estão, no momento do começo do movimento, na razão quadrada do tempo.

Corolário 4. E, assim, as forças estão [entre si] como os espaços descritos no instante inicial do movimento, diretamente, e como os quadrados dos tempos, inversamente.

¹⁰Considere um movimento central. As componentes radial e angular da velocidade são: $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$; da aceleração são: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0$. A tangente à curva é definida por $\mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{v_r}{v} \hat{\mathbf{r}} + \frac{v_\theta}{v} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e a normal, por $\mathbf{n} = \frac{v_\theta}{v} \hat{\mathbf{r}} - \frac{v_r}{v} \hat{\boldsymbol{\theta}}$; logo $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{t} = \frac{v_\theta}{v} \equiv \cos \Psi$ e $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{n} = \frac{v_r}{v} \equiv \sin \Psi$. Portanto, $\frac{a_n}{a_r} = \cos \Psi (r, \dot{r}, \dot{\theta}) \neq$ constante

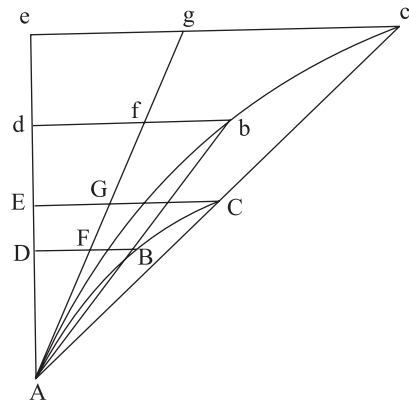


Figura 13 - **Teorema de Galileu.** A figura é o gráfico velocidade \times tempo, onde o tempo é marcado sobre a ordenada e a velocidade sobre a abscissa. As curvas ABC e abc representam $v(t)$ para dois movimentos quaisquer, mas que, em $t = A$, têm a mesma aceleração. $AFgf$ é tangente às curvas em A .

Paráfrase da demonstração. No Lema 5, é argumentado que: triângulo $Afd \sim$ triângulo Age , pois têm dois lados comuns e os terceiros paralelos; logo, $\frac{Ae}{Ad} = \frac{eg}{df}$; conseqüentemente, $\frac{\text{área do triângulo } Afd}{\text{área do triângulo } Age} = \frac{\frac{1}{2}(Ae)(eg)}{\frac{1}{2}(Ad)(df)} = \left(\frac{Ae}{Ad}\right)^2 = \left(\frac{eg}{df}\right)^2$; esse resultado é inteiramente geométrico, nada contendo de Física. O Lema 5 é, então, usado para provar o Lema 9: No limite em que b e c tendem para A , $\frac{\text{área curva } Abd}{\text{área curva } Ace} \rightarrow \frac{\text{área do triângulo } Afd}{\text{área do triângulo } Age} = \left(\frac{Ae}{Ad}\right)^2$.

Newton, agora, prova que uma outra curva (ABC), com mesma tangente no ponto A , subtende a mesma área, no limite. De fato, similarmente, quando B e C tendem para A : $\frac{\text{área curva } ABD}{\text{área curva } ACE} \rightarrow \left(\frac{AD}{AE}\right)^2$. Ora, como as ordenadas, as abscissas e as curvas são contínuas, é sempre possível escolher d e e , tais que $\frac{Ae}{Ad} = \frac{AD}{AE}$, de modo que, no limite, $\frac{\text{área (sob a) curva } Abd}{\text{área curva } Ace} \approx \frac{\text{área (sob a) curva } ABD}{\text{área curva } ACE}$.

O Lema 9 é meramente geométrico. O Lema 10 é uma instância do Lema 9, quando $ADEde$ é o eixo do tempo e egc é o eixo da velocidade. É preciso observar que a interpretação física está na realização feita no Lema 10: Se as equações da Física fossem de primeira ordem, então, a curva interessante seria $x \times t$; se fossem de terceira ordem, seria $a \times t$. **Portanto, no Lema 10, é demonstrado que, em cada instante tomado isoladamente, todo movimento é uniformemente acelerado, de modo que, em cada instante isolado, $s \approx \frac{1}{2}G(\Delta t)^2$, onde G é a “gravidade” naquele instante.** Mas note que o G da “queda” ao longo do raio vetor é diferente do G ao longo da normal (aceleração centrípeta).

Medida geométrica da força central ([29], p. 453-455)

Corolário 1. Se um corpo P, revolvendo em torno de um centro S, descreve a linha curva APQ, enquanto a linha reta ZPR toca a curva em algum ponto P; e QR, paralela à [linha] SP, é traçada de um outro ponto Q até a tangente e QT é traçada perpendicularmente a SP; então a força centrípeta será inversamente como o sólido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

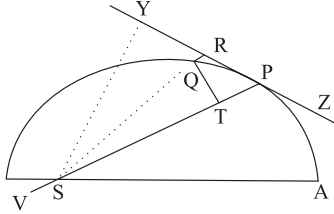


Figura 14 - S é o centro de forças. P é a posição do corpo. YZ é a tangente em P. RQ || PS; QT ⊥ PS.

Demonstração. $\Delta t \propto \text{área } SPQ = SP \times QT$; flexa do arco duplo do arco PQ = RQ. Pelo Teorema acima, (força)⁻¹ $\propto \frac{\Delta t^2}{\text{flexa}}$. Logo: (força)⁻¹ $\propto \frac{(SP)^2 \times (QT)^2}{QR}$.

O problema direto ([29], p. 462-463)

Proposição 11. Problema 6. Deixe um corpo revolver em uma elipse; pede-se achar a lei da força centrípeta [central] em direção ao foco da elipse.

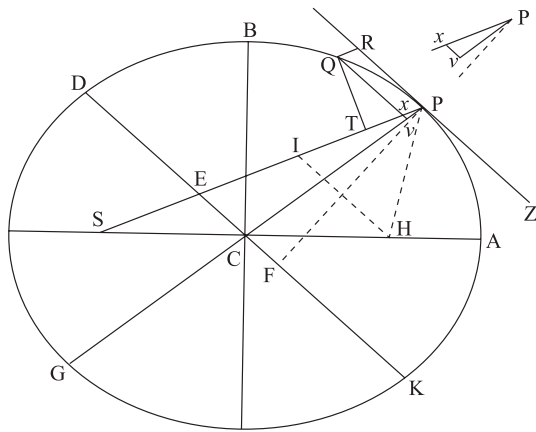


Figura 15 - S e H são os focos; P, a posição do corpo; RPZ, a tangente em P. Traçar: Qv || ZPR || DCK || HI, QT ⊥ PS, PF ⊥ DCK; seja x o encontro de Qv com PS; traçar QR || Px; é claro que QxPR é um paralelogramo (logo, Px = QR). Como HI || DCK e CS = CH, segue-se: SE = EI. **Propriedades geométricas da elipse:** (1) $\widehat{SPR} = \widehat{HPZ} \Rightarrow \widehat{SPR} = \widehat{PIH} = \widehat{HPZ} = \widehat{PHI} \Rightarrow$ o triângulo PIH é isósceles $\Rightarrow PH = PI$. (2) Latus rectum (L) é a ordenada que passa pelo foco: $L = 2 \frac{(BC)^2}{AC}$. (3) Por definição de elipse: $PS + PH = 2 \times CA$. (4) $2CA = PS + PH \equiv PI + IE + ES + PH = (PI + PH) + (EI + ES) = 2 \times (PI + EI) \equiv 2 \times PE \Rightarrow PE = CA$. (5) $\frac{Gv \times Pv}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$. (6) $\frac{CA}{PF} = \frac{CD}{CB}$.

Demonstração. Vai ser demonstrado que $L \times (QR) = (QT)^2$; multiplicando ambos os lados por $\frac{(SP)^2}{QR}$, tem-se: $L \times (SP)^2 = \frac{(SP)^2 \times (QT)^2}{QR}$. Mas do corolário anterior, força central⁻¹ $\propto \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Logo, força central⁻¹ = $L \times (SP)^2$, QED.

Por construção: triângulo P_xv ~ triângulo PEC $\Rightarrow \frac{P_x}{P_v} = \frac{PE}{PC}$ e usando PE = AC (propriedade 4) e P_x = Q_r (por construção da Fig. 15): $\frac{QR}{P_v} = \frac{AC}{PC} \equiv \frac{L \times QR}{L \times P_v} \Rightarrow L \times QR = \frac{(L \times P_v) \times AC}{PC}$.

Claramente, $L \times Pv \equiv \left(\frac{L}{Gv}\right)(Gv \times Pv)$ e usando a propriedade (5): $L \times Pv = \left(\frac{L}{Gv}\right) \left(\frac{PC^2}{CD^2}\right) \times Qv^2$. Logo, $L \times QR = \frac{L \times PC^2 \times Qv^2 \times AC}{Gv \times CD^2 \times PC}$. Por construção: triângulo QT_x ~ triângulo PFE $\Rightarrow \frac{Q_x}{Q_T} = \frac{PE}{PF}$ ou, usando PE = CA (propriedade 4), $\frac{Q_x}{Q_T} = \frac{CA}{PF}$. Pela propriedade (6) (Fig. 15): $\frac{Q_x}{Q_T} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow Q_x = \frac{QT \times CD}{CB}$. Mas Q_x $\xrightarrow{Q \rightarrow P}$ Q_v, de forma que Q_v = $\frac{QT \times CD}{CB}$. Finalmente, usando a definição de L, propriedade (2), e notando que Gv $\xrightarrow{Q \rightarrow P}$ 2PC:

$$L \times QR = \frac{L \times PC^2 \times Qv^2 \times AC}{Gv \times CD^2 \times PC} = \frac{2 \times BC^2 \times PC^2 \times QT^2 \times CD^2 \times AC}{AC \times 2PC \times CB^2 \times CD^2 \times PC} = QT^2.$$

Cálculo da velocidade e do tempo em um movimento retilíneo não uniforme ([29], p. 525)

Proposição 39. Problema 27. Suponha uma força centrípeta [central] de qualquer tipo e garanta a quadratura de figuras curvas. Pede-se achar, para um corpo subindo verticalmente ou descendo verticalmente, a velocidade em qualquer posição e o tempo no qual os corpos alcançam qualquer ponto e conversamente.

Demonstração. Seja (vide Fig. 16): DE um espaço infinitesimal percorrido em um tempo infinitesimal Δt; V = celeridade em D, I = acréscimo infinitesimal da celeridade, V + I = celeridade em E:

$$v_E^2 \equiv (V + I)^2 = V^2 + 2VI + I^2$$

$$v_D^2 \equiv V^2$$

$$v_D^2 - v_E^2 = 2VI + I^2 \approx 2VI \quad \text{ou}$$

$$\Delta(v^2) = 2v\Delta v$$

O Teorema de Galileu (na forma $v^2 = 2 \times a \times s$) pode ser aplicado em cada instante tomado separadamente, pois, instantaneamente, $a \propto F = \text{constante}$; logo $\Delta(v^2) = 2a\Delta s \approx F \times \Delta s$ ou, na notação de Newton, $2VI \propto (F \times DE)$. Mas $F \times DE = \text{área } DFGE$, portanto $\Delta(v^2) \equiv 2VI = \text{área } DFGE$. Como

área $DFGE = \text{área } ABGE - \text{área } ABFD$,
pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} (\text{velocidade em } E)^2 &\equiv v_E^2 = \text{área } ABFGE; \\ (\text{velocidade em } D)^2 &\equiv v_D^2 = \text{área } ABFD \end{aligned}$$

O espaço nascente DE é percorrido em um tempo $(\Delta t)_D = \frac{DE}{v_D} \equiv DE \times DL$:

tempo para percorrer $AE = \text{área } ATVLM$.

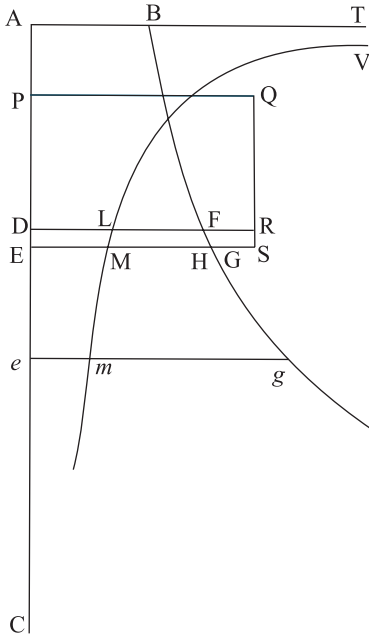


Figura 16 - $ADEC$ é a trajetória retilínea. As abscissas AB, DF, EG são as forças centrais em D, E . Os pontos M, L, V sobre as abscissas são, por construção, tais que $EM \propto \frac{1}{v_E}$, etc.; AT é assíntota (a velocidade inicial é zero).

Cálculo da velocidade em um movimento não retilíneo e não uniforme ([29], p. 528)

Proposição 40. Teorema 13. Se um corpo, sob a ação de uma força centrípeta [central], se move de algum modo, qualquer que seja, e outro corpo ascende em linha reta ou desce em

linha reta e se suas velocidades são iguais em alguma instância em que suas distâncias do centro são iguais, suas velocidades serão iguais em quaisquer outras distâncias do centro [respectivamente] iguais.

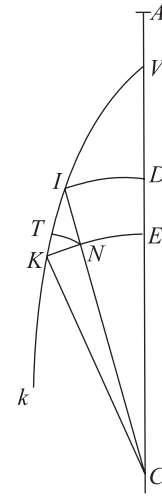


Figura 17 - $VIKk$ é a trajetória não retilínea e $AVDE$, a retilínea. C é o centro de forças; $CI = CD$ e $CK = CN = CE$, logo $DE = IN$ (\widetilde{DI} e \widetilde{ENK} são arcos de círculo).

Demonstração. A força central em I , no movimento ao longo de $VIKk$, é IN : $IN = IT + TN$, onde IT é a componente ao longo da trajetória e TN é a componente perpendicular à trajetória, isto é, a força centrípeta; Newton reconhece, explicitamente, que TN apenas muda a direção e não tem efeito na celeridade, enquanto IT apenas muda a celeridade e não tem efeito na direção. A força em D , no movimento ao longo de $AVDEC$, é DE .

Por hipótese, quando os corpos estão, respectivamente, em D e I , situados a igual distância do centro ($CD = CI$), eles têm celeridades iguais ($v_D = v_I$), embora os momentos em que os corpos estão, respectivamente, em D e I não sejam os mesmos.

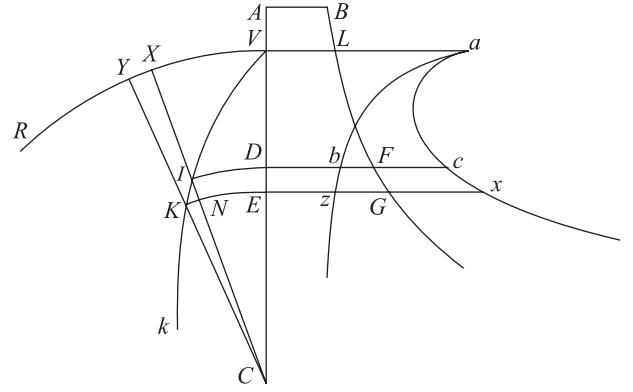
$$\frac{\text{variação da velocidade ao longo da curva, em } I}{\text{variação da velocidade no movimento ao longo de } AVC, \text{ em } D} = \left(\frac{\text{componente da força ao longo de } IK}{\text{força ao longo de } DE} \right) \times \left(\frac{\Delta t_{IK}}{\Delta t_{DE}} \right) = \left(\frac{\text{componente da força ao longo de } IK}{\text{força ao longo de } DE} \right) \times \left[\left(\frac{\text{distância } \widetilde{IK}}{\text{distância } \widetilde{DE}} \right) \times \left(\frac{\text{velocidade em } D}{\text{velocidade em } I} \right) \right];$$

$$\frac{(\Delta v)_{\widetilde{IK}}}{(\Delta v)_{\widetilde{DE}}} = \left(\frac{IT}{DE} \right) \times \left(\frac{(\Delta t)_{IK}}{(\Delta t)_{DE}} \right) = \left(\frac{IT}{DE} \right) \times \left[\left(\frac{\widetilde{IK}}{\widetilde{DE}} \right) \times \left(\frac{v_D}{v_I} \right) \right] = \left(\frac{IT}{DE} \right) \times \left(\frac{\widetilde{IK}}{\widetilde{DE}} \right) \times 1 = \frac{IT \times IK}{DE^2}.$$

Ora, triângulo $ITN \sim$ triângulo $IKN \Rightarrow \frac{TN}{KN} = \frac{IT}{IN} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow (IT) \times (IK) = (IN)^2$. Logo $\frac{(\Delta v)_{\widetilde{IK}}}{(\Delta v)_{\widetilde{DE}}} = \frac{IN^2}{DE^2}$; $IN = DE \Rightarrow$

$$\text{aceleração tangencial} \equiv (\Delta v)_{\widetilde{IK}} = \text{aceleração no movimento vertical} \equiv (\Delta v)_{\widetilde{DE}}.$$

Interpretação. Na Proposição 39 (Problema 27), Newton calcula a velocidade e o tempo em um movimento retilíneo, embora não uniforme. Na presente proposição, Newton mostra como calcular a componente tangencial da força ou da aceleração, em um movimento não retilíneo, dado um movimento retilíneo com mesma aceleração. A razão é óbvia: O processo de integração (quadratura) é feito no caso retilíneo (Fig. 16).



O problema inverso ([29], p. 528)

Proposição 41. Problema 28. Supondo uma força centrípeta [central] de qualquer tipo e garantindo a quadratura de figuras curvilíneas, pede-se achar as trajetórias nas quais corpos se moverão e, também, os tempos de seus movimentos nas trajetórias assim achadas.

Figura 18 - As curvas CEDVABLF e Vabz são as da Fig. 16. A curva VIKk e os círculos CDI e ENK são os mesmo da Fig. 17. VXYR é o movimento circular do raio vetor: CX = CY. Portanto, as velocidades e tempos, no movimento VIKk e AVDEC, de acordo com Proposição 39 e Proposição 40, são $v^2 = \text{área ABLFG}$ e $t = \text{área Vabz}$.

Demonstração. Considere o movimento infinitesimal $\Delta\theta = \widehat{ICK}$; será $IK = IN + KN$ e $\overline{IK} \approx \widetilde{IK}$, $\overline{KN} \approx \widetilde{KN}$.

movimento circular: $v_\theta \equiv Z \equiv \text{celeridade ao longo de } \widetilde{KN} \Rightarrow \widetilde{KN} = Z \times \Delta t$
 $\Rightarrow XY \approx \widetilde{XY} = CX \times \widehat{XC\widehat{Y}}$, $KN \approx \widetilde{KN} = CN \times \widehat{KCN} \Rightarrow \frac{XY}{KN} = \frac{CX}{CN}$
 $\Rightarrow \frac{XY \times CX}{KN \times CI} = \frac{CX^2}{CI \times CN}$

definições: raio vetor = $CI \equiv A$, $Q = Z \times A$
 (o leitor moderno reconhece que $Q = \frac{\text{momento angular}}{\text{massa}}$)

relação útil: $A = CI \approx CN \Rightarrow \frac{XY \times CX}{KN \times CI} \approx \frac{CX^2}{A^2} \Rightarrow XY \times CX = \frac{CX^2 \times KN}{A}$

movimento ao longo de \widetilde{IK} : $v_I = v_D$ (pela Proposição 40) $\Rightarrow \widetilde{IK} = v_D \times \Delta t = \sqrt{\text{área ABFD}} \times \Delta t$

movimento ao longo do raio vetor: $v_r = \sqrt{v_D^2 - v_\theta^2} = \sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}$ (pela Proposição 39); $IN = v_r \Delta t$

Ajuntando os valores das distâncias KN, IN e IK:

$$\frac{KN}{IK} = \frac{Z}{\sqrt{\text{área ABFD}}} = \frac{v_\theta}{v_D}$$

$$\frac{IN}{KN} = \frac{\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}}{Z} = \frac{v_r}{v_\theta} \equiv \frac{\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}}{\frac{Q}{A}} \Rightarrow KN = \frac{IN \times Q}{\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2} \times A}$$

Interpretação do cálculo que vai-se seguir. Para entender a aplicação da *Lei das Áreas* e a Fig. 18, é preciso notar que: $\Delta A \equiv \frac{\Delta A}{\Delta t} \times \Delta t \equiv \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right) \times \frac{\Delta r}{v_r}$. Como $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{Q}{2}$, tem-se $\Delta A = \frac{Q}{2} \frac{\Delta r}{v_r} \equiv \Delta r \frac{Q}{2v_r}$.

Continuação da Demonstração. Lei das Áreas no movimento VIKk:

$$\Delta t \propto \text{área do triângulo CKI} = \frac{1}{2} \times KN \times CI \equiv \frac{1}{2} KN \times A = IN \times \left(\frac{Q}{2\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}}\right)$$

$$\Delta t \propto DE \times \left(\frac{Q}{2\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}}\right) \equiv \Delta r \frac{Q}{2v_r}$$

($IN \approx DE$)

Pela Proposição 39 e Proposição 40, o tempo para percorrer a distância VIKk é proporcional à área Vabz; logo, na Fig. 18, $\left(\frac{Q}{2\sqrt{\text{área ABFD} - Z^2}}\right) = Db$.

Interpretação do cálculo que vai-se seguir. O momento angular do raio vetor em X é $Q_c = (CX)^2 \times \widehat{XC\widehat{Y}}$; em I, é $Q = (A)^2 \times \widehat{XC\widehat{Y}}$; de modo que

$Q_c = Q \times \left(\frac{CX}{A}\right)^2$. Como acima, a área descrita será $\Delta A = \frac{Q_c \Delta r}{2v_r}$, de modo que $\Delta A = (Db) \times \left(\frac{CX}{A}\right)^2$.

Continuação da Demonstração. Lei das Áreas no movimento *VIKk*:

$$\begin{aligned} \Delta t' \propto \text{área do triângulo } XCY &= \frac{1}{2} \times CX \times XY = \\ \frac{1}{2} \times \frac{CX^2 \times KN}{A} &= IN \times \left(\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \sqrt{\text{área } ABFD - Z^2}} \right) \\ \approx DE \times \left(\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \sqrt{\text{área } ABFD - Z^2}} \right) &= \\ DE \times (Db) \times \left(\frac{CX}{A} \right)^2 & \end{aligned}$$

Pelas Proposições 39 e 40, o tempo para percorrer *VXYR* é proporcional à área *Vacx*, logo, na Fig. 18, $\left(\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \sqrt{\text{área } ABFD - Z^2}} \right) = (Db) \times \left(\frac{CX}{A} \right)^2 = Dc$.

É claro que $t = t'$, pois o raio vetor descreve os arcos *XY* e *NK* no mesmo tempo, por construção da Fig. 18, embora os fatores de proporcionalidade sejam diferentes, de modo que as áreas integradas são diferentes. Integrando:

$$\begin{aligned} t \propto \text{área } VCI &= \text{área } VDBa \\ t \propto \text{área } VCX &= \text{área } VDca \end{aligned}$$

Newton indica como determinar o ponto *I* sobre a trajetória: Dado *t*, a área *VDBa* é dada; port-

anto, fica dada, também, a distância ao centro, $CD = CI$. A área *VDca* é, também, dada pelo tempo, logo ficam dados o setor *VCX* (igual a ela) e o ângulo \widehat{VCX} . Dado o ângulo e *CI*, o ponto *I* fica determinado.

Movimento no referencial não inercial do raio vetor ([29], p. 534)

Proposição 43. Problema 30. Requer-se achar a força que torna um corpo capaz de mover em qualquer trajetória que revolve em torno de um centro de forças, do mesmo modo que outro corpo na mesma trajetória em repouso.

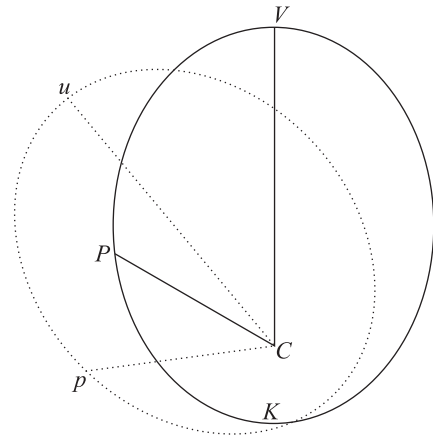


Figura 19 - *VPK* é a curva fixa, com foco em *C* e *upk*, a móvel. Newton demonstra que *p* e *P* descrevem, em suas respectivas curvas, arcos iguais em tempos iguais.

Demonstração. No começo do movimento, os pontos *P* e *p* estão em *V*, ápice da figura fixa. Newton, então, demonstra que áreas são medidas pelos ângulos; em linguagem moderna, $\Delta A = r \Delta s = rv \Delta t = r^2 \Delta \Phi$:

$$\frac{\text{área descrita por } Cp \text{ no plano dos movimentos}}{\text{área descrita por } CP \text{ no plano dos movimentos}} = \frac{\text{arco descrito por } Cp \text{ em torno de } C}{\text{arco descrito por } CP \text{ em torno de } C} = \frac{\text{vel. de } p \text{ em } t}{\text{vel. de } P \text{ em } t} = \frac{\widehat{VCp}}{\widehat{VCP}}$$

O teorema estabelece que existe um ponto *p*, o qual tem, no instante *t*, a mesma posição, na figura pontilhada, que *P*, na figura cheia, no mesmo instante *t*. De fato, seja o ponto *u*, ápice da curva móvel, obtido da rotação de *V*, ápice da curva fixa, e seja o ponto *p* obtido da rotação de *P*; então: $\widehat{VCu} = \widehat{PCp}$. Da figura: $\widehat{VCP} = \widehat{VCu} + \widehat{uCP}$ e $\widehat{uCP} = \widehat{PCp} + \widehat{uCP} \Rightarrow \widehat{VCP} = \widehat{uCP}$. Pela *Lei das Áreas*, \widehat{uCP} é percorrido no mesmo tempo que \widehat{VCP} .

Proposição 44. Teorema 14. A diferença entre as forças sob a ação das quais dois corpos são capazes de mover igualmente — um, em uma órbita em repouso e a outra, em uma órbita idêntica que está em revolução — é inversamente como o cubo da altura comum delas.

Interpretação. A Proposição demonstra o seguinte: No referencial absoluto, a força é $F_{\text{abs}} \equiv f(r)$; no referencial que gira com o raio vetor, a força é $F_{\text{móvel}} \equiv m\ddot{r} = f(r) + mr\dot{\theta}^2$; logo, $|F_{\text{abs}} - F_{\text{móvel}}| = mr\dot{\theta}^2 = mr \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 =$

$$m \frac{\dot{\theta}^2}{r^3} \propto \frac{1}{r^3}.$$

Demonstração. As distâncias percorridas por *P* e *p*, em seus respectivos referenciais, são iguais (vide Fig. 20): Ao longo do raio vetor, $PR = CP - CR = Cp - CZ = pZ \approx pr$; perpendicularmente ao raio vetor, $KR = Zk \approx kr$. Outras relações são: Da construção, $mkr \perp Cp$; pela geometria do círculo, $rs = rk$; além disso, supondo $mt \approx \parallel$ diâmetro nC, segue-se outra relação geométrica, $\frac{mn}{mk} = \frac{ms}{mt}$ ou $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$. Na circunferência, $mt \approx 2 \times (Ck) \approx$

$$2 \times pC, \widetilde{kn} \approx km \text{ e } \widetilde{Zn} \approx mr.$$

Movimento absoluto de p : Consiste de (i) movimento igual ao de $P \rightarrow K$, pelo movimento sob a força central (o movimento $p \rightarrow k$); (ii) rotação de p relativa a P (movimento $k \rightarrow n$): $\mathbf{pn} \approx [\mathbf{pr} + \mathbf{rk}] + \mathbf{km}$; a rotação total é $mr = kr + km$.

As velocidades angulares em t , no referencial (absoluto) do plano dos movimentos, são, pela proposição anterior:

$$\frac{\text{área descrita por } Cp \text{ no plano dos movimentos}}{\text{área descrita por } CP \text{ no plano dos movimentos}} = \frac{\text{velocidade angular de } p \text{ em } t}{\text{velocidade angular de } P \text{ em } t} = \frac{\widehat{VCp}}{\widehat{VCP}}.$$

Rotação total: Pela própria colocação do problema, no tempo em que P gira o arco (infinitesimal) $KR = kr$, o ponto p gira o arco (infinitesimal) mr , de modo que, pela expressão acima, $\frac{mr}{kr} = \frac{\widehat{VCp}}{\widehat{VCP}}$. Rotação Relativa: É $k\widehat{Cn}$, onde mn é o deslocamento devido à ação da força (centrípeta) da rotação relativa.

Portanto, $\frac{p\widehat{Cn}}{p\widehat{Ck}} \approx \frac{mr}{kr} \Rightarrow \frac{p\widehat{Cn}}{p\widehat{Ck}} = \frac{\widehat{VCp}}{\widehat{VCP}}$; porém, $\frac{p\widehat{Cn}}{p\widehat{Ck}} = \frac{\text{área do triângulo } pCn}{\text{área do triângulo } pCk} \equiv \frac{(pC) \times mr}{(pC) \times kr}$ ou, como as áreas são constantes, $\Delta t, mr \propto \frac{1}{pC}, kr \propto \frac{1}{pC}$; também, $ms = mr + kr \propto \frac{1}{pC}$ e $mk = mr - kr \propto \frac{1}{pC}$. Finalmente, $mn \propto \frac{1}{pC^3}$.

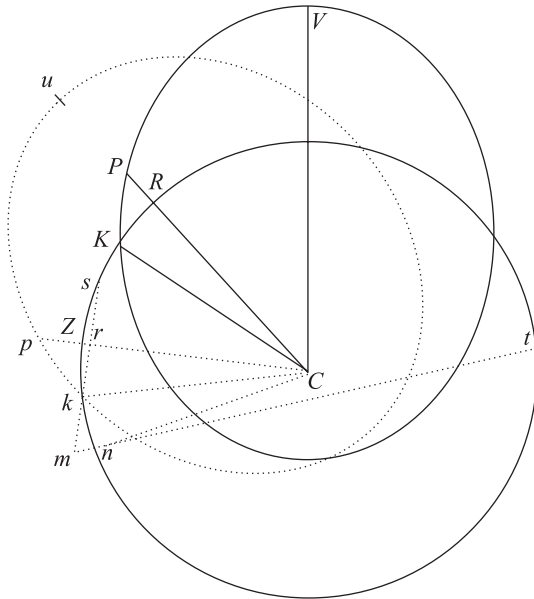


Figura 20 - P, p e K, k são posições similares nas curvas similares. Em Δt , p move-se pk , em sua curva, enquanto P se move PK , na curva fixa. Porém, nesse tempo, para o observador no plano dos movimentos (absoluto), p move-se para n .

Corolário 1. Então, a diferença das forças nos lugares P e p ou K e k está para a força pela qual um corpo seria capaz de revolver com movimento circular de R para K , no mesmo tempo no qual o corpo P , na órbita imóvel, descreve o arco PK , [...], isto é, como $\frac{mk \times ms}{mt}$

para $\frac{rk^2}{2kC}$ ou como $mk \times ms$ para rk^2 [...].

Demonstração. Newton usa as denominações $F \equiv kr$ e $G \equiv mr$, logo $mk \equiv G - F$ e $ms \equiv G + F$. Então, $\frac{mr}{kr} \equiv \frac{G}{F} = \frac{\widehat{VCp}}{\widehat{VCP}}$; $\frac{mk \times ms}{kr^2} \equiv \frac{G^2 - F^2}{F^2}$; logo, $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \times \frac{(rk)^2}{2(kC)}$ ($mt \approx 2 \times kC$). Conseqüentemente, $\frac{mn}{\frac{(rk)^2}{2(kC)}} = \frac{G^2 - F^2}{F^2} = \text{constante}$, pois $\frac{G}{F} = \text{constante}$ e, assim, qualquer relação envolvendo F e G , apenas.

Interpretação. Note que $kC = KC =$ raio vetor, $kr \approx v_\theta \Delta t = \frac{l}{r} \times \Delta t$ e $\frac{(rk)^2}{2(kC)} = \frac{1}{2} \times \frac{l^2}{(kC)^3} \times (\Delta t)^2$, onde l é o momento angular de P , o ponto na curva fixa. Portanto, o que é demonstrado na proposição é que mn obedece ao Teorema de Galileu e representa a distância que p "cai" para o círculo osculador, é o círculo na direção θ): $mn \approx \frac{1}{2} \left[\frac{G^2 - F^2}{F^2} \times \frac{l^2}{(pC)^3} \right] \times (\Delta t)^2$. A aceleração, vista no referencial inercial, é, correspondentemente, $a_p = \left[\frac{G^2 - F^2}{F^2} \times \frac{l^2}{(pC)^3} \right] \equiv \frac{L^2}{(pC)^3}$, como na proposição principal, onde $L^2 \equiv \frac{G^2 - F^2}{F^2} \times l^2$ é o momento angular (ao quadrado) de p , na rotação relativa. Incidentalmente, obtém-se a interpretação física de F e G : $\frac{G^2 - F^2}{F^2} \times l^2 = L^2$, logo $\frac{G}{F} = \sqrt{1 + \frac{L^2}{l^2}}$.

Corolário 4. E, universalmente, se a maior altura CV de um corpo é denominada T , [se] o raio de curvatura que a órbita VPK tem em V (isto é, o raio de um círculo de igual curvatura) é chamado R , [se] a força centrípeta [central] pela qual um corpo revolve em uma trajetória imóvel, VPK , no lugar V , é chamada $\frac{VF^2}{T^2}$ e, em qualquer outro lugar, é chamada X , enquanto a altura CP é chamada A ; e, se G é tomada para F na mesma proporção que o ângulo VCp para o ângulo VCP , então a força centrípeta [central] pela qual o mesmo corpo pode completar os mesmos movimentos nos mesmos tempos na mesma trajetória upk , a qual se move circularmente, será a soma das forças $X + \frac{VR(G^2 - F^2)}{A^3}$.

Paráfrase da Demonstração. Newton prova nos Corolário 2 e Corolário 3 a mesma proposição para os casos, respectivamente, da elipse com centro de forças em um foco e no centro. Nesta proposição Newton argumenta que a força no referencial não inercial do raio vetor é $f(r) + \frac{\text{constante}}{r^3}$. No apocentro (V), a força central coincide com a força centrípeta, pois $\hat{\theta}$ é tangente à curva, de modo que só existe a componente tangencial, $v_V = \frac{l}{r}$, onde T é o raio

vetor de V ; a força central é, pois, $\frac{v_\theta^2}{R}$, onde R é o raio do círculo osculador, ou $\frac{v_\theta^2}{R} \equiv \frac{l^2}{T^2 \times R}$. É dado que $X_V = \frac{VF^2}{T^2}$, logo $\frac{VF^2}{T^2} = \frac{l^2}{T^2 \times R} \Rightarrow F^2 = \frac{l^2}{V \times R}$. Finalmente, $a_p = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \times \frac{l^2}{A^3} = \frac{G^2 - F^2}{V \times R} \times \frac{l^2}{A^3}$; $a_p = \frac{RV(G^2 - F^2)}{A^3}$. A força total em p , no referencial inercial, é $X + a_p$.

Para tentar entender porque Newton introduziu a constante V , note-se que, se $V = 1$, segue-se que $F^2 = \frac{l^2}{R}$, logo F^2 é a força no apocentro, V . Como l foi introduzido por mim para compor os cálculos e não por Newton, é possível que, nos cálculos dele, $l = 1$, mas, então, é necessário introduzir a constante $V = \frac{1}{l^2}$, de modo que $F^2 = \frac{l^2}{V \times R} = \frac{l^2}{R}$. Do modo como fiz os cálculos, $V = 1$. O problema com as constantes origina-se no costume de usar a linguagem de proporções.

No caso da elipse, Newton faz a força igual a $\frac{F^2}{A^3} + \frac{R(G^2 - F^2)}{A^3}$; portanto, $V = 1$ e a força central para a elipse é $\frac{l^2}{R} = \frac{l^2}{R \times A^3}$.

Determinação do Pericentro e do Apocentro ([29], p. 539-540)

Proposição 45. Problema 31. Requer-se achar os movimentos dos ápices das órbitas que diferem pouco de círculos.

O método. O problema é achar o ângulo entre apocentro e pericentro. Seja uma curva cujo ângulo entre apocentro e pericentro seja conhecido e seja \widehat{VCP} esse ângulo. Como no apocentro e no pericentro qualquer curva pode ser aproximada pelo seu círculo osculador, as curvas se aproximam entre elas e do círculo, nesses pontos; então, no apocentro e pericentro, a relação $\frac{G}{F} = \frac{\widehat{VCP}}{\widehat{VCP}}$ pode ser escrita de modo que

\widehat{VCP} é medido na curva em que é dado e \widehat{VCP} , na outra curva. A curva dada é a elipse, onde $\widehat{VCP} = \pi$.

No caso da elipse, como dito acima, a força em p é $\frac{F^2}{A^2} + \frac{R(G^2 - F^2)}{A^3}$ ou $\frac{F^2 A + RG^2 - RF^2}{A^3}$; seja $A \equiv T - \chi$, então a força é $\frac{RG^2 - RF^2 + TF^2 - F^2 \chi}{A^3} \equiv \frac{(RG^2 - RF^2 + TF^2) + (-F^2 \chi)}{A^3}$.

Para uma curva qualquer, escrever $X(A)$ como $X(A) \equiv \frac{X(A)A^3}{A^3} \equiv \frac{X(T-\chi)(T-\chi)^3}{A^3} = X(T-\chi) \frac{(T^3) + (-3T^2\chi + 3T\chi^2 + \chi^3)}{A^3}$. Isso é o máximo a que se chega sem especificar $X(A) = X(T-\chi)$.

Exemplo. $X =$ constante. Então, $RG^2 - RF^2 + TF^2 \equiv XT^3$ e $-F^2\chi \equiv X(-3T^2\chi + 3T\chi^2 - \chi^3)$; identificando com o círculo osculador, $T = R$ ou $\chi = 0$: $RG^2 - RF^2 + TF^2 \equiv XR^3$ e $-F^2\chi \equiv X(-3T^2 + 3T\chi - \chi^2)$ ou $G^2 \equiv XR^2$ e $-F^2 \equiv -3XR^2$. Portanto, $\frac{\widehat{VCP}}{\widehat{VCP}} \equiv \frac{G}{F} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\widehat{VCP} = \pi$, logo $\widehat{VCP} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

6. Equações dinâmicas x equações de vínculo: Jean Le Rond D’Alembert (1744)

6.1. O “Princípio de D’Alembert”

Após criticar o conceito de *força*, D’Alembert fundamenta a mecânica em novos princípios ([9], p. xiv). Esses são:

1. Um princípio separado para a Estática, o *Princípio da Alavanca*.
2. O *Princípio da Inércia*.
3. É preciso um novo princípio para a Dinâmica; esse é o *Princípio da composição do movimento*.

Parafrazeando D’Alembert ([9], p. xii):

$$\begin{aligned} \text{movimento resultante} &= \text{movimento original} + \text{movimento causado por obstáculos} \\ \text{movimento original} &= \text{movimento resultante} - \text{movimento causado por obstáculos} \end{aligned}$$

Definições: $+ \text{ movimento resultante} \equiv + \text{ movimento não perturbado por obstáculos} + \text{ movimento causado por obstáculos} \equiv - \text{ movimento “destruído” ou “perdido”}$

O *Princípio de D’Alembert* (ou da *Composição de Movimentos*) é, então, enunciado ([9], p. 74):

movimento original ou “aplicado” = movimento não perturbado por obstáculos + movimento “destruído”

Movimento “destruído”. De acordo com o relato do “estado da arte” feito por Lagrange, na parte II de seu *Mécanique Analytique*, o *Princípio de D’Alembert* foi inspirado pela solução dada por Jacob (James) Bernoulli a um problema proposto por Mersenne. O pro-

blema é achar o *centro de oscilação*: Esse é o ponto em um pêndulo composto tal que, se a massa do pêndulo fosse concentrada nesse ponto, o pêndulo teria o comportamento de um pêndulo simples. A solução de Jacob Bernoulli foi publicada em 1703, em seu artigo *De-*

monstration Generale, Du Centre de Balancement ou d'Oscillation, tirée de la Nature du Levier. Sua grande contribuição foi entender que forças de vínculo formam uma alavanca em equilíbrio; portanto, um método para achar as forças de vínculo é aplicar a essas forças o *Princípio da Alavanca*.

Movimento “aplicado”. A despeito de sua crítica

ao conceito de *força*, D’Alembert reconhece que é sempre possível escrever uma equação da forma $m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt$, mas a equação teria, apenas, um significado cinemático, não dinâmico: Dada a equação da curva, a derivada segunda pode ser calculada e colocada na forma $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$, sem necessidade de atribuir significado físico ao lado direito da equação ([9], p. 22-24).

6.2. Equações do movimento

Aplicando o *Princípio de D’Alembert*,

decomposição do movimento	aceleração
movimento “aplicado” ou causado pelas forças externas	\mathbf{a}
movimento resultante ou movimento não perturbado por obstáculos	\mathbf{a}
movimento “destruído” ou movimento devido às forças de vínculo	$\alpha=0$

Como $\alpha = 0$, há, na verdade, duas equações *independentes*:

$$\begin{aligned} \text{equação do movimento real: } & m\mathbf{a} - m\mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \text{equação de vínculo: } & m\alpha = 0. \end{aligned}$$

Porém, D’Alembert não consegue se livrar da equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Para achar o *movimento resultante* ($m\mathbf{a}$), o termo $m\mathbf{a}$ tem de ser dado. D’Alembert interpreta $\frac{\mathbf{F}}{m}$ como um nome para uma aceleração empiricamente dada, \mathbf{a} . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Definição: } & \mathbf{F} \equiv m\mathbf{a} \\ \text{Equação do movimento: } & \mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \text{Equação de vínculo: } & m\alpha = 0. \end{aligned}$$

A decomposição do movimento feita por D’Alembert mostra que é possível escrever equações somente para os *graus de liberdade*. Lagrange empreende a tarefa de escrever equações sobre a superfície de vínculo, de modo que os vínculos sejam automaticamente eliminados e, assim, ([9], p. 224) “evitar as decomposições de movimentos que este princípio [o de D’Alembert] exige”; *é por isso que equações de vínculo não aparecem na aplicação do método da mecânica analítica*. Obviamente, *coordenadas generalizadas de configuração* (\mathbf{q}_j) e de *momento* (\mathbf{p}_j) devem ser usadas, pois a superfície de vínculo é, em princípio, desconhecida.

Nada do “princípio da aceleração reversa” pode ser achado no livro e nas intenções de D’Alembert, nem é ele essencial ao método desenvolvido por Lagrange em seu livro *Mécanique Analytique*. Na verdade, esse suposto “princípio” significa o seguinte: O lado direito, $\left(\mathbf{F} - m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$, é a soma algébrica dos “movimentos” impresso ($m\mathbf{a}$) e resultante (real) ($m\mathbf{a}$); o lado esquerdo,

$\mathbf{0}$, é a resultante das forças de vínculo. Argumentei ([6], p. 79-81) que o método de Lagrange está mais próximo do método de Euler, descrito na seção 4.3 do que do de D’Alembert. Além disso, uma relação entre Estática e Dinâmica pode ser traçada, escrevendo uma expressão para a Dinâmica similar ao *Princípio do Repouso*, de Maupertuis, $\left(m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}\right) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{0}$; mas a justificativa é a “harmonia” de Euler. É difícil entender como se veio a atribuir a D’Alembert o “princípio da aceleração reversa”. Talvez isso tenha origem em uma interpretação apressada da seguinte passagem do livro de Lagrange ([10], p. 224):

Se se deseja evitar as decomposições em movimentos que esse princípio [de D’Alembert] exige, não se teria, senão, que prontamente atribuir [ao princípio de D’Alembert] o equilíbrio entre as forças e os movimentos gerados, mas tomados em sentidos contrários. Pois, se se imagina que se imprima a cada corpo, em sentido contrário, o movimento que ele deveria receber [pelas forças externas aplicadas], é claro que o sistema será reduzido ao repouso; conseqüentemente, será preciso que esses movimentos destruam aqueles que os corpos recebem e que eles tenham seguido sem sua ação mútua; assim, deveria haver, aí, equilíbrio entre todos esses movimentos ou entre as forças que os possam produzir.

6.3. Um exemplo: O pêndulo duplo

6.3.1. A solução de D’Alembert

O pêndulo simples talvez seja um dos poucos problemas (de um total de 14) resolvidos por D’Alembert em seu livro, cuja solução está rigorosamente correta.

Tabela 1 - Notação e definições (solução de D'Alembert).

Massa m_1		Massa m_2	
$l_1 = Cm_1$	comprimento do pêndulo m_1	$l_2 = m_1m_2$	comprimento do pêndulo m_2
Cm_1S	direção do pêndulo m_1	m_1m_2P	direção do pêndulo m_2
$x_1 = m_1k$	posição horizontal de m_1	$x_2 = m_2k'$	posição horizontal de m_2
θ_1	ângulo das <i>pequenas</i> oscilações de m_1 em torno de $C = \widehat{Sm_1Q}$	θ_2	ângulo das <i>pequenas</i> oscilações de m_2 em torno de $C = \widehat{Pm_2L} = \widehat{m_2m_1Q}$
		$\theta_2 - \theta_1$	ângulo do movimento relativo de $m_2 = \widehat{m_2m_1S}$
	$\sin \theta_1 = \frac{x_1}{l_1} \approx \theta_1$		$\sin \theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2} \approx \theta_2$
			$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \approx \theta_2 - \theta_1$

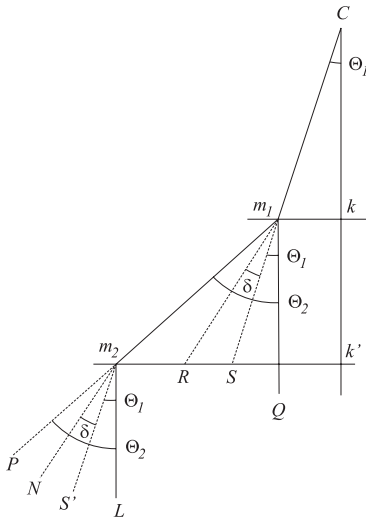


Figura 21 - **Pêndulo Duplo.** Reprodução da figura no *Traité de Mécanique*.

Massa m_1 . O pêndulo com massa m_1 tem, inicialmente, a direção m_1R . Uma rotação infinitesimal $-\delta$ o traz para m_1S .

Massa m_2 . Suponha que o pêndulo com massa m_2 tenha, inicialmente, a direção $m_2N \parallel m_1R$ (os pêndulos são supostos alinhados no começo). Então:

- O movimento comum.** A rotação de m_1 causa uma rotação de m_2 , de igual ângulo, em torno de C (a diferença nas direções dos pêndulos é devida ao movimento relativo); portanto, o movimento comum leva m_2 de $m_2N \parallel m_1R$ até $m_2S' \parallel m_1S$ ($\widehat{Nm_2L} = \widehat{Rm_1Q} = \theta_1 + \delta$), com a aceleração de m_1 .
- O movimento relativo.** A rotação de um ângulo $\theta_2 - \theta_1$, de m_2 em torno de m_1 , leva m_2S' para m_2P .

Tabela 2 - Movimento de m_1 .

Decomposição do movimento	Descrição	Massa \times Aceleração
motion real de m_1	rotação de m_1 em torno de C	$\approx m_1\ddot{x}_1$
movimento destruído de m_1	movimento radial (ao longo de m_1R)	0
forças externas	componente do peso $\perp m_1R$	$m_1g \sin(Rm_1Q) = m_1g \sin(\theta_1 + \delta)$

Tabela 3 - Movimento de m_2 .

Decomposição do movimento	Descrição	Massa \times Aceleração
movimento real de m_2	"arrastamento" de m_2 pela rotação de m_1 em torno de C	$m_2\ddot{x}_1$
movimento destruído de m_2	rotação de m_2 em torno de m_1	$m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$
forças externas	movimento radial componente do peso de $m_2 \perp m_2N$	0 $m_2g \sin(Pm_2N) \approx m_2g(\theta_2 - \theta_1 - \delta)$

Princípio de D'Alembert. É aplicado a cada massa separadamente:

massa m_1

$$m_1\ddot{x}_1 \approx m_1g \sin(\theta_1 + \delta) \approx m_1g(\theta_1 + \delta) \Rightarrow \frac{\ddot{x}_1}{g} \approx \theta_1 + \delta \Rightarrow \delta \approx \frac{\ddot{x}_1}{g} - \theta_1 \approx \frac{\ddot{x}_1}{g} - \frac{x_1}{l_1}$$

movimento relativo de m_2

$$m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \approx m_2g(\theta_2 - \theta_1 - \delta) \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \approx g(\theta_2 - \theta_1 - \delta) \approx g\left(\theta_2 - \frac{\ddot{x}_1}{g}\right) \approx g\left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{\ddot{x}_1}{g}\right)$$

Movimento "destruído". As componentes das forças ao longo de m_1R e Pm_2 não produzem movimento. A idéia é que essas forças mantêm a alavanca m_1S em equilíbrio:

$$\frac{P_{m_1} \approx m_2 g}{P_{m_2} \approx m_1 g} = \frac{\sin(Rm_1 S)}{\sin(m_2 m_1 S)},$$

com P_{m_1} = componente do peso de m_2 ao longo de $m_2 N$ e P_{m_2} = componente do peso de m_1 ao longo de $m_1 R$. Ou

$$\frac{m_2}{m_1} \approx \frac{\sin \delta}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \approx \frac{\frac{x_1}{l_1} - \frac{\dot{x}_1}{g}}{\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1}} \Rightarrow$$

equação de vínculo:

$$\frac{\ddot{x}_1}{g} = \frac{x_1}{l_1} - \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right)$$

Solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = g \frac{x_1}{l_1} - \frac{m_2}{m_1} g \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right) \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = g \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right). \end{array} \right.$$

6.3.2. Solução pelo método newtoniano hodierno

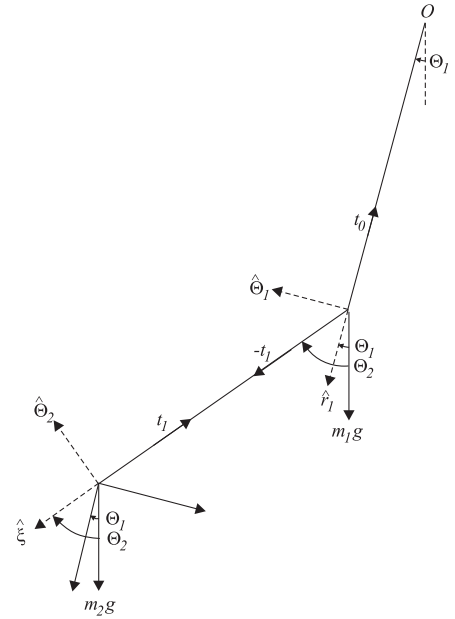


Figura 22 - Pêndulo duplo. Variáveis e notação modernas.

Tabela 4 - Notação e definições (método clássico).

Massa m_1		Massa m_2	
l_1	comprimento Om_1	l_2	comprimento m_1m_2
θ_1	ângulo de Om_1 com a vertical	θ_2	ângulo de m_1m_2 com a vertical
\mathbf{r}_1	posição de m_1 a partir do pivô; $\mathbf{r}_1 = l_1 \hat{\mathbf{r}}_1$	\mathbf{r}_2	posição de m_2 a partir do pivô; $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_2 \boldsymbol{\xi}$
$\hat{\mathbf{r}}_1$	unitário ao longo de Om_1 ; $\hat{\mathbf{r}}_1 = \sin \theta_1 \mathbf{i} + \cos \theta_1 \mathbf{j}$	$\boldsymbol{\xi}$	unitário ao longo de m_1m_2 ; $\boldsymbol{\xi} = \sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}$
$\boldsymbol{\theta}_1$	unitário perpendicular a Om_1 ; $\boldsymbol{\theta}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{i} - \sin \theta_1 \mathbf{j}$	$\boldsymbol{\theta}_2$	unitário perpendicular a m_1m_2 ; $\boldsymbol{\theta}_2 = \cos \theta_2 \mathbf{i} - \sin \theta_2 \mathbf{j}$

Tabela 5 - Cinemática.

Massa m_1		Massa m_2	
$\hat{\mathbf{r}}_1 = \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_1$		$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\theta}_2$	
$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = -\dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{r}}_1$		$\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 = -\dot{\theta}_2 \boldsymbol{\xi}$	
$\mathbf{r}_1 = l_1 \hat{\mathbf{r}}_1$		$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_2 \boldsymbol{\xi}$	
		velocidade relativa: $\mathbf{u}_{2 1} = l_2 \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\theta}_2$	
$\mathbf{v}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_1$		$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_{2 1} + \mathbf{v}_1 = l_2 \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\theta}_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_1$	
$\mathbf{a}_1 = l_1 \ddot{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \hat{\mathbf{r}}_1$		$\mathbf{a}_2 = \frac{d}{dt} (l_2 \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\theta}_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_1) =$	
		$+ \boldsymbol{\xi} [-l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]$	
		$+ \boldsymbol{\theta}_2 [l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)]$	

Tabela 6 - Movimento de m_2 .

Tipo de força	Expressão
Força externa	$m_2 g \mathbf{j} = m_2 g \cos \theta_2 \boldsymbol{\xi} - m_2 g \sin \theta_2 \boldsymbol{\theta}_2$
Vínculo	$\mathbf{t}_1 = -t_1 \boldsymbol{\xi}$
Decomposição em direções	
(direção $\boldsymbol{\theta}_2$) Equação para θ_2	$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g \sin \theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$
(direção $\boldsymbol{\xi}$) Equação para \mathbf{t}_1	$t_1 = m_2 g \cos \theta_2 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$

Tabela 7 - Movimento de m_1 .

Tipo de força	Expressão
Força externa	$m_1 g \mathbf{j} = m_1 g \cos \theta_1 \hat{\mathbf{r}}_1 - m_1 g \sin \theta_1 \boldsymbol{\theta}_1$
Vínculos	$\mathbf{t}_0 = -t_0 \hat{\mathbf{r}}_1$ $\mathbf{t}_1 = +t_1 \boldsymbol{\xi} = +t_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \hat{\mathbf{r}}_1 + t_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \boldsymbol{\theta}_1$
Decomposição em direções	Equação
Direção $\boldsymbol{\theta}_1$	$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g \sin \theta_1 + t_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
Direção $\hat{\mathbf{r}}_1$	$-m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 = m_1 g \cos \theta_1 - t_0 + t_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$

Relações úteis. Multiplique a equação de θ_2 por $\cos(\theta_2 - \theta_1)$, multiplique a equação de t_1 por $\sin(\theta_2 - \theta_1)$ e some os resultados para obter $t_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -m_2 l_1 \dot{\theta}_1 - m_2 g \sin \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Multiplique

que a equação de θ_2 por $\sin(\theta_2 - \theta_1)$, multiplique a equação de t_1 por $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ e subtraia os resultados para obter $t_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) = m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \cos \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Usando esses valores,

Tabela 8 - Movimento de m_1 .

Decomposição em direções	Equação
Equação para θ_1	$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 = -(m_1 + m_2) g \sin \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$
Equação para t_0	$t_0 = (m_1 + m_2) g \cos \theta_1 + (m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$

6.3.3. Comparação das soluções

Usando a notação

$$\sin \theta_1 = \frac{x_1}{l_1} \approx \theta_1,$$

$$\sin \theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2} \approx \theta_2,$$

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1 \approx$$

$$\theta_2 - \theta_1 \approx \frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1}, \quad e$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1 \approx$$

$$1 + \theta_2 \theta_1 \approx 1,$$

Equação em primeira ordem	Equação em primeira ordem em coordenadas cartesianas
$l_2 \ddot{\theta}_2 \approx -g \theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1$	$\ddot{x}_2 \approx -g \frac{x_2 - x_1}{l_2}$
$(m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1 \approx -(m_1 + m_2) g \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2$	$m_1 \dot{x}_1 \approx m_2 g \left(-\frac{x_1}{l_1} + \frac{x_2 - x_1}{l_1} \right) - m_1 g \frac{x_1}{l_1}$
$t_1 \approx m_2 g$	$t_1 \approx m_2 g$
$t_0 \approx (m_1 + m_2) g$	$t_0 \approx (m_1 + m_2) g$

Segue-se:

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -g \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right),$$

$$\ddot{x}_1 = -g \frac{x_1}{l_1} + \frac{m_2}{m_1} g \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right),$$

que é a solução de D'Alembert com sinal invertido.

7. Conjetura sobre a gênese do conceito de força

7.1. O caso do tempo que desapareceu

Newton formula a lei dinâmica do movimento no Livro 1 ([29], p. 416):

Uma mudança no movimento é proporcional à força motriz impressa e se dá ao longo da linha reta na qual a força é impressa.

Em notação moderna essa lei parece dizer:

$$\mathbf{F} \propto \Delta(m\mathbf{v}).$$

Não é difícil de se imaginar o quiproquó gerado pela ausência do tempo. Bernard Cohen [45] propõe que isso não foi um erro de Newton; ele argumenta que, sempre que Newton tratava uma força discreta, atuando por impulsos de duração muito pequena, como o "soco", na Fig. 11, ele omitia o tempo e que, no caso de forças contínuas, o tempo era incluído. De fato, nas proposições 39, 40 e 41, Newton deixa claro que sabe da presença do tempo.

7.2. A inspiração de Newton: A teoria de Isaac Bernard Cohen

Isaac Bernard Cohen [42, 30] propõe que Newton aprendeu a tratar órbitas curvas com Hooke¹¹.

¹¹Posteriormente, Cohen enfraquece essa tese; mas eu vou argumentar que a tese deveria ser, até, mais forte, como será visto.

De fato, não há como esconder, nas proposições 1 e 11, a aplicação do método de Hooke. Esse método consiste em decompor “movimento” de acordo com o paralelogramo $ABCV$ da Fig. 11:

1. Movimento tangencial (inercial): $\mathbf{AB} = m\mathbf{v}_1$.
2. Variação desse movimento apontando para um centro de atração (“soco”): $\mathbf{BV} = \Delta(m\mathbf{v})$.
3. Movimento resultante: $\mathbf{BC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BV}$.

São características inerentes ao diagrama:

1. Sem o “soco”, o movimento prossegue pela tangente à curva.
2. O “soco” desvia o corpo de seu movimento inercial.

7.3. A construção do conceito de “força” no “Principia” (minha interpretação)

7.3.1. A função da “força”

O método de Hooke consiste em calcular a trajetória por dois deslocamentos: Uma “queda” ($\Delta\xi$) da tangente à curva, ao longo do raio vetor, e um deslocamento tangente à curva. Ora, o objetivo de uma seqüência de proposições — Lema 11 e seus corolários; Corolários 3 e 4 da Proposição 1; Proposição 6 ou seu equivalente Lema 10 e seu Corolário 4; Corolário 1 da Proposição 6 — é calcular a “queda”: “queda” = $\Delta\xi = \frac{1}{2}\mathcal{G}(\Delta t)^2$ ¹². Juntas, essas proposições constroem o conceito de *força* como uma “gravidade genérica”: *força* $\propto \mathcal{G}$; portanto, *força* é a causa da “queda” da massa, da tangente até a curva. Newton constrói, pois, a *força* pela **função** (“gravitacional”) que ela exerce; *força* não é definida por sua expressão analítica, por exemplo, $\propto \frac{1}{r^2}$ ¹³. Se existe alguma ontologia de *força*, essa é a mesma de um “peso”¹⁴.

Como já mostrado neste artigo, o uso do *Teorema de Galileu* não é novidade¹⁵. No *Principia*, porém, Newton acrescenta três novidades revolucionárias:

1. O entendimento de que *força* causa uma “queda” e não um “afastamento” da tangente à curva¹⁶.
2. O uso da *Lei das Áreas* para **calcular o tempo** transcorrido (isso restringe o método de cálculo da *força* ao movimento sob força central).
3. O *Lema 10*: Todo movimento, qualquer que seja, é, em cada instante tomado isoladamente, uniformemente diforme¹⁷. Esse Lema é **geométrico** e não depende da interpretação que se dê às ordenadas e abscissas. O Cálculo que Newton estava inventando tem, aqui, papel importante¹⁸.

7.3.2. O próprio Newton acha o tempo que havia sumido

Newton não parte da definição direta de *força*, $\mathbf{F} = \Delta(m\mathbf{v})$, para resolver os problemas Direto e Inverso; a expressão da *força* é dada pelo *Teorema de Galileu*. No entanto, é claro que $F \propto \mathcal{G}$ pressupõe a presença do tempo, na definição da aceleração. Mas, então, por que Newton teria se “esquecido” do tempo, no enunciado de sua famosa “segunda lei”?

A ausência do tempo na definição de *força* traz a suspeita de que esse conceito possa ter nascido do método de Hooke: No método de Hooke, o “soco” \mathbf{BV} , que desvia o corpo de sua trajetória inercial, é uma representação geométrica da *força*; porém, esse “soco” é instantâneo e envolve uma divisão por “zero”, o que o torna impossível de ser expresso analiticamente, a menos que Newton use limite ($\mathbf{F} = \lim \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$), o que, aliás, ele faz, segundo Cohen (mas não com essa notação). A tese de Cohen, segundo a qual Newton introduz o tempo, quando a *força* age continuamente, e minha tese são complementares e se fortalecem reciprocamente.

Finalmente, a caracterização da *força* como (proporcional à) aceleração de “queda” precisa de uma expressão para o *tempo*, a qual é dada pela *Lei das Áreas*, uma lei indubitavelmente demonstrada usando o método de Hooke.

¹²De modo geral, a componente centrípeta (normal) da *força* é a “queda” de um ponto da tangente, infinitamente próximo do ponto de tangência, até a curva, pela reta que liga o ponto de tangência ao centro do círculo osculador. Na aplicação na Proposição 6, essa queda se dá através do raio vetor, pois é a *força* total, que é central. É claro, como já explicado em nota-de-pé-de-página, que a *força* centrípeta é a componente normal da *força* central.

¹³Pode-se argumentar que Newton, na Proposição 41, assume uma expressão abstrata de *força* para achar a órbita e que, portanto, Newton assume a possibilidade de uma definição analítica de *força*; entretanto, a Proposição 41 resulta da Proposição 40, a qual, por sua vez, deriva da Proposição 39, que deriva do *Teorema de Galileu*.

¹⁴*Força* nada mais é que a *força morta*, de Leibniz, a *força* que mantém em equilíbrio os braços de uma balança e que age na massa, no instante (e somente nesse instante) em que equilíbrio cessa [3].

¹⁵Huygens já o usara para calcular a *tendência centrífuga* bem como o tratamento que Newton deu ao movimento circular em 1669 invoca o teorema. Quase um século após o livro de Newton, Euler ainda se inspira no *Teorema de Galileu*, mas com as devidas correções pós *Principia*.

¹⁶Grandes estudiosos e conhecedores de Newton, como Isaac Cohen [29, 42, 30] e Derek Whiteside [46] são unânimes em afirmar que, anteriormente ao *Principia*, Newton sempre usava a expressão *conatus recedendi à centro* e nunca *força centrípeta* ou *central*.

¹⁷Como já mostrei, Euler usou isso para colocar em “harmonia” os dois princípios de Maupertuis, bem como para fundamentar seu “novo princípio da Dinâmica”.

¹⁸Poder-se-ia querer dizer que o entendimento de que a aceleração é instantaneamente uniforme em todo movimento estava tácito no cálculo da *tendência centrífuga* feito por Huygens. Mas, no *Principia*, isso é fundamental no cálculo.

7.4. A conjectura

Richard Westfall [47] propõe que o conceito de *força* é uma conseqüência direta da *Lei da Inércia*. Mas, como comentado acima, é difícil que Newton não usasse, inicialmente, a lei no “sentido contrapositivo”. Assim, possivelmente, a leitura correta da *Lei da Inércia* vem em seqüência ao conceito de *força*.

Ole Knudsen [48] apresenta uma teoria mais consistente: A medida de força centrípeta pelo desvio da tangente origina-se no cálculo de 1669, aqui mostrado, e esse, do tratamento de Descartes do movimento circular; eu não poderia discordar. Entretanto, Knudsen não toca no assunto do *quando* e do *porquê* Newton trocou o *conatus* pela *força centrípeta*.

Minha interpretação do significado da *força* é a base conceitual da seguinte conjectura: **A formação do conceito de força foi congênita ao entendimento do método de Hooke por Newton. Esse conceito é uma generalização do “soco” BV , suportada no Teorema de Galileu.** Minha crença é que Newton tinha categorias matemáticas suficientemente sólidas para que pudesse colocar o “Livro da Natureza” na linguagem da Matemática. O que lhe faltava — e que lhe foi suprido por Hooke — foi a boa Física: **O método de Hooke mostrou como associar grandezas físicas a grandezas geométricas.**

Para provar minha tese, teria de estabelecer que, antes da correspondência com Hooke, Newton não poderia ter resolvido o problema de descobrir a órbita de uma massa sob uma força qualquer (ou sob uma força central, que foi a que ele estudou), por não possuir ferramentas conceituais necessárias, a saber, a interpretação física de termos geométricos. Para isso, ter-se-ia de perscrutar os escritos de Newton, o que é difícil de se fazer, em uma obra tão vasta, tão difícil de se lida (como ilustrado pelos teoremas apresentados neste artigo) e tão composta de rascunhos não publicados, apesar do muito que já foi feito, em tornar esses escritos acessíveis [29, 49, 50, 51]. Entretanto, tal tarefa hercúlea pode ser mitigada, pois é suficiente exibir uma única instância que tivesse ocorrido imediatamente antes e/ou durante a correspondência com Hooke, em que Newton tivesse composto “movimentos” de modo errado ou usando *forças centrífugas*. É possível que duas instâncias existam, a saber, duas órbitas traçadas por Newton, em correspondência com Hooke, uma em 28 de Novembro de 1679 e a outra, em 13 de Dezembro de 1679.

Newton apresenta um problema a Hooke. O problema pode ser parafraseado: Achar a trajetória de um corpo deixado cair do alto de uma torre, o qual — supondo que a Terra fosse permeável — continuaria a cair atraído pelo centro da Terra com uma força central constante; em termos modernos, trata-se do problema de

achar o movimento de uma massa sujeita a uma força central $\mathbf{F} = mgr$ ¹⁹.

A primeira solução achada por Newton (carta de 28/11/1679) é uma solução que já havia sido desacreditada, inclusive por Borelli, um autor respeitado por Newton [52]. Essa solução está errada e, se Newton se tivesse limitado a ela, é possível que ninguém contestasse a importância do método de Hooke, na formação das categorias conceituais usadas no *Principia*. Mas a situação não é tão simples. Em 13 de Dezembro de 1679, Newton propõe outra solução — e essa solução, se não está inteiramente correta, tem a forma, em aparência, da solução correta, o que fez Michael Nauenberg [53] e, depois, junto com Bruce Brackenridge [54], levantar a hipótese de que Newton já sabia desenhar órbitas de problemas dinâmicos, desde a década de 1660.

Apêndice: O problema proposto por Newton

A correspondência entre Hooke e Newton

Na breve correspondência trocada entre Newton e Hooke, no final de 1679, já mencionada neste artigo, Newton propôs a Hooke um problema que tem impacto historiográfico, além de ser um interessante problema de Física. A motivação de Hooke para escrever a Newton, bem como o conteúdo das cartas, tudo isso é muito conhecido [29, 30, 43, 46, 55, 56, 57, 58].

Newton, em 28 de novembro de 1679

Newton enuncia o seguinte problema ([50], p. 300-301):

[...] eu lhe comunicarei uma fantasia minha acerca da descoberta do movimento diurno da [T]erra. Para isso, considerarei somente o movimento diurno, sem o anual, esse tendo pouca influência no experimento que proporei aqui. Suponha, então, que BDG represente o globo da [T]erra, em rotação uma vez ao dia, em torno do seu centro, C , de oeste para leste, de acordo com a ordem das letras BDG ; & seja A um corpo pesado suspenso no ar & movendo em rotação junto com a Terra, de modo a, perpetualmente, ficar suspenso sobre o mesmo ponto, aqui, B . Então, imagine que esse corpo seja largado & sua gravidade lhe dará um novo movimento para o centro da Terra sem diminuir o velho [movimento] de oeste para leste. Por isso, o movimento desse corpo, de oeste para leste — porque, antes de cair, ele estava mais distante do centro da [T]erra do que as partes da [T]erra onde ele chega em sua queda —

¹⁹As equações, em coordenadas polares, são: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g$; $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l^2}{r^2}$. A solução pode ser achada em [49] (v. VI, p. 150, n. 127) e em [58].

será maior do que o movimento de oeste para leste das partes da [T]erra onde ele chega em sua queda: &, por isso, ele não cairá [ao longo da] perpendicular AC , mas, ultrapassando as partes da [T]erra, será lançado para a frente, para o leste da perpendicular, descrevendo, em sua queda, uma linha espiral, $ADEC$, inteiramente contrário à opinião dos vulgares, que pensam que, se a [T]erra movesse, corpos pesados, ao cair, seriam ultrapassados [pelas partes da Terra onde ele chega em sua queda] & cai no lado oeste da perpendicular. O avanço do corpo para o leste da perpendicular $[AB]$ será muito pequeno, em uma queda de 20 ou 30 jardas, no entanto estou apto que pode ser suficiente para ser determinado como matéria de fato.

O problema é aristotélico em sua origem conceitual [55]: É o problema da possibilidade ou não de se atribuir uma rotação diurna à Terra. Se a Terra se movesse de oeste para leste, um corpo abandonado do alto de uma torre, na direção oeste, jamais poderia cair ao pé da torre, pois, enquanto o corpo cai, a Terra teria se movido para oeste, afastando-se do local onde, inicialmente, estaria a base da torre. Galileu respondeu ao desafio aristotélico, arguindo que o corpo possui, juntamente com a Terra, uma velocidade de rotação, além de uma velocidade para baixo, de modo que cai ao pé da torre²⁰. Trata-se, então de saber o que aconteceria com o corpo, se ele pudesse continuar a cair para dentro da Terra, isto é, se a Terra fosse permeável; em outros termos, é o problema de uma massa que se move sob ação da força central constante. Inicialmente, o problema não foi inventado por Newton. Trata-se de um problema clássico, discutido por muitos pensadores, ao longo de uma centena de anos ou mais, entre os quais Galileu, Kepler, Pierre Mersenne, Fermat, Broullaud, Giambattista Riccioli, Stefano degli Angeli, Giovanni Alfonso Borelli, James Gregory, etc. [52]. Uma grande dificuldade — a pior delas sendo a falta de uma Dinâmica — com que se depararam esses autores, na solução, foi o uso da *Lei da Inércia*; Galileu, Borelli e outros admitiam uma “inércia circular” [55], isto é, eles consideram o movimento de rotação uniforme, em torno do eixo da Terra, como um movimento inercial, que se preserva.

A curva espiralada: Newton, em 28 de novembro de 1679

A primeira solução dada por Newton é a da Fig. 23. Claramente, ela não pode ter resultado de um método correto de traçar órbitas em um problema físico, caso contrário nunca teria sido achada, por ser uma solução

errada, do problema. Ela parece ser uma sugestão, baseada em algum raciocínio *a-priori*.

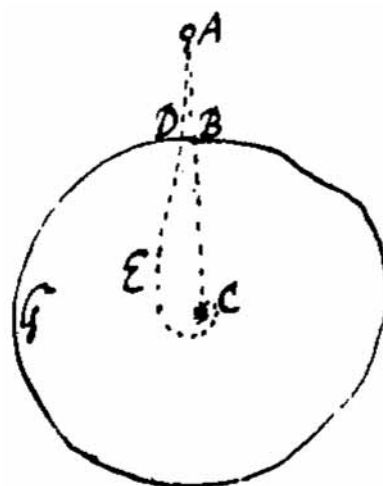


Figura 23 - A curva é a original, traçada pela mão de Newton. Foi reproduzida de [13].

Uma tese mantida por historiadores importantes [29, 46, 45] é que, nessa época, Newton conhecia a “mecânica celeste” (se se pode usar tal termo) de Borelli e teria sido por ela influenciado. De fato, Newton cita Borelli, em uma carta a Edmund Halley, datada de 27 de Maio de 1686 ([50], v. II, p. 438):

Borelli fez alguma coisa [sobre a mecânica celeste] e ele a descreve com modéstia. Ele [Hooke] nada fez sobre isso e, no entanto, ele escreve como se o tivesse sabido e tivesse indicado suficientemente tudo que fosse necessário, salvo o que resta-se a descobrir pela penosa tarefa de cálculos e observações, tarefa que ele pretende não ter realizado por causa de suas outras ocupações, embora ele devesse ter invocado sua incapacidade.

A teoria de Borelli

Uma análise da teoria planetária de Borelli foi feita por Alexandre Koyré [56]. Borelli faz analogia com um corpo flutuando em um fluido sob a ação do *peso* e do *empuxo*; analogamente, o satélite “flutua” na matéria estelar, sob a ação de dois movimentos:

1. Um movimento devido à *tendência centrífuga*. Origina-se no movimento de rotação anual do planeta. Ao girar, o planeta maior (ou o Sol) arrasta o satélite, como se o raio vetor do planeta ao satélite fosse uma barra concreta.
2. Um movimento em direção, seja, ao Sol ou a um planeta²¹.

²⁰Como a velocidade (linear) no alto da torre e a velocidade na superfície da Terra diferem (pois $v \propto r$, para mesma velocidade angular), o problema foi ressuscitado como um meio de saber se a Terra se move, pelo desvio do corpo ao pé da torre.

²¹Para fugir da discussão *sistema geocêntrico vs. heliocêntrico*, Borelli atém-se aos sistemas Terra e Lua ou Júpiter e suas luas [56].

Assim, considere, na figura abaixo, o cilindro de madeira AB sobre a superfície CD da água (*apud* [56], p. 498):

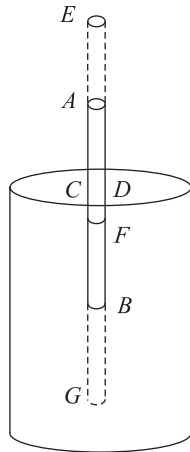


Figura 24 - **Dinâmica celeste de Borelli.** O cilindro flutua, se empuxo e peso forem iguais, mas emerge ou submerge, se forem diferentes.

[...] quando [o cilindro] for mantido em equilíbrio pela água, [seja] a parte CB imersa e a parte AD [seja] emersa acima do nível [da água] e que, nessa posição, o cilindro permaneça imóvel. Dito isso, [suponha] que o cilindro AB seja elevado e transferido ao lugar EF , de tal modo que a parte emergente seja ED ; é claro que o dito cilindro elevado a um tal lugar não permanecerá aí, mas, descendo, imergirá na água; [...] segue-se que, quando o dito cilindro chega ao lugar AB , ele não permanecerá imóvel, mas será arrastado para baixo pelos graus de velocidade adquiridos na descida precedente e, por assim dizer, será conduzido justamente ao ponto G ; e como o peso da água [deslocada] resiste a uma tal descida em uma proporção cada vez maior e arrasta no sentido contrário, isto é, empurra a madeira para cima, resulta que os graus de velocidade adquiridos pelo móvel, em sua descida precedente, são sucessivamente consumidos, até que, quando eles são totalmente consumidos, a força com que a água ambiente empurra começa a agir, isto é, a rebater o cilindro para o alto [...]. [...]; quando ele chega a AB , graça aos graus de velocidade já adquiridos, ele não pára aí, mas subirá mais alto [...].

Entretanto, é preciso notar que, se se puder suprimir os impedimentos e as causas acidentais, que continuamente amenizam e enfraquecem as oscilações de subida e descida acima mencionadas, [...] é fora de dúvida que as oscilações não somente perduram muito tempo, mas seriam mesmo perpétuas.

Nessa teoria, o movimento de “subida” e “descida” pela ação conjunta da *força centrífuga* e da atração descreve a trajetória elíptica do planeta. É preciso ressaltar que Borelli não considerava uma força de atração

para um centro, na forma de uma “gravitação universal”. A origem dessa atração é peculiar, como se vê pela análise que se segue (*apud* [56], p. 492-493):

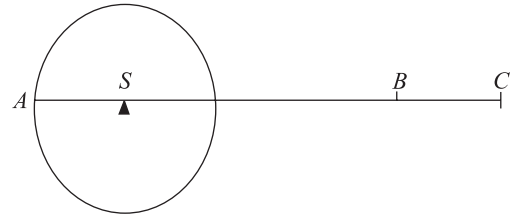


Figura 25 - **A “Atração Celeste”, de Borelli.** A *Lei da Alavanca* é a base da teoria de Borelli.

Seja $ASBC$ uma barra pivotada em S (Fig. 25). Pelo *Princípio da Alavanca* e pelo *Princípio da Velocidade Virtual*, se um corpo for colocado em B e a barra $ASBC$ ficar em equilíbrio, $\frac{P_A}{R_B} = \frac{BS}{AS} = \frac{v_B}{v_A}$; se equilíbrio acontecer em C , então $\frac{P_A}{R_C} = \frac{CS}{AS} = \frac{v_C}{v_A}$, onde P designa “potência” e os R 's designam “resistência”; no equilíbrio da barra, os pesos em B e C são diferentes, de modo que $\frac{R_B}{R_C} = \frac{CS}{BS} = \frac{v_C}{v_B}$. Borelli supõe, agora, um mesmo corpo colocado ora em B , ora em C ; nesse caso, equilíbrio é rompido; ele introduz um novo princípio, a saber, que a resistência em C é maior que a resistência em B ou $R'_C > R'_B$, portanto, $\frac{R'_B}{R'_C} < 1 < \frac{CS}{BS} = \frac{v_C}{v_B}$, logo $v_B < v_C$. Ora, se S é o centro do Sol ou de Júpiter e AS , seu raio, então as velocidades dos planetas ou dos satélites de Júpiter crescem com a distância a S .

A elipse: Hooke, em 9 de dezembro de 1679

Hooke contesta a espiral ([50], p. 305):

[...] minha teoria do movimento circular faz-me supor que [a curva] seria muito diferente e nada parecida com uma espiral, mas uma espécie de elipsóide.

Obviamente, não deve ter sido difícil para Hooke adivinhar a solução; mesmo na ausência do conceito de uma *gravitação universal*, Hooke pode ter pensado em termos do movimento dos planetas. E o fez, como explica na carta de 6 de Janeiro de 1680 ([50], p. 309):

Seu cálculo da curva [descrita] por um corpo atraído por um poder igual em todas as distâncias do centro, tal como a de uma bola rolando em um cone côncavo, está correta e os dois auges não se unirão antes de um terço de sua revolução. Mas minha suposição é que a atração sempre está na razão dupla da distância ao centro, reciprocamente [isto é, $\propto \frac{1}{r^2}$], e, conseqüentemente, que a velocidade está em uma proporção sub-dupla à a tração e, conseqüentemente, como Kepler supõe, recíproca à distância. E que com tal atração os auges se unirão na mesma parte do círculo e que o ponto de acesso mais próximo ao centro será oposto

ao mais distante. O que eu concebo muito inteligível e verdadeiramente formar a aparência dos céus.

A curva Misteriosa: Newton em 13 de dezembro de 1679

Newton começa sua carta reconhecendo o erro de sua solução e acrescenta uma frase obscura, que intriga historiadores ([50], p. 307):

[...] se a gravidade for suposta uniforme, [o corpo] não descerá em uma espiral ao próprio centro, mas circulará com subidas e descidas alternadas, feitas por sua *vis centrifuga* e gravidade alternadamente superando uma à outra.

Propõe, então, uma segunda solução ([50], p. 308):

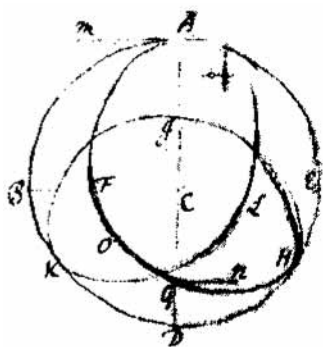


Figura 26 - A curva é a original, traçada pela mão de Newton. Foi reproduzida de [13].

Ele termina a carta com uma passagem que soa como ironia ([50], p. 308):

Sua carta perspicaz tendo-me levado a considerar, até aqui, o tipo dessa curva, posso adicionar algo a respeito de sua [da curva] descrição por pontos *quam proximè*. Mas a questão sendo de grande momento, prefiro pedir perdão por tê-lo incomodado tanto com esse segundo rascunho, no qual, se o senhor achar algo inepto ou errado, [...].

Newton não explica o que ele entende por “descrição por pontos *quam proximè*”. O máximo de explicação que dá é ([50], p. 308):

Os inúmeros & infinitamente pequenos movimentos (pois eu, aqui, considero movimento de acordo com o método dos indivisíveis) continuamente gerados pela gravidade em sua [do corpo] passagem de A a F inclinam [o corpo] a afastar-se de GN em direção a C. Mas esses movimentos são proporcionais ao tempo em que são gerados & o tempo para passar de A a F (por razão da jornada mais comprida & do movimento mais lento) é maior do que o tempo para passar de F a G. E, portanto, os movimentos gerados em AF deverão exceder os gerados em FG &, assim, fazer o corpo desviar-se de

G para costear entre N & D. A maior aproximação do corpo para o centro não é em G, mas em algum lugar entre G & F, como em O.

Problemas historiográficos gerados pela curva

O problema da força centrífuga. O texto de Newton parece indicar que *gravidade* e *força centrífuga* atuam simultaneamente no corpo e se somam; historiadores importantes acreditam que Newton está invocando a Teoria de Borelli.

O problema do pericentro. Um ponto de discussão é a posição do pericentro (O) e do apocentro (H). O valor correto, obtido analiticamente, é ([49], v. VI, p. 150, n. 127): $0 < \widehat{ACO} < \frac{180^\circ}{\sqrt{3}} \approx 103,9^\circ$. Medindo com transferidor, no desenho de Newton, achei $\widehat{ACO} \approx 130^\circ$, $\widehat{OCH} \approx 107^\circ$. Na revisão do *De Motu*, o “rascunho” que antecedeu ao *Principia*, Newton estima $\widehat{ACO} \approx 110^\circ$, $\widehat{OCH} = \widehat{ACO}$ ([49], v. , p. 149-150). No *Principia*, Newton apresenta um método para achar o apocentro e o pericentro, o qual foi reproduzido neste artigo ([29], p. 540).

Jean Pelseener ([57], p. 252) conclui, então, que, apesar de Newton ter um bom entendimento de movimentos centrais, ele não traçou a curva, baseado em valores obtidos por métodos analíticos de solução do problema. Contrariamente, Johs. Lohne [58] propõe que Newton obteve a órbita por meios analíticos. Nauenberg [53] e Brackenridge [54] propõem que, desde a década de 1660, Newton já possuía um processo de traçar trajetórias, mas seus argumentos parecem não ser suportados por evidências historiográficas. Herman Erlichson [59] desenhou a órbita pelo método de Hooke e obteve algo parecido com a figura de Newton.

Agradecimento

Desde que terminei a versão apresentada à Revista Brasileira de Ensino de Física, venho-me dedicando ao estudo do problema de Newton. Não poderia fazê-lo, sem a ajuda de minha colega, Professora Teresinha J. Stuchi, a quem devo o entendimento de sutilezas do problema, as quais eu desconhecia.

Referências

- [1] C.A. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1968).
- [2] J.L. Heilbron, *Elements of Early Modern Physics* (University of California Press, Berkeley, 1982).
- [3] P.M. Cardoso Dias, submetido para publicação.
- [4] L. Euler, in *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 4, 1748, 189-218, “Reflexions sur Quelques Loix Generales de la Nature qui s’Observent dans les Effets des Forces Quelconques”. Republicado in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie secunda, 30 v, edi-

- tado por J.O. Fleckenstein, “Commentationes Mechanicæ,” v. V, 1957, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticæ, 1912-1964, p. 38-63.
- [5] L. Euler, in *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **7**, 1751, 169-198, “Harmonie entre les Principes Generaux de Repos et de Mouvement de M. de Maupertuis”. Republicado in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie secunda, 30 v, editado por J.O. Fleckenstein, “Commentationes Mechanicæ”, v. V, 1957, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticæ, 1912-1964, p. 152-198.
- [6] P.M. Cardoso Dias, *Archive for History of Exact Sciences* **54**, 67 (1999).
- [7] L. Euler, in *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin [3]*, 83-143, 1747, “Recherches sur le Mouvement des Corps Célestes en Général”. Republicado in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie secunda, 30 v, editado por M. Schürer, “Commentationes Astronomicæ”, v. XXV, 1960, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticæ, 1912-1964, p. 1-44.
- [8] L. Euler, in *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1750, 185-217, “Decouverte d'un Nouveau Principe de Mécanique”. Republicado in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, serie secunda, 30 v, editado por J.O. Fleckenstein, “Commentationes Mechanicæ”, v. V, 1957, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticæ, 1912-1964, p. 81-108.
- [9] J. D'Alembert, *Traité de Mécanique* (Chez Fuchs, 1744; segunda edição, 1796).
- [10] J.-L. Lagrange, *Mécanique Analytique* (Mallet-Bachelier, 1788).
- [11] Penha Maria C. Dias, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **23**, 226 (2001).
- [12] Murilo de Freitas Magalhães, Wilma Machado Soares Santos, e Penha Maria C. Dias, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **24**, 489 (2002).
- [13] Penha Maria C. Dias, Wilma M.S. Santos e Mariana Thomé Marques de Souza, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26**, 257 (2004).
- [14] Wilma M. Soares Santos e Penha Maria C. Dias, **O Passado, o Presente e o Cotidiano: Uma Tentativa de Ensinar Física**, com Wilma Machado Soares Santos, in: Nilson, M.D. (organizador) *Atas do XV Simpósio Nacional de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, CD-ROM, 2003, p. 1605-1613.
- [15] M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (The University of Wisconsin Press, Madison, 1959).
- [16] E.J. Dijksterhuis, *The Mechanization of the World Picture (Pythagoras to Newton)*, 1950; traduzido para o Inglês por C. Dikshoorn, Oxford University Press, 1961, Princeton University Press, 1969, 1986.
- [17] Galileo Galilei, (1638) *Dialogues Concerning the Two New Sciences*, in: *Great Books of the Western World*, 54 v., Encyclopædia Britannica, v. 28.
- [18] G.W. Leibniz, “Specimen Dynamicum”, Part I, *Acta Eruditorum*, 1695. Traduzido para o Inglês, por Loemker, L.E. (ed), “Gottfried Wilhelm Leibniz (Philosophical Papers and Letters)”, in: *The New Synthese Historical Library*, v. 2, Kluwer Academic Publishers, 1969, 1989, p. 435-444; inicialmente publicado por Chicago University Press, 1956. Traduzido para o Espanhol in: Cañedo-Argüelles (ed), *Escritos de Dinámica (Gottfried Wilhelm Leibniz)*, Tecnos, 1991, p. 55-80.
- [19] G.W. Leibniz, “Specimen Dynamicum”, Part II, 1695. Primeiramente publicado em 1860 por C. I. Gerhardt (ed). Traduzido em Inglês por Loemker, L.E. (ed), “Gottfried Wilhelm Leibniz (Philosophical Papers and Letters)”, in: *The New Synthese Historical Library*, v. 2, Kluwer Academic Publishers, 1969, 1989, p. 444-452; inicialmente publicado por Chicago University Press, 1956. Traduzido para o Espanhol in: Cañedo-Argüelles (ed), *Escritos de Dinámica (Gottfried Wilhelm Leibniz)*, Tecnos, 1991, p. 81-98.
- [20] G.W. Leibniz, “De Ipsa Natura, Sive De Vi Insita, Actionibusque Creaturarum; pro Dynamicis suis confirmandis illustrandisque”, *Acta Eruditorum*, 1698. Traduzido em Inglês por Loemker, L. E. (ed), “Gottfried Wilhelm Leibniz (Philosophical Papers and Letters)”, in: *The New Synthese Historical Library*, v. 2, Kluwer Academic Publishers, 1969, 1989, p. 498-508; inicialmente publicado por Chicago University Press, 1956. Traduzido para o Inglês, também, por P. e A.M. Schrecker, *Leibniz (Monadology and Other Philosophical Essays)*, Macmillan, 1965, p. 95-113.
- [21] Johann (John) Bernoulli, “Discours sur les Loix de la Communication du Mouvement”, 1727. Republicado in: Bousquet (ed) *Opera Omnia*, 4 v.; v. 3, n. 135, 1742, p. 1-107.
- [22] R. Descartes, *Principes de la Philosophie*, 1644, in: C. Adam, and P. Tannery, (1897-1913) (eds) *Œuvres de Descartes*, 12 vols., J. Vrin/CNRS, edição revista, 1964-1976, v.IX-2, 1971. Publicado em Francês, em 1647.
- [23] R. Descartes, *Le Monde*, 1664, in: C. Adam and P. Tannery, (1897-1913) (eds) *Œuvres de Descartes*, 12 vols., J. Vrin/CNRS, edição revista, 1964-1976, v. IX, 1986.
- [24] P.M. Cardoso Dias, *Revista Perspicillum* **6**, 9 (1992).
- [25] I. Newton, “Dynamical Writings in the Waste Book”, in: Herivel, John *The Background to Newton's Principia*, Clarendon Press, 1965, p. 128-182.
- [26] C. Huygens, “De Vi Centrifuga”, 1703; traduzido para o Francês, in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Société Hollandaise des Sciences, 22 v., 1888-1950, v. XVI, 1929, p. 255-301.
- [27] C. Huygens, “Horologium Oscillatorium”; traduzido para o Francês, in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Société Hollandaise des Sciences, 22 v., 1888-1950, v. XVI, 1929.
- [28] J. Yoder, *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge University Press, 1988, 1990, 2004.
- [29] I. Newton, *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*, in: Cohen, Isaac Bernard e Whitman, Anne (editores) *The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophie). A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman assisted by Julia Budenz.*

- Preceded by A Guide to Newton's Principia*, University of California Press, 1999.
- [30] I. Bernard Cohen, *Scientific American* **244**, 166 (1981).
- [31] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [32] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1950, 1964.
- [33] T.L. Hankins, *Science and the Enlightenment*, Cambridge University Press, 1985.
- [34] G.W. Leibniz, (1686) "Brevis Demonstratio Erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa Legem naturalem", *Acta Eruditorum*, Março, p. 161-163. Traduzido para o Inglês por Loemker, L.E. (ed) "Gottfried Wilhelm Leibniz (Philosophical Papers and Letters)", *The New Synthese Historical Library*, v. 2, Kluwer Academic Publishers, 1969, 1989 (primeiramente publicado por Chicago University Press, 1956), p. 296-302. Traduzido para o Espanhol in: Cañedo-Argüelles, J.A. (ed) *Escritos de Dinámica (Gottfried Wilhelm Leibniz)*, Tecnos, 1991, p. 3-8.
- [35] Leibniz, G.W. (1692) *Essay de Dynamique*. Publicado pela primeira vez em 1860 in: P. Costabel, (ed.), *Leibniz and Dynamics*, Hermann; Methuen; Cornell University, 1960, 1973.
- [36] D. Garber, (1985) "Leibniz and the Foundations of Physics: The Middle Years", in: K. Okruhlik e J.R. Brown, (eds) *The Natural Philosophy of Leibniz*, D. Reidel Publishing Company, 1985, p. 27-130.
- [37] M. Jammer, *Concepts of Force (A Study in the Foundations of Dynamics)*, Harvard University Press, 1957.
- [38] B. Russell, *The Philosophy of Leibniz*, 1900. Republicado por Routledge, 1992.
- [39] A. Franklin, "Principle of Inertia in the Middle Ages", *American Journal of Physics*, **44**, 529 (1976).
- [40] George E. Smith, "The methodology of the *Principia*", in: Cohen, I. Bernard e Smith, George E. (editores) *The Cambridge Companion to Newton*, Cambridge University Press, 2002, p. 138-173.
- [41] I. Newton, "On Circular Motion", in: Herivel, John *The Background to Newton's Principia*, Clarendon Press, 1965, p. 192-982.
- [42] I. Bernard Cohen, *The Newtonian Revolution (with illustrations of the transformation of scientific ideas)*, Cambridge University Press, 1980.
- [43] I. Bernard Cohen, "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion", in: I. Bernard Cohen and George E. Smith, (eds.) *The Cambridge Companion to Newton*, Cambridge University Press, 2002, p. 57-84.
- [44] D.T. Whiteside, *Notes and Records of the Royal Society London* **45**, 11 (1991).
- [45] I. Bernard Cohen, "Newton's Second Law and the Concept of Force in the *Principia*", in: R. Pelter, (ed.) *The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton (1666-1966)*, The M.I.T. Press, 1970, p. 143-185.
- [46] D.T. Whiteside, *The British Journal for the History of Science* **2**, 117 (1964).
- [47] R.S. Westfall, *Force in Newton's Physics (The Science of Dynamics in the Seventeenth Century)*, Macdonald, American Elsevier, 1971.
- [48] O. Knudsen, *Centaurus* **9**, 266 (1963-1964).
- [49] D.T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton (1664-1666)*, Cambridge University Press, 1967, vols.
- [50] H.W. Turnbull, *The Correspondence of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1960, vols.
- [51] Rupert A. Hall and Marie Boas Hall, *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton (A Selection from the Portsmouth Collection in the University Library, Cambridge)*, Cambridge University Press, 1962.
- [52] A. Koyré, *Chute des Corps et Mouvement de la Terre de Kepler a Newton (Histoire et Documents d'un Problème)*, Vrin, Paris, 1973.
- [53] M. Nauenberg, *Archive for History of Exact Sciences* **46**, 221 (1994).
- [54] J.B. Brackenridge and M. Nauenberg, "Curvature in Newton's Dynamics", in: I. Bernard Cohen and George E. Smith (eds.) *The Cambridge Companion to Newton*, Cambridge University Press, 2002, p. 85-137.
- [55] A. Koyré, "Une Lettre Inédite de Robert Hooke à Isaac Newton", in: *Études Newtoniennes*, Gallimard, 1968.
- [56] A. Koyré, *La Révolution Astronomique*, Hermann, 1961.
- [57] Pelseneer, *ISIS* **12**, 237 (1929).
- [58] J. Lohne, *Centaurus* **7**, 6 (1960).
- [59] H. Erlichson, *American Journal of Physics* **59**, 728 (1990).