**Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa**

# APRENDENDO E ENSINANDO GEOMETRIA COM A DEMONSTRAÇÃO: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

**Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC-SP**

**1998**

**Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa**

# APRENDENDO E ENSINANDO GEOMETRIA COM A DEMONSTRAÇÃO: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

**Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud**

**PUC-SP**

**1998**

**BANCA EXAMINADORA**

## *AGRADECIMENTOS*

A DEUS, por todos os momentos de minha vida.

Ao Dr. Saddo Ag Almouloud, educador matemático, vindo de Mali, África, para construir conosco o conhecimento e ser-nos exemplo de orientador que, com altruísmo, esperou o melhor desta sua orientanda.

Aos professores doutores Maria Cristina Souza de A. Maranhão, Paulo Figueiredo Lima, Tânia Maria Mendonça Campos e Marta Souza Dantas, por anuírem a compor a Banca Examinadora de nosso trabalho e por terem feito valiosas sugestões.

À amiga professora doutora Sônia Barbosa Camargo Igliori, por ter-me dado oportunidade de crescer culturalmente.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, por me possibilitar mais conhecimentos.

À professora doutora Célia Maria Carolino Pires, pela atenção recebida.

A todos os colegas e amigos do curso de Mestrado, em especial, Maria José, pelo incentivo recebido.

Ao secretário Francisco, à bibliotecária Ana, por facilitarem minha caminhada.

À CAPES, pela bem-vinda bolsa de estudos que possibilitou realizar este trabalho.

À Universidade de Taubaté, pelo apoio financeiro, pela redução de jornada de trabalho docente e pelo uso do Laboratório de Informática, sob a chefia do prof. Neto.

À Escola Novo Rumo, Taubaté, na pessoa da sua diretora e amiga Sônia, por ter cedido espaço para a realização das atividades da Seqüência Didática.

Aos professores participantes de nossa Seqüência, sem os quais este trabalho não teria sido completo.

Ao meu esposo José Nery de Gouvêa, pela cumplicidade na realização dos meus ideais.

Aos meus filhos Ana Carolina e João Paulo, por me lembrarem a cada instante que educar é também aprender com o outro.

# SUMÁRIO


INTRODUÇÃO .................................................................. 1

CAP. 1 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA DA PESQUISA

1.1 – Fundamentação teórica ............................................. 3

1.1.1 – Contrato didático ............................................. 3

1.1.2 – Situação didática e situação não-didática ....... 6

1.1.3 – Erro e obstáculo ............................................. 9

1.1.4 – Transposição didática .................................... 12

1.1.5 – Concepções sobre a aprendizagem ............. 15

1.2 – Metodologia da pesquisa ........................................... 18

CAP. 2 – ESTUDOS PRELIMINARES ............................................. 20

2.1 – Estudo histórico ......................................................... 21

2.1.1 – Origem e evolução da demonstração ............. 21

2.1.2 – Os trabalhos de G. Arsac ............................... 23

2.1.3 – Os trabalhos de E. Barbin .............................. 24

2.2 – Estudo epistemológico ............................................... 27

2.2.1 – Os trabalhos de Balacheff .............................. 27

2.2.2. – Os trabalhos de Bkouche .............................. 29

CAP. 3 – A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA .......................................... 31

3.1 – A Proposta Curricular ................................................. 32

3.2 – Os Livros Didáticos .................................................... 36

3.3 – As concepções dos professores ................................ 48

CAP. 4 – PROBLEMÁTICA E HIPÓTESES DA PESQUISA

4.1 – Problemática .............................................................. 77

4.2 – Hipóteses ................................................................... 89

CAP. 5 – A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

5.1 – Análise “a priori” ........................................................ 94

5.2 – Aplicação da Seqüência ............................................. 98

5.3 – Avaliação e resultados das atividades ....................... 102

5.3.1 – Pré-Teste ........................................................ 102

5.3.2 – Atividades da Seqüência ................................ 106
5.3.3 – Pós-Teste ...................................................... 172
5.4 – Comparação dos Resultados Iniciais e Finais da Seqüência 180
CAP. 6 – CONCLUSÕES ................................................................ 184
BIBLIOGRAFIA .................................................................. 192
ANEXOS
Anexo 1 – Questionário: As concepções dos professores .. I
Anexo 2 – Pré-Teste ........................................................... XI
Anexo 3 – Atividades da Seqüência Didática.......................... XIV
Anexo 4 – Pós-Teste .......................................................... LII

# *RESUMO*

Em abril de 1996, foi implantado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo o Sistema da Avaliação Escolar (SARESP), para os alunos matriculados naquele ano na 7ª série do ensino fundamental de todas as escolas da rede estadual para serem avaliados nos componentes curriculares de Matemática. O desempenho alcançado pelos alunos nessa disciplina ficou muito aquém do que seria desejável, situando-se em patamares que não podem ser considerados satisfatórios. Entre os aspectos de maior dificuldade para o aluno, detectados através de um Questionário respondido pelos alunos, estava a "*forma pela qual os professores ensinavam a matéria dada (19,25% no curso noturno; 18,51% no diurno).*"

Nosso trabalho de pesquisa foi realizado na perspectiva de contribuir para a prática pedagógica do professor de Matemática, abrangendo especificamente conteúdos estudados em Geometria no ensino fundamental.

A abordagem dada aos problemas está fundamentada nos conceitos de Didática e Epistemologia estudados nos centros de pesquisas em Didática Experimental da Matemática francesa e na proposta construtivista da educação, que permite na resolução de problemas o envolvimento de outras áreas da Matemática.

A reflexão visa estimular os professores para recuperar o ensino da Geometria, tendo como suporte a "demonstração" vista como instrumento técnico de prova. Tal técnica poderá ser vivenciada em sala de aula de modo interativo como sendo um tempo de construção do saber matemático no processo de resolução de problemas.

Propusemos um conjunto de situações de aprendizagem que o professor pode utilizar em sala de aula visando à iniciação progressiva do raciocínio dedutivo, tendo em vista a aprendizagem posterior da demonstração, permitindo aos alunos que se apropriem das regras do debate

de validação matemática. Os textos desses problemas, adaptados de R. Delord e outros (1992), G. Bonnefond e outros (1992), podem ser úteis aos professores de acordo com os objetivos visados em salas de aula.

As atividades foram validadas por professores que participaram de nossa Seqüência Didática, os quais se convenceram de que os fenômenos descritos nessas atividades funcionam e passaram, posteriormente, a tomar consciência da estrutura formal da “demonstração”. Os resultados obtidos ao final dessas atividades foram relevantes para responder às questões propostas neste nosso trabalho de pesquisa.

# *INTRODUÇÃO*

Nosso trabalho tem por objetivo propor uma reflexão didática junto aos professores do ensino fundamental, principalmente os que lecionam a partir da 6ª série, sobre o ensino-aprendizagem da Geometria com "demonstração", a fim de incentivá-los a integrá-la às demais partes da Matemática e a outras matérias, ajudando-os a restituir a historicidade do conceito de demonstração, de rigor matemático.

O suporte teórico para o assunto encontramo-lo em Brousseau, Chevallard, Arsac, Douady, Barbin, Balacheff, Duval..., que contribuíram com suas pesquisas em Geometria sobre como provar, justificar e demonstrar.

É comum ouvir-se que a Matemática é caracterizada por algo conhecido por "demonstrações". Elas são uma prova intelectual particular importante para aplicação a situações em que as proposições afirmativas não são muito transparentes.

Nossas hipóteses baseiam-se, em parte, nos resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP), em abril de 1996, implantado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, para os alunos matriculados naquele ano na 7ª série do ensino fundamental de todas as escolas da rede estadual para serem avaliados nos componentes curriculares de Matemática. O desempenho alcançado pelos alunos nessa disciplina ficou muito aquém do que seria desejável, situando-se em patamares que não podem ser considerados satisfatórios. Entre os aspectos de maior dificuldade para o aluno, detectados através de um Questionário respondido pelos alunos, estava a "*forma pela qual os professores ensinavam a matéria dada (19,25% no curso noturno; 18,51% no diurno).*"

Nossa primeira hipótese, diante disso, é que os professores não trabalham as exigências em relação ao ensino-aprendizagem da demonstração a qual, a partir da 7ª série, prevê que o aluno raciocine sobre conceitos e não mais sobre figuras, ou seja, que inicie a provar, a justificar e a demonstrar, com o fim de tornar indiscutível um certo resultado. Enquanto na 5ª e 6ª séries o aluno se satisfaz em observar, desenhar, traçar e calcular sem a preocupação de justificar, nas séries seguintes espera-se que ele se exercite progressivamente no raciocínio dedutivo.

Em face dessa situação, é necessário melhorar as condições de aprendizagem no ensino da Geometria a partir da 7ª série. O que propomos? Propomos que a demonstração seja vivenciada de modo interativo no contexto da sala de aula como sendo um tempo de construção do saber geométrico no processo de resolução de problemas, quando as ações dos alunos devem ser respostas a constantes e gratificantes desafios.

A metodologia escolhida para este trabalho consistiu nas seguintes etapas: breve estudo histórico e epistemológico para identificar obstáculos epistemológicos; breve estudo da transposição didática para identificar obstáculos didáticos e avaliar o ensino atual da demonstração; elaboração da seqüência de atividades; análise e discussão dos resultados e conclusões da pesquisa.

# *CAPÍTULO 1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA DA PESQUISA*

## 1.1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nossa pesquisa apóia-se em dois suportes teóricos: a Didática da Matemática formulada na França, representada por BROUSSEAU, CHEVALLARD, ARSAC, DOUADY, BARBIN, BALACHEFF, DUVAL, que contribuíram com o corpo principal de conceitos teóricos próprios; e os estudos sobre os processos de construção do pensamento da Psicologia construtivista de PIAGET e seus colaboradores.

A Didática da Matemática francesa é a responsável pela terminologia que utilizamos nos vários capítulos e que será melhor estudada no presente capítulo. Servir-nos-emos dos trabalhos de Michel HENRY (1991) e AG ALMOULOUD, Saddo (1997).

### 1.1.1 - CONTRATO DIDÁTICO

A escola é uma forma de organização social estruturada em torno de um conjunto de relações que envolvem professores, alunos, pais, equipe administrativa. Nesses diferentes níveis de relações, há algum saber e algum tipo de aprendizagem em jogo, embora, algumas vezes, de modo informal.

A relação professor-aluno é um tipo especial de relação. Essa relação, formalmente elaborada, sempre mediada pelo saber, tem como objetivo possibilitar atingir esse saber, o qual se traduz no aprender. O conceito de "*contrato didático"* traduz, especificamente, essa relação professor-aluno-saber e tem sua origem nos estudos franceses sobre didática, particularmente os de BROUSSEAU (1986, 1988) no âmbito da Didática da Matemática.

BROUSSEAU (1986) vê o "*contrato didático*" como uma modalidade particular de contrato, definindo-o como

> *"a relação que determina - explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente - aquilo que cada participante, professor e aluno tem a responsabilidade de gerir e do qual ele será, de um modo ou de outro, responsável diante do outro."* (pág. 309 )

Assim, o que caracteriza o "*contrato didático*" é o fato de ele referir-se especificamente a um conteúdo, no caso, o conhecimento matemático. Embora não se refira explicitamente às "expectativas" dos participantes da relação contratual, esse aspecto encontra-se implicitamente presente no termo "responsabilidade". Por outro lado, M. HENRY (1991) refere-se às "expectativas" quando inclui na definição de contrato didático

> *"o conjunto de comportamentos do professor, que são esperados pelo aluno, e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor ..."* (pág. 73)

Trata-se de aspecto relevante se tivermos em mente que essas "expectativas" dos participantes integram aquilo que é previsto nas "cláusulas" acordadas (= aceitas de comum acordo) no contrato. Nessa relação didática, são importantes as escolhas pedagógicas, a epistemologia do professor, o tipo de trabalho proposto aos alunos e as condições de avaliação. A aquisição do saber pelos alunos é a causa fundamental do contrato didático. A cada nova etapa, o contrato é renovado e adaptado, o que ocorre por meio de algum tipo de negociação.

O "*contrato didático*" é condicionado pelos papéis representados pelo professor e pelos alunos na relação didática. BROUSSEAU (1986) vê no professor aquele que cria as condições para a apropriação de conhecimentos. A expectativa em relação ao aluno é a de que ele possa satisfazer tais condições e, em relação ao professor, de que ele possa reconhecer quando ocorre tal apropriação. Nesse caso, é necessário que o professor aceite a responsabilidade dos resultados dessa apropriação e garanta ao aluno os meios para a aquisição dos conhecimentos. Ao aluno também cabe a responsabilidade de resolver problemas dos quais não lhe foi ensinada a solução, mesmo que ele não identifique as opções que lhe são oferecidas.

No papel representado pelo professor, há o pressuposto de que ele não deve fornecer todos os recursos necessários para a assimilação de determinado conteúdo, porque cabe ao aluno uma parcela desse processo, sob pena de não ocorrer o ensino. Essa idéia traduz o que alguns didatas, entre eles BROUSSEAU (1986), na sua teoria das "situações didáticas", chama de dimensão "paradoxal" do contrato didático, o que significa dizer que alguma coisa deve ficar "escondida" do aluno, não sendo possível revelar-lhe tudo o que será ensinado. Isso, que se constitui numa "regra contratual", quando rompido, pode prejudicar o ensino.

Há um momento no qual os participantes dessa relação pedagógica podem conscientizar-se de que havia uma determinada norma de conduta a qual vinha sendo cumprida. Esse momento de conscientização corresponde ao que BROUSSEAU (1986) chama de "ruptura contratual", momento esse de explicação das normas contratuais despertado em face de um comportamento não previsto por elas. Isso faz com que surja outro acordo, o que caracteriza um novo contrato, pois o anterior não tem mais validade. Para o autor, essas rupturas contratuais são fatores positivos para a aprendizagem, são momentos criativos da relação pedagógica, tanto pela oportunidade de uma tomada de consciência, por parte de ambos, das normas que presidem a construção do saber escolar, quanto pela oportunidade de reformulações nos modos de apropriação do conhecimento.

Parte das dificuldades dos alunos é causada pelos efeitos do "*contrato didático"* mal elaborado ou incompreendido por um dos participantes.

Na perspectiva da prática de ensino, observa-se que muitos professores fundamentam suas decisões pedagógicas numa concepção de ensino segundo a qual o professor é o detentor único do conhecimento e o responsável pelas decisões sobre a inclusão ou exclusão de conteúdos e da avaliação. Essa visão parece caracterizar uma desproporção da relação professor-aluno.

Em sala de aula, no seu trabalho diário, o professor pensa que tudo o que ele “ensina”, o aluno “aprende” , e que tudo o que o aluno aprende foi ensinado por ele, revelando assim o tipo de contrato existente. Mas como essa relação ensino-aprendizagem não ocorre assim, como foi referido acima, surge uma “ruptura” implícita no contrato didático.

A contribuição do conceito de “*contrato didático”* é, pois, importante instrumento de conscientização no sentido de favorecer a percepção de que o ambiente da sala de aula, por exemplo, serve como meio para incorporar leituras de mundo implícitas em cada contrato. Nesse ponto de vista, o “*contrato didático”* possibilita uma visão mais ampla do “conteúdo” do ensino, bem mais que a simples operacionalização do fazer pedagógico.

### 1.1.2 - SITUAÇÃO DIDÁTICA E SITUAÇÃO A-DIDÁTICA

A Didática da Matemática tem como objeto de estudo a “*situação didática*”, definida por BROUSSEAU (1986) como

> “*conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos se apropriem de um saber constituído ou em vias de constituição*”. (Apud AG ALMOULOUD, Saddo, 1997, p. 65-67)

BROUSSEAU (1986) chama de “*situação a-didática*” aquela que provoca os momentos de rupturas desse contrato quando o professor, conscientemente ou não, conta com a situação de descoberta, de “discussão” e de pesquisa do aluno (ou do grupo de alunos) em relação a um conhecimento e permite que isso ocorra sem sua intervenção. Para ele,

> *“... o aluno aprende olhando o mundo (...) ou fazendo hipóteses entre as quais a que sua experiência lhe permite escolher (...) ou ainda em uma interação mais complexa feita de assimilação e de acomodações, tais como Piaget as descreve, quando afirma que as variações das condições do meio envolvem o comportamento do aluno, visando modificar o meio e o aluno para, finalmente, obter certos equilíbrios internos ou a otimização de certos parâmetros.”*

> *"... o aluno aprende adaptando-se a um meio, fator de dificuldades, de contradições, um pouco como faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas que são a prova da aprendizagem."*
>
> *"... a concepção moderna de ensino vai, então, pedir que o professor provoque no aluno as adaptações necessárias, por uma escolha judiciosa dos "problemas " que ele propõe. Esses problemas, escolhidos de modo que o aluno possa aceitá-los, devem fazê-lo agir, falar, refletir, evoluir por si mesmo. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que o aluno produz sua resposta, o professor se abstém de intervir como alguém que propõe os conhecimentos que ele quer que se produzam."* (idem)

Essa situação ou esse problema escolhido pelo professor, continua BROUSSEAU, é uma parte essencial de uma situação mais abrangente: o professor procura fazer a "devolução" ao aluno de uma "*situação a-didática*" que provoque nele a interação mais independente e fecunda possível. O professor é, então, comprometido num jogo com o sistema de interação do aluno através dos problemas que lhe coloca. Esse jogo ou essa situação mais ampla é a "*situação didática*". E nessa situação didática o "*contrato didático"* é regra do jogo e estratégia da situação didática dependendo estreitamente dos saberes em jogo.

Essas relações nascem de uma negociação entre professor e alunos decorrente do "*contrato didático*". Tal contrato tem componentes explícitos e implícitos que definem as regras de funcionamento dentro da situação: repartição de responsabilidades, estabelecimento de prazos temporais para as diversas atividades, permissão ou não do uso de determinados recursos de ação etc.

Ao se propor uma mudança do "*contrato didático"*, é necessária a construção de situações-problema que permitam o desenvolvimento de "*situações a-didáticas*". Para BROUSSEAU, uma "*situação a-didática*" caracteriza-se pelo fato de o problema matemático ser escolhido ou para fazer o aluno a agir, falar, refletir e evoluir pela sua própria iniciativa, ou para despertar nele a vontade de adquirir novos conhecimentos, justificados pela coerência interna da situação, construídos sem apelo às razões didáticas.

Para BROUSSEAU, é fundamental na investigação em Didática o ato da análise "*a priori*" da situação. A previsão dos efeitos da situação que o pesquisador elaborou antes de colocá-la à prova em aula é fundamental para, posteriormente, poder compará-la com os comportamentos observados.

Outro aspecto que facilita a análise dessas situações didáticas é sua classificação em:

1. **Situações de ação**: os alunos, numa interação com o meio físico, devem tomar as decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução de problemas formulados.

2. **Situações de formulação***:* os alunos são levados a modificar a linguagem usual, tornando-a exata e adequada às informações vivenciadas.

3. **Situações de validação**: os alunos são levados a convencer o(s) interlocutor(es) sobre a validade das afirmações mediante a elaboração de provas para demonstrá-las: a comprovação empírica deve ser corroborada por uma validação semântica e sintática.

4. **Situações de institucionalização**: os alunos são levados a assumir o significado socialmente estabelecido de um saber, o qual foi elaborado por eles mesmos, em situações de ação, de formulação e de validade. Trata-se de colocar os alunos numa situação que evolua de tal modo que o conhecimento que se deseja que aprendam seja o único meio eficaz para controlar tal situação.

Nessa fase de institucionalização, "*fixa-se convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo de um conhecimento ou de uma saber*" (Apud AG ALMOULOUD, Saddo, 1997, p. 70).

O conhecimento construído pelo aluno passa assim a ser contextualizado, diferentemente do que ocorre quando a busca das aplicações dos conhecimentos antecede a sua apresentação descontextualizada.

Com a institucionalização, o saber torna-se um conhecimento oficial que os alunos devem reter e poder utilizar na resolução de problemas matemáticos.

Do ponto de vista do "*contrato didático*", cabe ao aluno a responsabilidade de administrar sua relação com o conhecimento nas fases da ação, da formulação e da validação, e ao professor, a responsabilidade da institucionalização do conhecimento.

### 1.1.3 - ERRO E OBSTÁCULO

O "*erro*" está estreitamente relacionado com as concepções de aprendizagem.

Na concepção denominada "cabeça vazia", transmitir um conhecimento é tentar colocá-lo na cabeça supostamente "*vazia*" do aluno, onde a memorização do conhecimento é privilegiada e o saber matemático é visto como um estatuto dogmático.[1] O "*erro*" é visto como um trabalho insuficiente do aluno, o qual, para superá-lo, precisa de mais desafios por parte do professor, que é o facilitador das ações de seus alunos.

A concepção *behaviorista* baseia-se na progressão da aprendizagem através de etapas intermediárias, chamadas de "pequenos passos", cada um com pequenas dificuldades a serem superadas pelo aluno. Nessa concepção, caso ocorra o "*erro*", a causa não se deve aos conhecimentos do aluno e, sim, à "progressão" da aprendizagem proposta.

A concepção *construtivista* da aprendizagem surgiu na esteira dos trabalhos de Gaston BACHELLARD e de Jean PIAGET. Nessa concepção, o "*erro*" tem função destacada na aprendizagem, pois, a partir dele, busca-se uma situação na qual os erros são indícios de um saber em formação, necessários à aprendizagem, e na qual o "*contrato didático*" deverá ser profundamente modificado.

As pesquisas de didática da Matemática, na linha do movimento recente chamado de Educação Matemática, quando analisam o "*erro*", apóiam-se no conceito de "*obstáculo*" desenvolvido por BACHELLARD (1965), para as

---

[1] Estatuto visto como regra a ser imposta como indiscutível.

ciências em geral, exceto Matemática, e na teoria da equilibração de PIAGET (1967).

Guy BROUSSEAU (1983), apoiando-se nesses trabalhos, introduziu o conceito de "*obstáculo epistemológico*" em Matemática, segundo o qual *o conhecimento se processa contra um conhecimento anterior. O* "obstáculo", nesse caso*, "se manifesta pelos erros, mas esses erros não são devidos ao acaso*...", são caracterizados não só por um conhecimento que se adquire num determinado contexto, não só pelo conjunto de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto de concepções, de escolhas anteriores que ele não aceita, de erros que ele evita, pelas reformulações que ele retoma.

O conceito de "*obstáculo*" é um recurso para se olhar, de outro modo, os erros dos alunos. Para BROUSSEAU, o "*erro*" é a manifestação explícita de concepções espontâneas, ou não, imbricadas numa rede coerente de representações cognitivas, que passam a ser "*obstáculo*" à aquisição de novos conceitos. A superação desses erros é um dos objetivos do ensino e é passagem obrigatória na aquisição positiva do conhecimento. O "*obstáculo*" é "*um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade ou falta de conhecimento*."

Em Didática, um "*obstáculo*" tem as seguintes características formuladas por DUROUX (1983) e retomadas por BROUSSEAU (1983):

- É um conhecimento (e não ausência de conhecimento).
- É um conhecimento que produz respostas adaptadas a certos problemas num certo contexto.
- Produz respostas falsas em outros contextos, pois uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente.
- Apresenta uma resistência às contradições com as quais é confrontado e a um conhecimento melhor, sendo indispensável, pois, identificá-lo para incorporar sua rejeição ao novo saber.

- Continua a manifestar-se de modo recorrente mesmo após a tomada de consciência de sua inexatidão.

Assim, o "*obstáculo*", visto como conhecimento que provoca incapacidade para compreender certos problemas ou para resolvê-los de modo eficaz, constitui-se um meio necessário para desencadear o processo da aprendizagem do aluno, bem como para o professor, compreendendo as concepções do aluno e identificando os obstáculos ocultos, modificar ou adaptar a situação didática posta em prática. O "*contrato didático"*, diante disso, deve não apenas aceitar o erro (o "*direito ao erro*)", mas também explorá-lo.

BROUSSEAU estuda as várias origens dos obstáculos relacionados aos diferentes modos de serem tratados no plano didático.

1. **Obstáculos epistemológicos**, os constatados por BACHELARD, são aqueles que são inerentes ao próprio conhecimento, "*que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no conhecimento transmitido*." Esses obstáculos são percebidos nas dificuldades pelas quais os matemáticos passam para superá-los ao longo da história, como atestam as pesquisas em Epistemologia e História da Matemática.

2. **Obstáculos didáticos** são aqueles decorrentes de determinadas estratégias de ensino, "*que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto educativo*", resultantes de uma transposição didática que o professor dificilmente pode negociar no contexto restrito da classe. O reconhecimento de um obstáculo de tal natureza permite ao professor rever a abordagem anterior sobre o assunto para esclarecer melhor a dificuldade de aprendizagem vivida pelo aluno.

3. **Obstáculos psicológicos** são aqueles que surgem quando "*a aprendizagem está em contradição com as representações profundas do sujeito ou quando ela causa uma desestabilização inaceitável*."

4. **Obstáculos ontogênicos** são aqueles que se originam de uma aprendizagem fora do desenvolvimento psíquico do sujeito e das limitações de sua maturidade conceitual.

5. **Obstáculos culturais** são aqueles que surgem em face de um conceito que tem significado em determinado contexto cultural, mas não têm o mesmo sentido para um determinado aluno.

6. **Obstáculos técnicos** são aqueles que surgem em face da complexidade da tarefa, ultrapassando a capacidade de compreensão do aluno.

Os obstáculos, pois, têm muitas origens, que exigem do professor grande atenção e cultura histórica, epistemológica e didática. Entre esses, para o assunto de nossa dissertação, interessam-nos os obstáculos "*didáticos*", gerados pelo ensino proposto pelos livros didáticos e pelo professor e os obstáculos "*epistemológicos*", constitutivos do conhecimento, que podem ser utilizados tanto para analisar a origem histórica, como a evolução espontânea do aluno no conhecimento da **demonstração**.

### 1.1.4 - TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Este conceito foi desenvolvido por Yves CHEVALLARD (1991), que define a "*transposição didática*" como o "*conjunto de transformações por que passa um saber "sábio"* [2] *a fim de ser ensinado*."

A definição faz referência ao "*saber sábio*" e ao "*saber ensinado*".

O saber adquirido pelos matemáticos, portanto, para que possa ser transmitido ao aluno de forma adequada à sua idade, ao seu nível intelectual, deve sofrer transformações a fim de poder ser ensinado.

[2] É o conjunto acumulado de conhecimentos descontextualizados, despersonalizados, disponíveis e aceitos como válidos pela sociedade.

Os objetos a ensinar são aqueles que terão alguma pertinência na formação matemática do aluno, dependendo do sistema social do ensino (a *“noosfera”*, segundo CHEVALLARD). Entre os fatores que intervêm nessa transposição didática está o tipo da sociedade, de administração, de sistema educativo, de desenvolvimento tecnológico, de formação de professores, de epistemologia dominante.

A escolha do “*saber a ensinar”* é tarefa de especialistas, que devem saber transformar esse conjunto de conhecimentos, como as definições, as propriedades, as demonstrações, em um conjunto de conhecimentos mais acessíveis aos alunos. Os objetos de ensino geralmente são organizados em propostas curriculares oficiais, que servem de parâmetros para o professor.

Os livros didáticos, por sua vez, geralmente seguem as orientações das propostas curriculares oficiais e provocam uma certa cultura que irá favorecer a cultura dos alunos de uma determinada época.

A “*transposição didática”* conta também com a interferência do professor, responsável para adaptar o saber escolar em saber a ser ensinado, equacionando os objetos de ensino e organizando-os no tempo de ensino. Ao professor compete fazer as escolhas didáticas para transformar a situação de aprendizagem, que é responsável pelo saber que o aluno irá adquirir. A didática usada pelo professor revela a concepção que ele tem sobre o ensino-aprendizagem.

Guy BROUSSEAU (1986), ao referir-se às transformações que o professor deve fazer no “*saber sábio*” para um “*saber a ser ensinado*”, sugere que devem ser construídas situações-problema nas quais o “*saber sábio*” seja recontextualizado, pois este é essencialmente descontextualizado e despersonalizado (= saber apresentado em termos de objetos a ensinar), a fim de que aluno coloque o problema em suas próprias representações e o situe no seu tempo de aprendizagem. Para tanto, sugere algumas condições para se conseguir esse objetivo: simular uma “pequena sociedade” matemática, em sala de aula, onde haja oportunidade de um debate científico, com situações de formulação e validação, onde se institucionalize o saber cultural que se quer ensinar ao aluno e onde este “descontextualize” e “recontextualize” seu saber, transformando o “saber do aluno” em conhecimentos novos disponíveis para serem usados em outras situações.

Um dos pontos interessantes no trabalho teórico de CHEVALLARD (1991) é o referente ao tempo didático vivido pelo professor e pelo aluno no processo do ensino-aprendizagem.

O progresso do “*saber sábio*” depende do encadeamento dos problemas sucessivamente resolvidos, pois são a causa dessa evolução. Mas o “*saber ensinado*” não se comporta assim, porque progride no tempo a partir da dialética velho-novo, ou seja, um capítulo novo supõe o conhecimento dos anteriores, suprime os problemas e progride linearmente no conhecimento. Assim, o tempo constitui momento diferente em relação ao saber para o professor e para o aluno: o professor é aquele que conhece antes, que conhece de outro modo. Em Matemática, o professor está do lado da teoria, e o aluno, do lado da prática.

Ao lado desse tempo de ensino, há o tempo de aprendizagem caracterizada pelo ritmo próprio de cada aluno. O tempo do aluno é descontínuo, marcado por paradas e saltos, não se adaptando com o tempo de ensino, que se preocupa com o progresso lógico, linear. Para que a transposição didática aconteça, o professor deve levar em conta esse processo de aprendizagem do aluno, o tempo que leva para aprender. O sistema de ensino, entretanto, parece negar a diferença entre tempo de ensino e tempo de aprendizagem. Toda diferença é vista como atraso ou fracasso escolar, o que é um desconhecimento dos ritmos diferentes dos alunos e dos objetivos de ensino propostos pela transposição didática.

### 1.1.5 - CONCEPÇÕES SOBRE A APRENDIZAGEM

A epistemologia visa estudar como se organizam os conhecimentos científicos tanto na sua origem, como na sua articulação com o “saber sábio” num determinado momento de seu desenvolvimento.

O ensino-aprendizagem tradicional, visto anteriormente (1.1.3), apóia-se, em geral, em duas freqüentes concepções empiristas: uma, a concepção da “cabeça vazia”, que acredita que ensinar consiste em despejar um saber na cabeça do aluno, a qual se supõe vazia e que precisa ser enchida; outra, a concepção de “pequenos passos”, que se baseia na idéia de que, para o aluno passar de um nível de conhecimento a outro, basta organizar um certo número de etapas intermediárias. Cada uma dessas etapas contém uma pequena dificuldade que o aluno deve ultrapassar.

Neste nosso trabalho, rejeitamos essas concepções e procuramos uma terceira concepção de aprendizagem: o *construtivismo.* Apoiamo-nos em alguns princípios oriundos de pesquisas da Psicogenética, Psicologia Cognitiva e Psicologia Social, estudados por Michel MANTE (1987-1988).

**Primeiro princípio**, resultante dos trabalhos de PIAGET: *“Agindo é que se aprende”* (p. 229). Aqui o termo “ação” é utilizado no sentido de resolução de problemas e não apenas de ação sobre os objetos.

**Segundo princípio**, o da “equilibração” do mesmo PIAGET, segundo o qual

> *“o conhecimento passa de um estado de equilíbrio a um outro através de fases transitórias no decorrer das quais os conhecimentos anteriores são enganosos. Se este momento de desequilíbrio é superado, é porque há uma reorganização dos conhecimentos, no decorrer da qual as novas aquisições são integradas ao saber antigo”* (apud MANTE, p. 229).

A aprendizagem, pois, não se resume a uma simples memorização, a uma justaposição do saber-fazer ou a um condicionamento. O aluno é visto como alguém que constrói seu saber a partir da sua interação com o meio ambiente. Sua “adaptação” se faz através de fases de “rupturas” e de “equilibração”, a qual decorre da “assimilação” e da “acomodação” do esquema, até então existente, de conhecimento.

Para PIAGET, a “ação” é fundamental para a produção dos conceitos, os quais são fonte do saber. O aluno se adapta ao meio no qual se encontra por meio de uma “assimilação” e uma “acomodação”. A “assimilação” é a incorporação dos objetos ou acontecimentos aos esquemas ou concepções existentes. A “acomodação” começa quando o aluno, não aceitando mais o desequilíbrio ocasionado pelas contradições anteriores, procura modificar os esquemas existentes para atender às novas exigências do meio. Essa “equilibração” é o processo fundamental responsável pelo desenvolvimento e pela formação do conhecimento, o qual permite ao aluno em desequilíbrio responder às perturbações ou aos distúrbios do meio para voltar ao equilíbrio.

A reprodução das ações reforça os esquemas e o processo da assimilação favorece sua generalização. O processo da acomodação possibilita diferenciações e coordenações. Essa reiteração de ações é um sinal da natureza invariante da ação. A construção de conceitos nos diversos níveis do ensino é fundamental para a aprendizagem. As ciências da educação definem o “conceito” como “*uma idéia abstrata e geral que permite caracterizar dados sensíveis e dados construídos*.”

**Terceiro princípio**. BACHELLARD introduziu o conceito de representação espontânea a propósito dos fenômenos físicos, para o qual

> *“o espírito, qualquer que seja a sua idade, jamais é vazio, tábua rasa ou massa sem marcas”, e as representações constituem-se obstáculos ao conhecimento científico.* (Apud MANTE, p. 229).

Os trabalhos de PIAGET têm tido repercussão em educação devido ao seu interesse com a relação existente entre o sujeito e o conhecimento. Seus estudos conceituais reportam-se à origem do conhecimento, localizando-a na ação do sujeito, desde a ação sensório-motora até a ação cognitiva. Ele pesquisou alguns modos pelos quais as crianças pensam, identificou muitas de suas habilidades e inabilidades mentais e, partindo de suas observações, formulou uma teoria do desenvolvimento intelectual.

No desenvolvimento do pensamento, PIAGET definiu certos "esquemas" de pensamento e de ação que, enquanto aguardam certo desenvolvimento consciente, servem de base para a conceitualização.

A concepção interacionista de PIAGET, referente à relação sujeito-objeto de conhecimento, opõe-se claramente à concepção empirista de conhecimento, a qual considera o conhecimento pronto, exterior ao sujeito, de modo que aprender se resume em adquirir através da memorização e da repetição dos modelos.

No sentido "*construtivista*", o aluno, visto como sujeito do processo de ensino-aprendizagem, tem papel ativo, e o professor precisa lidar com as potencialidades e, ao mesmo tempo, com as limitações do aluno, compreendendo seus "erros" na medida em que o conhecimento se constrói juntamente com o próprio sujeito. Do "direito ao erro" reconhecido aos alunos, passa-se progressivamente à busca de situações onde os erros são marcas reveladoras de um saber em formação, necessário à aprendizagem.

## 1.2 - METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia de nossa pesquisa se insere na perspectiva teórica do que vem a ser "*situação didática*", "*erro* e *obstáculo*", "*transposição didática*", "*contrato didático*".

Esta metodologia teve como referencial a construção de uma Seqüência Didática desenvolvida nas seguintes etapas:

**Etapa 1 - Análises Preliminares**

São as que serviram de base para a construção da Seqüência Didática constituídas com os conhecimentos didáticos adquiridos na área de estudo, bem como nos obtidos a partir de:

- Estudo histórico e epistemológico da demonstração para identificação de obstáculos epistemológicos.

- Análise da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º grau.

- Análise de alguns livros didáticos.

- Análise das concepções dos professores e das dificuldades e obstáculos oriundos no processo ensino-aprendizagem.

Nessa etapa, aplicamos um Questionário junto aos professores para diagnosticar suas concepções sobre demonstração.

- Definição de nossa problemática e hipóteses da pesquisa.

Dentre os problemas identificados, tentaremos definir aqueles a serem investigados e levados em conta neste trabalho.

**Etapa 2 - Elaboração da Seqüência Didática e análise "a priori"**

Trabalhamos a concepção e a análise "a priori" da Seqüência Didática através da atuação sobre certas variáveis do sistema.

A análise "a priori" feita pelo pesquisador visa determinar o significado das escolhas feitas que permitem controlar os comportamentos de cada situação didática, bem como predizer procedimentos possíveis durante cada situação.

**Etapa 3 - Experimentação**

Trabalhamos com um grupo de professores que participaram de todas as sessões. Reunimo-nos na Escola Novo Rumo, situada na cidade de Taubaté (SP).

A Seqüência Didática desenvolveu-se em cinco sessões, distribuídas ao longo de cinco sábados, no período da manhã.

Procedimentos observados:

- Execução das atividades em sala de aula com a presença do pesquisador e de um professor observador.

- Discussão com o grupo esclarecendo o conteúdo de cada atividade.

**Etapa 4 - Análise "a posteriori" e validação**

Analisamos a produção dos professores tendo como base as atividades propostas na Seqüência e nas discussões nela ocorridas. A análise qualitativa da Seqüência baseou-se nos Questionários respondidos, nos diálogos mantidos nas entrevistas e nas gravações em fita feitas durante a realização das atividades. A análise quantitativa resultou da tabulação das respostas das atividades com seus respectivos percentuais apresentados em gráficos.

A validação das hipóteses da pesquisa resultou do estudo comparativo das análises "a priori" e "a posteriori".

# *CAPÍTULO 2 - ESTUDOS PRELIMINARES*

Acreditando que o ensino da Matemática e especialmente o da Geometria requerem mudanças pedagógicas na prática cotidiana (SARESP,1996), acreditando que os alunos não vivenciam o ato de demonstrar em sala de aula, pensarmos numa proposta que repense o papel da “demonstração”, confiando na capacidade de sua aprendizagem pelos alunos a partir dos 13 anos, incentivados por professores interessados em oferecer desafios que oportunizem situações de ensino-aprendizagem, que motivem os alunos a adquirir o espírito matemático e geométrico.

A Didática da Matemática estuda os fenômenos do ensino-aprendizagem nesta disciplina, ou seja, analisa o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos desta ciência, particularmente as situações de classe. Como sugere Régine DOUADY (1992), essas situações de classe possibilitam aos alunos adquirir novos conhecimentos em Matemática.

Nesse processo de aprendizagem, observa-se que ocorrem algumas “*variáveis”* propriamente “*didáticas”*, que a condicionam:

1. **variáveis contextuais**, relacionadas aos objetivos do ensino, às concepções do professor, à elaboração de novas ferramentas conceituais, à vivência e história dos alunos;

2. **variáveis didáticas**, aquelas que estão à disposição do professor e que determinam a situação didática, implicando mudança de situação, de contrato, de transposição etc., que foram analisados no **Cap. 1**.

Paralelamente a essas variáveis didáticas, destacam-se as “*variáveis epistemológicas”*, relacionadas à constituição do saber e à sua apreensão pelos alunos, fundamentadas no estudo histórico e crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados obtidos visando a determinar sua fundamentação lógica.

Trabalhos de pesquisadores em Didática da Matemática, entre os quais os de Michèle ARTIGUE (1990), confirmam que uma análise epistemológica pode ajudar muito o professor e o pesquisador a assumirem uma atitude crítica diante de suas próprias representações sobre o “saber a ensinar”.

A análise epistemológica, nesse caso, constituir-se-á uma ferramenta eficaz e segura porque ensejará ao professor informações históricas sobre conceitos matemáticos que o ensino tradicional apresenta de modo dogmático, impositivo, rígido.

Numa análise epistemológica sobre a demonstração, objeto deste nosso trabalho, vários estudos mostram a evolução do significado do que é “**demonstra**r” e suas implicações na aprendizagem do “*saber matemático*”, o qual se encontra nos livros didáticos e que favorecem os alunos na apreensão de uma cultura matemática.

## 2.1 - ESTUDO HISTÓRICO

### 2.1.1 - ORIGEM E EVOLUÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO

O estudo da origem e evolução da demonstração ao longo da história pode esclarecer a problemática do seu ensino. Entretanto, não é muito rica a literatura a seu respeito, pois, para os matemáticos, a demonstração está intimamente ligada aos estudos matemáticos, não sendo sua gênese objeto imediato de investigação.

Costuma-se buscar as raízes da demonstração matemática na Antigüidade Clássica, precisamente na Grécia do século VI a.C., apoiando-se em raros comentários de matemáticos gregos posteriores a essa época, tendo em vista a inexistência de documentos.

Ao situar entre os gregos o aparecimento da demonstração, não se está preterindo a existência de provas, justificações ou verificações de diferentes níveis, por exemplo, no Egito, onde a precisão de cálculos feitos pelos escribas era geralmente provada pela verificação do resultado.

A demonstração, entre os gregos, é conseqüência do pensamento reflexivo influenciado pelas exigências político-sociais e filosóficas que se instauraram, pela necessidade de "convencer" o outro. A tríade Sócrates, Platão e Aristóteles teve a função de suplantar, pelo pensamento reflexivo, a crença mítica primitiva. As atividades humanas na "πολις" (pólis = cidade) alcançaram seu ponto alto de expressão. O pensamento reflexivo passou da preocupação cosmológica para a antropológica com os sofistas, mestres de retórica e de eloqüência na Atenas democrática, que precisavam preparar os cidadãos para a disputa dos cargos públicos através de eleições livres.

O chamado "milagre grego", com a coincidência histórica do aparecimento da Democracia, da Filosofia e da Geometria (hoje, Matemática), consistia na descoberta da "razão" pela humanidade, entendida como estrutura de pensamento universal, independente das civilizações.

A demonstração tem uma história com significados não absolutos, que constituem preocupação para os estudiosos interessados no seu ensino e na sua aprendizagem.

A demonstração é um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e, do ponto de vista epistemológico, ocupa lugar de destaque nesta disciplina. Todavia sua aprendizagem tem sido fator de insucesso para muitos alunos e seu ensino, frustração para muitos professores.

Diante dessa problemática, inúmeras pesquisas têm sido recentemente publicadas em busca de estratégias eficazes ao seu ensino. Vão nos interessar, para posterior estudo da transposição didática, os trabalhos de G. ARSAC, E. BARBIN, N. BALACHEFF e BKOUCHE sobre a origem da demonstração, bem como o conceito, o sentido, o valor histórico-epistemológico, razão do ato de demonstrar e suas conseqüências didáticas.

### 2.1.2 - OS TRABALHOS DE G. ARSAC

G. ARSAC (1987), estudando a gênese da demonstração, diz que seu aparecimento na Matemática grega deve-se ao seu emprego sistemático ao lado dos enunciados gerais e da axiomatização. Os axiomas, com os gregos, não têm a interpretação formal da Matemática atual, já que eles versam sobre os objetos do pensamento que, para Platão, têm existência objetiva. Assim, pode-se identificar a criação de uma Matemática com sua autonomia de pensamento dotada de regras próprias de funcionamento e de validação. Esta maneira de conceber a Matemática está perfeitamente realizada em os "*Elementos*" de Euclides, mas a forma estereotipada das demonstrações gregas está bem fixada, é antiga, como estudou AUTOLYCOS (1979), anterior a Euclides.

ARSAC (1987), ao explicar a transformação por que passou inicialmente a Matemática e que justifica o aparecimento da demonstração, diz que foi levado a estudar o assunto em face da constatação de que tudo, em Matemática, provém da resolução de problemas:

> *"é para resolver problemas, que foram criados os conceitos e os métodos, e o encadeamento de sucessivos problemas explica a evolução da matemática"*. (p. 267)

Assim, continua ARSAC, surge a demonstração, talvez para resolver certos problemas matemáticos específicos, dentre os quais o da irracionalidade.

Nesse caso, há uma coincidência histórica entre o aparecimento da demonstração e o da resolução deste problema, ou seja, por um lado "**2**" não tem raiz quadrada racional e, por outro, a diagonal do quadrado é incomensurável em relação ao lado. Todavia, a solução do problema, que implica o recurso do raciocínio pelo absurdo e certa idealização dos objetos da Matemática, não se justificaria para resolver o problema em questão, mas reside nas variadas maneiras de pensar existentes na sociedade grega, particularmente dos filósofos eleatas e no espaço social ocupado pela Matemática. Para os eleatas, o mundo sensível, o das aparências e dos fenômenos, não pode ser objeto de um conhecimento verdadeiro, não contraditório.

> *"A verdade é inacessível pela observação: ela só é acessível ao pensamento puro"* (ARSAC).

Raciocinam, pois, sobre objetos ideais, servindo-se muitas vezes de raciocínios indiretos, por exemplo, o raciocínio pelo absurdo, encontrado também em Euclides. Essa maneira de raciocinar, ao contrário, não é encontrada na história da Matemática chinesa ou indiana.

Para ARSAC, o elo entre a transformação do estatuto dos objetos da Matemática e o modo de raciocínio, a fim de permitir validar os enunciados matemáticos produzidos naqueles objetos, é muito estreito, principalmente no raciocínio pelo absurdo. O emprego empírico (no sentido usado por BALACHEFF, l987) da figura, em Geometria, torna-se um obstáculo epistemológico o qual precisou ser superado para abordar o problema da irracionalidade.

Do ponto de vista didático, ARSAC ressalta que a necessidade de resolver um problema é que justifica a demonstração, a qual, numa situação de aprendizagem, o aluno deve ser levado a aprendê-la através da prática constante de sua elaboração. A demonstração, em Geometria, está ligada a uma troca indissolúvel de relação da figura, no estatuto dos objetos da Geometria, objetivo que somente é atingido depois de superado o obstáculo epistemológico constituído pela evidência da figura. O professor, em determinadas situações, deve levar em conta essa dificuldade por parte do aluno.

### 2.1.3 - OS TRABALHOS DE E. BARBIN

Evelyne BARBIN (1988) estuda as significações epistemológicas e as questões didáticas da demonstração matemática, destacando três grandes etapas ao longo de sua história: a origem junto aos gregos e duas rupturas históricas, sendo uma no século XVII e outra no século XIX.

A demonstração surge, entre os gregos, no século VI a.C., com o advento do pensamento racional e geométrico. Não há notícias da demonstração entre os egípcios ou babilônios, salvo se se levar em conta que a acumulação de passos idênticos possa constituir provas. Os historiadores falaram, durante muito tempo, do “*milagre grego*”, mas os trabalhos recentes de VERNANT (1971), de CAVEING (1982)] e de SZABO (1972) permitem afirmar que não se trata de milagre, mas de transformações sociais e econômicas por que passou a Grécia naquela época.

SZABO (1972), analisando conjeturas até então existentes sobre a origem da matemática teórica, como as de KOLMOGOROV e de Van der WAERDEN, referidos por ele, atribui a evolução qualitativa da Matemática grega ao desenvolvimento político do estado grego e à sua vida cultural, fazendo com que o desenvolvimento da dialética, ou seja, da arte da disputa e do embate das idéias, atingisse um alto grau de desempenho que possibilitou o aparecimento do pensamento filosófico independente da religião.

A demonstração surge para ser a regulamentação do debate contraditório, público, de acesso a todos, com os discursos argumentados opondo-se uns aos outros. É o pensamento racional surgindo nas cidades gregas da Ásia Menor, como Mileto, porque as regras do jogo político na “πολις“ (pólis = cidade), com o debate público argumentado, tornaram-se também regras do jogo intelectual (VERNANT, 1962). Verdadeiros jogos de argumentos, conduzidos por sofistas, ocorriam na “αγορα“ (ágora = praça pública), na organização da sociedade grega, modelando os espíritos e, certamente, transferindo isso à Matemática.

Com os assuntos da cidade postos em discussão pública, a demonstração surge como ato social que visa *“convencer*” o outro. O jogo é político na “αγορα“ (ágora = praça pública), enquanto é filosófico na escola de Platão ou Aristóteles, preocupados em distinguir ciência de opinião. Para estes, a ciência é o conhecimento verdadeiro e certo. Uma propriedade é conhecida cientificamente quando se sabe não somente que ela é, mas porque ela é e que não pode ser de outro modo. Conhecer é conhecer por meio da demonstração (Aristóteles), ou seja, a demonstração é da ordem da "*convicção*" num debate contraditório (ARSAC, 1988).

Segundo BARBIN, a segunda etapa na evolução da demonstração situa-se no século XVII, onde surge uma primeira ruptura a propósito do objetivo da demonstração, que visa agora a não mais "convencer" e, sim, "*esclarecer*". A justificativa para essa ruptura se deve à vontade de inventar e esclarecer dos geômetras desse século, que corresponde ao privilégio dado à elaboração e à explicação de métodos de resolução, chamados de "métodos de descoberta". O termo "*esclarecer*" significa, em primeiro lugar, fazer compreender a razão pela qual um enunciado é verdadeiro, no lugar de convencer através de um raciocínio sem falha e, em segundo lugar, fazer coincidir demonstração e método de descoberta, como sugere Descartes.

No século XIX, ocorre a terceira etapa na evolução da demonstração anotada por BARBIN, uma nova ruptura marcada pelas pesquisas matemáticas de BOLZANO que prega o retorno ao "rigor" nos métodos matemáticos e que justifica o aparecimento do formalismo, que difere do pensamento grego no sentido de que os objetos matemáticos definidos pelo axioma não mais têm existência objetiva, mas devem apenas satisfazer o princípio da não-contradição interna para os matemáticos. Para a autora, a demonstração não deve ser simples procedimento de "fábrica de evidências", mas deve ser sobretudo fundamento da verdade a ser demonstrada.

BARBIN, em sua análise, destaca a historicidade da demonstração e lembra que ela tem várias significações. O professor, sabendo que a noção de demonstração não é absoluta, necessita de uma reflexão epistemológica que leve em conta duas questões: a significação que tem ela para o aluno e para o ensino. Se a demonstração, continua a autora, visa "*esclarecer*", tornar "*evidente*" e "*certo*", então o método de resolução pode valer como uma **demonstração**. Nesse caso, o aluno que é levado a seguir um método para resolver um problema pode ficar satisfeito. Por outro lado, se o professor pensa que a demonstração visa "*convencer*", ele vai esperar outro procedimento dos alunos.

Um outro aspecto realçado nessa análise é a função do *“debate”* na aprendizagem da demonstração, o qual está ligado à pesquisa da convicção num quadro social. Do mesmo modo, é realçado o aspecto do ensino dos métodos, em face das dificuldades encontradas pelos alunos na constituição da racionalidade.

Na construção de métodos, a autora indaga as situações didáticas que devem ser colocadas em ação. Uma vez que se trata de construir métodos, é necessário partir de situações-problema, ordenando e numerando metodicamente os conhecimentos. Num primeiro momento, todos os meios para atingir os resultados seriam bons, mas seria pedido ao aluno para explicar seu procedimento. É este retorno sobre si mesmo, esta introspecção que, segundo BACHELLARD (1938), constitui um ato de racionalismo aplicado e que permite tornar-se um “ser de conhecimento”. Para PIAGET (1967), pode-se obter excelentes introspecções com crianças a partir de 7 anos de idade.

Para BARBIN, esta observação é interessante no tocante à aprendizagem da demonstração.

## 2.2 - ESTUDO EPISTEMOLÓGICO

### 2.2.1 - OS TRABALHOS DE BALACHEFF

N. BALACHEFF (1982) se interessa, como faz ARSAC (1988), pelo problema da “*prova*” e pelo significado da “*demonstração*” como instrumento de “validação” na comunidade dos matemáticos. Nesse sentido, a **demonstração** destaca-se na Matemática em relação às ciências experimentais. O autor analisa o assunto tendo em vista três pontos importantes:

1. A distinção entre “*explicação*”, “*prova*” e “*demonstração*”.

A “***explicação***” situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar a outrem o caráter de verdade de um enunciado matemático. Reconhecida como convincente por uma comunidade, a explicação toma um estatuto social, constituindo-se uma “***prova***” para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, o autor chama, somente neste caso, de “***demonstração***”*.*

As “***provas***” são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro.

As “***demonstrações***” são provas particulares caracterizadas:

a) por serem as únicas aceitas pelos matemáticos;

b) por respeitarem certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (= axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;

c) por trabalharem sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

2. A função fundamental da “*contradição”* na evolução dos tipos de provas produzidas.

Tem-se aqui, como ressalta ARSAC (1988), uma retomada, no plano da didática, da dialética das provas e refutações de LAKATOS (1976). A produção de um “*contra-exemplo*” diante de uma hipótese, para BALACHEFF, leva a uma análise complexa: de início, a percepção da contradição colocada em evidência pelo contra-exemplo a uma hipótese pode não ser compartilhada pelos sujeitos cujas concepções quanto aos conhecimentos em questão são diferentes. Em seguida, as conseqüências tiradas podem ser muito variadas e não se resumem ao aspecto lógico que levaria a uma rejeição pura e simples da hipótese: pode haver aí uma mudança da hipótese para melhor, a retomada de uma definição, a rejeição do contra-exemplo, etc.

3. A ligação entre o tipo de prova e o nível de conceitualização diferencia-se igualmente no plano da linguagem.

Para BALACHEFF (1988), o aspecto experimental desse seu trabalho prevê verificar junto aos alunos, antes do ensino, a existência efetiva dos diferentes "*tipos de prova*", constituindo uma hierarquia, sua evolução diante das contradições e sua ligação com o nível de formalização de conceitos.

A hierarquia dessas provas é a seguinte: o "*empirismo ingênuo"*, a "*experiência crucial"*, o "*exemplo genérico"* e a "*experiência mental"*.

As três primeiras constituem um procedimento "*pragmático*" e a última, um procedimento "*intelectual*". Para o autor, é bom salientar que esta hierarquia não constitui a análoga hierarquia dos estágios piagetianos, pois um aluno pode passar de um nível de prova a um outro superior numa determinada situação.

### 2.2.2 - OS TRABALHOS DE BKOUCHE

O autor, ao estudar a demonstração em Geometria, ressalta a necessidade de se fazer o estudo epistemológico antes de introduzi-la no ensino da Matemática.

BKOUCHE (1988, 1990), constatando os métodos de raciocínio que se transformam, na medida em que novos problemas questionam sua validade, está preocupado com uma questão crucial para o didata e o professor, qual seja, se podem ser recuperadas, ao longo dessas evoluções históricas, as características permanentes do que se convencionou chamar de **demonstração**; ou, então, se trata de uma unificação de linguagem "*a posteriori*" de procedimentos de validação diferentes cujo único ponto em comum seriam os objetos aos quais eles se aplicam (a Geometria).

Três características permanentes (no caso de elas existirem) podem se constituir nos objetivos principais do ensino: o caráter "*a priori*", o caráter de "*necessidade"* e o caráter de *"universalidade"* da **demonstração**.

Como destaca ARSAC (1988), para BKOUCHE o caráter "*a priori*" refere-se ao fato de que a demonstração possibilita fazer economia da experiência e ter certeza de se atingir um objeto que já possua estatuto matemático. Nesse caso, a manipulação do "objeto" é substituída por uma manipulação de idéias, um raciocínio, que leva a uma certeza superior.

Esta certeza revela o caráter de "*necessidade*" resultante das conclusões demonstradas, necessidade esta obtida graças ao fato de serem respeitadas certas regras bastante rígidas para se obter novos conhecimentos a partir do que se conhece.

Esta necessidade, enfim, se inscreve no caráter "*universal*" da demonstração ao referir-se ao fato de que as características precedentes supõem que os objetos sobre os quais se produz o raciocínio, que estão sempre presentes na demonstração, têm estatuto de abstração, em que se apóia e se constrói o raciocínio.

# *CAPÍTULO 3 - A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA*

Com o desenvolvimento das ciências, a Humanidade formou conceitos, estabeleceu relações, fez classificações e desenvolveu técnicas tais como a demonstração que serviu para "*esclarecer*" e "*convencer*" os indivíduos da verdade dos conceitos. A Matemática surgiu para o homem como necessidade para estruturar e organizar alguns desses conhecimentos.

A análise epistemológica da **demonstração** feita no capítulo anterior permite perceber que os problemas relativos ao significado do processo de demonstrar não são sempre os primeiros a ser estudados em Matemática. Entretanto, é importante levar em consideração as relações entre Epistemologia e Didática, ou seja,

> *"as necessidades formuláveis em termos de conhecimentos dos processos pelos quais os conceitos matemáticos se formam e se desenvolvem e, geralmente, o conhecimento das características da atividade matemática"* (ARTIGUE, A.,1990, p. 2)

No presente capítulo, estudaremos alguns aspectos que envolvem a "transposição didática" dos conceitos geométricos através da técnica da **demonstração**, ou seja, analisaremos as transformações que ocorrem nesse processo. Nosso objetivo é verificar quais os efeitos que essas transformações e adaptações provocam nos alunos, tendo como base uma análise da "*Proposta Curricular de Matemática - 1º grau*" para o Estado de São Paulo, uma análise de alguns "*livros didáticos*" e um estudo das "*concepções dos professores*" sobre o ensino da demonstração.

## 3.1 - A PROPOSTA CURRICULAR

A "*Proposta Curricular para o I grau*" (atualmente Ensino Fundamental) do ensino do Estado de São Paulo justifica, inicialmente, a inclusão da Matemática no currículo escolar, afirmando que:

> *"... ela é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as que lidam com grandezas, contagem, medidas, técnicas de cálculo etc.;*
>
> *... aprender Matemática é mais do que aprender técnicas de utilização imediata; é também interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, sensibilizar-se para perceber problemas tanto quanto preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar, transcender o imediatamente sensível."* (p.13)
>
> *"Esta proposta foi estruturada tendo em vista as questões até aqui apresentadas. Os assuntos que a compõem são distribuídos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas. Através deles pretende-se atingir as grandes metas para o ensino de Matemática na escola básica: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico..."* (p. 14)

O ensino-aprendizagem da demonstração, na "*Proposta Curricular de Matemática*", está previsto no início da 7ª série:

> *"1. Teorema de Pitágoras: uma verificação experimental, uma demonstração, uma generalização.*
>
> *2. Congruência de figuras planas, de triângulo e aplicações."* (p. 24)

Na 8ª série, o estudo da demonstração desenvolve-se com os seguintes tópicos:

> *"1. Teorema fundamental da proporcionalidade: verificação experimental e demonstração.*
>
> *2. Teorema de Tales e aplicações.*
>
> 3. Verificação experimental e demonstração dos casos de semelhança de triângulos.
>
> *4. Relações métricas no triângulo retângulo.*
>
> *5. Demonstração do teorema de Pitágoras."* (p. 25)

Algumas observações são feitas, com o intuito de orientar o professor na ministração dos conteúdos. Assim, por exemplo, nos casos de congruência de triângulos, recomenda-se:

> *"Esse é o momento para se trabalhar com situações que utilizem localmente o raciocínio hipotético-dedutivo, fazendo uso dos casos de congruência de triângulos. Demonstrando, por exemplo, propriedades como: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes."* (p. 113)

A propósito do Teorema de Tales:

> *"Pode-se, agora, demonstrar o Teorema de Tales, como conseqüência do teorema fundamental de proporcionalidade, evitando-se, assim, os inconvenientes da demonstração que é geralmente utilizado (onde fica sem explicação o caso em que os segmentos são incomensuráveis)".* (p.117)

Na verificação experimental e demonstração dos casos de semelhança de triângulo:

> *"As demonstrações desses teoremas podem ser realizadas pelos próprios alunos, como aplicações do teorema fundamental sobre proporcionalidade e dos casos de congruência de triângulos. As demonstrações devem ser precedidas por uma verificação experimental dos casos, através de construções com régua, compasso e transferidor."* (p. 117)

Na 8ª série, espera-se que o aluno amplie seu conhecimento sobre os conjuntos numéricos: o número irracional $\sqrt{2}$. A "*Proposta Curricular*" apresenta algumas sugestões para se trabalhar com esse assunto.

O professor tem agora duas opções:

> *"1ª simplesmente dizer ao aluno que o número não é racional, e, portanto, não pode ser posto sob a forma p/q com p, q $\in$ Z; q $\neq$ 0 e p/q recebe o nome de irracional,*
>
> *2ª de acordo com o nível e interesse da classe, demonstrar que $\sqrt{2}$ não pode ser posto sob a forma p/q, p, q, $\in$ Z; q $\neq$ 0, isto é, que $\sqrt{2}$ não é racional". (p. 124)*

A **demonstração**, em princípio, num contexto de ensino para alunos a partir de 13 anos, não apresenta objetivos bem nítidos. Ela pode ser utilizada como "instrumento" de validação de teoremas, mas a necessidade de tal instrumento não é geralmente percebida pelos alunos, como acontece com muitos alunos do 2º grau, os quais nela vêem apenas uma confirmação das premissas anteriormente enunciadas.

Analisando esta "*Proposta Curricular de Matemática"*, podemos observar que ela toma, como ponto de partida, as atividades perceptivas de manipulação e observação para chegar à sistematização na forma de classificar as figuras através de suas propriedades e da representação e construção pelo desenho geométrico. Porém, ela não esclarece como trabalhar para fazer emergir uma demonstração formal.

Numa visão geral, a "*Proposta"* faz a previsão dos tópicos a serem desenvolvidos, mas não sugere como trabalhar formalmente essas demonstrações.

Consideramos que o conteúdo desta "*Proposta Curricular"* é bom na medida em que as primeiras experiências geométricas prevêem a inclusão de trabalho com ênfase em atividades intuitivas acrescidas da finalidade de desenvolvimento dos conceitos geométricos. Mas, nós nos preocupamos com o professor que não sabe que direção tomar no trabalho com a Geometria demonstrativa, aspecto que nem todos os livros didáticos analisados contemplam.

A "*Proposta Curricular"* sugere que os grandes temas: *Números*, *Medida* e *Geometria* tenham um tratamento simultâneo, em espiral, sempre que possível, em vez do estudo de uma seqüência linear de assuntos, em prejuízo de certos temas, como a Geometria, quase sempre deixada para o fim da programação letiva. Sugere também que, no desenvolvimento dos temas, sejam evidenciadas idéias fundamentais como, por exemplo, a de proporcionalidade, a qual aparece no desenvolvimento do tema *Números* (razões, proporções) e também em *Geometria* (semelhança de figuras). Acreditamos que o professor precisa de um apoio maior, de mais sugestões nesse assunto.

Apesar de a "*Proposta Curricular"* prever o ensino-aprendizagem da demonstração em Geometria a partir da 7ª série, sabemos, através de **Questionários** respondidos por professores (**Anexo I**), que a maioria dos docentes não aborda o assunto e nem lhe dá a importância que é conferida à

Aritmética e à Álgebra. Julgam que alguma Geometria é necessária, mas dizem que a "*Proposta Curricular*" não esclarece exatamente que conceitos e aptidões devem ser desenvolvidos, bem como que estratégias metodológicas devem ser trabalhadas com a demonstração.

Analisando a "*Proposta Curricular*", observamos que ela se preocupa com os avanços das ciências da Educação, como a Sociologia, a Lingüística e a Epistemologia, ou seja, com a teoria do conhecimento, seu objeto e métodos. A presença da Epistemologia no campo da Didática fica claro quando investiga a formação histórica dos conceitos e processos matemáticos, suas contradições, rupturas e reestruturações na formação dos conceitos pelos alunos.

Nesse ponto de vista, Célia Carolino PIRES (1994) ressalta que a **"***Proposta Curricular*" atual submete à reflexão dos professores questões como:

1. a importância da "*interação dos alunos*" na descoberta e assimilação do conhecimento matemático;

2. a importância do recurso à "*resolução de situações-problema*", oportunidade na qual o aluno é motivado a sugerir hipóteses, criar procedimentos, discuti-los com os colegas, validar resultados encontrados, extrapolar para outras situações;

3. a necessidade de adquirir "*competência lingüística*" na língua materna e na linguagem matemática;

4. a importância de ver os "*erros*" como parte integrante na "*construção do saber matemático*".

### 3.2 - OS LIVROS DIDÁTICOS

É através do livro didático, um dos meios de consulta do professor para efetivar a transposição didática em sala de aula, que podemos também detectar a situação do uso do raciocínio dedutivo no ensino-aprendizagem da demonstração.

Estamos interessados em entender a evolução das observações dos autores no tocante à valorização do raciocínio dedutivo e à demonstração em Geometria no ensino fundamental, ou seja, na 7ª e 8ª séries do 1º grau (hoje Ensino Fundamental), ou 3º e 4º anos ginasiais antigos.

Vamos considerar o ensino-aprendizagem da Geometria dedutiva desenvolvido nos últimos 50 anos, distribuídos nos seguintes **períodos**:

**1º período**: “antes” do advento do movimento da *Matemática Moderna*; momento este marcado por uma focalização exclusiva dos conteúdos matemáticos.

**2º período**: “durante” o período da *Matemática Moderna* (entre o início de 1960 e 1975), momento este em que se desenvolvia uma pedagogia da “ação e da descoberta”, por exemplo, os trabalhos de Z. Dienes e G. Papy.

**3º período**: “após” o movimento da “Matemática Moderna”, momento em que surge na França a Didática da Matemática com um corpo importante de conceitos teóricos próprios atualmente reconhecida como disciplina autônoma no campo científico.

#### 3.2.1 - 1º PERÍODO

Observamos que os livros didáticos analisados dessa época costumam conter todas as demonstrações. Neles, a demonstração é bem estável e organizada. Confirmamos esse fato também nos depoimentos de alguns professores daquela época, bem como de alguns de seus discípulos e seguidores, que nos relataram que, naquela época, tanto professores como alunos não a dispensavam, mas a respeitavam, a valorizavam. Afirmaram também que a demonstração de teoremas era ensinada com rigor e cabia aos alunos, muitas vezes, a obrigação de memorizá-la sem entender o seu significado. Decoravam mais por respeito à autoridade do professor e por temor de notas baixas.

Por ocasião dos exames, o aluno além da obrigação de lembrar o Teorema *"número tal"*, deveria enunciá-lo e demonstrá-lo, pois era costume numerar os teoremas no encadeamento de uma demonstração, para facilitar o trabalho. Assim, o que a maioria dos alunos parecia aprender era demonstrar certos problemas anteriormente mostrados pelos professores em salas de aula e memorizados para serem repetidos nos exames.

Os livros didáticos analisados desse 1º período, ao iniciar-se o curso de Geometria, apresentam os conceitos primitivos: ponto, reta e plano. Discutem-se e exemplificam as definições de alguns conceitos indispensáveis a um sistema dedutivo: proposições, postulados, teoremas, hipóteses, teses e demonstração. E logo após propõem os exercícios referentes aos assuntos estudados.

Vejamos o tratamento dado à Geometria dedutiva por alguns desses autores nesse **1º momento**, em seus livros didáticos:

1. STÁVALE, Jácomo. ***Quarto anno de Mathematica***. (**Para o Quarto Anno dos Cursos Gymnasiaes seriados e dos cursos fundamentaes das Escolas Normaes**). Companhia Editora Nacional, 1935.

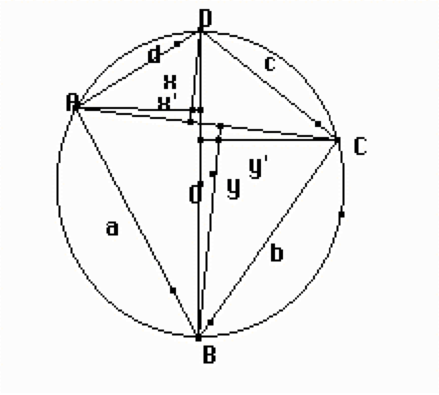
Nas páginas 155 e 156, podemos observar como o aluno, por exemplo, deveria tomar consciência do ***segundo theorema de Ptolomeu:***

> "As diagonaes de um quadrilatero inscripto estão entre si como as sommas dos productos dos lados que terminam em suas extremidades".

$$\text{Th. } \left\{ \frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{ad+bc} \right.$$

*"Seja 2R o diametro da circumpherencia **O** circumscripta, **m** e **n** as diagonaes do quadrilatero, e $\chi$, $\gamma$, $\chi'$ e $\gamma'$ as alturas dos triangulos ADC, ABC, ABD e CBD."*

$\Delta$ ADC $\begin{cases} cd = 2R\chi \\ cdn = 2R\chi n \\ cdn = 4R \times (\chi n) \div 2 \quad \textbf{(I)} \end{cases}$




$\Delta$ ABC $\begin{cases} ab = 2R\gamma \\ abn = 2R\gamma n \\ abn = 4R \times (\gamma n) \div 2 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

*Sommando ( **I** ) e ( **II** ):*

*n(ab+cd)* = 4R (área $\Delta$ ADC + área $\Delta$ ABC) $\therefore$
*n(ab+cd)* = 4R $\times$ área quadrilátero ABCD (**III**)

$\Delta$ ABD $\begin{cases} ad = 2R\chi' \\ adm = 2R\chi' m \\ adm = 4R \times (\chi' m) \div 2 \quad \textbf{(IV)} \end{cases}$

$\Delta$ BCD $\begin{cases} bc = 2R\gamma \\ bcm = 2R\gamma m \\ bcm = 4R \times (\gamma' m) \div 2 \quad \textbf{(V)} \end{cases}$

*Sommando* (**IV**) e (**V**):

*m(ad+bc)* = 4R(area $\Delta$ ABD + area $\Delta$ BCD) $\therefore$

*m(ad+bc)* = 4R $\times$ area quadrilatero ABCD ( **VI** )

*Comparando ( **III** ) e ( **VI** ):*

$m(ad+bc) = n(ab+cd) \therefore [m(ad+bc)] \div n = (ab+cd) \therefore$

$m \div n = (ab+cd) \div (ad+bc)$ *C.Q.D.*

2 - ROXO - THIRÉ - MELO e SOUZA. ***Matemática Ginasial. 3ª série***. Livraria Francisco Alves, 1944.

A obra contempla duas partes: *Álgebra* e *Geometria dedutiva.*

A *Geometria dedutiva* estuda:

Unidade VI - *Introdução à Geometria dedutiva*

Unidade VII - *A Reta*

Unidade VIII - *O Círculo*

Na unidade *Introdução à Geometria dedutiva* (p. 131-138), são desenvolvidos os seguintes tópicos, sob o título *Proposições Geométricas; Hipóteses; Tese; Demonstração*:

1. **Método dedutivo**: define-se o que é "*método dedutivo*", de ampla aplicação na Matemática, principalmente no estudo da Geometria dedutiva. Apresenta, no rodapé da página 131, informações sobre a origem da Geometria entre os egípcios, introduzida na Grécia por Tales de Mileto (640-550 a.C.), e sobre Pitágoras (580-501 a.C.), discípulo de Tales de Mileto, como sendo o primeiro a empregar o nome *Matemática* e tido como o criador, entre os gregos, do que eles chamavam de *Aritmética*. Informa também que foi na escola fundada por Pitágoras que surgiu a Geometria demonstrativa que se desenvolveu com Platão (429-348 a.C.).

2. **Proposições geométricas;** 3. **Definições;** 4. **O enunciado dos teoremas;** 5. **Demonstração de um teorema;** 6. **Teoremas recíprocos;** 7. **Proposições contrárias;** 8. **Preposições associadas;** 9. **Métodos de demonstrações**; 10. **Redução ao absurdo**; 11. **Exercícios**: aqui se pede,

primeiro, para separar a hipótese e a tese de cinco proposições, traduzindo-as simbolicamente quando for necessário e, segundo, para enunciar a recíproca de cada uma das proposições do exercício anterior.

A partir da página 138, o autor apresenta os conceitos primitivos: ponto, linha, superfície, reta, plano etc, e continua com a metodologia inicial, ou seja, demonstrando tudo. Finaliza sua obra estudando o **círculo**.

3 - QUINTELLA, Ary. ***Matemática. Terceiro Ano***. Companhia Editora Nacional, 1945.

O livro divide-se em duas partes: *Álgebra* e *Geometria dedutiva.*

No título *Introdução à Geometria dedutiva* acham-se os tópicos:

**I - Proposições geométricas**, em que são estudados: 1. Geometria dedutiva. Proposições; 2. Relações entre as proposições.

**II - Noções primárias**, em que são estudados: 1. Noções primárias; 2. Linha reta; 3. Superfície plana e plano.

**III - Figuras geométricas, lugares geométricos**, em que são estudados: 1. Figura geométrica; 2. Deslocamentos.

O autor segue a mesma apresentação tópica dos demais autores de livros didáticos desse período, ou seja, demonstrando todos os teoremas.

4 - SANGIORGE, Osvaldo. ***Matemática, curso ginasial.* 3ª série**. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1958.

A obra apresenta uma parte final sobre *construções geométricas*.

A obra compreende as seguintes partes:

Cap. I - Razões e proporções. Aplicações aritméticas.

Cap. II - Figuras geométricas planas. Reta e círculo.

Cap. III - Linhas proporcionais. Semelhança de polígonos.

Cap. IV - Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais.

Em **Figuras geométricas planas. Reta e círculo**, estudam-se 1. *Entes geométricos. Proposições geométricas. Congruências;* 2. *Grupo dos entes geométricos: ponto, linha, superfície, reta e plano.*

Os exercícios de aplicação são formulados uns em forma de perguntas, outros através da solicitação para demonstrar com base em determinados postulados. Logo abaixo deles, são apresentadas as respectivas respostas.

### 3.2.2 - 2º PERÍODO

Com a chegada das principais idéias da Matemática Moderna ao ensino, muda-se a ênfase do ensino da Matemática para o extremo oposto. A Matemática Moderna deveria ser viva com ênfase na atividade do aluno. Pensou-se na possibilidade de uma melhoria do ensino da demonstração ao introduzir-se o "*método em duas colunas*". A Matemática agora é tida como mais divertida, mais alegre e criativa, opondo-se à tradicional, que estava centrada na memorização, na repetição exaustiva dos mesmos tipos de exercícios, com a obrigação de, muitas vezes, se decorar tudo.

O ensino da Matemática, nesse período, buscou através da linguagem da teoria dos conjuntos uma "unidade" na Matemática, a qual era acusada de ser ensinada como partes estanques. Uma ênfase maior foi dada aos fundamentos, aos conjuntos, às estruturas e aos morfismos. Procurou-se fundamentar nos estudos da Psicologia elaborados por PIAGET, buscando valorizar as etapas psicogenéticas, estabelecendo uma correspondência entre as estruturas mentais e as estruturas matemáticas.

As mudanças se sucederam cada vez mais rápidas, pois as teorias não paravam de evoluir. Foi nesse contexto, de amplo movimento do ensino científico que surgiu na França, por exemplo, a Didática da Matemática rompendo com o ponto de vista que se subjazia às reformas.

A Matemática Moderna atingiu a escola primária por volta de l964 através de cursos de atualização para professores primários promovidos pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, GEEM-São Paulo.

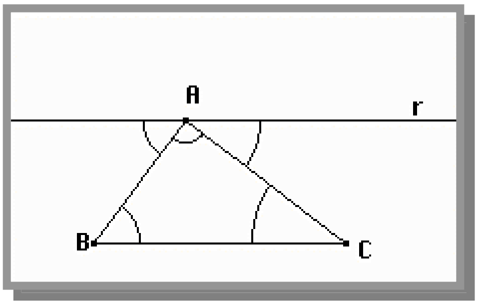
A demonstração "*em duas colunas*" aparece nos livros didáticos, nesse **2º período**.

5 - OLIVEIRA, Antonio Marmo de e SILVA, Agostinho. ***Biblioteca da Matemática Moderna***. Tomo I, Livros Irradiantes S/A, 1968

**Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo** (p. 300)

Teorema angular de Tales

*"A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° "*




***Hipótese*** {ABC é um triângulo qualquer

***Tese*** {m($\hat{A}$) + m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = l80°

***Construção****:*

Tracemos por A uma reta r paralela à reta suporte de $\overline{BC}$, que pelo postulado de Euclides existe e é única.

***Demonstração***:

| *Argumentos* | *Justificações* |
|---|---|
| 1) r // BC | 1) por construção |
| 2) â ≅ ângulo B | 2) ângulos alternos internos |
| 3) ângulo b ≅ ângulo C | 3) ângulos alternos internos |
| 4) m(â) + m($\hat{b}$) + m(Â)=180° | 4) ângulos com o mesmo vértice e no mesmo semi-plano. |
| 5) m($\hat{A}$) + m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = l80° | 5) de 2,3 e 4. |

*Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.*

C.Q.D.

### 3.2.3 - 3º PERÍODO

Após a Matemática Moderna, os livros didáticos examinados mostram que a maioria dos exercícios não parece se preocupar em despertar o raciocínio lógico. Parece que não se dá mais ênfase na capacidade de o estudante desenvolver sozinho um raciocínio, pois grande parte dos exercícios consistia em simples esquemas de completar espaços.

O ensino da Geometria passou a ser abandonado pelos professores, os quais a planejam para o último ano, conforme testemunho dos professores pesquisados. Ensinar e aprender Geometria por meio de espaços vetoriais ou por meio de transformações, como pregava a Matemática Moderna, era difícil tanto para professores, como para alunos, por se tratar de nova abordagem. E a Geometria, cada dia mais, foi sendo relegada ao último plano no currículo escolar de 1º grau. Sem saber o *"quê"* e *"como"* ensinar, a maioria dos professores fugia do ensino dedutivo. Em face disso, começaram a surgir críticas referentes ao seu ensino por parte de psicólogos, pedagogos e matemáticos. Questionavam a passividade dos alunos perante a Matemática, a aversão à formalização, conseqüentemente, aversão à dedução e à demonstração. Ser rigoroso passou a ser algo ultrapassado, chegando–se a afirmar que o rigor até dificultava a criatividade dos alunos, conforme depoimentos dos professores entrevistados.

Os livros didáticos analisados conservam, na maioria das vezes, as "demonstrações" dos teoremas mais tradicionais, como o de Tales e o de Pitágoras e, na parte de exercícios, diminuem ou mesmo abolem aqueles para serem demonstrados. Quando pedem demonstrações em salas de aula, o comando de ação é para "repetir" a demonstração do livro. No dia-a-dia da sala de aula, alguns professores pesquisados deixam de incentivar seus alunos para **"***provar*", "*justificar*" ou "*demonstrar*".

Vamos analisar o tratamento dado à demonstração por dois autores de livros didáticos bem atuais:

| |
|---|
| 6 - BIGODE, Antonio José Lopes. ***Matemática Atual.*** 8ª série. São Paulo, Atual Editora, 1994. |

**Teorema de Pitágoras** (cap. 8, p. 167)

Inicialmente, o autor usa uma "*Atividade experimental*", pela qual, através de dobraduras, recortes e medições com régua e alguns cálculos, leva o aluno a concluir que : "*a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*". O autor pondera a possibilidade da imprecisão dos recortes com a tesoura e das medidas com instrumentos de medição. Mas sugere que se "*aceite*" o teorema. Ele afirma que:

> *"para nos certificarmos de que se trata de um resultado geral, temos que tentar demonstrá-la. E a demonstração desse fato <u>ocupa várias páginas da história da matemática</u>. "* (grifo nosso)
>
> *Sempre que se fala de uma demonstração, vem logo à cabeça o teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Isso porque, desde sua formulação, matemáticos e curiosos de todos os cantos do mundo, desejosos de <u>eternizar</u> seus nomes através de uma demonstração original do teorema, perseguiram essa meta.* (grifo nosso)
>
> *Foram catalogados 370 demonstrações diferentes do famoso teorema. Entre os seus demonstradores destacam-se: Euclides de Alexandria (séc. III a.C.), Bhaskara, o hindu ( séc. IX),*

> *Leibniz ( séc XVII), Leonardo da Vinci ( l452-1519) e James Garfield (séc.XIX), presidente dos EUA.*
>
> *Recentemente, o professor Paulus Gerdes, de Moçambique, exibiu um modelo baseado na cultura dos povos africanos que gera infinitas demonstrações do teorema de Pitágoras".*

Observamos que muitos professores, que pretendem entender melhor o que é demonstração, ficam preocupados com essas orientações do autor. Exemplo disso é a resposta dada por um professor ao nosso Questionário:

> "*a demonstração de teoremas é algo inatingível e tarefa para pesquisadores ou até poderia ser mais interessante para alunos de 3º grau"*.

O autor desta obra mostra uma demonstração (p. 168) atribuída a Pitágoras. Mas o leitor, professor ou aluno*,* poderá constatar que se trata de uma demonstração pronta, e que ele, como leitor, deverá aceitá-la.

Ao final da demonstração, o autor conclui: "*aí está a relação de Pitágoras*".

Em *"Atividades"* (p. 169):

> *Aplique o que você aprendeu, fazendo os exercícios no caderno*. ( grifo nosso)

2) Considere o triângulo retângulo ABC, em que ***b*** e ***c*** são os catetos e ***a*** a hipotenusa, ***h*** é a altura relativa à base AB, ***m*** e ***n*** projeção dos catetos sobre a hipotenusa.

a) Calcule ***h,*** sabendo que ***m =*** 9 cm e *n* = 4cm

b) Calcule ***a*** , sabendo que ***m*** = 3 cm e ***n*** = 9 cm

c) Calcule ***a***, sabendo que ***b*** = 8 cm e ***c*** = 6 cm

d) Calcule ***b***, sabendo que ***a =*** 13 cm e ***c*** = 12 cm

e) Calcule ***h***, ***b*** e ***c***, sabendo que ***m*** = 16 cm e ***n*** = 9 cm

f) Calcule ***h***, sabendo que ***b*** = 3 cm e ***c*** = 4 cm

Se você fez as atividades anteriores com os devidos cuidados na medição e no cálculo, deve ter confirmado que "*a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*". (grifo nosso)

Vemos aqui um caminho de automatização exaustiva e sem significado para o aluno.

7 - IMENES e LELLIS. ***Matemática.*** 7ª série**.** Editora Scipione, 1997.

Trata-se de um dos mais recentes livros didáticos que o professor tem à sua disposição nas livrarias nacionais para subsidiar e inspirar sua tarefa de orientador das atividades com seus alunos, ou seja, para inspirar a sua *transposição didática*.

Vejamos como esses autores concebem o ensino-aprendizagem da demonstração, por exemplo, a do ***Teorema de Pitágoras***, pois, como já nos referimos anteriormente, os livros didáticos atuais apresentam somente as principais demonstrações, as mais usadas, quais sejam, a de Pitágoras e de Tales.

Primeiramente, constatamos que os autores buscam na história dos povos da Antigüidade, por exemplo, entre os egípcios e os gregos, a necessidade do uso da propriedade do triângulo de lados 3, 4 e 5 nas construções de suas pirâmides e monumentos. É uma maneira de incentivar os alunos a participarem na redescoberta e construção dos conceitos levando em conta a evolução histórica. Todos os conceitos da Matemática têm uma história. A demonstração também tem a sua.

Observa-se, na página 206, um questionamento feito pelos gregos, os primeiros a descobrirem o valor da razão. Essa abordagem no livro didático é boa porque provoca, desafia e encoraja o aluno a fazer também perguntas, a propor outras soluções, a desenvolver o seu potencial criativo, explorando o problema de maneira independente.

"*Será que o ângulo é reto porque os números são consecutivos?*"
… "*mas, como foi que eles descobriram essa relação?*"

No final desta mesma página, lemos:

"*Vamos ver um modo de chegar a essa conclusão. Acompanhe*".

Na página 207, encontramos:

"*Conversando sobre o texto*"
*Você é capaz de repetir a dedução apresentada?*" (grifo nosso)

Na página 208:

***Exercícios***

"34. *Este exercício é para verificar se você entendeu a demonstração do teorema de Pitágoras. Observe a figura e responda*..."

Aqui também, parece-nos, o aluno recebe mais um modelo de uma demonstração acabada, acessível por imitação, sem possibilidade de trabalhá-la dela participando com ações e reflexões.

## 3.3 AS CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES

Objetivando levantar as concepções de **demonstração** por parte dos professores, quando ensinam Geometria, elaboramos um *Questionário* (**Anexo 1**) que foi respondido individualmente por 55 professores da rede pública e particular do ensino fundamental paulista.

### 3.3.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

O *Questionário*, contendo 25 questões, está dividido em duas partes: a ***primeira parte***, contendo dados do entrevistado e questões de 1 a 4, procurou verificar a formação acadêmica e a prática desses professores, e em que se apóiam para trabalhar; a ***segunda parte***, contendo as questões 5 a 24, procurou detectar as atividades dos professores no ensino da Geometria, quais as dificuldades percebidas por parte de seus alunos e que estratégias usam para saná-las. A questão 25 procurou obter o comentário do professor sobre a pesquisa.

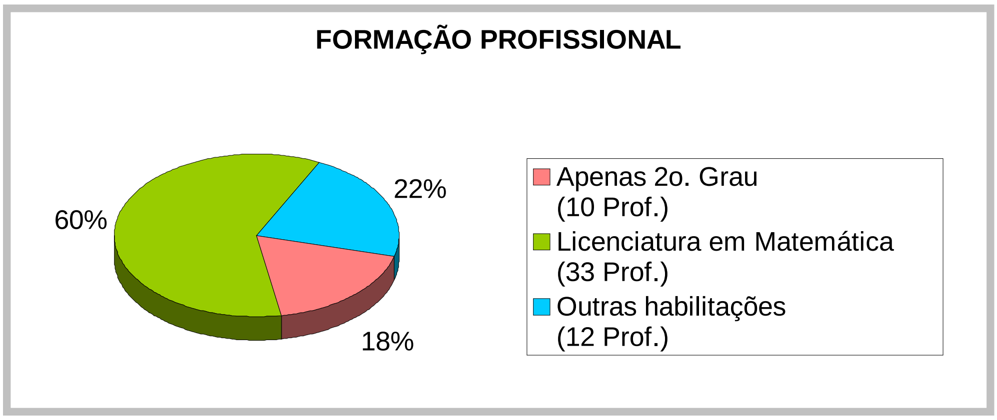
Neste questionário, como um todo, estamos interessados em verificar o que os professores pensam sobre o seu próprio desempenho profissional, no intuito de subsidiarmos o seu trabalho em classe e conhecer suas fontes de pesquisa em relação à Geometria.

**I PARTE - Análise da formação profissional, experiência e faixa etária do entrevistado**

**Formação profissional**

( ) Apenas 2º grau
( ) Licenciado em Matemática
( ) 3º grau incompleto
( ) Outras habilitações. Especifique:

Analisando os dados levantados referentes a esta questão, obtivemos a seguinte distribuição:



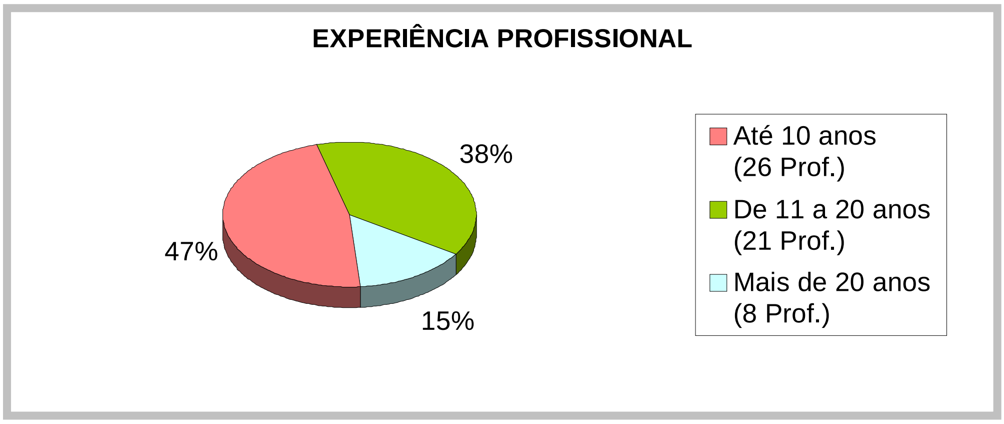

Verificamos que 45 professores (82%) possuem algum tipo de formação superior. Porém, 10 professores (18%) não o possuem. E a preparação profissional destes levaria aproximadamente quatro anos.

**Experiência profissional**

Há quanto tempo leciona?

( ) Até 10 anos ( ) De 11 a 20 anos ( ) Mais de 20 anos

Obtivemos a seguinte distribuição:



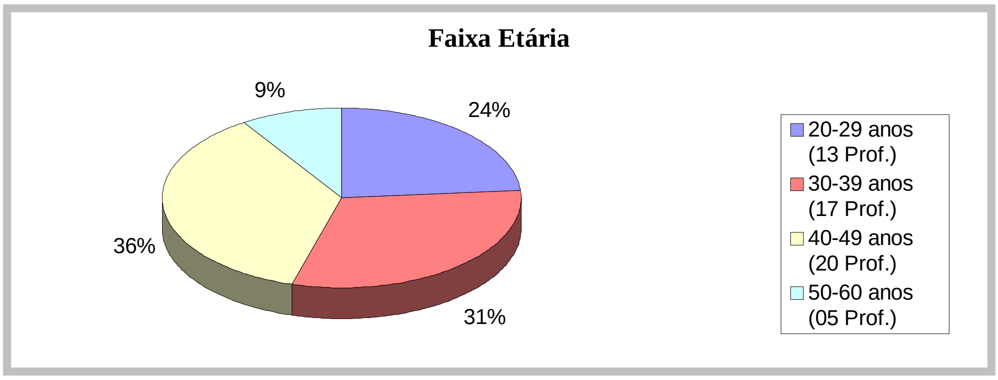

Temos a seguinte informação: 53% (29 professores) trabalham há mais de 10 anos, fato que nos leva a pensar que os educadores em ação têm considerável vivência da realidade do cotidiano de uma escola pública e/ou particular, conhecendo bem de perto as dificuldades da trajetória de um educador e professor de Matemática, de modo especial do professor de Geometria.

**Faixa etária**

( ) 20 - 29 ( ) 30 - 39 ( ) 40 - 49 ( ) 50 - 60

**Escolas em que leciona** (graus e séries)

Extraímos as seguintes informações:




As respostas evidenciaram que 76% (42 professores) têm idade igual ou superior a 30 anos, fato que nos leva a pensar na possibilidade de uma relativa experiência de vida do professor em todos os setores.

01. Você conhece a **Proposta Curricular de Matemática** da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo para o 1º grau?
( ) sim ( ) não ( ) em parte
Dê sua opinião a respeito dela:
Você a utiliza? ( ) sim ( ) não ( ) às vezes
Comente sua resposta:

02. Você utiliza livro didático em suas aulas de Geometria?
( ) sim ( ) não ( ) às vezes
Justifique sua resposta:

03. Você acha que os livros didáticos, no tocante ao assunto Geometria, estão de acordo com as orientações da Proposta Curricular?
( ) sim ( ) não ( ) em parte
Comente sua resposta:

04. À época da sua formação profissional (Faculdade), você teve oportunidade de estudar **Geometria** de forma a lhe dar subsídios para trabalhar com os alunos?
( ) sim ( ) não ( ) em parte
Comente sua resposta:

As questões acima (1 a 4) estão relacionadas com o intuito de verificar como é feita a transposição didática dos conceitos geométricos, bem como levantar o tipo de concepções que esses professores têm com base nas sugestões feitas pela Proposta Curricular de Matemática da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, na utilização de livros didáticos e na formação profissional obtida na Faculdade.

## II PARTE - Análise da prática dos professores no ensino da Geometria

| 5. Você trabalha os teoremas da Geometria Plana? Justifique sua resposta:<br>( ) sim ( ) não ( ) em parte |
|---|

Cruzando as questões que dizem respeito à *experiência profissional*, à *formação acadêmica* e à *oportunidade de estudar a Geometria na sua formação acadêmica*, relacionada com a **Questão 5,** voltada ao *trabalho dos teoremas de Geometria plana* em sala de aula, obtém-se os seguintes **quadros**:

### QUADRO 1

| **Experiência profissional**<br><br>**Há quanto tempo leciona?** | **Q5: Trabalha os teoremas da Geometria Plana?** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | | NÃO | | EM PARTE | | N/R | | TOTAL | |
| | Nº | % | Nº | % | Nº | % | Nº | % | Nº | % |
| Até 10anos | 10 | 43,5 | 8 | 44,4 | 7 | 53,8 | 0 | 0 | 25 | 45,5 |
| 11 a 20 anos | 8 | 34,8 | 7 | 39 | 6 | 46,2 | 1 | 100 | 22 | 40,0 |
| + de 20 anos | 5 | 21,7 | 3 | 16,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 14,5 |
| TOTAL | 23 | 100 | 18 | 100 | 13 | 100 | 1 | 100 | 55 | 100 |

Analisando o **Quadro 1**, constata-se que 43,5% (23 professores) trabalham os teoremas, sendo que 10 deles têm até 10 anos de experiência docente.

Por outro lado, constata-se que 21,7% (5 professores), que trabalham os teoremas, estão entre aqueles de maior tempo de experiência (mais de 20 anos).

**Comentário**: será que os professores formados recentemente estão recebendo formação específica em Geometria? Por outro lado, 16,6% (3 professores) dentre os que têm mais tempo de docência (mais de 20 anos), que afirmam que não trabalham os teoremas da Geometria, será que receberam formação específica?

Destacamos comentários feitos por alguns professores entrevistados:

> *1 - "O conteúdo dado na Faculdade foi de alto nível, mas não esclareceu nada para ser dado aos nossos alunos que têm um nível baixo de cultura."*
>
> *2 - "Na faculdade, a única disciplina que usava a Geometria era Desenho Geométrico, que não trabalhava o aspecto* ***geometria dedutiva,*** *apenas fazia construções com régua e compasso. Quando os alunos tinham dúvidas, o professor alegava que era assunto de outro grau anterior* (colegial). *Tivemos também Descritiva que usava a Geometria (os conceitos) e quando precisávamos de ajuda, tínhamos que recorrer a estudos por fora da Faculdade."*
>
> *3 - "Não foi dado nem um pouco."*
>
> *4 - "A falta dessa base dificultou muito o trabalho com os alunos."*
>
> *5 - "A minha faculdade também não valorizou a Geometria."*

**QUADRO 2**

| Q4: À época de sua formação profissional, teve oportunidade de estudar Geometria de forma a lhe dar subsídios para trabalhar com alunos? | Q5: Trabalha os teoremas da Geometria Plana? | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | | NÃO | | EM PARTE | | N/R | | TOTAL | |
| | N.º | % | N.º | % | N.º | % | N.º | % | N.º | % |
| SIM | 6 | 26 | 3 | 16,7 | 1 | 7,7 | 0 | 0 | 10 | 18,2 |
| NÃO | 16 | 69,7 | 10 | 55,5 | 10 | 77,0 | 1 | 100 | 37 | 67,3 |
| EM PARTE | 1 | 4,3 | 5 | 27,8 | 2 | 15,3 | 0 | 0 | 8 | 14,5 |
| TOTAL | 23 | 100 | 18 | 100 | 13 | 100 | 1 | 100 | 55 | 100 |

Analisando o **Quadro 2**, constata–se que 69,7% (16 professores dentre os 23) afirmaram que não tiveram oportunidade de estudar Geometria na faculdade, mas trabalham os teoremas, o que nos leva a supor que o professor procura se capacitar, para poder cumprir os programas mínimos, conforme seus depoimentos:

> 1 - "A falta dessa base dificultou muito o trabalho com os alunos."
>
> *2 - "Para lecionar, me virei sozinha. Usei meu bom senso, corri atrás de amigos, aprendi com os alunos e com minhas necessidades.*"
>
> *3 - "Fui obrigado, na base de tentativa e erro, a preencher esta lacuna.*"

**QUADRO 3**

| Formação profissional | Q5: Trabalha os teoremas da Geometria Plana? | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | | NÃO | | EM PARTE | | N/R | | TOTAL | |
| | N.º | % | N.º | % | N.º | % | N.º | % | N.º | % |
| Apenas 2º grau | 8 | 34,8 | 2 | 11,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 18,2 |
| Licenciado em Matemática | 8 | 34,8 | 14 | 77,7 | 11 | 84,7 | 0 | 0 | 33 | 60 |
| Outras habilitações | 7 | 30,4 | 2 | 11,1 | 2 | 15,3 | 1 | 100 | 12 | 21,8 |
| TOTAL | 23 | 100 | 18 | 100 | 13 | 100 | 1 | 100 | 55 | 100 |

Analisando as respostas do **Quadro 3**, vemos que, dos 10 professores com apenas o 2º grau, somente 2 não trabalham os teoremas. Dos 33 professores licenciados em Matemática, 19 afirmam que trabalham os teoremas pelo menos em parte. Dos 12 professores com outras licenciaturas, 9 trabalham o assunto.

Cerca de 82% dos 55 professores entrevistados têm uma licenciatura em Matemática (33 professores correspondendo a 60%) ou uma outra habilitação em nível superior (12 professores correspondendo aproximadamente a 22%). Mas 14 professores licenciados em Matemática afirmam que não trabalham os teoremas da Geometria Plana. Alguns justificaram o fato:

> *1 - "Nas unidades de estudos de supletivo não exploram* [sic] *os teoremas da Geometria Plana."*
>
> 2 - "Dificilmente trabalho Geometria."
>
> *3 - "... por lecionar em curso de suplência, meu tempo em sala é pouco, e há a necessidade de minhas aulas serem simples, diretas e práticas. "*
>
> *4 - "Eu os uso, rapidamente, em alguns problemas bem simples. Nada de complicações."*

*5 - “Procuro não complicar* (para mim!).”

Os **Quadros 1, 2** e **3** nos informam ainda que 53% (29 professores) têm mais de 10 anos de experiência docente. Dentre estes, 10 professores não trabalham os teoremas da Geometria Plana. Alguns comentários desses professores:

> *1 - “Não utilizo o termo teorema, trabalho o assunto sem abordar essa expressão.”* (Professor com 21 anos de experiência)
>
> *2 - “Construindo figuras geométricas e mostrando que ela está envolvida ao nosso redor.”* (Professor com 12 anos de experiência)

Nessa análise, encontram-se 23 professores que trabalham os teoremas da Geometria Plana (41% dos 55 entrevistados) dentre os quais 13 professores têm “*mais de 10 anos de experiência”*. Nos seus comentários, alguns professores justificam que trabalhar os teoremas é indispensável para a aquisição de conceitos geométricos e para o desenvolvimento do raciocínio.

> *1 - “Sempre que necessário, procuro trabalhar os teoremas buscando um melhor entendimento para os alunos”.* (Professor com 11 anos de experiência*)*
>
> *2 - “É necessário ao raciocínio lógico-expositivo”.* (Professor com 26 anos de experiência)
>
> *3 - “São teoremas fundamentais e universais por sua simplicidade e “potencialidade didática.”* (Professor com mais de 10 anos de experiência)
>
> *4 - “A necessidade de se demonstrar os teoremas é importante para que o aluno saiba o porquê das fórmulas relativas”.* (Professor com 11 anos de experiência)
>
> *5 - “É básico para a compreensão do “porquê” dos assuntos”.* (Professor com 20 anos de experiência)

**Questões: 8 e 10**

| |
|---|
| 08. Para você, o que é uma demonstração? |
| 10. O que você espera dos alunos quando tentam fazer uma demonstração? Justifique. |

Nosso estudo epistemológico mostrou a evolução histórica do significado da demonstração.

A **Questão 8** objetiva evidenciar as diferentes concepções dos professores sobre a *demonstração* e identificar o que eles esperam dos seus alunos em situação de resolução de problemas. Na **Questão 10** procura-se identificar o tipo de contrato didático estabelecido entre o professor e os seus alunos no que diz respeito à *demonstração* em Geometria.

Algumas definições de *demonstração* propostas pelos professores:

> 1 - “É expor um fato determinado em pequenos detalhes para melhor evidenciar um conteúdo matemático.”
>
> *2 - “É levar “da hipótese” à “ conclusão” por via de ferramenta completa e pertinente ao desenvolvimento.”*
>
> *3 - “É um processo capaz de chegar a uma verdade que precisa ser comprovada.”*
>
> *4 - “É uma melhor compreensão da Geometria e da Álgebra. É partir do concreto para o abstrato, com a finalidade de não nos prendermos a aspectos puramente mecânicos e mnemônicos. Na demonstração queremos provar o que é verdadeiro através do raciocínio lógico.”*
>
> *5 - “Mostrar do que veio, pra que e porque existem certas afirmações.*”
>
> *6 - “Raciocínio pelo qual se estabelece a verdade de uma proposição.”*
>
> *7 - “A demonstração “demonstra” ao educando como surgiu a fórmula e como deve ser utilizada. A demonstração deixa um conceito abstrato mais ao alcance do educando.”*
>
> *8 - “Demonstração para mim é usar verdades conhecidas para esclarecer se o que estamos afirmando no problema é verdadeiro ou falso.”*
>
> *9- “A demonstração é um raciocínio dedutivo onde a conclusão está contida nas premissas ou antecedentes como a parte no todo. É uma construção lógica através do relacionamento entre antecedente e conseqüente, entre hipóteses e tese, entre premissas e conclusão. É uma relação lógica que se estabelece entre as proposições dependendo o seu rigor do fato que a conclusão será sempre verdadeira, desde que as premissas também o sejam.”*
>
> *10 - “Mostrar de uma maneira prática e simples como se chegar a um teorema provando como verdadeiro. Mostrar o seu lado real e como chegar às fórmulas algébricas.”*

Essas definições dos professores nos levam a refletir na necessidade de se propiciar oportunidades para o aluno desenvolver o espírito crítico, formar conceitos geométricos, estabelecer relações e classificações dos vários conteúdos que ele (aluno) construiu, para posteriormente desenvolver a habilidade de prová-los e demonstrá-los. Sendo capaz de fazer uma análise, uma interpretação, de formular hipóteses, de utilizar analogias, o aluno estará apto a abstrair e raciocinar provando proposições afirmativas.

Respostas dadas à **Questão 10**:

*1 - "Espero que realmente ele chegue a uma conclusão correta que é a finalidade de uma demonstração."*

2 - "Espero que eles identifiquem as hipóteses, ou melhor, saibam levantar as hipóteses e saibam demonstrar as teses. Saber identificar as hipóteses e as teses já é meio caminho andado e muito difícil para os alunos."

*3 - "Justifiquem passo a passo todas as suas afirmações."*

*4 - "Em exercícios devemos manifestar o raciocínio lógico."*

*5 - "Espero que eles vejam as necessidades destas demonstrações e liguem as teorias de sala de aula com a vida deles."*

*6 - "Não falo em demonstrações para eles fazerem sozinhos."*

*7 - "Que aprendam o raciocínio matemático que será muito útil para as demais disciplinas e para a sua vida profissional."*

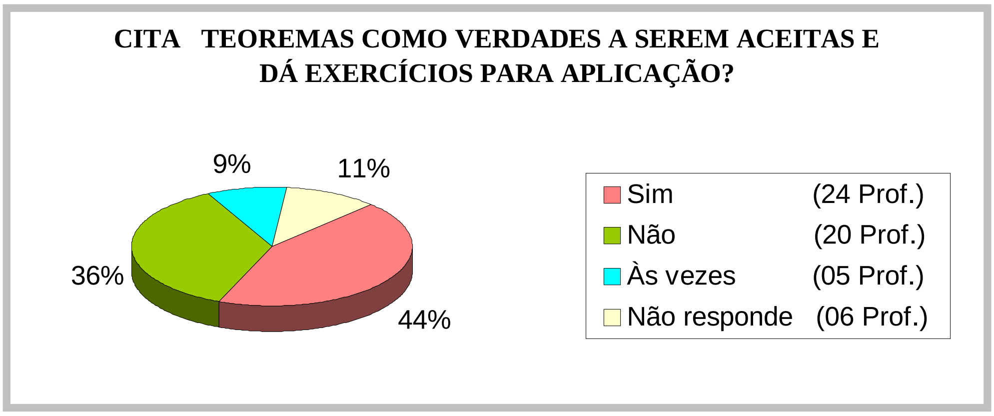
Levantadas tais concepções, pretendemos refletir com os professores acerca da importância de se conduzir o aluno através da Geometria para adquirir a capacidade de demonstrar, instrumentalizando-o para raciocinar com hipóteses, argumentar com lógica, estabelecer premissas e chegar a conclusões. É imprescindível também propiciar, para o dia- a -dia de nossas aulas, vivências que ensejem o desenvolvimento do espírito crítico de nossos alunos, bem como de sua capacidade de analisar, de interpretar, de formular hipóteses e de fazer analogias.

**Questões: 6, 7 e 9**

06. Quando você trabalha os teoremas, cita-os considerando-os como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dá exercícios para aplicação?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Opiniões pesquisadas:




Na análise das respostas, obtivemos a seguinte distribuição, a qual aponta que 44% dos professores citam os teoremas como verdades a serem aceitas e dão exercícios para a aplicação, e 36% dos professores discordam desta afirmação. Citamos algumas justificativas:

*1 - "... procuro aplicação em problemas."*

*2 - "As poucas vezes que trabalhei teoremas faço desta maneira pois não sei se estarei apto a responder certas perguntas dos alunos."*

Por esse comentário, percebe-se uma insegurança ao se ensinar noções que não domina.

*1 - "Os exercícios são para melhor visualização."*

*2 - "É o que dá para fazer."*

*3 - "Afirmo que é verdade. Dou uns dois exercícios usando o que ensinei. Tá no caderno do aluno para ser estudado."*

Um dos professores que concordou com nossa observação perguntou: *"Tem outro jeito?".*

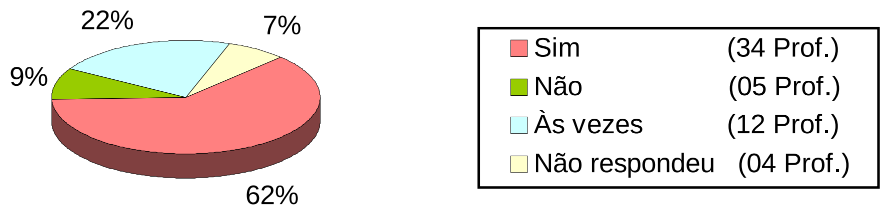
Os professores questionados parecem dar um tratamento tradicional aos teoremas, objetivando acomodar os alunos aos conhecimentos tradicionais, ao invés de formar inteligências inventivas e críticas, conforme a teoria cognitiva de PIAGET.

07. Você acha importante fazer a demonstração dos teoremas da Geometria?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta.

**ACHA IMPORTANTE FAZER DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS DA GEOMETRIA?**




Analisando as respostas dadas, obtém-se a seguinte distribuição, a qual aponta 62% (34 docentes) que consideram importante fazer a demonstração dos teoremas da Geometria.

22% (12 professores) acham que é importante, às vezes, fazer as demonstrações dos teoremas geométricos e 9% (5 professores) dizem que esse assunto não é importante.

Comentários de professores que acham importante fazer a demonstração dos teoremas:

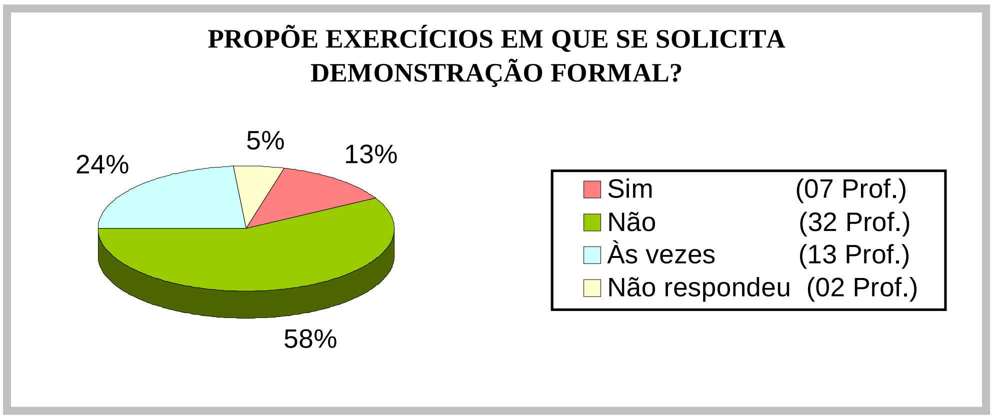
> *1 - "É um exercício excelente para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático que será estendido às outras disciplinas."*
>
> *2 - "Sim, mas eu não sei como trabalhar com a classe."*
>
> *3 - "É importante para dar uma lição prática e experimental."*
>
> 4 - "As demonstrações são muito importantes, os alunos não podem simplesmente aceitar."

Acreditamos na importância e necessidade de oferecermos uma capacitação para os professores de Geometria no ensino fundamental.

09. Você propõe aos seus alunos exercícios em que se solicita uma demonstração formal?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta.




Na análise desta questão, obtivemos a seguinte distribuição, mostrando que só 13% (7 professores) propõem exercícios em que se solicita demonstração formal e 58% (32 professores) não os propõem.

Voltando ao gráfico anterior, vemos que embora 62% (34 professores) achem importante fazer a demonstração dos teoremas da Geometria, somente 13% pedem aos alunos para que demonstrem. Foi significativa também a porcentagem de 41% (23 professores) em relação ao fato de se trabalhar, junto aos alunos, exercícios com demonstração, conforme **Quadro 4.**

## QUADRO 4

| Experiência profissional<br><br>Há quanto tempo leciona? | Q5: Trabalha os teoremas da Geometria Plana? | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | | NÃO | | EM PARTE | | N/R | | TOTAL | |
| | Nº | % | Nº | % | Nº | % | Nº | % | Nº | % |
| Até 10 anos | 10 | 43,5 | 8 | 44,4 | 7 | 53,8 | 0 | 0 | 25 | 45,5 |
| 11 a 20 anos | 8 | 34,8 | 7 | 39 | 6 | 46,2 | 1 | 100 | 22 | 40,0 |
| + de 20 anos | 5 | 21,7 | 3 | 16,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 14,5 |
| TOTAL | 23 | 100 | 18 | 100 | 13 | 100 | 1 | 100 | 55 | 100 |

Vejamos alguns comentários dos professores que indicaram que não propunham exercícios com demonstrações formais:

1 - "*Por não estar trabalhando a geometria e também porque acho que os alunos não precisam saber demonstrar e, sim, entender para poder aplicar ou utilizar os teoremas.*"

*2 - "Já é tão difícil fazer com que um aluno aprenda a resolver exercícios já comuns, imagine se eu ainda solicitar uma demonstração formal, o que ocorreria uma dificuldade maior."*

*3 - "Não acho necessário solicitar uma demonstração formal em exercícios."*

*4 - "Não gosto de obrigar os alunos a demonstrarem, mas sim motivá-los a descobrir os encantos das matérias. Deixo que os alunos se interessem pelas demonstrações.*

*5 - "O aluno deve conhecer, pela demonstração, todo mecanismo do conceito, e não precisa decorar formalidades*

A maioria dos professores (62%) acredita na importância de se demonstrar os teoremas, mas não parece saber como trabalhar de modo significativo a demonstração em suas aulas.

Em relação ao ensino - aprendizagem, a noção de *demonstração* deve ser construída pelo aluno no decorrer de seu desenvolvimento cognitivo, devendo ser ensinado para servir de apoio para a aquisição dos conceitos geométricos. O professor de Matemática, além de organizar seqüências de situações de aprendizagem e de avaliações das aquisições, está encarregado de propor tarefas que permitam ao aluno:

- tomar iniciativas espontâneas na resolução das tarefas e que saiba iniciá-las sem que tudo se torne uma rotina ou uma utilização de algoritmos, como sugerem os professores que são contra exercícios com demonstração formal;

- ter meios de controle do que ele está fazendo em relação aos objetivos da tarefa, distinguindo os diferentes papéis dos teoremas, as hipóteses e a conclusão na relação hipótese – teorema - conclusão.

- desenvolver um trabalho que o conduza a descobrir os acertos e os erros cometidos numa demonstração sob forma de questões, de tomada de consciência de novos fenômenos.

As práticas dos professores estão intimamente ligadas às suas concepções de matemática e o ensino desenvolvidos por eles no momento de sua formação. Essas concepções estão provavelmente ligados às experiências pessoais, ao ambiente sócio cultural presente e passado, do período de seus estudos, (cf. A. ROBERT e ali.) e a características mais pessoais. A estabilidade das concepções de um indivíduo apresenta algumas vezes resistências a mudanças, isto é, em razão do equilíbrio pessoal, e também porque uma parte das concepções correspondentes, às vezes, são convicções (eventualmente implícitas) não percebidas como respostas às questões, mas admitidas de preferência sem que tenhamos consciência do fenômeno ou sem que possamos argumentar a respeito. A relação do professor com o saber (a demonstração em Geometria, por exemplo) se estabelece a partir de representações significativas organizadas em um sistema simbólico estruturado, cuja função essencial é a apreensão e o controle do mundo pelo sujeito, permitindo-lhe compreendê-lo e interpretá-lo. Então, a representação permite a adaptação do sujeito e ela será elemento essencial para guiar seus comportamentos.

Cruzando as **Questões 6** e **7** com a *formação* e a *experiência profissional,* obtém-se a seguinte situação:

**QUADRO 5**

| Formação e experiência profissional | Q6: Cita os Teoremas como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dá exercícios para aplicação? | | | | Q7: Acha importante fazer a demonstração dos Teoremas da Geometria? | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | ÀS X | N/R | SIM | NÃO | ÀS X | N/R |
| Apenas 2º grau | 4 | 6 | 0 | 0 | 9 | 0 | 1 | 0 |
| Licenciado em Matemática | 15 | 10 | 4 | 4 | 18 | 5 | 7 | 3 |
| Outras habilitações | 5 | 4 | 1 | 2 | 7 | 0 | 4 | 1 |
| Até 10 anos | 11 | 11 | 2 | 2 | 18 | 2 | 4 | 2 |
| 11 a 20 anos | 9 | 7 | 2 | 3 | 11 | 1 | 7 | 2 |
| + de 20 anos | 4 | 2 | 1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 0 |

Analisando o **Quadro 5**, percebe-se que 15 professores, licenciados em Matemática e 5 com outras habilitações, citam os teoremas como *“verdades a serem aceitas”* e dão exercícios para aplicação e fixação deles. Esse fato também ocorre com 11 professores que têm menos de 10 anos de experiência.

Olhando as informações cruzadas do **Quadro 5**, observa–se que os 11 professores com menos de 10 anos de experiência, que dizem que citam esses teoremas como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dão exercícios para fixação, caíram em contradição, conforme **Quadro 1** (página 50), quando afirmam que trabalham os teoremas. Podemos concluir, então, que eles acham importante a demonstração dos teoremas, mas trabalham os teoremas de maneira não significativa para o aluno e, talvez, como mera imposição sem significado. Diante disso, parece que esses professores não sabem como trabalhar a demonstração para tornar os alunos conscientes da distinção entre provas dedutivas e provas empíricas.

Dos professores que responderam que é importante fazer demonstração dos teoremas da Geometria, 18 têm até 10 anos de experiência e uma licenciatura em Matemática.

Cruzando a **Questão 6** com a **Questão 7**, obtêm-se os seguintes dados:

**QUADRO 6**

| **Q6: Cita os Teoremas como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dá exercícios para aplicação?** | **Q6 : Acha importante fazer a demonstração dos Teoremas da Geometria Plana?** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | ÀS VEZES | N/R |
| SIM | 11 | 5 | 7 | 1 |
| NÃO | 16 | 0 | 4 | 0 |
| ÀS VEZES | 5 | 0 | 0 | 0 |
| N/R | 2 | 0 | 1 | 3 |

Vemos aqui uma contradição: dos 34 professores, que acham importante fazer demonstração dos teoremas da Geometria Plana, 11 deles citam os mesmos como verdades a serem aceitas e dão exercícios para fixação. Outra contradição temos quando 5 professores citam os teoremas como verdades a serem aceitas, porém não acham importante fazer demonstração. Dos 34 professores, 16 acham importante fazer a demonstração, mas não citam os teoremas como verdades a serem aceitas pelos alunos.

Cruzando a **Questão 9** com as questões voltadas ao que diz respeito à *formação* e à *experiência profissional*, obtém-se o **Quadro** abaixo:

**QUADRO 7**

| **Formação Profissional e Experiência** | **Q9: Propõe exercícios em que solicita uma demonstração formal?** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | ÀS VEZES | N/R |
| Apenas 2º grau | 0 | 10 | 0 | 0 |
| Licenciado em Matemática | 4 | 17 | 10 | 2 |
| Outras habilitações | 3 | 5 | 3 | 1 |
| Até 10 anos | 3 | 17 | 4 | 2 |
| 11 a 20 anos | 3 | 11 | 6 | 1 |
| + de 20 anos | 1 | 4 | 3 | 0 |

Dos 32 professores que não propõem exercícios com demonstração formal, 17 têm licenciatura em Matemática e 17 têm até 10 anos de experiência e 15 estão com mais 10 anos de experiência.

À luz desses resultados, percebe-se que a maioria destes professores **acredita na importância de se demonstrar os teoremas da Geometria**, mas declaram não saber como trabalhar a demonstração em salas de aula. As justificativas dadas nos *questionários* e nas *entrevistas* nos dão informações de que eles *não sabem como trabalhar a demonstração*.

Deve-se, então, ter uma proposta composta de ações diversificadas, incluindo debates sobre o que é demonstrar, como demonstrar e para que demonstrar, oficinas para discussão de seqüência de ensino - aprendizagem, organizadas de modo a permitir um processo de reflexão-ação-reflexão e criar oportunidades para que os professores tenham vários momentos de reflexões ao longo do tempo. E eles pedem sugestões, capacitação, orientações, oficinas e atividades similares.

Questões: 17 e 18

17. Você acha que uma demonstração ajuda a "esclarecer" o aluno?
( ) sempre ( ) nunca ( ) às vezes

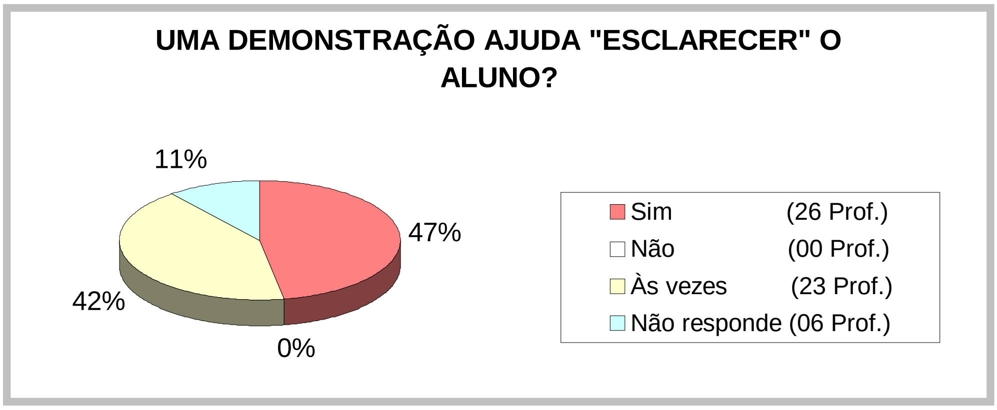
Comente sua resposta:

18. Você acha que uma demonstração "convence" o aluno?
( ) sempre ( ) nunca ( ) às vezes

Comente sua resposta:

Como vimos na parte histórica, o ato de demonstrar pode ter várias funções. Por conseqüência, toda abordagem didática da demonstração necessita de uma reflexão epistemológica que passa por duas questões, segundo BARBIN (apud SADDO, l997): Qual é essa função para o aluno? Qual é essa função para o professor?

Concordando com BARBIN, achamos que se a demonstração tem por função "*esclarecer*", "*tornar evidente e certo*", então o professor pode considerar o próprio método de ***resolução de problemas*** como uma demonstração. Se o professor acha que a demonstração tem por função "*convencer*," ele esperará dos alunos uma outra postura, ou seja que trabalhem em grupo, que discutam suas idéias com os colegas, que debatam suas posições face a um desafio proposto pelo professor. As **Questões 17** e **18** têm por objetivo determinar junto com os professores entrevistados as diferentes funções atribuídas à *demonstração.*




Analisando as informações contidas nas respostas dos entrevistados, percebe-se que 26 dos 55 professores acham que a demonstração ajuda a "*esclarecer*" o aluno, 23 deles pensam que "às vezes" ela ajuda a "*esclarecer*" o aluno e nenhum professor pensou que a demonstração "*não esclarece"* o aluno. É uma informação significativa: esses professores acreditam que a demonstração ajuda a "*esclarecer*" o aluno.

Alguns comentários desses professores:

*1 - "Para os alunos às vezes uma pequena demonstração facilita a compreensão de um conteúdo."*

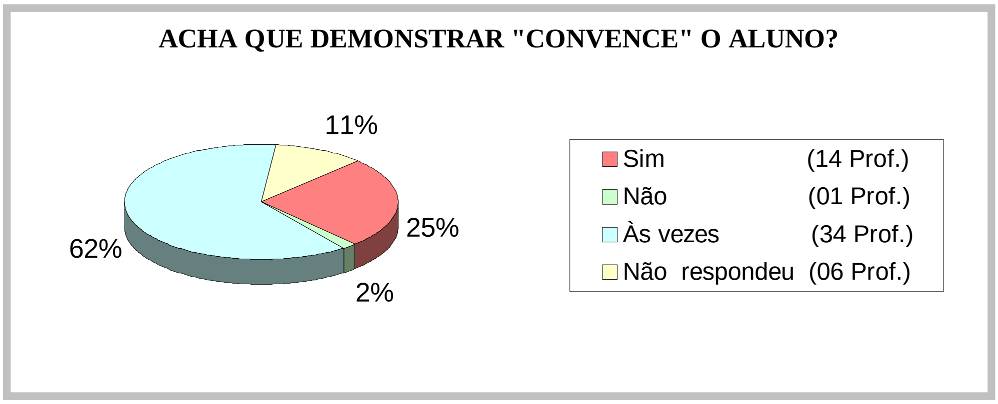
*2 - "Interessante que sempre, numa demonstração, um aluno diz que 'agora' estou entendendo porque."*

*3 - "Demonstração = confirmação da verdade que alguém descobriu $\Rightarrow$ esclarecimento total."*

*4 - "Muitas vezes, sim, mas às vezes complica mais a cabeça do aluno."*

*5 - "Ajuda quando a mesma não for muito complexa. Quando insisti em demonstração muito trabalhosa, o que ocorreu foi o aumento do desinteresse, ou seja, não adianta "arrebentar" o aluno antes dele começar a trabalhar (resolver exercícios)."*

*6 - "Principalmente quando em sua demonstração o professor traz o aluno a participar e buscar juntos a resolução dos problemas."*




A análise das respostas dos entrevistados mostrou que 14 dos 55 professores (25%) acham que demonstrar sempre "*convence*" o aluno e 34 deles (62%) pensam que, às vezes, demonstrar "*convence*" o aluno. Em relação ao dado anterior "*uma demonstração ajuda a esclarecer*" (questão 17), trata-se de um resultado coerente, pois 49 professores acreditam que a demonstração "*esclarece*" o aluno quando responderam **sim** (26 professores) e **às vezes** (23 professores).

Justificativas desses professores:

1 – "Mostra uma realidade."

*2 - "Existem aqueles alunos que perguntam: Por que preciso disso, professor?"*

*3 - "Às vezes uma demonstração convence a compreensão de conteúdo mais complicado."*

*4 - "Como tenho a técnica de fazer uma Geometria Experimental para logo em seguida passar para a Geometria Formal, a demonstração convence, ou melhor, solidifica, organiza o que ele fez na prática."*

Cruzando as **Questões 17** e **18** com as questões referentes à *formação* e à *experiência profissional*, obtém-se o **quadro** abaixo:

**QUADRO 8**

| Formação e experiência profissional | Q17: Demonstração ajuda a "esclarecer" o aluno? | | | | Q18: Demonstração "convence" o aluno? | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | ÀS X | N/R | SIM | NÃO | ÀS X | N/R |
| Apenas 2º grau | 7 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 9 | 0 |
| Licenciado em Matemática | 12 | 0 | 16 | 5 | 8 | 1 | 19 | 5 |
| Outras habilitações | 7 | 0 | 4 | 1 | 5 | 0 | 6 | 1 |
| Até 10 anos | 10 | 0 | 14 | 2 | 5 | 0 | 19 | 2 |
| 11 a 20 anos | 10 | 0 | 7 | 4 | 4 | 1 | 12 | 4 |
| + de 20 anos | 6 | 0 | 2 | 0 | 5 | 0 | 3 | 0 |

Analisando esse **Quadro 8**, percebe-se que há unanimidade quanto à certeza de que a demonstração ajuda a ***"****esclarecer"* o aluno. Temos também a certeza de que dos 26 professores que pensam que a demonstração "*esclarece"*, 7 professores têm apenas o 2o. Grau e 7 professores têm outras licenciaturas e 12 têm licenciatura em Matemática..

Para os 23 professores que acham que a demonstração *“às vezes esclarece*”, 16 deles têm licenciatura em Matemática e 14 deles têm até 10 anos de experiência.

Percebe-se também que 28 professores pensam que a demonstração “*convence*” e 8 deles têm licenciatura em Matemática e 5 professores até 10 anos de experiência profissional.

Cruzando os resultados das **Questões 17 e 18**, temos o seguinte retrospecto:

**QUADRO 9**

| **Q17: Demonstração ajuda a “esclarecer” o aluno?** | **Q18: Demonstração “convence” o aluno?** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | SIM | NÃO | ÀS VEZES | N/R |
| SIM | 13 | 0 | 13 | 0 |
| NÃO | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ÀS VEZES | 1 | 1 | 21 | 0 |
| N/R | 0 | 0 | 0 | 6 |

Observa-se no quadro acima que, dos 26 professores que acreditam que a demonstração “*esclarece*”, 13 professores acham que ela “*convence*” o aluno, enquanto 13 outros professores pensam que a demonstração “*convence às vezes”*.

É importante ressaltar aqui também a **Questão 24** de nosso Questionário, com o objetivo de analisar o que pensam os professores de Geometria no tocante ao *desenvolvimento cognitivo* dos alunos.

Esta questão faz parte de um estudo diagnóstico feito pela PUC-SP, no âmbito de um programa de Educação continuada, desenvolvido pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo – Inovação no Ensino Básico. O objetivo do projeto é o aperfeiçoamento dos professores, com vistas a planejar suas atividades curriculares, utilizando informações educacionais como subsídios para sua prática, desenvolvendo novas concepções de avaliação, implementando as Propostas Curriculares da SEE e utilizando materiais de apoio didático-pedagógico, para o alcance de um ensino de Matemática voltado para a cidadania.

O professor deveria assinalar sua opinião segundo uma escala de 4 pontos como segue:

24. Responda as questões abaixo, classificando as afirmações com os códigos colocados nos parênteses:

(C) significa que você concorda plenamente com a afirmação.
(CP) significa que você mais concorda com a afirmação do que discorda dela.
(DP) significa que você mais discorda da afirmação do que concorda com ela.
(D) significa que você discorda totalmente da afirmação.

a) ( ) A Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

b) ( ) A Geometria deve ser apresentada, formalmente, de modo a permitir um trabalho com demonstrações, fundamental ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

c) ( ) A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.

d) ( ) A Geometria é um assunto no qual os alunos mostram dificuldades e, por isso, deve ser trabalhada unicamente nas séries finais.

e) ( ) Como o trabalho com Geometria pode ser feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, de pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, é melhor que ele seja feito em Educação Artística.

f) ( ) Nas aulas de matemática, o trabalho com Geometria deve centrar-se na identificação das figuras e na obtenção das fórmulas essenciais.

Analisamos cada item da **Questão 24** no intuito de buscar as relações entre eles e a demonstração em Geometria.

**Questão 24A**

> a) *A Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.*

Identificamos 49 professores dos 55 entrevistados (89,10%) assinalando a concordância plena (74,55%) ou parcial (14,55% ) com a afirmação **Questão 24A**

Cruzando **Q24A** com as **Questões 5, 6, 7 e 9,** obtêm-se os seguintes dados:

**QUADRO 10**

| Q24A : | | A Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Q5 , Q6 , Q7 e Q9** | | Concorda plenamente | Concorda parcialmente | Discorda parcialmente | Discorda Totalmente | Não respondeu |
| **Q5**: Trabalha os Teoremas da Geometria Plana? | Sim | 20 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| | Não | 12 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| | Às X | 8 | 3 | 0 | 0 | 2 |
| | N/R | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Q6**: Cita os Teoremas como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dá exercícios para aplicação? | Sim | 18 | 3 | 1 | 0 | 2 |
| | Não | 13 | 5 | 1 | 1 | 0 |
| | Às X | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | N/R | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **Q7**: Acha importante fazer a demonstração dos Teoremas da Geometria? | Sim | 29 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| | Não | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | Às X | 6 | 4 | 1 | 0 | 1 |
| | N/R | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| **Q9**: Propõe aos seus alunos exercícios em que se solicita uma demonstração formal? | Sim | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | Não | 22 | 5 | 2 | 1 | 2 |
| | Às X | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | N/R | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Entre os 55 professores entrevistados, 28 estão em concordância plena quanto à necessidade de se trabalhar os teoremas da Geometria Plana, pelo menos em parte, contra 3 que discordam parcial ou totalmente.

- Tem–se uma *incoerência* com relação ao cruzamento dos resultados das questões **Questão 24A** e a **Questão 6**, pois vemos que 18 professores concordam plenamente, mas citam como verdades a serem aceitas e memorizadas através de exercícios repetitivos, os quais devem servir para mecanizar a aplicação de conceitos.

- Uma certa *coerência* nas afirmações dos professores com relação à **Questão 7**, concordando com a afirmação da **Questão 24A**, em que 29 professores concordam plenamente que é *"importante fazer a demonstração dos teoremas da Geometria."*

- Com relação à **Questão 9,** cruzando-se com a **Questão 24A**, 22 dos professores concordantes responderam que não propõem exercícios em que se solicita demonstração formal.

Analisando-se, por outro lado, a **Questão 24A** em relação às **Questões 17, 18 e 22**, obtém-se a seguinte situação:

**QUADRO 11**

| Q24A | | A Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Q17, Q18 e Q22** | | Concorda plenamente | Concorda parcialmente | Discorda parcialmente | Discorda totalmente | Não respondeu |
| **Q17**: Acha que uma Demonstração ajuda a “esclarecer” o aluno? | Sim | 22 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| | Não | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Às X | 16 | 4 | 2 | 0 | 1 |
| | N/R | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| **Q18**: Acha que uma Demonstração “convence” o aluno? | Sim | 12 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | Não | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Às X | 25 | 6 | 2 | 0 | 1 |
| | N/R | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| **Q22**: É possível estudar Geometria sem demonstração? | Sim | 11 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | Não | 15 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| | Às X | 10 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| | N/R | 5 | 0 | 1 | 1 | 2 |

Entre 41 professores dos 55 entrevistados que concordaram plenamente com a afirmação da **Questão 24A**, 22 acham que a demonstração ajuda a "*esclarecer*" o aluno, 16 acham que a demonstração "*às vezes o esclarece*". Por outro lado, 25 deles pensam que, às vezes, a demonstração *"convence"* o aluno. Porém, entre aqueles que concordam com que a Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive, vemos uma discrepância em relação aos itens da **Questão 22**: *"É possível estudar Geometria sem recorrer a demonstrações?",* pois 11 professores acham que é possível estudar a Geometria sem demonstração, 15 acham que não é possível, enquanto 10 acham que, às vezes, é possível estudar a Geometria sem demonstrações.

**Questões - 24B e 24C**

b) A Geometria deve ser apresentada, formalmente, de modo a permitir um trabalho com demonstrações, fundamental ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

c) A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.

Na opinião dos 55 professores entrevistados, 11 (20%) concordaram plenamente com a afirmação, 24 (43,64%) mais concordaram do que discordaram e 13 (23,64%) mais discordaram do que concordaram com ela.

A afirmação do **item c**: "*A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.* provocou a seguinte estatística: 44 professores (80%) concordaram com a afirmação e 6 (10,91%) mais concordaram do que discordaram.

A coerência ou não desses dois grupos, em relação às **Questões 9, 17, 18 e 22**, encontra-se no **quadro** abaixo:

**QUADRO 12**

| **Q24C** | | **Q24C: A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades** |
|---|---|---|
| Q9, Q17, Q18 e Q22 | | Concorda plenamente |
| **Q9**: Propõe exercícios em que solicita uma demonstração formal? | Sim | 6 |
| | Não | 24 |
| | Às X | 12 |
| | N/R | 2 |
| **Q17**: Acha que uma demonstração ajuda a "esclarecer" o aluno? | Sim | 23 |
| | Não | 0 |
| | Às X | 18 |
| | N/R | 3 |
| **Q18**: Acha que uma demonstração "convence" o aluno? | Sim | 12 |
| | Não | 1 |
| | Às X | 28 |
| | N/R | 3 |
| **Q22**: É possível estudar Geometria sem demonstração? | Sim | 11 |
| | Não | 19 |
| | Às X | 10 |
| | N/R | 4 |

Entre os professores, 42 concordaram com o enunciado da **Q24C**: "*A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades".* Todavia, 24 dentre eles disseram que *"não propõem exercícios em que se solicita demonstração formal"* (**Q9**); 23 professores pensam que a demonstração ajuda a *"esclarecer"* o aluno; 18 dizem que somente "*esclarece às vezes*"; 40 pensam que a demonstração *"convence"* o aluno pelo menos às vezes. Porém, entre os professores que concordam com a afirmação da **Questão 24C,** obtivemos uma "*discrepância"* em relação aos itens da **Q22**: *"É possível estudar Geometria sem demonstração?"* Uma parte (11 professores) pensa que é possível estudar a Geometria sem demonstrações, 19 acham que não é possível e 10 acham que às vezes.

***CONCLUSÃO***

Para que a Geometria permita ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive, deve-se criar condições nas quais ele passe da Geometria pragmática (experimentação, manipulação, descoberta de propriedades a partir da apreensão perceptiva) a uma Geometria conceitual, envolvendo construções geométricas, conjeturas, provas, demonstrações e redações dos passos semelhantes aos de uma prova. Uma das tarefas do professor de Matemática é construir problemas tendo como objetivo desenvolver o raciocínio dedutivo.

Por isso, o aluno deve ser conduzido a:

- perceber que o “resultado de medição”, após o uso de instrumentos, fornece uma idéia de certas propriedades de uma figura;
- usar ferramentas intelectuais, como propriedades, definições, fórmulas que lhe permitirão expressar-se com precisão e fazer demonstrações;
- entender que, para abordar um problema envolvendo construção geométrica, não é sempre indispensável levar em consideração a perfeição de uma figura, pois o importante são as informações nela contidas;
- sentir necessidade de provar quando se afirmar um resultado utilizando uma ou várias propriedades;
- compreender que, em Matemática, para se debater, é necessário apoiar-se em certo número de propriedades ou definições geométricas.

Da análise desses **Questionários** e dos **diálogos** mantidos nas entrevistas com os professores, constatamos um descrédito nas reais potencialidades do aluno, um desconhecimento referente à capacidade de o aluno construir o seu saber, uma vez que o professor geralmente assume o papel de transmissor de um conhecimento pronto e não de mediador desse conhecimento para o aluno. O professor parece desconhecer como o aluno pensa, organiza seu raciocínio e constrói os conceitos matemáticos, gerando uma metodologia docente inadequada na proposição das atividades em sala de aula.

As dificuldades mencionadas pelos professores no ensino da demonstração e da Geometria devem-se, muitas vezes, ao fato de não se levar em conta a curiosidade do aluno, a sua capacidade de levantar hipóteses, criar estratégias, compará-las, extrapolá-las para outras situações e desenvolver modelos matemáticos para resolver situações significativas.

Muitos professores pesquisados desconhecem que a Matemática, para ser compreendida pelo aluno, não é suficiente que seja ensinada de modo lógico, isto é, como funciona, como se faz deduções, como pode ser aplicada. A motivação para aprender alguma coisa, no caso da Matemática ou de uma demonstração, não depende apenas da lógica, depende também de interesses, habilidades pessoais, etc., que o sujeito-aluno constrói através de diversas interações com as "ações" e "relações mentais" propostas pelo professor.

A Matemática não pode ser considerada como um conhecimento pronto mas, sim, em constante construção e evolução, que exige do professor permanente aperfeiçoamento em sua área. A concepção de Matemática, que os professores têm e revelam em suas aulas, como vimos na análise dos Questionários, evidencia uma Matemática pronta, definitiva, teórica, abstrata e distante da realidade do aluno, que serve para justificar, às vezes, as dificuldades vivenciadas pelo aluno na escola. Este modo de ver deve-se, em parte, ao despreparo do professor enquanto profissional, e, por outra parte, aos livros didáticos que geralmente não apresentam sugestões que, a nosso ver, levem o aluno à uma melhor compreensão da demonstração.

O professor, parecendo desconhecer como o aluno constrói os seus saberes geométricos, constata que este não está interessado em aprender o que lhe é proposto. Tem preguiça de memorizar regras e conceitos muitas vezes sem significado. Isso ocorre talvez porque os livros didáticos não sugerem atividades adequadas ou porque o professor aprendeu desse jeito e repete o que lhe transmitiram. O aluno, confiando mais na autoridade do professor como fonte única do saber, deixa de adquirir um novo conhecimento de maneira livre, prazerosa e que poderia ser construído interativamente.

Por outro lado, percebemos que a rejeição às demonstrações em sala de aula é devida ao fato de o professor não se arriscar a usá-la, por não se sentir seguro em seus conhecimentos de Geometria dedutiva, não ter recebido orientações em seus cursos de licenciatura e não encontrar nos livros didáticos referencial claro e seguro. Por isso, os professores pedem ajuda, orientação, uma saída.

Analisando o material de nossa pesquisa (questionários, entrevistas, debates realizados em nossa Oficina), podemos entender por que grande parte dos professores pesquisados seguem uma linha de ensino com métodos tradicionais...conseqüentemente, por que o *indicador oficial – SARESP* — revela à sociedade o quanto os alunos estão despreparados.

Movimentos como o da Educação Matemática têm despertado o interesse de pesquisadores no campo da Matemática, que favorecem reflexões como estas do presente trabalho, que apontam a necessidade do ensino-aprendizagem da **demonstração** nas salas de aula. Valorizando-se o pensamento dedutivo em substituição à memorização de fórmulas, parece ser uma solução para resgatar o ensino da Matemática, principalmente da Geometria, possibilitando ao aluno construir criativamente seu saber matemático.

Precisamos levar os professores a acreditar que:

> "Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, sem aprender a refazer, a retocar o sonho por causa do qual se pôs a caminhar." (G. Freire)

# CAPÍTULO 4 - PROBLEMÁTICA E HIPÓTESES DA PESQUISA

## 4.1 - PROBLEMÁTICA

O ensino de Matemática como uma ciência dedutiva, ou seja, fundamentada em demonstrações, costuma começar com a Geometria, quando o nível de abstração do aluno, a partir dos 14 anos, cursando a 7ª série, é condizente com o seu estágio de desenvolvimento mental (PIAGET). Esse contato inicial com a Geometria demonstrativa, até o início da década de 60, no Brasil, não era muito agradável à maioria dos alunos, uma vez que os teoremas eram ensinados sem muita comprovação restando-lhes o recurso da memorização.

A Matemática Moderna, no início da década de 60, deu um tratamento mais formal à Geometria, optando por acentuar nos livros didáticos as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, mas não resolveu as questões no polêmico universo do ensino da Geometria.

Seguiu-se, na década seguinte, uma massificação rápida do ensino. Paralelamente, surgiram problemas decorrentes da proposta de programas nos quais a Geometria começava a desenvolver-se sob o enfoque das transformações, e a maioria dos professores de Matemática, no Brasil não dominando esse assunto, deixava de ensinar a Geometria e, conseqüentemente, deixava de privilegiar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. A anterior “Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional”, por sua vez, ao permitir ao professor elaborar seu planejamento na disciplina “*de acordo com as necessidades da clientela*”, ratificou esse procedimento e deixou a maioria dos alunos do ensino fundamental sem o estudo da Geometria. A situação atual é bem conhecida de todos: as demonstrações foram banidas no ensino de Matemática. O ensino da Geometria parece restringir-se às escolas particulares e às academias militares, não ocorrendo na escola pública. A dualidade tradicional de nosso ensino pode, então, ser reformulada como “escola onde se ensina a Geometria” (escola da elite) e “escola onde não se ensina a Geometria” (escola do povo) segundo palavras de PAVANELLO (1993).

O ensino de Matemática no Brasil, conforme pesquisa feita pelo Sistema Nacional de Avaliação Básica (SAEB), de 1993, detectou sérios problemas: apenas 3,1% dos alunos de 5ª série e 5,9% dos alunos da 7ª série acertaram entre 50% e 100% das questões propostas de Matemática.

O Programa de Avaliação Educacional da Rede Estadual da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE), criado em 1992, realizou avaliações de rendimento escolar nas Escolas-Padrão com o intuito de obter informações para a formulação de políticas educacionais e de informar as escolas com dados objetivos acerca dos pontos críticos do processo ensino-aprendizagem.

A partir de 1994, a Secretaria de Educação Estadual passou a avaliar o rendimento dos alunos de toda a rede pública estadual. Como primeira etapa da implantação desse sistema, em abril de 1996, todos os alunos matriculados nas 3ª e 7ª séries do ensino fundamental de todas as escolas da rede estadual foram avaliados nos componentes curriculares de Português, Matemática, Ciências, História e Geografia. Os resultados obtidos em Matemática, por meio das provas aplicadas e das informações obtidas através de questionários respondidos pelos alunos da 7ª série, bem como pelos integrantes das equipes escolares, traduzem o desempenho alcançado, nessa disciplina, nos tópicos dos programas de ensino que foram objeto de avaliação: o desempenho geral dos estudantes está muito aquém do que seria satisfatório. Participaram da avaliação: 589.990 alunos da 3ª série; 492.602 alunos da 7ª série (dos quais 69,30% estudam no período diurno e 30,70% no noturno) e 5.768 escolas das 146 Delegacias de Ensino da rede de ensino estadual de São Paulo.

Preocupados com essas estatísticas, levantamos a seguinte **questão**: *será possível estudar-se Matemática sem estudar Geometria, conseqüentemente, sem demonstrações?*

Buscamos respostas junto a professores da rede de ensino estadual e particular do Estado de São Paulo através da aplicação de uma Seqüência Didática, após aplicação de um Questionário (**Anexo 1**).

O envolvimento com o aspecto geométrico do espaço circundante sempre foi objeto do pensamento do homem. Os egípcios, utilizando os seus processos de medir terra, que foram determinantes para regular posses e cobranças de impostos, variáveis em função das enchentes anuais do rio Nilo, deixaram as suas experiências para a posteridade. Ao criar, ao construir, ao resolver situações-problema, o homem toma consciência de si mesmo e de tudo que o cerca, assimila conceitos, descobre relações, formula generalidades como as matemáticas. Assim, a construção da história da humanidade envolve a construção do conhecimento matemático e, mais particularmente, a construção da Geometria.

Quase todos os trabalhos sobre a geometria escolar resultam de problemas básicos, como o fraco desempenho dos alunos e a desatualização do currículo.

Os temas referentes à Geometria demonstrativa, no ensino fundamental, por sua vez, são desenvolvidos em um nível de abstração não condizente com o estágio de desenvolvimento dos alunos. O estudante é levado a repetir definições, regras, propriedades e processos sem significação funcional para ele. Desprezam-se, assim, experiências preparatórias indispensáveis à construção do conhecimento lógico-matemático.

As propostas atuais que focalizam adequadamente a Geometria são apresentadas ao professor de forma rápida, no decorrer de encontros, seminários ou cursos, em tempo insuficiente para que ele possa refletir e assimilar novos conteúdos e metodologias. Assim, o professor fica sem condições de se preparar melhor para conduzir as mudanças necessárias a uma prática pedagógica mais atualizada.

A percepção do espaço geométrico é confusa e equivocada. A Geometria é considerada como assunto difícil, porque é abstrata e o professor direciona a sua preferência para temas aritméticos.

O insucesso que caracteriza as experiências de tantos alunos com a Matemática, principalmente com a Geometria, como mostrou a Avaliação Educacional da Rede Estadual da SEE, revela que muitos tópicos de Matemática não são planejados ou não são ensinados, portanto não são aprendidos. Até a 8ª série, embora quase todos os professores achem que a Geometria é importante para merecer um lugar em todos os níveis do ensino, não há uma concordância quanto ao conteúdo ou à seqüência do ensino de Geometria. Significa, pois, que não existe um padrão mínimo curricular de Geometria para a escola fundamental. Os professores não podem esperar que seus alunos tenham acumulado previamente mais do que um conhecimento em Geometria fundado em experimentações.

Por sua vez, o insucesso com a Geometria desestimula professores da escola fundamental a cursarem Geometria na faculdade ou a ensiná-la a seus alunos, perpetuando o ciclo do desempenho fraco dos alunos. Muitos professores, para LORENZATO (1995), não possuem os conhecimentos necessários em Geometria para aplicar em suas atividades pedagógicas. O mesmo autor (1993), procedendo a uma pesquisa junto a 255 professores de 1ª a 4ª séries, todos possuidores de relativa experiência docente, não se saíram bem ao se submeter a um teste que contemplava oito questões referentes à Geometria plana euclidiana, errando todas as questões. Apenas 8% desses professores confessaram ter tentado ensinar Geometria aos alunos.

Assim, podemos pensar que a Geometria enfrenta problemas de desempenho e de currículo, tanto por parte dos alunos, como dos professores. As soluções para esses problemas requerem um estudo e experiências com a Geometria, o que implica professores bem preparados, o que, por sua vez, requer mais pessoas que desejem estudar Geometria, desejo esse associado a um desempenho melhor. Somente o professor mudando suas concepções é que conseguirá uma mudança no contrato didático. O aperfeiçoamento do currículo requer decisões sobre as várias maneiras de formar conceitos em

Geometria e de refletir as diferentes visões das pessoas sobre ela. Essas diferentes visões, por sua vez, tendem a levar a diferentes objetivos no estudo de Geometria.

Por outro lado, sabemos que mudança no processo de ensino e aprendizagem não acontece facilmente. Precisamos considerar, além das dificuldades relativas à formação do professor, suas condições de trabalho, muitas vezes em salas com número excessivo de alunos e escassos recursos materiais.

O estudo histórico e epistemológico da demonstração parece evidenciar que o seu ensino tem peculiaridades diferentes em relação ao ensino de outros tópicos matemáticos. As dificuldades que muitos alunos têm, a partir da 7ª série, para compreender a demonstração ou para redigi-la, constituem uma das barreiras conhecidas no ensino da Matemática.

Para superar esses obstáculos, dois caminhos são geralmente utilizados: na França, por exemplo, um enfatiza o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, ensejando a aprendizagem de certos procedimentos lógicos (como a implicação) ou naturais (como a argumentação); outro, enfatiza a descoberta do jogo mútuo das contradições que surgem a propósito de uma figura geométrica (PLUVINAGE, 1989).

Raymond DUVAL e M. EGRET (1989), analisando as causas do fracasso no ensino da demonstração em Matemática, dizem que ela envolve uma "*atividade cognitiva específica e que sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto*."

A demonstração, nesse ponto de vista, é um modo de processamento cognitivo autônomo com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, a interpretação. De um lado, ela articula os enunciados "*em função do estatuto que lhe é reconhecido*" e não em função de seu significado; de outro lado, "*ela se apresenta em progressão por substituições de* *enunciados*” e não pelo encadeamento de enunciados. Esses dois aspectos caracterizam a “**estrutura profunda**” da demonstração.

Essas características estão, geralmente, mascaradas pela expressão e pela apresentação discursivas que são feitas através do emprego de um conector ou de uma única ordem dos enunciados. A demonstração, nesse caso, se apresenta como um texto cujos enunciados se mantêm sem, entretanto, a congruência normalmente exigida numa argumentação.

A “aprendizagem” da demonstração, para DUVAL(1989), consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pela linguagem natural. O que o matemático particularmente chama de “*dedução*” é, do ponto de vista cognitivo, uma substituição de enunciados feita em função do seu estatuto. A compreensão operatória das definições e dos teoremas supõe que estes sejam vistos como regras de substituição. A “*dedução*” é uma forma de cálculo cuja organização não está automatizada. Desse fato, um “encadeamento de deduções” não se submete ao princípio da congruência semântica. A “aprendizagem” da demonstração é a tomada de consciência dessa diferença discursiva.

Para DUVAL e EGRET(1989), esta “aprendizagem” não se condiciona à prática de exercícios e à aquisição de certos procedimentos lógicos elementares. Com a publicação de alguns trabalhos célebres de PIAGET, três processos se associaram: a manipulação explícita da implicação material (esquecendo-se da implicação formal), o acesso ao “pensamento formal” e a tomada de consciência do que vem a ser uma demonstração. De fato, de um ponto de vista cognitivo, esta tomada de consciência remete às estruturas diferentes e mais ricas do que aquelas que PIAGET descreveu no estágio do “pensamento formal”, concluem os autores.

A tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois *registros*, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a *representação* não-discursiva produzida e o *discurso* expresso. Tal interação não ocorre ou não tem a mesma importância se representação e expressão são propostas dentro de um outro discurso.

O ensino-aprendizagem em Matemática ocorre baseado em "*representações*", pois os objetos matemáticos não são manipuláveis, fisicamente observáveis e, sim, são estruturas, relações, que podem expressar diferentes situações, decorrendo daí que podem eles ter diferentes formas para serem representados.

Na construção e apropriação do conhecimento matemático, o termo "*representação*" está relacionado com as concepções prévias que o aluno tem sobre os conhecimentos trabalhados na escola. O papel do professor é procurar transformar essas representações/concepções prévias dos alunos para promover a apropriação do saber matemático. Isso, entretanto, vai exigir-lhe o conhecimento dessas representações e esforço para mudá-las.

Acreditamos, como DUVAL (1989), que a tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, sendo um deles a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não-discursiva produzida e o discurso expresso.

Aprofundando o significado das representações semióticas, a idéia de "*registros*" de representação é importante, principalmente tendo em vista que o ensino-aprendizagem da Matemática está estreitamente vinculado com a compreensão desses registros. Nesse sentido, um símbolo, uma notação representam objetos matemáticos, ou seja, um número, uma função, do mesmo modo que as figuras representam objetos matemáticos na forma de um ponto, um círculo, uma operação. Mas há que distinguir "*representação do objeto matemático"* do próprio "*objeto matemático".*

A representação semiótica é uma maneira didática-metodológica da qual pode se servir o professor para ensinar o objeto matemático, ou seja, o importante não são os registros de representação semiótica utilizados, mas a abstração-compreensão do objeto matemático através do uso desses registros. Ter em mente, primeiramente, o objeto matemático a ensinar para, depois, escolher os registros de representação semiótica que ajudarão na aquisição desse objeto matemático, é uma eficiente estratégia didática.

Sem as representações semióticas, pois, torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito.

Para DUVAL (1993):

> "- *o* ***desenvolvimento das representações mentais*** *depende de uma interiorização das representações semióticas, ao mesmo tempo que as representações mentais são uma interiorização das percepções;*
>
> *- a* ***realização de diferentes funções cognitivas****: a função de objetivação (expressão privada) que é independente daquela da comunicação (expressão para outra pessoa), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais;*
>
> *- a* ***produção de conhecimento****: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto na medida em que eles podem revelar sistemas semióticos totalmente diferentes... Assim, o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos mais e mais específicos e independentes da língua natural." (*1993, p. 39)

Observa-se, pois, que as representações semióticas ligam-se às representações mentais, mas destas não dependem. O sujeito, para aprender, precisa coordenar vários registros diferentes de representação semiótica a fim de assegurar uma apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

DUVAL (1988), pesquisando o trabalho de construção de **figuras** em Geometria, vê a existência de uma tríplice apreensão da mesma figura a qual revela a complexidade dos problemas geométricos aparentemente mais simples: a *apreensão perceptiva*, a *apreensão operatória* e a *apreensão discursiva*.

1. **Apreensão perceptiva.** Qualquer figura no contexto de uma atividade matemática é objeto de duas atitudes às vezes contrárias: uma, imediata e automática, que é a apreensão *perceptiva* das formas; outra, controlada e importante na aprendizagem, que é a interpretação *discursiva* dos elementos da figura.

Essas duas atitudes às vezes se opõem porque "a figura mostra objetos que se destacam independentemente de todo o enunciado e porque os objetos nomeados pelo enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente". O problema das figuras geométricas se deve à defasagem entre a *apreensão perceptiva* e a compreensão comandada pelas hipóteses.

2. **Apreensão operatória.** É a operação fundamentada nas modificações possíveis de uma figura de partida e, em continuação, nas reorganizações perceptíveis que ocorrem com essas modificações.

A apreensão perceptiva da figura pode ter um papel facilitador ou inibidor na compreensão do problema dado, conforme seja ela congruente ou não ao seu enunciado. Se ela é congruente ao problema dado, a apreensão *operatória* representa um papel heurístico importante na resolução do problema. Se, por outro lado, não há congruência entre o tratamento matemático do problema e a apreensão operatória da figura, ocorrerá um *obstáculo* para o aluno na utilização das transformações em geometria.

3. **Apreensão discursiva.** A apreensão *discursiva* implica uma neutralização da apreensão perceptiva. Isso significa que há uma "*subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva*" e, conseqüentemente, "*uma restrição da apreensão perceptiva*": uma figura geométrica não se mostra, primeiramente, a partir de seu traçado e de suas formas mas, sim, a partir do que é dito.

Quando há congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível do problema em questão, a apreensão discursiva pode ser abandonada: a redação do problema toma forma de demonstração mas, sob o ponto de vista cognitivo, essa redação é semelhante à formulação de instruções exigidas num jogo de mensagens. Mas quando não há congruência entre apreensão operatória e um tratamento matemático possível, a apreensão discursiva é necessária. Um verdadeiro trabalho de demonstração exige, pois, além de uma apreensão discursiva, o recurso de esquemas formais lógicos específicos, tais como o raciocínio pelo absurdo, o dilema ou o raciocínio disjuntivo, o raciocínio por contraposição.

Acreditamos, como DUVAL, que a compreensão dessa teorização das figuras geométricas, na qual sua apreensão perceptiva deve estar subordinada à sua apreensão discursiva, constitui-se uma das etapas de acesso à ***demonstração***. É sabido que os alunos acham "inútil", e até "absurdo", demonstrar uma propriedade que se "**vê**" na figura. Outros têm dificuldade para não confundir as hipóteses com o que está para ser demonstrado. Para superar esta dificuldade, pensa-se geralmente propor problemas cujo resultado pareça incerto. Mas, procedendo-se assim, o *obstáculo* permanece sem se dar aos alunos a oportunidade de tomar consciência e de ultrapassá-lo, obstáculo esse da teorização que introduz, na evidência e na homogeneidade sinóticas da apreensão perceptiva das figuras, uma diferenciação de natureza discursiva e axiomática. O estatuto específico de uma figura em Geometria fica, então, totalmente ignorado.

Observa-se, então, continua o autor, que há uma grande heterogeneidade cognitiva entre os problemas geométricos matematicamente muito próximos. Daí ser importante uma categorização cognitiva dos problemas não somente para se interpretar os sucessos no problema, como também para se abordar o que foi chamado de "*uma aprendizagem da demonstração*"

A "*aprendizagem da demonstração*" é encarada como problema para o qual a apreensão discursiva é necessária, seja porque não há mais congruência, seja porque ela é claramente solicitada como justificação teórica. É o que DUVAL chama de problema de *segundo nível*, contrapondo-se ao de *primeiro nível*, no qual não há necessidade de uma apreensão discursiva explícita. Para o autor, algumas condições são necessárias para levar os alunos a compreender melhor esses problemas relativos à ***demonstração***:

1. Uma prática sistemática dos problemas do primeiro grau do ensino;

2. uma tomada de consciência da oposição entre uma apreensão perceptiva e uma apreensão discursiva;

3. a constituição, numa rede semântica, de todos os conhecimentos que podem ser solicitados por uma demonstração, mais importantes do que o traçado ou a construção de uma figura;

4. a tomada de consciência da defasagem entre uma dedução e uma argumentação desenvolvida no contexto natural do discurso, uma vez que os conetivos argumentativos da língua natural têm um sentido e um emprego que não corresponde, muitas vezes, à articulação dedutiva de dois enunciados numa situação dada pelas definições e pelos axiomas.

De tudo isso, parece que fica claro que a ***atividade da demonstração*** só pode surgir na convergência de inúmeras funções cognitivas. A atividade cognitiva da demonstração é mais complexa e menos homogênea que o seu resultado, a demonstração exposta a alguém. Não se pode assimilar a atividade de demonstrar ao raciocínio, porque este termo designa a produção de *argumentos*, a *inferência* permanentemente solicitada na compreensão do discurso.

Acreditamos que favorecer o desenvolvimento de todas essas funções cognitivas é, talvez, um caminho mais rápido e mais produtivo do que o caminho que propõe procedimentos imitáveis para simular ou reproduzir uma atividade de demonstração. Não há, talvez, transição progressiva e gradual em relação à exigência e à prática das demonstrações, pois ficará sempre uma etapa a ser transposta de uma descrição, de uma argumentação ou de uma construção para uma demonstração. A compreensão do que é uma “demonstração” está ligada ao conhecimento da diferença entre essas múltiplas atividades discursivas e representativas.

No ensino fundamental, deve haver uma progressão na aquisição da competência em Geometria por parte do aluno, a qual no início é trabalhada experimentalmente, manipulada, até passar para o tratamento formal. Nos primeiros anos de aprendizagem, os objetivos são o conhecimento e a descrição dos objetos geométricos com a proposta de atividades direcionadas para a observação, o desenho e as medidas.

A figura tem papel importante na aprendizagem do raciocínio. Nos primeiros anos do ensino fundamental, 5ª e 6ª séries, a *figura* tem um estatuto de **prova**, pois os alunos procuram, por exemplo, identificar as figuras, reconhecer as paralelas e as perpendiculares. A construção de uma figura precisa, exata, é uma tarefa para o aluno. A representação de objetos, a percepção e distinção da forma e o fato de fazer medidas permitem validar um resultado: predomínio do modelo físico.

A partir da 7ª série, quando o aluno atinge o estágio das operações formais, mudam as exigências em relação à Geometria. Numerosas propriedades chamadas de definições, teoremas, começam a fazer parte do raciocínio. A observação da figura e as medidas não são mais instrumentos adequados para justificar uma propriedade: surge a **demonstração** como novo instrumento, uma técnica de "***prova***" a ser aprendida. O aluno está pronto para demonstrar, porque é capaz de abstrair e raciocinar com condicionais, tais como ***"se... então"***, ***"... se e somente se..."*** Entretanto, essa mudança do *contrato didático* , quando os alunos sabem que o professor espera que eles usem os conceitos e propriedades estudados, constitui-se um dos principais *obstáculos* na aprendizagem da demonstração.

O nosso objetivo é contribuir para que o professor de Geometria, nas últimas séries, a partir da 6ª, do ensino fundamental, crie situações e estratégias de ensino-aprendizagem que superem as dificuldades dos alunos na aquisição dos conceitos geométricos e nas técnicas de sua prova, ou seja, da **demonstração**.

As pesquisas feitas sobre a aprendizagem da **demonstração** através do ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos, como mostraram nossos estudos preliminares (**Cap. 2**), revelaram as dificuldades que os alunos encontram na aquisição da **demonstração**. Um dos problemas que parecem favorecer o fraco desempenho deles a propósito do assunto, é devido à prática e às escolhas didáticas por parte do professor quando ensinam a Geometria.

Os professores pesquisados não parecem construir um ensino de Geometria que permita aos alunos superar as dificuldades na aquisição dos conceitos geométricos e nas técnicas de **prova** e de **demonstração**. Uma das soluções do problema do ensino-aprendizagem da demonstração geométrica, bem como da Matemática em geral, encontra-se na formação dos professores, tanto em nível dos conteúdos, como em nível didático. Por isso, decidimos investir na capacitação dos professores, baseando-nos nas hipóteses abaixo.

## 4.2 - NOSSAS HIPÓTESES

1 - É possível, num contexto escolar, gerar situações e estratégias que venham diminuir as dificuldades no ensino-aprendizagem da demonstração. Em vista disso, é necessário elaborar e aplicar uma *Seqüência Didática* junto a professores, no sentido de lhes oferecer um espaço de reflexão a partir de novos pontos de vista da demonstração que os levem a optar por estratégias diferentes de ensino.

Uma primeira condição é o uso de métodos ativos para que a verdade a ser construída seja reinventada pelo próprio aluno e não transmitida como é comum acontecer. PIAGET (1988) diz, a propósito, que:

> *"O princípio fundamental dos métodos ativos só se pode beneficiar com a história das ciências e, assim, poder ser expresso: compreender é inventar ou reconstruir através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tal necessidade, se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de reproduzir ou criar, e não apenas repetir."* (p. 17)

2 - O professor não trabalha a Geometria, nem as regras do raciocínio dedutivo, nem a demonstração em sua sala de aula, porque desconhece estratégias específicas que possibilitem construir o conhecimento geométrico dedutivo. De acordo com PIAGET, é fundamental o papel da ação, pois uma característica essencial do pensamento lógico é ser operatório, o que podemos entender por prolongar a ação, interiorizando-a. Os professores pesquisados justificaram, em entrevistas, que desejam conhecer as orientações pesquisadas neste nosso trabalho para aprenderem a passar da Geometria experimental para a dedutiva.

3 - Nossa Oficina com os professores servirá para orientar como minimizar os efeitos de eventuais dificuldades apontadas no item acima,

quanto ao processo ensino-aprendizagem da demonstração. As atividades objetivarão despertar inteligências inventivas e críticas ao invés de acomodar os alunos aos conhecimentos tradicionais como acontece nos sistemas educativos tradicionais.

4 - Os alunos podem atingir um nível mais elevado do pensamento geométrico dedutivo mediante a intervenção do professor que esteja preocupado em estimulá-lo a raciocinar sobre várias representações, elaborando situações-problema adequadas. O planejamento de novas atividades pelo professor deve levar em conta que a aprendizagem da Geometria dedutiva se dá através da passagem entre diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático. E se o aluno conseguir a passagem entre esses diferentes registros, podemos dizer que houve apreensão do conhecimento geométrico dedutivo.

5 - A construção de situações para sala de aula, nas quais a figura tem um papel heurístico fundamental, levará o aluno a ultrapassar a apreensão perceptiva e a atingir uma apreensão operatória que se apóia sobre a identificação de reconfigurações pertinentes.

A reconfiguração é a operação que consiste em reorganizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma dada figura em uma outra figura. As subfiguras são o resultado de uma partição da figura que depende das necessidades de um problema colocado.

As *figuras geométricas* são representações de objetos geométricos.

Uma *figura geométrica* pode ser dividida em várias subfiguras também *geométricas.*

Algumas, ou todas, dessas figuras obtidas podem, então, ser reagrupadas em uma outra figura. Essa modificação pode ser efetuada mental, gráfica ou mesmo materialmente. A reconfiguração é essa apreensão operatória da figura inicial. Toda figura pode também ser o suporte de várias configurações.

Segundo os problemas matemáticos para os quais as figuras são solicitadas, a reconfiguração pode ser espontânea e evidente, mesmo para um aluno que não compreende a Matemática ou, pelo contrário, pode ser difícil para "ver" a reconfiguração na figura inicial. Essas variações dependem de fatores de visibilidade e de complexidade que "facilitem" ou que "inibam" essa operação figural na percepção de uma figura. A reconfiguração não é o único tratamento figural que dá conta do poder heurístico das figuras. E, sobretudo, esse tipo de tratamento figural não é perfeito para todas as situações geométricas. Entretanto, levamos isso em consideração em nossa pesquisa, porque:

- a reconfiguração teve historicamente um papel importante nas descobertas dos primeiros resultados matemáticos;
- algumas das situações escolhidas envolvem esse tipo de tratamento figural.

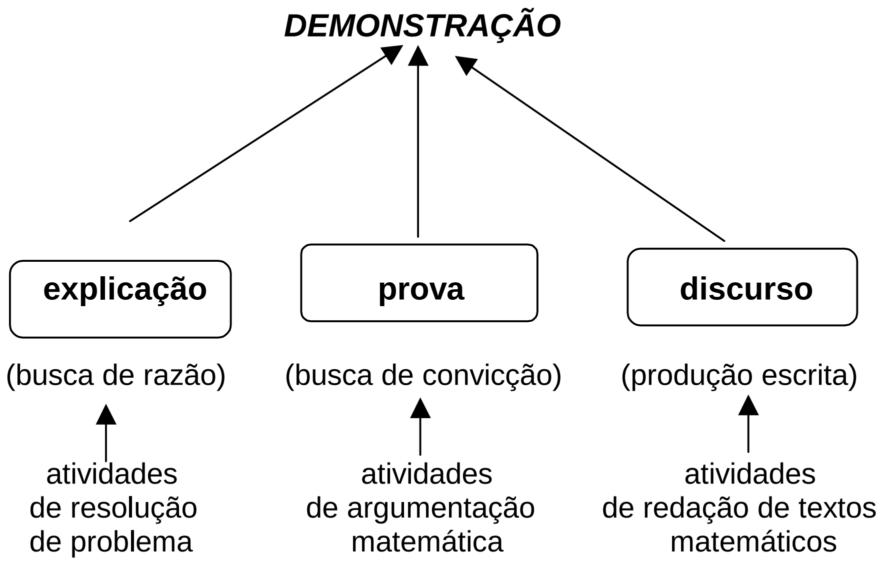
Para validar nossas hipóteses, desenvolvemos uma Seqüência Didática levando em consideração as dificuldades levantadas por R. DUVAL, BALACHEFF..., bem como as detectadas no Questionário (**Anexo 1**) e entrevistas com os professores. Levamos também em consideração os aspectos teóricos e processos que favorecem a aquisição da **demonstração** em Geometria, como a noção de "*obstáculo",* de *"registro",* de *"representação semiótica",* de *"apreensões figurativas",* etc.

As situações construídas para a capacitação dos professores levam também em consideração o significado da **demonstração**, bem como a importância do papel heurístico da figura.

Nosso conceito de **demonstração**, no presente trabalho, é o de N. BALACHEFF (1982, 1987, 1988), estudado nas páginas 27 e 28, para o qual há distinção entre "*explicação*", "*prova*" e "*demonstração*".

Adotaremos também o estudo de Jean HOUDEBINE (1990), segundo o qual, retomando as pesquisas de BALACHEFF, a **demonstração** é um "*texto argumentativo específico da Matemática (com estrutura particular,* *com argumentos tomados entre os resultados já enunciados) cujo significado está ligado à resolução de problemas e à prova*".

Eis um esquema, proposto por J. JULO (apud HOUDEBINE), que elucida os conceitos propostos:




***Explicação**: termo que significa dar uma causa profunda que conduza a um resultado evidente.*

***Prova**: tudo o que permite não se ter nenhuma dúvida sobre a verdade de uma proposição afirmativa.*

***Argumentação**: texto ou discurso cujo objetivo é convencer outra pessoa. Caracteriza–se por conter argumentos, isto é, afirmações destinadas a convencer, ligadas por palavras que estruturam o texto.*

***Raciocínio dedutivo:** expressão de sentido ambíguo. Para muitos, ela é equivalente à demonstração. Para outros, ela significa* "passos do pensamento racional que tem por objetivo se convencer a si mesmo da verdade de uma afirmação."

***Representações**: diante de uma situação ou de um problema, cada um tem* "mentalmente" *uma imagem dessa situação que vai lhe permitir agir. Pode–se pensar que ela comporta ligações entre os dados e procedimentos* *para agir sobre esses dados. As representações são inacessíveis à experiência direta. Conhece–se, pois, o que a pessoa diz e o que escreve.*

***Resolução de problemas****: atividade cujo objetivo é encontrar respostas a uma determinada questão ou problema.*

***Conjetura****: juízo ou proposição tida como legítima (razoável, exata) baseada na qual propõe–se provar ou, na sua ausência, convencer de sua verdade.*

Nesse sentido, a **demonstração**, para nós, é uma atividade do pensamento que, numa seqüência, procura pesquisar as razões com a finalidade de adquirir uma convicção, através da argumentação, com o fim de produzir um discurso que convença os outros. Ela é uma atividade complexa do raciocínio no qual intervêm capacidades *"cognitivas"* (disponibilidade e domínio dos instrumentos solicitados para a resolução), *"metodológicas"* (organização para pesquisar, observar, analisar, conjecturar) e *"lingüísticas"* (para formular os argumentos).

# *CAPÍTULO 5 - A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA*

Neste capítulo apresentamos a Seqüência Didática elaborada para professores de 7ª e 8ª séries visando ao ensino-aprendizagem da demonstração em Geometria.

A pesquisa no campo educacional, diferentemente da pesquisa descritiva e experimental própria das ciências físicas e naturais, privilegia o processo qualitativo em vez do quantitativo. Não significa, porém, que seja impossível analisar os fenômenos educacionais sob o ponto de vista quantitativo. Mas, em face da natureza específica destes fenômenos, é difícil isolar as variáveis envolvidas, ou seja, os aspectos, os fatores reais ou potencialmente mensuráveis responsáveis por determinados efeitos indesejáveis.

Em vista dessa dificuldade, optamos por um processo qualitativo em nossa pesquisa no qual o professor e o aluno, numa situação didática interativa, são levados a uma reflexão permanente sobre suas atividades em sala de aula.

A metodologia de nossa pesquisa, apresentada no **capítulo 1**, teve como referencial a construção de uma Seqüência Didática desenvolvida nas seguintes etapas: *análise "a priori", aplicação da Seqüência e discussão dos resultados.*

## 5.1 - ANÁLISE "A PRIORI"

A análise "a priori" é parte importante da Engenharia Didática. Esta, segundo ARTIGUE (1988), é caracterizada por um esquema experimental fundamentado em atividades didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino.

Levando em conta os dados do estudo preliminar histórico e epistemológico e da transposição didática realizado nos **capítulos 2** e **3**, e dos resultados significativos de pesquisas sobre o assunto, fizemos a análise “a priori” visando determinar o significado das escolhas feitas que permitissem controlar os comportamentos de cada situação didática, bem como predizer procedimentos possíveis durante cada situação. Essas escolhas, de acordo com o objetivo proposto nesta pesquisa, foram as seguintes:

1. **Obstáculos epistemológicos** – inerentes ao próprio conhecimento sobre *demonstração*, às características de seu desenvolvimento e de seu funcionamento atual. São eles: o estatuto da figura, as ilusões da figura, os problemas das medidas, as finalidades da demonstração, a explicitação das hipóteses (MULLER, Jean Pierre, 1994); o raciocínio dedutivo: muitos alunos não têm procurado refutar ou contradizer o resultado obtido numa demonstração (BARBIN, 1988).

2. **Obstáculos didáticos** – decorrentes de certas estratégias de ensino, de uma transposição proposta por livros didáticos e pelo professor que não sabe lidar com as dificuldades dos alunos, o qual não discute com os seus alunos no contexto de sala de aula. A constatação de tal obstáculo permite ao professor rever a abordagem anterior sobre o assunto para esclarecer a dificuldade de aprendizagem vivida pelo aluno.

Principais obstáculos didáticos:

- a passagem da Geometria de observação para a de dedução resultando em obstáculo para a demonstração, porque esta para que seja eficaz para convencer é preciso que os instrumentos usados espontaneamente pelo aluno sejam colocados à prova;

- a necessidade de levar o aluno a refletir sobre os instrumentos que quer usar;

- a argumentação, que visa comunicar sua convicção aos outros, obedece a certas regras que não podem ficar implícitas;

- a aprendizagem da demonstração tem ocorrido muitas vezes por analogia: o professor propõe ao aluno um *modelo* submetido à observação, e o aluno, em seguida, é convidado a *imitar* o método de resolução numa situação aproximada. Esta aprendizagem por imitação, como observa MULLER (1994), não tem nada de evidente para os alunos: a maioria deles tem dificuldade para mobilizar os saberes. Para começar um problema não existe um método de resolução geral e é difícil a ajuda do professor nesse assunto.

3. **Escolhas macro-didáticas**[1] visando à elaboração da Seqüência:

- Situações-problema envolvendo demonstrações vivenciadas em sala de aula como um tempo num processo complexo de resolução de problemas.

- Situações-problema envolvendo a dialética figura falsa e figura verdadeira que introduz a codificação dessas figuras como elemento constitutivo da prova.

- Situações-problema explorando as pesquisas com os alunos para construir um traço de suas representações.

- Situações de formulação em que o aluno é solicitado a redigir o enunciado de um problema a partir de uma figura; a escrever a solução sobre um problema resolvido; a completar propriedades, dar hipóteses e a conclusão; a fazer demonstrações do tipo quebra-cabeças (colocar os argumentos numa ordem certa); a criticar uma demonstração.

4. **Variáveis de situação** – referentes à escolha das atividades, à forma de trabalho e ao tempo necessário para trabalhá-las.

Optamos por aplicar uma Seqüência Didática constituída de uma série de cinco sessões, que se caracterizaram por uma oficina de formação e capacitação de professores que trabalham principalmente com alunos de 7ª e 8ª séries.

As atividades e as situações-problema de nossa Seqüência Didática foram inspiradas nos trabalhos de BALACHEFF, HOUDEBINE, MULLER, ARSAC, BARBIN, DUVAL, citados ao longo deste trabalho, e de R. DELORD e outros (1992) e G. BONNEFOND e outros (1992), para serem trabalhadas

---

[1] Referentes à organização global da Seqüência.

com grupos de dois professores a fim de propiciar interação e estimular a reflexão dos participantes. Foram elaboradas:

- para ser aplicadas em sala de aula por alunos a partir da 7ª série, visando ao ensino-aprendizagem do método da prova dedutiva, uma das características da Matemática;

- para ser submetidas à reflexão e à validação dos professores pesquisados que trabalham com alunos das séries finais do ensino fundamental.

A Seqüência Didática teve a duração total de vinte horas, divididas em cinco sessões, realizadas aos sábados no período da manhã, assim distribuídas:

- Pré-teste
- 1ª sessão (14/6/97) – Introdução
- 2ª sessão (21/6/97) – Atividades: 01 a 05
- 3ª sessão (28/6/97) – Atividades: 06 a 10
- 4ª sessão (05/7/97) – Atividades: 11 a 15
- 5ª sessão (09/8/97) – Atividades geométricas utilizando a ferramenta Cabri Géomètre
- Pós-teste

Por ocasião da realização da 2ª e 5ª sessões, o Orientador desta nossa pesquisa esteve presente durante as atividades trazendo sua contribuição principalmente com a manipulação do Cabri Géomètre.

5. **Variáveis de contrato** – conjunto de comportamentos esperados pelo professor e pelo aluno na relação didática.

O contrato didático foi constituído na primeira sessão da Seqüência, oportunidade em que se estabeleceu que o trabalho seria aplicado pela própria pesquisadora, na presença de um professor observador, daí advindo o vínculo implícito por parte de todos garantindo a realização das atividades.

Estivemos à disposição dos professores, por ocasião do trabalho, para esclarecer dúvidas. Após cada atividade, ocorreram debates coletivos em torno da correção das questões que se prestaram para momentos de reflexão.

## 5.2 - APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

A Seqüência Didática foi aplicada pela pesquisadora a qual contou com um professor auxiliar para observações e gravações. Desenvolveu-se durante cinco sessões de quatro horas cada uma com um breve intervalo para lanche, com professores de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental da rede de ensino estadual e particular paulista.

Participaram da oficina de trabalhos, realizada fora do horário escolar, 12 professores.

Foi colocado à disposição dos professores, reunidos em duplas, papel para rascunho, réguas, esquadros, objetos para desenho, além dos textos com as atividades.

A pesquisadora manteve, em todas as sessões, os seguintes procedimentos:

- Distribuiu os textos com as atividades
- Verificou a composição dos grupos de trabalho
- Supervisionou os trabalhos
- Mediou a discussão ao final de cada sessão
- Recolheu todo o material ao final de cada sessão, guardando–o para as sessões posteriores

A **primeira sessão** foi realizada no dia 14 de junho de 1997, na escola particular Novo Rumo, situada na cidade de Taubaté, estado de São Paulo, oportunidade em que foi aplicado individualmente o Pré-teste com a duração aproximada de duas horas. Logo após foi estabelecido o contrato didático para todas as sessões e organizados livremente os grupos de trabalho. Foram expostos aos professores, que estavam se colocando no lugar de seus alunos de 7ª e 8ª séries, os objetivos das atividades da Seqüência, quais sejam o de submeter à reflexão dos participantes os aspectos didáticos e matemáticos da distinção entre argumentos empíricos e dedutivos, a fim de entenderem por que os matemáticos atribuem tanta importância à "prova" chamada de "prova dedutiva". Após a apresentação pessoal de cada professor, encerrou-se esta sessão com uma síntese das <u>principais observações</u> ocorridas: que um dos objetivos das sessões seria a permuta de opiniões entre os professores e não a avaliação de seus conhecimentos; que, nos encontros subseqüentes, as atividades deveriam ser discutidas, executadas e avaliadas dentro de uma <u>análise matemática</u> (resoluções possíveis, formas de controle, resultados esperados) e uma <u>análise didática</u> (variáveis didáticas de situação, pré-requisitos e competências); que cada grupo deveria resolver suas dúvidas sem mediação da pesquisadora, pois, após o término de cada atividade, por parte de todos os grupos, a pesquisadora colocaria em debate as conclusões de cada grupo, fazendo a institucionalização do conhecimento, antes de passar para a atividade seguinte; que os grupos não precisariam contar com os mesmos participantes, podendo ser alterados.

A **<u>segunda sessão</u>**, realizada no dia 21 de junho de 1997, compreendeu a resolução das atividades 1 a 5.

**Atividade 1** – A percepção de que o "resultado de medições" de uma figura geométrica fornece apenas uma "idéia" de certas propriedades da figura: a **conjetura** (verificação empírica e argumentação empírica). A necessidade de sempre **provar** quando se afirma um resultado (prova dedutiva e argumentação dedutiva).

**Atividade 02** – A importância de se usar um "contra-exemplo" para provar que a propriedade de uma figura é falsa, podendo invalidar um enunciado.

**Atividade 03** – A exploração da figura, objeto desta atividade, deve apoiar–se na busca da "prova" que ocorrerá quando se chegar ao conceito de "ângulo raso".

**Atividade 04** – A construção de figura geométrica baseando–se em conceitos e propriedades, em métodos dedutivos, e a explicação por escrito dos passos dessa construção.

**Atividade 05** – A necessidade de desenvolver o potencial criativo, numa fase heurística, raciocinando sobre a figura sugerida pelo enunciado proposto na atividade, colocando em jogo conceitos já estudados.

Após a conclusão de todas as atividades, foram discutidos e debatidos os resultados com as correções necessárias junto com os participantes.

A **terceira sessão**, realizada no dia 28 de junho de 1997, compreendeu a resolução das atividades 6 a 10.

**Atividade 06** – Atividade proposta para raciocinar e ordenar a demonstração de um "quebra-cabeça", cujos passos aparecem embaralhados.

**Atividade 07** – A necessidade de construir e justificar uma figura geométrica bem feita, bem como de completar um organograma, redigindo os passos da demonstração.

**Atividade 08** – Atividade para pesquisar e construir uma figura geométrica exata, servindo-se de propriedades, definições, fórmulas e preenchimento de esquemas e quadros propostos.

**Atividade 09** – Atividade com objetivo de compreender que, em Matemática, a primeira impressão não é sempre a melhor, ou seja, é necessário refletir, justificar, calcular, provar.

**Atividade 10** – Trabalho para confrontar pesquisas com as dos outros colegas, devendo explicar os passos desenvolvidos de seu raciocínio.

Ao final desta sessão, foram discutidos todos os procedimentos e resultados nela ocorridos.

A **quarta sessão**, realizada no dia 5 de julho de 1997, envolveu as atividades 11 a 15, nas quais foram trabalhados os seguintes assuntos:

a) O uso do método da prova envolvendo interpretação do enunciado (o problema); construções geométricas (a figura); as hipóteses (o que sabemos); a conclusão (o que se quer provar); o esquema (a demonstração).

b) A conscientização de que a demonstração, por si mesma, é um objeto de ensino que necessita de uma aprendizagem, e que utiliza definições e propriedades conhecidas.

c) A institucionalização do debate em torno do que é verdadeiro ou falso, apoiando-se em definições e propriedades com as quais se está de acordo (axiomas).

Após a conclusão das atividades desta sessão, dirimidas as dúvidas, foi feita a síntese dos trabalhos desenvolvidos.

A **quinta sessão**, realizada no dia 9 de agosto de 1997, ocorreu no Laboratório de Informática do Departamento de Informática da Universidade de Taubaté. Discutiu-se a importância do uso de verificação empírica auxiliada por minicomputador em aulas de Geometria. Usou–se a ferramenta "Cabri Géomètre" [2], que permitiu aos professores fazerem e explorarem construções geométricas euclidianas e desenvolverem conjeturas. Posteriormente construíram argumentos e elaboraram provas matemáticas. Nesta sessão, a pesquisadora contou também com a presença e orientação do seu orientador, Prof. Dr. Saddo Al Almouloud.

---

[2] "*Cabri Géomètre*" (Laboratoire Structures Discrètes et Didactique, 1988), programa para microcomputador que permite aos usuários, em aulas de Matemática, fazerem construções e medidas.

### 5.3 – AVALIAÇÃO E RESULTADOS DAS ATIVIDADES

De nosso Questionário (**Anexo 1**), elaborado para verificar as concepções de demonstração por parte dos professores, destacamos duas questões que servem como Pré-teste para avaliar a concepção desses professores sobre o *método da prova dedutiva*, para posterior comprovação com os resultados do Pós-teste, visando avaliar a Seqüência Didática.

#### 5.3.1 – PRÉ-TESTE

***QUESTÃO 01***

Esta questão tem como objetivo verificar a compreensão dos professores sobre as similaridades e diferenças entre resultado de medições nos exemplos e a prova dedutiva.

> 1 – Que sugestão você dá para trabalhar **formalmente** o teorema relativo "*a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 °* " ?

Acreditamos que alguns professores, não trabalhando a Geometria, não saberão provar formalmente o teorema proposto. O resultado global está no quadro abaixo:

| SUGESTÕES APRESENTADAS | o | % | **Estratégias utilizadas pelos professores** |
|---|---|---|---|
| a) Construir vários triângulos, medir seus ângulos e chegar à conclusão | 8 | 14,54 | medidas |
| b) Recortar, dobrar e ver que a soma é l80° | 20 | 36,4 | recortes e dobraduras |
| c) Usar retas paralelas cortadas por transversais. | 3 | 5,5 | Teorema de Tales |
| d) Usar ângulos externos de um triângulo, onde cada um tem medida igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele. | 1 | 1,81 | Teorema do ângulo externo |
| e) Noticiar que é verdade | 4 | 7,3 | notícia |
| f) Deixar os alunos experimentar e descobrir | 4 | 7,3 | Professor não ensina |
| g) (respostas evasivas, não claras) | 5 | 9,0 | Professor não entendeu a questão |
| h) (sem respostas) | 10 | 18,2 | Professor não sabe como resolver |
| **TOTAL de Professores entrevistados** | 55 | 100 | |

A atividade teve um efeito estatisticamente significativo para nossa pesquisa. Havia interesse em examinar mais detalhadamente as estratégias utilizadas pelos professores para desenvolver o raciocínio lógico dedutivo num contexto geométrico.

Nas duas primeiras linhas do Quadro acima, constatamos, como havíamos previsto, que 28 professores (50,9%) usam provas pragmáticas do tipo *empirismo ingênuo*, que consiste em avaliar a verdade de um resultado depois de verificar vários casos.

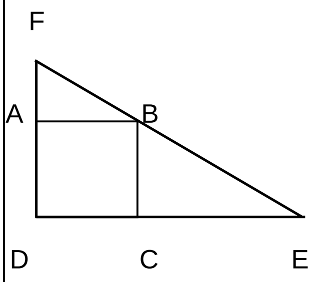
Na terceira e quarta linhas do Quadro, constatamos que apenas 4 professores (7,3%) usam provas do tipo *experimento crucial*, cujo resultado permite uma escolha entre duas hipóteses.

Nas demais linhas, constatamos que 23 professores (41,8%) não trabalham os teoremas e nem sabem o que fazer em situações semelhantes.

**QUESTÃO 02**

Esta questão tem como objetivo verificar que tipo de estratégia de ensino–aprendizagem da demonstração está sendo utilizada pelo professor para resolver situações-problema semelhantes onde a figura não deve ter a qualidade de ser instrumento de prova e, sim, levar o aluno a sentir a necessidade de mobilizar outros instrumentos, como a demonstração, para resolver essas situações. Levar o aluno a sentir necessidade de demonstrar.

2 –Suponha que um professor, em sua sala de aula, “coloque” a seguinte **dúvida** para os alunos:




ABCD é um quadrado de lado 8 cm

AFB é um triângulo retângulo e AF = 5 cm

BCE é um triângulo retângulo e CE = 13 cm

**Pergunta–se:**

– Os pontos **F, B, E** estão alinhados?

Justifique sua resposta.

– Você acha que o seu aluno, de imediato, irá responder que ...
Por quê?

Acreditamos que alguns professores, não habituados a fazer demonstrações, se deixarão influenciar pelo suporte visual do desenho.

| | RESPOSTAS | Nº | % |
|---|---|---|---|
| Você acha que o aluno, de imediato, irá responder que... Por quê? | Não sei! | 3 | 5,5 |
| | Sim. FBE estão alinhados. | 44 | 80 |
| | (sem respostas) | 8 | 14,5 |
| TOTAL | | 55 | 100 |

Podemos observar, como prevíamos, a ilusão da figura que está bloqueando o raciocínio. 44 professores (80%) afirmaram que seus alunos responderiam que "*os pontos FBE estão alinhados*", no entanto, isso não é verdade. Um debate, uma tentativa de justificação ou uma emissão de conjeturas permitiriam desbloquear a situação e poderia se chegar à constatação de que a área do triângulo FDE é diferente da soma das áreas do quadrado e dos triângulos FAB e BCE (desvio de 0,5cm$^2$); então, *os pontos FBE não estão alinhados.*

Nossa intenção é conscientizar que, a partir da 7ª série, o estatuto da figura, assim como o da medida devem evoluir. Os professores apresentaram alguns “*porquês*” de suas respostas:

1 - *“O desenho é lógico e está em escala.” (imediatismo)*

2 - *“O aluno é levado a deduzir através da observação do desenho que, vindo do professor, “acha” que está correto.”*

3 - *“Visualmente perfeito, e ângulos por paralelas e transversais.”*

4 - *“Porque eles nem pensam na hipótese de não estarem alinhados. Pela figura, eles já dão a resposta.”*

5 - *“Os pontos F, B, E estão contidos na mesma reta. A observação será feita olhando os lados e os vértices do triângulo DEF.”*

6 - *“Alguns responderão pela visualização e outros tentarão provar por semelhança de triângulos que os pontos não estão alinhados.”*

*7 - “O aluno não procura, de imediato, saber se a figura apresentada é possível de ser obtida.”*

### 5.3.2 – ATIVIDADES DA SEQÜÊNCIA

**JUSTIFICATIVAS**

Duas questões devem ser colocadas inicialmente:

1. **Ensinar Geometria para quê**?

É fundamental para o ensino da Geometria que o professor perceba que a capacidade de visão espacial dos alunos é maior que a sua habilidade de trabalhar com números.

Ao reforçar este potencial, o professor estará despertando o interesse pela Matemática e promovendo progressos em relação à compreensão dos números e suas operações.

O aluno é um ente geométrico, mergulhado no espaço e acha interessante, com a ajuda da Geometria, poder representar e descrever de maneira ordenada o mundo no qual ele vive.

Necessário se faz, então, que o professor também se aproprie dessa visão de que a Geometria é parte importante do currículo no ensino fundamental, no sentido de perceber que é a partir das concepções dos alunos que ele pode agir para facilitar a aprendizagem e a construção dos conceitos.

2. **Ensinar demonstrar por quê?**

Os problemas em Geometria constituem, geralmente, o domínio dos primeiros encontros dos alunos com as exigências da demonstração. Quando se vê o que contém a atividade demonstrativa nos problemas da Geometria, percebe-se que o raciocínio dedutivo constitui uma das tarefas decisivas. A utilização de definições e teoremas já destaca esta prática.

Como preparar os alunos para essa tomada de consciência?

A partir da 7ª série, uma das questões que devem constar dos exercícios da Matemática propostos aos alunos é: *“demonstrar que...”*

A tomada de consciência do que é uma demonstração comporta etapas. Ao analisarmos essas etapas, constatamos diferentes obstáculos que o aluno deve transpor para produzir um texto no qual se revele a organização profunda da demonstração.

Propomos enriquecer o progresso dos alunos nesse assunto da demonstração por meio de várias atividades a serem feitas pelos alunos acompanhadas de avaliações do tipo: *tal atividade ajudou a superar a incompreensão e o desinteresse pelo assunto?*

**OBJETIVOS**

O interesse particular das atividades propostas em nossa Seqüência Didática objetiva, num contexto dinâmico, enfatizar que, num sistema dedutivo, é preciso geralmente, quando se afirma um resultado matemático, basear–se em afirmações provadas anteriormente e que não se pode demonstrar uma afirmação com base exclusiva em figuras.

Em princípio, como afirma GAUD (1989), há que se ter em vista:

- a necessidade de se explicar porque um resultado matemático é verdadeiro, quando trabalhamos com problemas dependentes da evidência;
- a necessidade de saber se o resultado é verdadeiro quando trabalhamos com problemas não dependentes da evidência.

A demonstração aparece, por ocasião da escolaridade dos alunos, através desses dois tipos de problemas.

O professor que ensina a demonstração deve, então, intervir:

- induzindo este questionamento entre os alunos e
- propondo respostas a essas questões.

**ESCOLHAS DIDÁTICAS**

A singularidade de nossa Seqüência de problemas está na abordagem do conhecimento dos fatos geométricos, nos textos utilizados e no modo de se ensinar. Sugerimos que os exercícios sejam desafios. O aluno é solicitado a descobrir se a afirmação é verdadeira ou falsa, a demonstrá–la no caso de ser verdadeira, e oferecer contra–exemplo no caso de ser falsa.

Trabalhamos baseados na observação, no desenho, nas medidas com atividades de construção geométricas, de descrição e de formulação, com intuito de despertar o sentido e a necessidade da prova matemática. A demonstração, aqui considerada, é aquela vivida em sala de aula, como um tempo dentro do processo complexo de resolução de problema (BARBIN, 1988).

Questionamos a natureza das figuras construídas, após uma seqüência de ações realizadas pelos alunos, as quais lhes permitiram conjeturas, tentando fazer nascer o gosto da procura, desenvolvendo entre eles a necessidade de prova. Pedimos para verificar uma afirmação quanto à precisão, solicitamos justificar mediante explicações por escrito da validade de afirmações corretas, bem como refutar conjeturas incorretas com o oferecimento de contra-exemplos, e redigir os passos de sua construção.

Os conceitos, propriedades e teoremas referidos são supostamente conhecidos pelos alunos de uma 7ª série, por exemplo, triângulos, ângulos, quadriláteros, circunferências, retas, perpendiculares, concorrentes, segmentos, cevianas, razão e proporção.

Em seu esforço de observar as figuras e suas propriedades, de explorar condições favoráveis com o fim de provar, os alunos podem ser levados a usar *instrumentos de medições* , tais como: régua graduada, esquadro, compasso e transferidor sugeridos no enunciado do problema e chegarem a conjeturas do tipo: “*parece que*”, “*diz-se que*”.

Como certas impressões são às vezes inexatas, há necessidade de o aluno recorrer a um teorema estudado em classe, como “*a soma dos ângulos internos de um triângulo*”, para justificar a resposta correta solicitada.

Pedimos, por exemplo, uma explicação para o erro dos outros alunos, tendo em vista que o aluno, a partir da realização desta exposição, deve começar uma reflexão sobre suas próprias práticas. Essa descrição de práticas conduz a uma reflexão que tende a modificar o método escolhido.

PIAGET(1967), referido por R. DUVAL e M. E. EGRET(1989), insistia sobre as relações entre a linguagem e o pensamento: "*é na expressão discursiva espontânea que o sujeito toma consciência de propriedades ou de distinção, as quais ele levou em conta na ação sem, no entanto, ter percebido*." Às vezes os alunos mesmos trazem a julgamento seus erros. Essa variedade de questionamentos capacita o aluno a aprender a demonstrar e entender a estrutura de um teorema matemático.

Desenvolvemos as atividades distribuindo aos professores-alunos o enunciado de cada questão, pedindo-lhes o cumprimento das seguintes etapas:

- leitura do enunciado;
- pesquisa individual das estratégias a serem usadas na construção proposta
- leitura oral, por parte de alguns participantes, professores, do método vislumbrado para a construção e/ou solução;
- início das estratégias que levassem à solução e/ou construção da figura e a busca de uma justificativa para o caminho escolhido;
- pesquisa individual, depois em grupo de dois, da justificação da escolha e/ou da natureza da figura construída;
- redação individual da explicação para o erro dos outros colegas;
- debate em classe para esclarecer o erro dos outros colegas;
- estabelecimento da institucionalização.

## RESULTADOS ESPERADOS

Acreditamos que os professores não parecem se dar conta dessas situações, não atuam sobre elas, não têm consciência da importância de tal articulação entre resolução e demonstração que está no cerne da narração da justificação das ações. Por isso, formulamos algumas questões planejadas especificamente para o professor refletir e discutir sobre o objetivo das atividades propostas na Seqüência Didática, visando à institucionalização, pelos alunos, de regras do debate matemático.

### CORREÇÃO

Esclarecemos aos professores que eles, diante das atividades propostas, se colocariam no lugar de seus alunos, para entender como os alunos vivenciariam cada uma dessas situações de aprendizagem. Os professores trabalharam em grupos de dois sempre preocupados com uma maior precisão nos resultados esperados

Iniciamos nossas atividades propondo questões em torno de "*conjeturar*" e "*provar*" para fundamentar um debate sobre a importância da "*prova*" matemática, a qual costuma gerar dificuldades aos alunos porque não vêem sua necessidade, nem seu sentido.

A seguir, apresentamos os objetivos, as previsões, os resultados e o debate dessas atividades.

ATIVIDADE 01 **- CONJETURAR? PROVAR?**

⇒ **Enunciado:**

*Traçar um triângulo ABC tal que o lado AB = 6 cm, ângulo A = 33º e ângulo B = 56º .*

*O triângulo ABC é retângulo?*

Respostas orais de três alunos:

***João**: "Sim; medindo o ângulo C com o meu transferidor, eu encontro 90º."*

***Paulo**: "Concordo com você, João, eu verifiquei com o meu esquadro."*

***Ana**: "Não concordo! Eu estou segura de que o ângulo C não é reto: ele mede 91º."*

1. Um só dos três alunos tem razão. Quem é? Por quê?

2. Dê uma explicação para o erro dos outros alunos.

**OBJETIVOS**

Esperamos levar o aluno a perceber que:

- o "*resultado de medições*", após o uso de instrumentos, fornece somente "*uma idéia*" de certas propriedades de uma figura, o que se chama **conjetura**. Trata–se de verificação empírica e argumentação empírica;

- é preciso sempre **provar** quando se afirma um resultado. **Provar** é "*mostrar*" , ou "*demonstrar*" , ou "*justificar*", servindo–se de uma ou várias propriedades estudadas em aula. Trata-se de prova dedutiva e argumentação dedutiva;

- instaurar o debate entre grupos e com toda a classe e concluir sobre as condições da aplicação de um teorema.

Essa atividade, num primeiro momento, é ocasião também para:

- fazer uma construção geométrica após o raciocínio;

- explicar , ou seja, justificar, descrever, palavras que surgem no texto;

- separar, escolher dados;

- passar do enunciado (registro da linguagem) para a linguagem matemática;

- trabalhar de forma escrita;

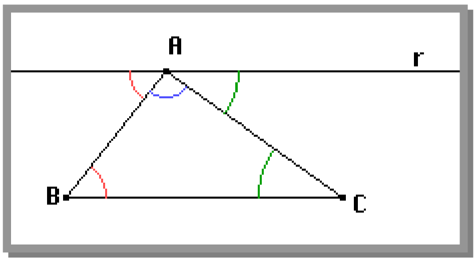
- ordenar os argumentos.

**NOSSAS PREVISÕES**

Esta atividade é proposta ao aluno supondo que ele tenha à sua disposição as ferramentas intelectuais suficientes para proporcionar-lhe vários métodos de resolução, tais como:

- soma de ângulos de um triângulo;

- ângulos alternos internos;
- propriedades de ângulos ou lados de um paralelogramo, pois a aluna Ana, para se sentir segura de que o ângulo C não é reto, deve ter idealizado a seguinte figura:




Acreditamos que, durante o desenvolvimento da atividade, os alunos encontrarão dificuldades como:

- conflito entre a observação da <u>figura</u> e o <u>cálculo</u>: de um lado, observando a figura, dirão que o terceiro ângulo mede 90º (usando transferidor e esquadro); por outro lado, usando a soma das medidas dos ângulos de um triângulo, encontrarão 33º + 56º = 89º. Se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, então o terceiro ângulo medirá 91º, o que estará em contradição, por exemplo, com a resposta de João;
- conflito entre a observação da <u>figura</u> e as <u>medidas</u>: desbloqueados quanto à natureza do triângulo construído e a justificação realizada corretamente por grande parte, possivelmente uma parte dos alunos dirá que o triângulo não é retângulo, pois o terceiro ângulo tem medida 91º, e outra parte dos alunos insistirá que o triângulo é retângulo, pois, para eles, é forte a visualização da figura. A maneira de resolver esses conflitos é através do raciocínio dedutivo. Ressaltamos que a visualização e a medição são estratégias fundamentais para a descoberta de propriedades geométricas, mas não se pode demonstrar usando apenas figuras e medidas.

**RESULTADOS**

Observando as respostas dadas às questões desta atividade, encontramos os seguintes resultados: todos responderam que "*Ana é a única que tem razão*", pois "*ela usou o teorema adequado*", "*aplicou a propriedade*", "*concluiu, pelos cálculos, pelo conceito*", "*foi além do visual e usou conhecimentos anteriores, enquanto que os outros alunos foram apressados em suas conclusões*".

Na explicação para o erro dos outros alunos, ficou claro *que "os outros levaram em conta somente a figura*". Houve um "*erro visual*", "*erro de traçado*", "*construção de qualquer jeito*", "*usaram o olhômetro*".

Um professor afirmou que "*a Geometria é passada para o aluno de forma concluída sem que o próprio aluno chegue a essas conclusões*."

Outro professor afirmou que "*não podemos penalizar o aluno por sua construção, pois os transferidores e esquadros que estão no mercado nem sempre são confiáveis*."

Observamos que todos corrigiram as questões, refletiram, trocaram idéias e anotaram os resultados discutidos. Mas sentiram certo desconforto para dar as "explicações" solicitadas. Redigir respostas às questões não lhes foi fácil, pois reclamaram quando eram convidados, argumentando que "*os alunos não gostam de fazer isso*."

Foram apresentadas, nesta atividade, quatro questões para reflexão e discussão do professor, com os seguintes resultados:

1 - Quais regras do debate matemático você acha que os alunos aprenderam, ou seja, institucionalizaram?

*1 - "Os instrumentos têm falhas. O conceito também é importante."*

*2 - "Juntar a teoria com a prática, ou seja, aliar construções antes de chegar a uma conclusão formal."*

*3 - "Uso de propriedades, pois desenhos e instrumentos causam erros visuais e de precisão... não confiar em desenhos (apenas ilustrativos)."*

*4 - "A experimentação é insuficiente, é necessário usar conceitos*."

2 - Acha importante levar o aluno a fazer diferença entre ***provar*** e ***conjeturar*** ?

Todos responderam “sim”, com as seguintes justificativas:

*1 - “Na prova, você se baseia em verdades, e na conjetura você não tem certeza.”*

*2 - “Sempre provar aquilo que conjeturou.”*

*3 - “Sim, pois com a prova o aluno não tem o que discutir, ele assimila a verdade, enquanto que com apenas conjetura ele fica incerto com a resposta e daí a insegurança.”*

*4 - “Sim, pois o aluno se preocupa muito com a visualização e não com a lógica. Com a construção, temos o visual e, com ela, provamos a lógica.”*

*5 - “Sim, pois os alunos sentem a necessidade de verificar, provar, sentir as coisas reais. Quando em sala afirmamos que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º , o aluno prefere verificar em vários triângulos, ao invés de compreender a explicação do professor.”*

*6 - “Sim, pois, provando o aluno mostra através de sua ação intelectual que absorveu todos os conceitos dados pelo professor.”*

3 - Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes nessa situação-problema?

São as seguintes as respostas dadas pelos professores:

*1 - “Aprender a cercar o exercício, ou seja, antes de afirmar alguma coisa, verificar, através de todos os seus conhecimentos anteriores, qual a melhor solução.”*

*2 - “O aluno transfere a aprendizagem do teorema e usa na sua solução.”*

*3 - “O aluno deve responder a pergunta baseando–se em propriedades e construir a figura para uma comprovação.”*

*4 - “É difícil avaliar o aluno, pois ele somente confia no que vê e não utiliza as propriedades.”*

*5 - “O aluno deve perceber que medir pode acarretar erros. A insistência do aluno para resolver tudo graficamente é grande.” “O desenho para nos levar a erros.”*

### 4 - Dê suas sugestões

Principais sugestões:

*1 - "Na sala de aula, devemos passar conceitos para os alunos e também dar lhes tempo para que cheguem às suas próprias conclusões."*

*2 - "Usar recortes de figuras, dobraduras, manipulações (os alunos gostam)."*

*3 - "Aliar o desenho à Matemática e vice-versa."*

*4 - "Em avaliações, acompanhar o aluno no desenvolvimento do seu raciocínio."*

*5 - "Que o professor use teorema para justificar."*

**DEBATE**

Após a atividade, procedeu-se ao debate e à institucionalização, propondo aos participantes professores-alunos esclarecimentos no sentido de que, num sistema dedutivo, é preciso:

- distinguir entre suposições e conclusões, mesmo que essa distinção não esteja clara no enunciado;
- levar em conta todos os dados de um enunciado, pois cada palavra é importante;
- desconfiar das aparências;
- desconfiar das medições;
- prestar atenção aos dados do enunciado não inventando nada.

A redação das razões do "erro" dos colegas, nesta primeira atividade, é relevante, podendo ser discutida, mas o que importa é observar como o aluno chega ao seu resultado, à sua construção pessoal, através das análises, observações e resultados de seus colegas. Um tempo maior no trabalho em grupo parece que permite a todos realizar a construção. A explicação solicitada permite perceber o raciocínio da construção e superar obstáculos que um ou outro aluno retém por mais tempo. O debate com todos os alunos é necessário para ver resolvida a natureza do triângulo.

Iniciamos esta atividade envolvendo a demonstração, alertando para a necessidade da "***prova***" que tenha sentido para o aluno, referenciando as pistas do estudo, seus bloqueios, seus desinteresses e causas de erros.

ATIVIDADE 02 - **CONTRA-EXEMPLO**

⇒ **Enunciado:**

Um aluno da professora Ana, numa prova, respondeu:

a) *Não importa qual triângulo eqüilátero, ele tem somente um eixo de simetria.*

b) *Todo quadrilátero, tendo suas diagonais perpendiculares, é um losango.*

c) *os Se segmentos MA = MB, então M é o ponto médio do segmento AB.*

1. Você acha que o aluno acertou tudo?

2. Se não acertou, como você poderia convencê-lo de que ele está errado?

**OBJETIVOS**

Esperamos levar o aluno a compreender que:

- para demonstrar que uma propriedade é falsa, basta encontrar um elemento que não a satisfaça: o chamado "*contra-exemplo*", suficiente para refutá-la. O "*contra-exemplo*" prova que a propriedade é falsa. Um *"contra-exemplo"* é suficiente para invalidar um enunciado;

- para provar um resultado negativo, basta usar figuras que podem servir como "*contra-exemplo*";

- para decidir se uma afirmação é verdadeira ou falsa, deve-se considerar antes casos diferentes;

- para demonstrar, a figura precisa evoluir de uma realidade física para a representação de um modelo matemático ou de um conceito.

## NOSSAS PREVISÕES

Pensamos que, nesta atividade, a maioria dos alunos poderá errar todas as questões devido ao papel importante da mensagem contida no enunciado: os alunos parecem estar acostumados a dar resposta imediata sem antes refletir atentamente sobre o conteúdo do enunciado, não vendo a necessidade de prová-la. Nos cursos tradicionais, é comum apresentar aos alunos a afirmação como um fato estabelecido para que eles façam uma demonstração.

Em face disso, acreditamos que irão construir figuras falsas, em vista de, para eles, a função da figura ter um estatuto de prova, representando uma realidade física.

## RESULTADOS

Respostas dadas às duas questões referentes ao enunciado proposto:

1 - Dois professores participantes afirmaram que "*novamente o aluno comete o erro da pressa, errando todas as questões. É difícil, para ele, conciliar o seu conhecimento com o que ele vê. Ele não está acostumado*."

2 - A maioria dos participantes, para convencer o aluno de que ele errou, pediria para que ele construísse cada figura, recortando-a e, através de dobraduras, observasse o que a professora Ana propôs na prova.

3 - Dois outros professores disseram que, através de construções de bissetrizes, alturas, medianas, diagonais, eixo de simetria, diagonais perpendiculares e ponto médio do segmento AB, os alunos poderiam enxergar as propriedades.

Nesta atividade, foram apresentadas três questões para reflexão e discussão dos professores, com os seguintes resultados:

1 - Dê sugestão de um método para que seu aluno use e se sinta convencido ao provar uma propriedade falsa.

Principais sugestões:

*1 - "Passaria exercícios para o aluno com várias informações para ele entender e visualizar."*

*2 - "Manusear materiais adequados a fim de que ele possa verificar e tirar suas próprias conclusões."*

*3 - "Provar com desenhos."*

*4 - "Figuras em cartolina, pois o aluno se baseia muito, e quase sempre, no que vê."*

*5 - "O método mais válido é a construção juntamente com o aluno."*

*6 -"Demonstração através de construção geométrica, variando os ângulos em cada desenho."*

2 - Quais vantagens didáticas, para o professor, e matemáticas, para o aluno, você vê nesse tipo de questionamento?

Algumas respostas dadas à questão:

*1 - "Vantagem de levar o aluno a raciocinar e não a aceitar os conceitos, conciliando todos os seus conhecimentos."*

*2 - "Trata-se de método convincente, prático, que ajuda a interessar o aluno."*

*3 - "Leva o aluno a compreender uma resposta."*

*4 - "Vantagem para o aluno: ele mesmo vai formular exemplos para provar o que está fazendo; caso erre, vai encontrar os erros feitos no exercício através de seus conhecimentos. Vantagem para o professor: saberá os métodos utilizados por seus alunos, que erros cometeram e onde trabalhar mais para ajudá-los."*

*5 - "Vantagens para ambos: pensar melhor."*

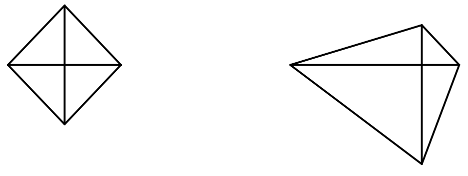
3 - Dê suas sugestões

Alguns professores sugeriram que deveriam ser feitos vários exercícios com enunciados diferentes, mas que levassem ao mesmo resultado, ou resultados que pudessem ser comparados para que os alunos percebessem por si mesmos seus erros.

**DEBATE**

Esta atividade ensejou uma discussão acalorada por parte de todos os seus participantes.

Quando se indagou se o aluno havia “*acertado tudo*”, a maior parte dos participantes fez uma previsão que “sim”. Mas, ao responderem como o professor poderia convencer o aluno de que este havia “errado”, alguns participantes ficaram espantados por terem, eles mesmos, interpretado como verdadeira a proposição falsa: “*Todo quadrilátero, tendo suas diagonais perpendiculares, é um losango*”. Em conseqüência disso, construíram uma figura particular (no caso falsa), quando deveriam construir uma figura mais geral (no caso, verdadeira). Não pensaram também em negar a proposição, e ficaram embaraçados. Nenhum deles pensou em refazer a figura. Esqueceram enfatizar o aspecto dinâmico, fazendo uma diagonal perpendicular à outra mover-se livremente de maneira a criar uma multiplicidade de quadriláteros não losango. Quando foram convidados a refazer sua figura, suas reflexões foram desbloqueadas e chegaram a formular o “*contra-exemplo*” com o seguinte teorema: “*Algum quadrilátero, tendo suas diagonais perpendiculares, não é um losango*.” Ou “*existe, pelo menos, um quadrilátero tendo suas diagonais perpendiculares que não é um losango*.”

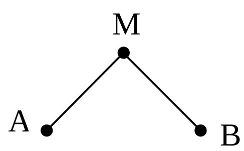


(Fig. particular) (Fig. mais geral) Existe pelo menos um quadrilátero tendo suas diagonais perpendiculares que não é um losango.

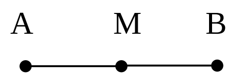
As regras que regem esses textos são complexas e são raramente conhecidas explicitamente pelos participantes.

As idéias de *“qualquer que seja”* e *“existe”* representam um papel importante mesmo se elas estão, muitas vezes, ocultas.

Em relação à proposição condicional: “*Se os segmentos MA = MB, então M é o ponto médio do segmento AB*”, os participantes interpretaram-na também equivocamente, pois consideraram os pontos A, M e B colineares, quando deveriam pensar na possibilidade de esses mesmos pontos não serem colineares (caso mais geral). Os professores participantes utilizaram hipóteses suplementares que não aparecem no enunciado, introduzindo erros na solução.




(M é ponto eqüidistante de dois pontos A e B)




(M é ponto médio)

Podemos concluir que a demonstração é uma das formas válidas de argumentação, é um meio de clarear a solução de um problema, mas é necessário uma demonstração dedutiva geral. Um ou mais casos particulares não provam uma afirmação geral.

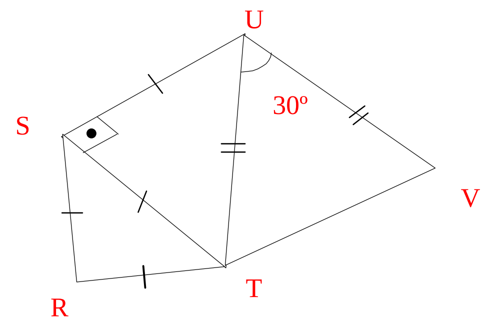
Concluímos que o aluno precisa familiarizar-se com as estruturas “*Se... então*”, quantificador universal ($\forall$) e os existenciais ($\exists$, $\exists|$).

**ATIVIDADE 03 – PROVAR**

$\Rightarrow$ **Enunciado:**

*Apoiando-se sobre os dados desta figura a mão livre, pode-se afirmar que os pontos **R**, **T** e **V** estão alinhados?*

*Justifique matematicamente sua resposta.*



## OBJETIVOS

Esperamos que o aluno:

- se sensibilize para a demonstração;
- não leve em conta a imperfeição da figura, pois o importante são as informações nela contidas;
- destaque subfiguras para melhor analisá-las;
- inicie a articular hipótese-teorema-conclusão.

## NOSSAS PREVISÕES

Explorando a figura, o aluno deverá apoiar-se sobre os seguintes pré-requisitos para ter condições de arquitetar a solução deste desafio:

- as características de um triângulo eqüilátero, de um triângulo retângulo e de um triângulo isósceles;
- o teorema da "soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo";
- a condição de alinhamento de três pontos;
- ângulos com o mesmo vértice e no mesmo semiplano.

Acreditamos que, num primeiro momento, alguns alunos poderão ter dificuldades para descobrir um caminho que os conduza à solução do desafio. Acreditamos também que eles conseguirão trabalhar sobre as configurações particulares da figura em duas direções: na do cálculo e na da demonstração.

## RESULTADOS

Encontramos, nas respostas dos professores, cálculos dos elementos métricos de configuração (ângulos) e cálculos dos elementos necessários para demonstrar que os pontos R, T e V estão alinhados, ou V está na semireta oposta à semireta RT.

Nessa atividade, foram apresentadas três questões para reflexão e discussão dos professores, com os seguintes resultados:

1 - A exploração da figura ajudou na descoberta da solução? De que modo?

Respostas dadas por alguns professores:

*1 -"A exploração, sim, a visualização, não, pois a figura nos fornece dados suficientes para chegarmos a uma certeza lógica da solução verdadeira."*

*2 - "Sim, com o conhecimento das propriedades."*

*3 - "Levou o aluno a redescobrir conceitos, uma vez que, ao explorá-la, teve que recorrer a conceitos já estudados, fazendo uso das definições, das propriedades, axiomas e teoremas."*

2 - Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes ?

Informações relevantes, do ponto de vista "*matemático*", para o aluno:

*1 - "A figura ter sido feita a mão livre para o aluno não conferir com o esquadro ou régua, indo pesquisar as propriedades a partir dos dados do enunciado."*

*2 - "Todos os conceitos do enunciado."*

*3 - "Levar o aluno a fazer demonstração de maneira espontânea e livre."*

Informações relevantes, do ponto de vista *"didático"*, para o aluno:

*1 - "Levar o aluno a diferenciar a intuição visual do conceito matemático."*

Observamos aqui que o professor percebeu a apreensão operatória da figura, posterior à perceptiva, estudada por DUVAL, sendo a primeira uma apreensão controlada e importante na aprendizagem matemática.

3 - Dê suas sugestões.

Sugestões apresentadas pelos professores:

*1 - "Apresentar sempre aos alunos exercícios que, à primeira vista, sugerem erros, mas que, analisados, comportam soluções verdadeiras".*

*2 - "Desafiar o aluno para pensar e pesquisar um caminho em busca de solução".*

*3 - "Não apresentar enunciados com soluções óbvias e diretas".*

*4 - "Incentivar o aluno a usar desenhos de figuras para ver as propriedades".*

*5 - "Utilizar melhor nossos conhecimentos: teoremas, propriedades, conceitos".*

**DEBATE**

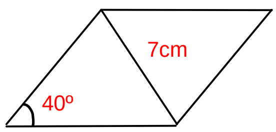
Na discussão, percebemos que os professores já se acham mais à vontade para usar a demonstração como instrumento de prova. Mostraram-se satisfeitos com o tipo de abordagem sugerido para o trabalho com a Geometria em sala de aula.

ATIVIDADE 04 - **REPRODUZIR EM VERDADEIRA GRANDEZA**

⇒ **Enunciado:**

*Reproduzir em verdadeira grandeza o losango que foi desenhado a mão livre. Usar papel sulfite.*

*Redigir os passos de sua construção.*



**OBJETIVOS**

Esperamos que o aluno consiga:

- fazer uma construção após raciocinar;
- separar dados;
- ordenar os argumentos;
- trabalhar a forma escrita;
- justificar as palavras.

**NOSSAS PREVISÕES**

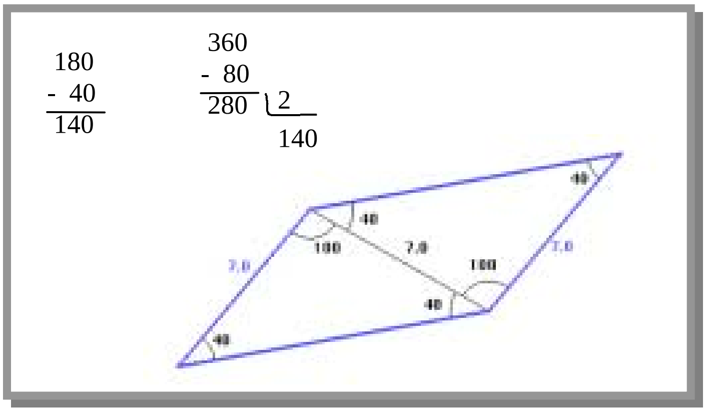
Acreditamos que, em suas estratégias de conjetura, o aluno poderá se sentir em xeque-mate: por onde começar? como traçar a diagonal igual a 7cm?

A solução poderá ir acontecendo à medida que o aluno for enfrentando a questão proposta, pois trata-se de uma situação nova num clima de exploração intuitiva e pensamento criativo. Depois de desenvolver suas conjeturas, o aluno é requisitado a fazer argumentos e a prová-los matematicamente.

**RESULTADOS**

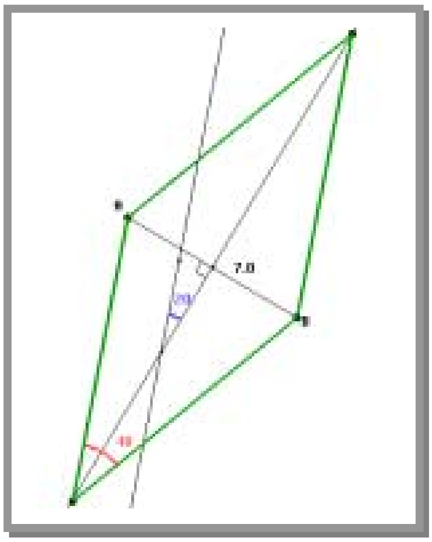
Constatamos nas respostas que alguns professores, não se lembrando das propriedades do losango, ficaram bloqueados: quatro deles não conseguiram resolver o problema, e dois fizeram construções e justificações falsas. Temos, como exemplo, a seguinte redação de uma solução errônea:

> *"1- Procurei todos os dados no desenho através de ângulos opostos ao vértice e também do conhecimento de triângulos isósceles.*
>
> *2- Procurei depois traçar uma reta e um ângulo de 40º numa ponta "A" e subi um lado de 7 cm.*
>
> *3- Desci com um ângulo de 100º o "B" onde consegui o lado de 7 cm e formei o primeiro triângulo ABC.*




Um exemplo de dois outros professores, cuja verdadeira grandeza do losango está correta:

> *1 – "Traça–se a diagonal menor e sua mediatriz (que será a diagonal maior)."*
>
> *2 – "Num ponto qualquer dessa mediatriz, traçar o ângulo de 40º, usando-a como bissetriz deste."*
>
> *3 – "Por paralelismo de linhas, determinar, em A e B, os lados do losango.*"




Nessa atividade, foram oferecidas cinco questões para reflexão e discussão dos professores, com os seguintes resultados:

1 - Quais dificuldades o aluno pode encontrar ao resolver essa questão?

Respostas dadas por alguns professores:

*1 - "Não saber por onde começar."*

*2 - "Vai achar que faltam dados."*

*3 - "Não se lembrar dos teoremas e ter dificuldade na construção."*

*4 - "Visualizar e construir uma figura semelhante (maior ou menor), concêntrica, para depois passá-la para verdadeira grandeza."*

2 - Quais as vantagens e as inconveniências de se utilizar estratégias de raciocínio, incentivando o espírito explorador em problemas desse tipo?

<u>Vantagens</u>:

*1 - "As tentativas próprias que o aluno vai fazer. O caminho é longo, mas muito gratificante."*

*2 - "Fixar o aprendizado."*

*3 - "O aluno aprende realmente (com os erros e os acertos)."*

*4 - "Aplico o conhecimento de escalas."*

*5 - "Deixar o aluno a pensar, tentar, discutir."*

<u>Desvantagem</u>:

*"É a dificuldade do aluno em ter paciência para raciocinar."*

3 - Qual o valor pedagógico no fato de o aluno experimentar suas próprias intuições para compreender conceitos e propriedades?

Em relação ao valor pedagógico, responderam:

*1 - "Não impormos conceitos deixando que o aluno resgate seus conhecimentos."*

*2 - "Nessas condições, a aprendizagem ocorrerá naturalmente."*

*3 - "Na prática, comprovar uma teoria."*

*4 - “Não receber tudo pronto.”*

4 - Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes nessa experimentação?

Do ponto de vista matemático, <u>para</u> <u>o</u> <u>aluno</u>:

*1 - “Utilizar e conciliar todos os conceitos.”*

*2 - “Mostrar e provar que ângulos não se alteram nas escalas.”*

*3 - “Utilização de semelhanças de figuras.”*

*4 - “A iniciativa do aluno.”*

Do ponto de vista didático, <u>para</u> <u>o</u> <u>professor</u>:

*“Conhecer o que o aluno sabe através de seus erros e acertos.”*

5 - Dê sua sugestão

Alguns professores disseram que dariam exercícios desse tipo, em duplas, para que ocorresse o debate e os caminhos fossem encontrados; outros disseram que não tentariam calcular a diagonal maior, que teria como medida um número irracional difícil de se obter numa régua.

**DEBATE**

No transcorrer da discussão, percebemos que os professores gostaram da atividade por ser desafiadora. Comentaram que os livros didáticos geralmente não trazem sugestões semelhantes e alguns deles, professores, confessaram que não sabem trabalhar esses conceitos com os alunos.

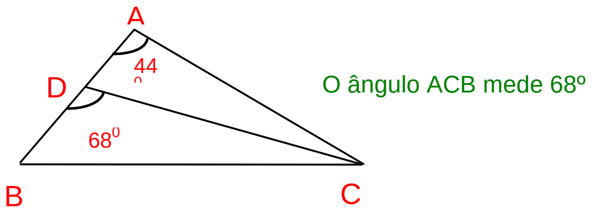
**ATIVIDADE 05 - PROVA**

⇒ **Enunciado:**

*Considere a figura a mão livre.*

*Um aluno quer demonstrar que CB = CD.*

*Com os dados do problema, quais deverão ser as etapas de sua demonstração?*




## OBJETIVOS

Esperamos levar o aluno a perceber que:

- a passagem do quadro geométrico (ângulos, triângulos) para o quadro numérico (cálculo de ângulos) favorece a emergência de raciocínios;
- as propriedades matemáticas são necessárias para se resolver o problema;
- o uso da prova é indispensável para que ele se sinta esclarecido e possa convencer os colegas;
- o uso de propriedades, suas recíprocas, e os conceitos estudados em aulas anteriores servirão para organizar os passos de sua demonstração.

## NOSSAS PREVISÕES

Nossa intenção, nesta atividade, é propiciar ao aluno, numa fase heurística, o desenvolvimento de seu potencial criativo, raciocinando sobre o desenho da figura sugerida pelo enunciado.

O enunciado refere-se à figura imperfeita, que envolve o triângulo ABC, a qual pode ser decomposta em subfiguras: os triângulos ADC e BCD. Pede –se para "provar" a propriedade característica da subfigura triângulo BCD, que é isósceles, em relação ao vértice C.

A dificuldade do aluno, provavelmente, estará em descobrir a medida do ângulo BCD, condicionada à medida do ângulo B = 68º, o que o condicionará à recíproca da propriedade do triângulo isósceles *"Se dois ângulos de um triângulo têm a mesma medida, então o triângulo é isósceles*." Logo, o triângulo BDC é isósceles em C, se e somente se o ângulo BCD for igual a 44º. Donde se conclui que CB = CD, completando a demonstração.

**RESULTADOS**

Observando as respostas dadas, os professores acharam que as dificuldades previstas, sendo discutidas e refletidas pelos alunos, podem ser superadas.

Questões para reflexão e discussão dos professores:

1 **-** Quais propriedades matemáticas são necessárias para resolver o problema?

Os professores acham que os alunos precisam conhecer a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, a classificação dos ângulos quanto aos lados, e a propriedade do triângulo isósceles.

2 - Se o aluno não conseguir obter uma boa estratégia de demonstração, que sugestão você lhe daria?

Os professores acreditam que, se os alunos não conseguirem um bom caminho de demonstração, basta convidá-los a analisar os ângulos e as propriedades, experimentar uma construção real e ou dobraduras de triângulos com essas medidas. Utilizar a verdadeira grandeza e utilizar a soma e a subtração de ângulos seriam outros caminhos.

3 - Para encorajar seus alunos a participarem ativamente, e de modo independente, na construção de seus conhecimentos, como você acha que seria a resposta deles se lhes fosse pedido para proporem "outras soluções" ou para "reescreverem o problema"?

Disseram, de modo geral, que, de início, seria difícil. Para o aluno, seria mais fácil reescrever o problema ou encontrar um contra - exemplo.

4 - Quais vantagens didáticas, para o professor, e matemáticas, para o aluno, você vê ao serem propostas situações-problema desse tipo?

Do ponto de vista didático, os professores garantiram que essa atividade encoraja o aluno a ter idéias próprias. Do ponto de vista matemático, o aluno tem oportunidade para aplicar seus conhecimentos conforme as necessidades exigidas pelo desafio.

5 - Dê suas sugestões

Sugestões foram dadas por alguns professores no sentido de acostumar o aluno, após ter resolvido um problema, a apresentar outros enunciados para aquela estrutura, verificando se há outros caminhos diferentes do encontrado para o mesmo exercício.

**DEBATE**

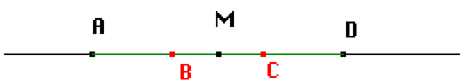
Embora esta atividade seja semelhante às anteriores, houve um bloqueio por parte dos professores quando lhes foi solicitado apontar as etapas de sua demonstração com os dados do problema. O bloqueio é devido ao fato de que, para se redigir, é preciso que as idéias estejam bem claras. Alguns professores disseram que os alunos realmente não gostam dessa parte.

Na discussão, os professores concordam com esta fase de iniciação de aprendizagem formal, a qual permite ao aluno progredir para um nível mais avançado do pensamento geométrico.

ATIVIDADE 06 - **A LEI DO PONTO MÉDIO**

⇒ **Enunciado:**

*Sejam quatro pontos A, B, C e D alinhados nesta ordem e tal que AB = CD*




Demonstre que o ponto médio do segmento *BC* é também o ponto médio do segmento *AD*.

Coloque em ordem as sete frases seguintes para obter uma demonstração desta propriedade:

(1) donde *AM = MD*

(2) Ora, por hipótese: *AB = CD*

(3) M é, então, o ponto médio de *AD*

(4) Por definição de ponto médio, tem-se: *BM = MC*

(5) Seja *M* o ponto médio de *BC*

(6) Então, *AB + BM = CD + MC*

(7) A, M e D alinhados.

## OBJETIVOS

Esperamos levar o aluno a compreender que a resposta para esta situação-problema não é imediata. Para resolvê-la precisa-se redescobrir a lei visada (a do ponto médio), mobilizar as noções adquiridas anteriormente objetivando reorganizar da melhor maneira possível as sete frases apresentadas.

**NOSSAS PREVISÕES**

Acreditamos que os objetivos podem ser atingidos efetivamente durante as discussões e as comparações das possíveis soluções encontradas pelos diferentes grupos da classe, pois, em princípio, eles devem resolver as questões com os seus conhecimentos adquiridos, o que pode levar a várias respostas diferentes.

Durante essas discussões, deverão organizar as sete frases da melhor maneira possível, como:

**5** (1) donde *AM* = *MD*

**1** (2) Ora, por hipótese: *AB* = *CD*

**7** (3) M é, então, o ponto médio de *AD*

**3** (4) Por definição de ponto médio, tem-se: *BM* = *MC*

**2** (5) Seja *M* o ponto médio de *BC*

**4** (6) Então, *AB* + *BM* = *CD* + *MC*

**6** (7) A, M e D alinhados.

Eis a ordem correta das sete frases para demonstrar a propriedade:

**1** (2) Ora, por hipótese: *AB* = *CD*

**2** (5) Seja *M* o ponto médio de *BC*

**3** (4) Por definição de ponto médio, tem-se: *BM* = *MC*

**4** (6) Então, *AB* + *BM* = *CD* + *MC*

**5** (1) donde *AM* = *MD*

**6** (7) A, M e D alinhados.

**7** (3) M é, então, o ponto médio de *AD*

**RESULTADOS**

Refletindo juntamente com os professores, concluímos que as dificuldades encontradas pelos alunos podem ser facilmente resolvidas.

Questões para reflexão e discussão dos professores:

> 1 - O seu aluno aprecia problema desse tipo? Explique.

Uma parte dos professores participantes das atividades acha que alguns alunos irão apreciar problemas desse tipo. Outros professores acreditam que a metade da classe gostará desse tipo de problemas. Mas a maioria dos professores insiste em que os alunos não se interessam e sentem sérias dificuldades em provar, pois não se sentem seguros quanto aos conhecimentos que recebem. Acham que todo conhecimento matemático está pronto, acabado, para ser assimilado e que não lhes cabe contradizê-los, refutá-los ou questioná-los.

> 2 - Em caso negativo, que fazer para motivá-lo?

Os professores estão de acordo com que devemos:

- trabalhar com dobraduras para que o aluno possa ver concretamente como tais pontos se comportam;
- começar com demonstrações bem simples para que os alunos possam adquirir confiança em si próprios;
- trabalhar com os alunos exercícios envolvendo lógica para poder surgir a necessidade de provar.

3 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de problema

A grande vantagem reside no fato de tratar-se de um desafio, permitir desenvolver o raciocínio lógico. Nesse tipo de problema, o aluno torna-se mais solto podendo brincar livremente com os conhecimentos geométricos que adquiriu, podendo até mesmo testá-los. Haverá incentivo para inventar outros exemplos.

4 - Dê suas sugestões

Os professores sugeriram que os alunos sejam motivados a resolverem situações semelhantes, que sejam elaboradas avaliações parecidas para, em seguida, desmontá-las e propô-las a seus colegas para uma nova reorganização, como se costuma fazer com um quebra-cabeça.

**DEBATE**

No final da discussão dessa atividade, chegou-se a um consenso entre os professores entrevistados no sentido de que a visualização deve ser o ponto de partida para a aprendizagem formal da Geometria.

ATIVIDADE 07 - **JUSTIFICAR**

⇒ **Enunciado**:

Eis um diálogo entre um aluno e seu professor:

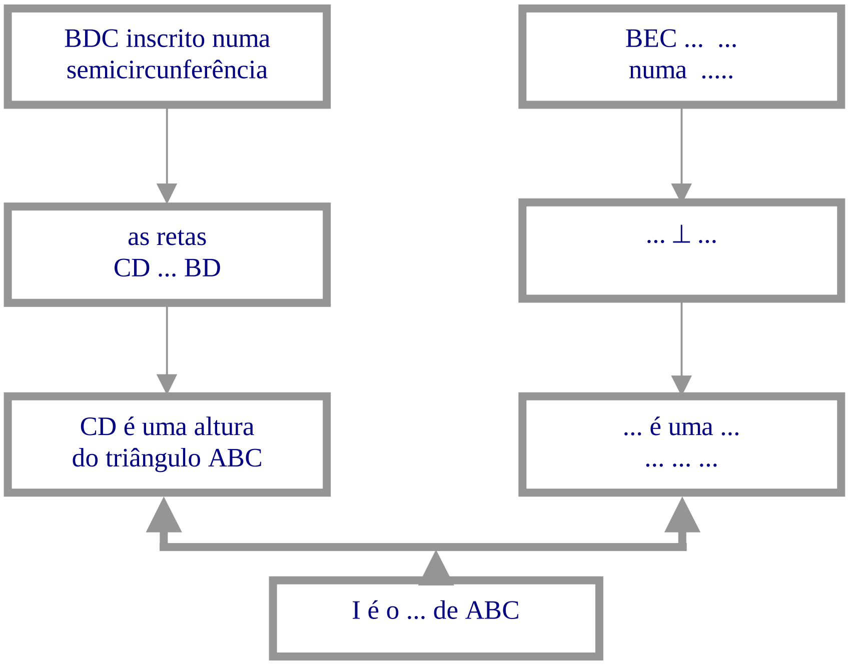
*Traçar uma semicircunferência de diâmetro BC, em seguida marcar dois pontos D e E sobre a semicircunferência.*
*Seja A o ponto de intersecção das retas BD e CE.*

*Apenas com a régua, traçar a perpendicular à reta BC passando por A.*
**Rui**: "*Eu tracei as retas BE e CD que se cortam em I. Em seguida, eu tracei a reta AI : usei este caminho".*

**O** "**Prof.**" (irônico): "*Você não tinha muitas possibilidades para traçar retas a partir da figura; mas é preciso agora justificar sua construção.*"

## 1ª PARTE

Pede-se:
1. Efetuar a construção de Rui, em seguida completar, justificando, o organograma seguinte:




2. Redigir a justificativa da construção de Rui

**OBJETIVOS**

Nossa expectativa é que os alunos percebam, nessa situação, a necessidade de uma construção bem feita da figura proposta e que, embora as figuras sejam de importância fundamental para seu aprendizado, elas não são tudo. Esperamos que os alunos refaçam o conceito errôneo de que a altura do triângulo é um segmento interior do triângulo.

Esperamos que os alunos baseiem seus julgamentos e raciocínios nas definições, superando as tendências visuais da figura construída, que confrontem suas conjeturas com as dos outros colegas de classe, que discutam, que se convençam das propriedades envolvidas, tais como: alturas de um triângulo, seu ortocentro, triângulo inscrito numa semi-circunferência, a hipotenusa coincidente com um diâmetro e a existência de uma única reta por dois pontos dados.

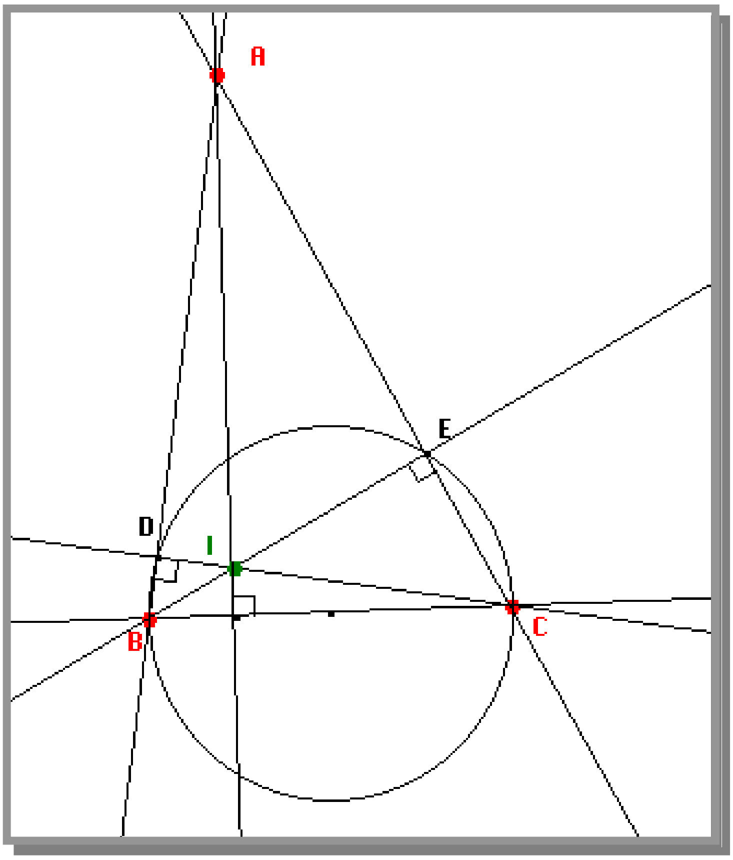
**NOSSAS PREVISÕES**

A maioria dos alunos possui uma imagem conceitual da altura de triângulo que contém apenas segmentos interiores ao triângulo. Tais conceitos são derivados de sua definição matemática e de seus exemplos os quais são figuras geométricas.

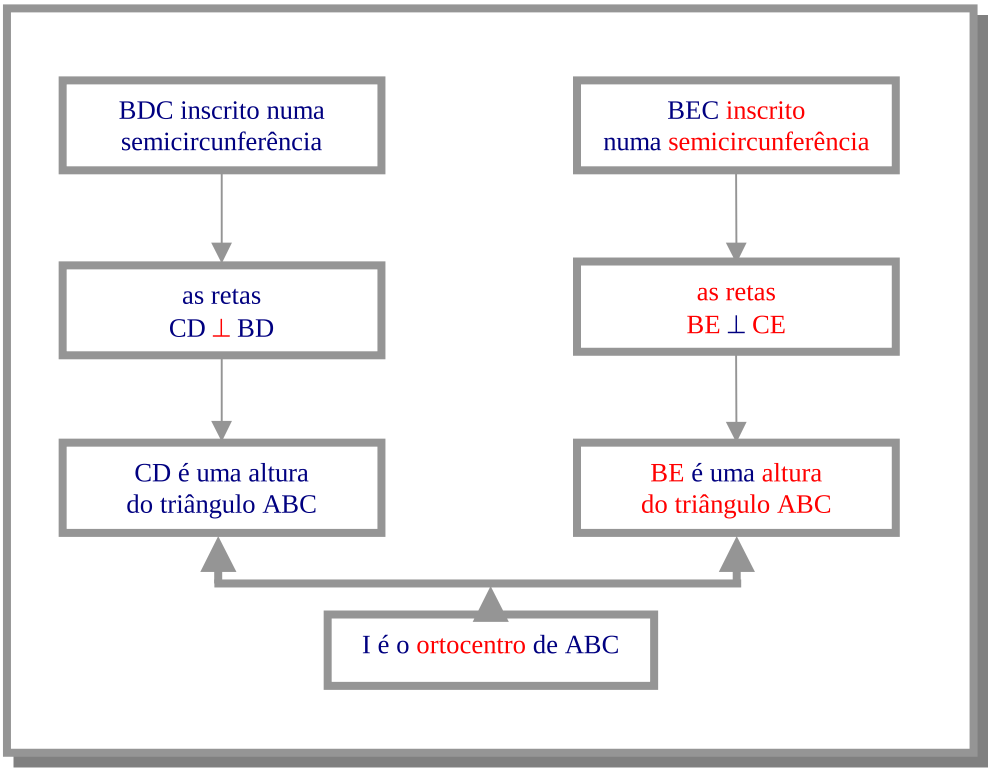
Nessa fase de aprendizagem formal, acreditamos que os alunos, compreendendo relações geométricas mais complexas, têm condições de organizar um experimento para verificar seu valor lógico (verdadeiro ou falso).

A reta que Rui deverá traçar deverá passar pelos pontos *A* (vértice do triângulo ABC) e *I* (ortocentro do triângulo ABC), devendo ser perpendicular à reta BC, pois conterá a terceira altura (segmento AI) do referido triângulo.

Uma das possibilidades da construção de Rui é a que segue:



Rui poderá completar o quadro da 1º parte da seguinte forma:




**RESULTADOS**

Nesta questão, os professores acreditam precisar mais de uma aula e acham que se deva caminhar no ritmo de trabalho da maioria dos alunos, ou seja, bem devagar.

Classificaram o problema de trabalhoso, mas rico em conceitos a serem institucionalizados, tais como:

- um triângulo tem três alturas, as quais nem sempre todas elas pertencem ao seu interior;
- ortocentro;
- triângulo inscrito numa semicircunferência;
- uma única reta por dois pontos.

Questões para o professor refletir e discutir:

1 - Quais propriedades geométricas importantes você levantaria para os seus alunos nesse problema?

Os professores enumeraram as seguintes propriedades geométricas importantes para os alunos nesse problema:

- triângulo retângulo inscrito numa semi-circunferência com a hipotenusa coincidente com um diâmetro;
- todo triângulo possui três alturas. Cada altura estará contida na reta perpendicular que passa por um vértice oposto ao lado considerado ou à sua extensão. Pode-se obter alturas fora da figura;
- ponto notável de um triângulo: ortocentro (encontro das três retas que contêm as três alturas de um triângulo).

2 - Qual metodologia de construção?

Todos os professores concordam que o aluno, antes de tudo, irá pesquisar os conceitos envolvidos, executará tarefas de construção da figura solicitada e, através da visualização, fará conjeturas e, atingindo níveis mais altos de raciocínio, poderá seguramente, apenas com a régua, traçar a reta perpendicular à reta BC, passando por A., conforme comando de ação da atividade.

**DEBATE**

Após a atividade, discutiu-se bastante sobre a importância da visualização ou habilidade espacial dentro do processo de desenvolvimento de conceitos geométricos. Concordaram com que se dê um tratamento intuitivo visual paralelamente ao tratamento dedutivo.

Esta **2ª PARTE** da atividade abaixo ficou como tarefa para casa.

2ª PARTE

⇒ **Enunciado**:

*Trace um círculo de diâmetro AB, em seguida marque um ponto M no seu interior.*

*É possível construir, apenas com a régua, a perpendicular à AB passando por M ?*

*Como?*

*Explique.*

Questões para o professor refletir e discutir:

1 - Qual justificativa o aluno poderá apresentar para validar a sua construção?

2 - E se ele não conseguir, que "empurrãozinho" você daria?

**OBJETIVOS**

Propiciar mais alguns momentos de reflexão e investimentos nas novas técnicas e conhecimentos adquiridos.

**NOSSAS PREVISÕES**

Esperamos que os participantes traduzam ou compreendam esse problema dado e cheguem a uma representação dele que lhes permita dar uma resposta à questão proposta.

**RESULTADOS**

A maioria dos professores resolveu o problema e se satisfez com a experiência. Outros aplicaram esta atividade a um grupo de alunos com o objetivo de perceber e analisar as concepções e os processos de resolução por parte de seus alunos.

**DEBATE**

Na apresentação dos resultados colhidos, os participantes se justificaram dizendo que, devido a terem resolvido a primeira parte do problema, esta segunda parte não lhes foi muito difícil. Entretanto, os participantes que levaram o problema para alguns alunos puderam constatar que estes sentiram inúmeras dificuldades. Entre elas, queriam que o professor lhes direcionasse o caminho a ser seguido, mas o contrato estabelecido entre a classe e o professor para essa atividade foi "não dar a resposta". O aluno deveria, pois, "agir" para encontrar a solução. No final, o aluno conseguiu a solução graças aos contra-exemplos que o professor lhe apresentava quando surgia um obstáculo.

ATIVIDADE 08 - **PESQUISAR E, EM SEGUIDA, REDIGIR UMA DEMONSTRAÇÃO**

⇒ **Enunciado**:

*Traçar dois paralelogramos ABCD e AECF*

*Provar que EBFD é um paralelogramo.*

1ª PARTE

Pede-se:

1. Assinalar com um (**x**), dentre as afirmações (verdadeiras) abaixo, aquela única que seja útil para resolver o problema. Qual? Por quê?

"Um quadrilátero convexo

*( ) cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo."*
*( ) cujas diagonais têm o mesmo ponto médio é um paralelogramo."*
*( ) cujos lados opostos têm o mesmo comprimento é um paralelogramo."*

2. a) Colocar as frases seguintes na ordem de um esquema de demonstração:

*Ora, se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, é um paralelogramo.*

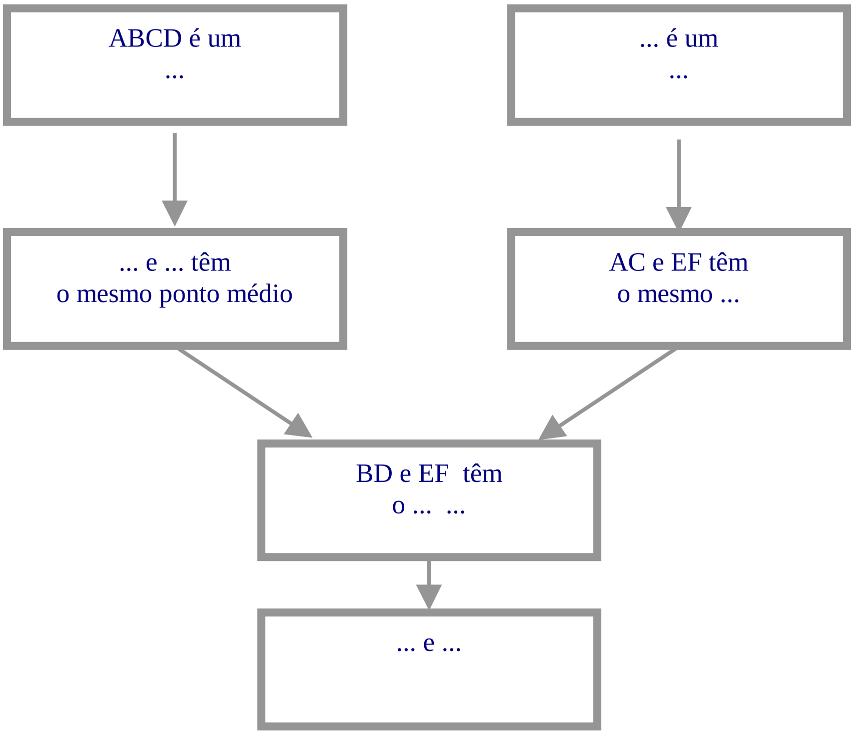
*ABCD é um paralelogramo, portanto AC e BD têm o mesmo ponto médio.*

*Portanto, EBFD é um paralelogramo.*

*Resulta que BD e EF têm o mesmo ponto médio*

*AECF é um paralelogramo, então AC e EF têm o mesmo ponto médio.*

b) Completar o esquema abaixo:



## OBJETIVOS

Esperamos que o aluno:

- trace a figura mais geral, evitando figuras particulares;
- verifique as hipóteses;
- conclua e demonstre.

## NOSSAS PREVISÕES

O desenho geométrico ajudará nos encadeamentos lógicos da demonstração. Esperamos que surjam, entre os vários grupos de alunos, várias figuras diferentes, para que não haja uma figura particular e o aluno tenha chances de variadas e ricas conjeturas.

Cada conceito tem um conjunto de aspectos relevantes e um conjunto de exemplos, mas geralmente o aluno estabelece os conceitos de maneira passiva e receptiva através de poucos exemplos e de forma vaga e imprecisa.

Esperamos que essa atividade proposta seja inovadora e possibilite ao aluno processos significativos de formação de conceitos, através de situações de investigações.

## RESULTADOS

O que se questiona, nesse problema, exige um pouco mais de reflexão, porém as dificuldades estão graduadas.

O aluno pode ser induzido pelo enunciado a construir traçados suplementares, como ligar os pontos ***E*** a ***B*** e ***D*** a ***F***, destacando subfiguras: ***EBFD*** e o ponto médio ***I***.

***I*** é o centro de simetria da figura. ***I*** é o ponto médio de ***AC*** e também o de ***BD*** e ***EF***. Isso comprovará a natureza das propriedades que se busca para a prova: "*se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, então ele é um paralelogramo.*"

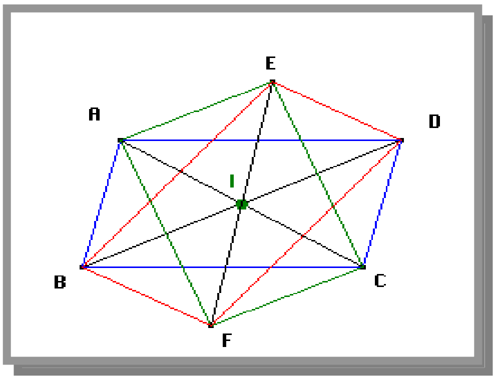
***EBFD*** é um quadrilátero convexo tendo a diagonal ***BD*** comum com o paralelogramo ***ABCD***, e tendo ***EF*** diagonal comum com o paralelogramo ***AECF.***

Essa estratégia constrói, pelo menos, quatro passos da demonstração. Nessa oportunidade privilegiada da conjetura e do debate, o aluno deverá estar treinando progressivamente o seu raciocínio dedutivo, conforme o nosso objetivo.

As ferramentas intelectuais utilizadas e mobilizadas devem ser aquelas adquiridas em aulas anteriores:

- as propriedades do paralelogramo e suas recíprocas;
- a transitividade da igualdade e da relação de paralelismo;

**Um desenho que poderá surgir durante esta atividade.**




2\. a) Colocar as frases seguintes na ordem de um esquema de demonstração:

*Ora, se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, é um paralelogramo. (4)*

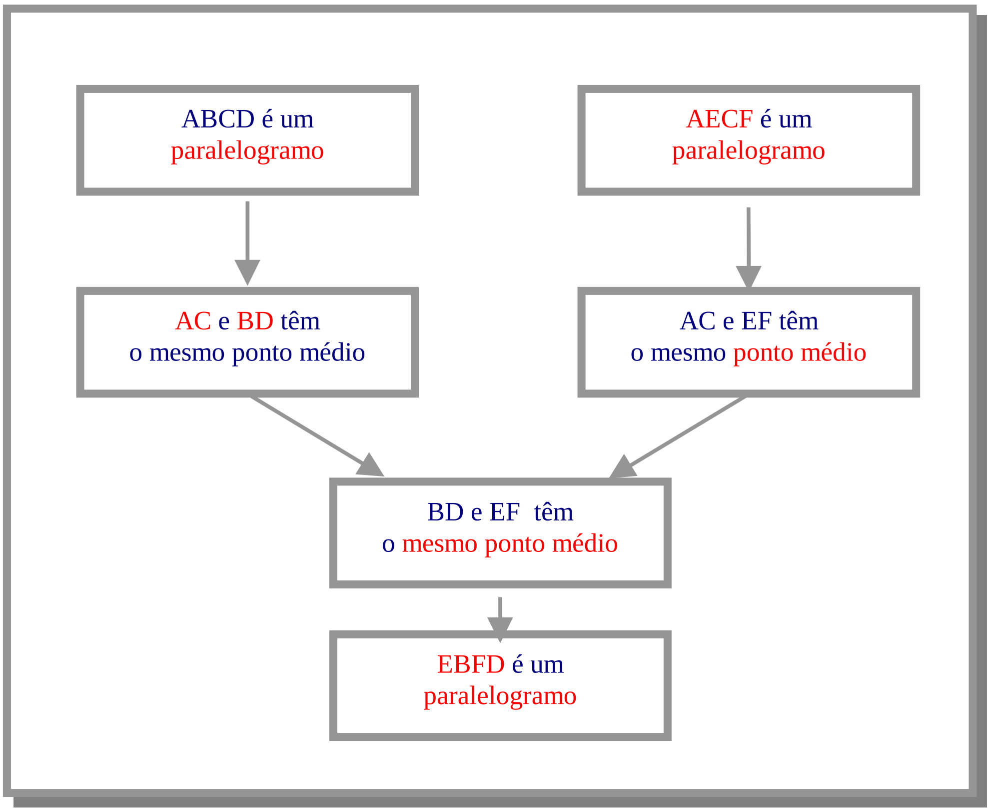
*ABCD é um paralelogramo, portanto AC e BD têm o mesmo ponto médio. (1)*

*Portanto, EBFD é um paralelogramo. (5)*

*Resulta que BD e EF têm o mesmo ponto médio (3)*

*AECF é um paralelogramo, então AC e EF têm o mesmo ponto médio. (2)*

b) Completar o esquema abaixo:




Nesta fase dos trabalhos, os participantes perceberam que a única resposta verdadeira para a questão seguinte foi:

Assinalar com um (x), dentre as afirmações (verdadeiras) abaixo, aquela única que seja útil para resolver o problema. Qual? Por quê?

*"Um quadrilátero convexo*

*(  ) cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo."*

*(X) cujas diagonais têm o mesmo ponto médio é um paralelogramo."*

*(  ) cujos lados opostos têm o mesmo comprimento é um paralelogramo."*

Duas questões para o professor refletir e discutir:

> 1 - Quais as vantagens que você vê, para os seus alunos, no uso desse tipo de esquematização dos passos de uma demonstração?

Esse tipo de esquematização facilita a visualização dos passos de uma demonstração. Trata-se de importante estratégia em que o aluno pode ressaltar as hipóteses distinguindo-as da conclusão. Permite aprofundar as aquisições dos alunos nos domínios de: explorações das figuras, isto é, encontrar analogias, desenvolver conjeturas. Permite provocar discussão na classe a propósito das inúmeras e diferentes possibilidades de se escolher os vários pontos e se enriquecer nos conceitos geométricos. Existe também, nesse problema, a possibilidade de os pontos E, B ,D e F ficarem colineares, não aparecendo o paralelogramo EBDF.

Esse tipo de esquematização não somente permite separar a fase heurística da fase de organização dedutiva, como também permite a tomada de consciência de tudo que implica a elaboração e a organização de um organograma. Os alunos, então, passam a enxergar a figura através da organização do organograma.

**DEBATE**

Foi unânime, durante a discussão, a conscientização dos professores de Matemática para a necessidade de resolução de problemas, em situações de aula, para um real desenvolvimento do raciocínio dedutivo e para a prática da arte da demonstração. Acharam útil também valorizar a esquematização da demonstração como uma estratégia para o aluno poder ressaltar as hipóteses, distingüindo-as da conclusão. O professor parece assumir o compromisso de encorajar os seus alunos no terreno das provas, no campo geométrico, dentro de um novo clima de expressões orais e escritas, tornando as aulas, principalmente as de Geometria, mais ao alcance dos alunos, mais atraentes e significativas.

A **2ª PARTE** abaixo ficou para os professores resolverem em casa.

2ª PARTE

Inspirando-se no exercício precedente, resolver o problema seguinte, depois redigir sua solução.

⇒ **Enunciado:**

Sejam dois retângulos EFGH e EIGJ.
*Qual é a natureza do quadrilátero IFJH?*

2 - Como você acha que seus alunos irão resolver o problema proposto na 2ª parte?
Como redigirão sua solução?
Como verificarão a quantidade de figuras diferentes?

**OBJETIVO**

Permitir ao participante colocar em ação sua capacidade de inferência e de raciocínio para testar nossas sugestões quanto às estratégias de resolução de problemas, usando a prova.

**NOSSAS PREVISÕES**

Queríamos que o professor, durante a semana, refletisse e experimentasse nossa proposta de trabalho a qual favorece a formação de conceitos geométricos básicos.

**RESULTADOS**

Alguns professores testaram o problema com seus alunos e relataram que a experiência foi válida.

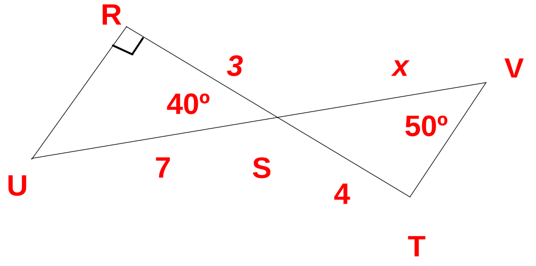
**DEBATE**

As questões discutidas versaram sobre a falta de hábito por parte dos alunos em serem independentes nas escolhas de caminhos quando buscam a solução para um problema, ou seja, pedem sempre que o professor lhes diga o que fazer, como começar e qual é a resposta correta.

Os alunos esperam sempre memorizar uma teoria para aplicá-la mecanicamente num momento oportuno, ao invés de compreender o que se pede num problema e ter idéias próprias para a sua solução.

ATIVIDADE 09 **- PROVAR, CALCULAR E REFLETIR: V ou F?**

⇒ **Enunciado:**




Considere a figura dada:

- as retas RU e VT são paralelas.

  ( ) Verdadeiro?
  ( ) Falso?
  Por quê?

- X = 7

  ( ) Verdadeiro?
  ( ) Falso?
  Por quê

- $\dfrac{VT}{SV} = \dfrac{RU}{US}$ ?

  ( ) Verdadeiro?
  ( ) Falso?
  Por quê?

**OBJETIVOS**

O interesse particular dessa atividade é permitir ao aluno raciocinar sobre os textos e a figura dada, associando-as sem a dificuldade da redação ou do desenho. Fazer uma coordenação entre a apreensão perceptiva e a apreensão operatória. Pesquisar argumentos. Instaurar o debate após respostas diferentes.

**NOSSAS PREVISÕES**

Pretendemos dar oportunidade aos alunos para o trabalho de buscar, encontrar e compreender os argumentos na resolução de problemas, procurando estar seguros nas provas para selecionar quais delas são úteis para se obter o resultado, bem como obterem uma convicção (teoremas) que possa servir em tal convicção. Logo após, pedir que coloquem em ordem esses argumentos com o intuito de escrever um texto para a seguinte explicação: “Por quê?”

**RESULTADOS**

Como havíamos previsto, para se estar seguro na prova de que as retas *RU* e *VT* são paralelas, a convicção está no teorema: *“a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º”.*

No triângulo *URS*, o ângulo *RUS* = 90º – 40º = 50º, donde se conclui que o ângulo *RUS* = ângulo *SUT* (alternos internos iguais) e o ângulo *URS* = ângulo *STV* = 90º (alternos internos).

A expressão X = 7 é ***falsa***, pois X = SV = ST/cos VST ≈ 5,2 cm

É ***verdadeira*** a proposição VT/SV = RU/US = cos 50º

Questões para o professor refletir e discutir:

> 1 - Quais sugestões você faria para o aluno que não acertou tudo ou parte das questões acima?

Alguns professores sugeriram para o aluno que não acertou tudo uma pesquisa para revisão dos teoremas necessários. Já outros sugeriram a construção rigorosa de uma figura.

> 2 - Quais são as vantagens didáticas e matemáticas em se propor questões como estas?

As vantagens, responderam os professores participantes, residem na possibilidade de o aluno fazer experimentações e provas conduzindo-o ao aprimoramento do raciocínio dedutivo.

**DEBATE**

Discutiram os professores a respeito da atividade achando que essa atividade seria mais rica se os alunos tivessem que construir a figura. Pode-se pedir ao aluno que escreva um comando de ação para a construção dessa figura.

ATIVIDADE 10 - **CASOS ESPECIAIS. DEBATE.**

⇒ **Enunciado**:

1) Uma só das duas alunas seguintes tem razão. Qual?

**Rita** - "*Um triângulo retângulo tem uma única altura".*
**Cris** - *"As três alturas de um triângulo retângulo são concorrentes".*

2) Explicar por que, num triângulo eqüilátero, as alturas passam pelo centro da circunferência circunscrita.

3) Considere um triângulo *ABC* isósceles em *A*.

a) Verdadeiro ou falso? "A altura saída de *A* é eixo de simetria do triângulo."

b) Trace as alturas saídas dos vértices *B* e *C.* Sobre qual reta está situada seu ponto de intersecção? Justifique a resposta.

**OBJETIVOS**

Esperamos levar o aluno a:

- confrontar sua pesquisa com a de outros alunos;
- explicar os passos de seu raciocínio;
- Usar regras do debate matemático.

**NOSSAS PREVISÕES**

Por se tratar de casos especiais da Geometria, acreditamos que o aluno se valerá do uso de contra-exemplos, teoremas e propriedades para justificar suas respostas. Nesse caso:

- poderá usar um contra-exemplo para refutar a afirmação de Rita;
- poderá usar o teorema do ortocentro para apoiar a proposição formulada por Cris;
- poderá usar a propriedade: ”num triângulo eqüilátero o centro de gravidade, o ortocentro, os centros dos círculos inscrito e circunscrito são coincidentes”, para responder a questão 2;
- poderá usar as propriedades do triângulo isósceles para responder à questão 3;
- poderá usar o teorema do ortocentro para justificar sua resposta à questão 3B.

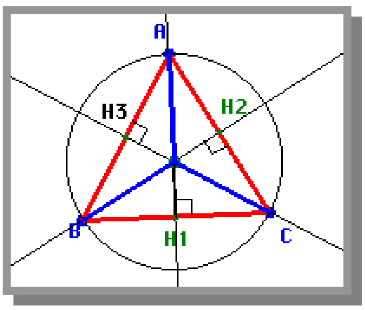
**RESULTADOS**

Nesta questão, como prevíamos, a maioria dos entrevistados recorreu a teoremas, contra-exemplos e propriedades para justificar suas respostas.

O primeiro caso teve solução imediata devido às questões semelhantes já discutidas nesta Seqüência.

O segundo caso demandou mais tempo, exigiu uma visualização de uma construção geométrica rigorosa.

Por exemplo:




Triângulo ABC
$H_1$, $H_2$, $H_3$ são alturas
$H_1 \cap H_2 \cap H_3 = 0$ (ortocentro e centro da circunferência circunscrita)
OA = OB = OC = raio da circunferência

Para o terceiro caso, houve também necessidade de uma representação perceptiva.

Questões para o professor refletir e discutir

1 - Quais conceitos matemáticos seu aluno deverá adquirir nesta situação-problema?

Os professores acharam que seu aluno, nesta situação-problema, deverá adquirir os seguintes conceitos: propriedades dos diversos tipos de triângulo e da circunferência, simetria e ortocentro.

2 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de questionamento?

Vantagens apontadas: através do debate, pode-se ter uma melhor compreensão das propriedades envolvidas e dos casos especiais tratados nesta atividade.

**DEBATE**

Nesta questão, os professores acreditam que precisarão mais de uma aula para o assunto, pois há necessidade de se caminhar devagar com os alunos. Estes já devem ter estudado as propriedades usadas e, neste exercício, queremos verificar se os alunos sabem usá-las e se sabem recorrer a elas e se conhecem as condições de validade dessas propriedades.

Ponderaram os professores que toda esta Seqüência é um curso de Geometria com demonstração para o ensino fundamental de real importância para eles.

ATIVIDADE 11 - **CULTIVANDO A ARTE DE DEMONSTRAR.**

⇒ **O problema**

Seja *ABCD* um trapézio tal que as retas *AB // CD*. Constrói-se a reta altura *AH* do triângulo *ACD*, em seguida, a reta *d* paralela à reta *AH* e passando por *C*.

Demonstre que a reta *d* contém a altura do triângulo *ABC* relativa ao vértice *C*.

a) **A figura**

De que instrumentos precisa o aluno para construir a figura enunciada no problema?

b) **As hipóteses e a conclusão**

Quais são as **hipóteses** (o que se sabe) e qual é a **conclusão** (o que se quer demonstrar)?

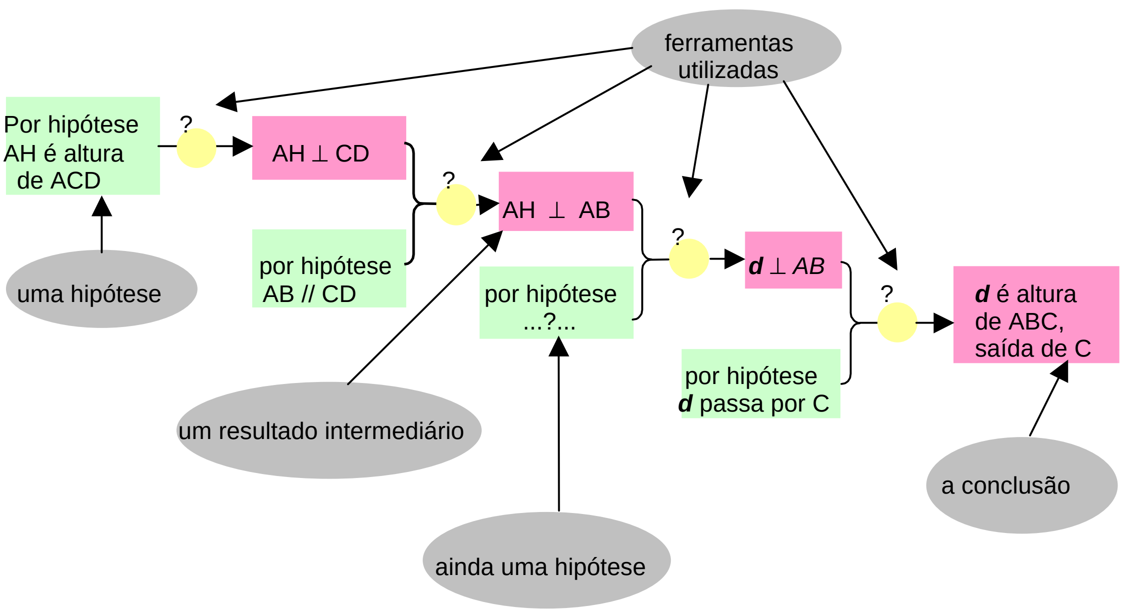
c) **Um esquema de demonstração**

Para fazer uma demonstração, é preciso ferramentas intelectuais.

Qual definição **D** devemos usar?

Que propriedades **P** nos interessa para a demonstração?

d) **Redija esta demonstração.**




## OBJETIVOS

Objetivamos que o aluno:

- resolva este problema primeiramente construindo a figura com rigor para poder conjeturar e, então, separe as hipóteses da conclusão e construa um esquema da demonstração;
- descubra, aplique ou demonstre novas propriedades;
- explique seu encaminhamento.

**NOSSAS PREVISÕES**

Para construir a figura enunciada, o aluno irá precisar de ferramentas intelectuais tais como: o que é trapézio, reta AB paralela à reta CD, altura saída do vértice A e reta ***d*** paralela à reta por A, H e passando por C

Inicialmente sabemos que:

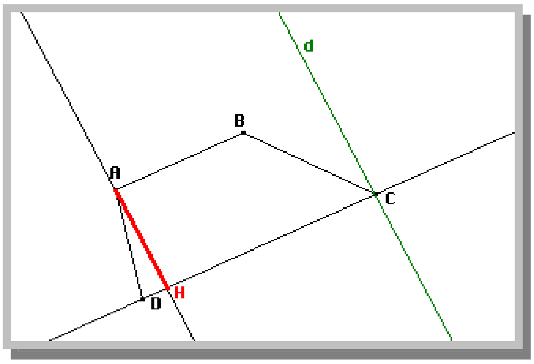
- ABCD é um trapézio de bases AB e CD;
- AH é altura do triângulo ACD;
- ***d*** é paralela à AH e passa por C.

Queremos demonstrar que ***d*** é a altura do triângulo *ABC* passando por *C*.

**RESULTADOS**

Foi interessante observar que nenhum participante se referiu à necessidade de ferramentas intelectuais para a construção da figura. Fizeram referência somente a ferramentas materiais, tais como: jogo de esquadros e régua, apesar de o texto conter um alerta: *"para fazer uma demonstração, é preciso ferramentas intelectuais".*

A figura foi construída.

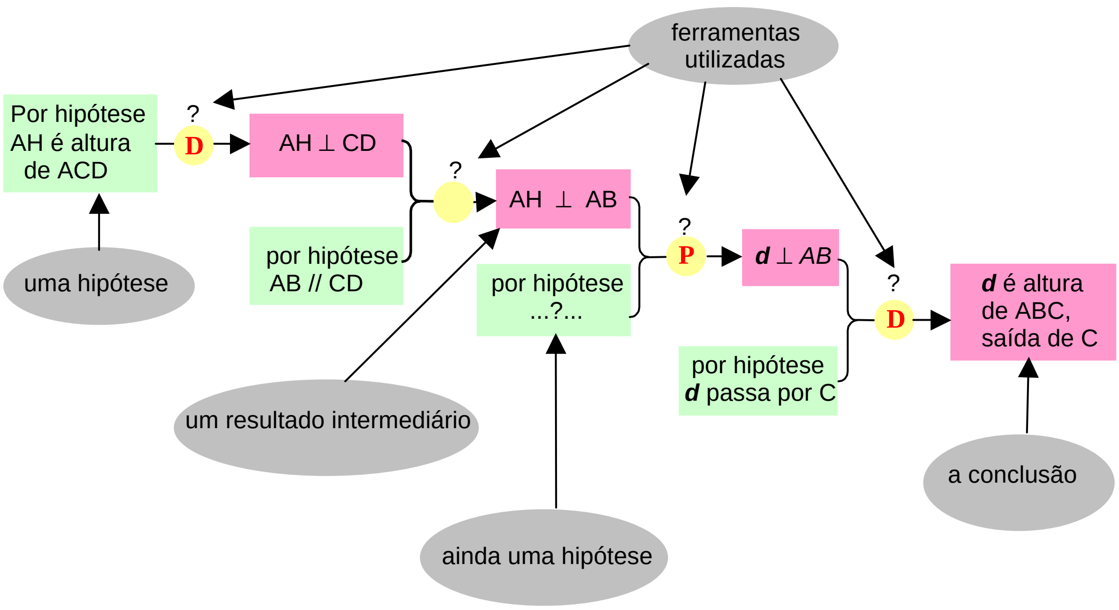



As hipóteses e a conclusão foram identificadas e separadas.

A definição ***D*** ficou assim resumida: *"num triângulo ABC, a altura relativa à A é a reta passando por A e perpendicular à reta BC"*

A propriedade ***P*** que nos interessa para demonstração é: *"se duas retas são paralelas, toda perpendicular à uma, é perpendicular à outra."*

O esquema de demonstração foi completado.



A redação da demonstração foi a parte mais difícil para os participantes. Trocando idéias, a classe decidiu pela seguinte redação:

Redija esta demonstração:

- Seja ABCD um trapézio tal que as retas AB // CD.
- Por hipótese a reta AH é a altura do triângulo ACD.
- Por definição as retas AH ⊥ CD.
- Se, por hipótese, as retas AB // CD, então as retas AH ⊥ AB, pela propriedade que diz: *"se duas retas são paralelas, toda perpendicular à uma delas será perpendicular à outra".*
- Mas, por hipótese, as retas ***d*** // AH. Logo, as retas ***d*** ⊥ AB pela mesma propriedade.
- Ainda, por hipótese, a reta ***d*** passa pelo vértice C.
- Portanto, por definição, a reta ***d*** é a altura do triângulo ABC, em relação ao vértice C.

C.Q.D.

Questões para o professor refletir e discutir:

1 - Quais dificuldades o aluno pode encontrar para completar este esquema?

As dificuldades apontadas foram:

- identificar qual é a definição e qual é a propriedade;
- unir uma teoria com a prática.

2 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de problema?

Nesse tipo de problema, foram apontadas várias vantagens:

- é o aluno quem constrói a demonstração;
- é ele que utiliza definições e propriedades raciocinando através de uma seqüência lógica, possibilitando-lhe o desenvolvimento do raciocínio;
- ele percebe que não é tão difícil demonstrar, indo aos poucos perdendo o medo e adquirindo confiança;
- possibilita ao aluno refletir, organizar etapas da demonstração, pesquisar e aplicar a teoria.

**DEBATE**

Após discussão entre os participantes, concluiu-se que a atividade é trabalhosa, porém muito rica sob o aspecto de conteúdo e de vivência por parte do aluno.

ATIVIDADE 12 - **É PRECISO DEMONSTRAR**

⇒ **O problema**

Num triângulo qualquer *ABC,* traça-se a altura *AH*, o ponto médio *I* do lado *BC* e a reta passando por *I*, paralela à *AH*.

Esta reta corta *AB* ou *AC* em *J.*

Demonstre que o triângulo *BJC* é isósceles.

**a) A figura**

De quais instrumentos precisará o aluno para construir a figura?

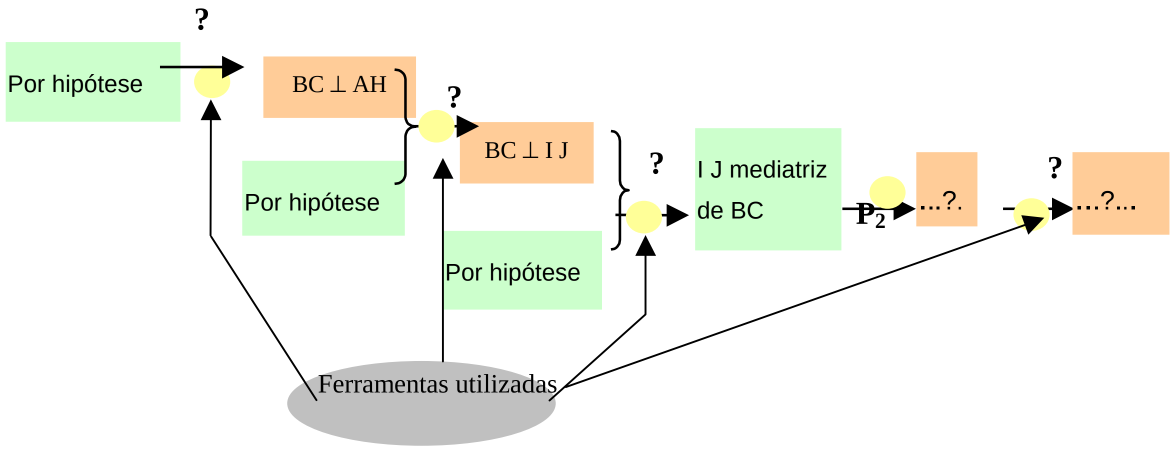
**b) As hipóteses e a conclusão**

Indique as **hipóteses** (o que se sabe) e a **conclusão** (o que se quer provar).

**c) Um esquema da demonstração (a completar)**

**d) A redação: redija a demonstração**.

Complete o esquema da demonstração:




**OBJETIVOS**

Objetivamos levar o aluno a familiarizar-se com a técnica de demonstrar, mesclando teoria da Geometria e prática da prova com embasamento na proposta construtivista da educação.

**NOSSAS PREVISÕES**

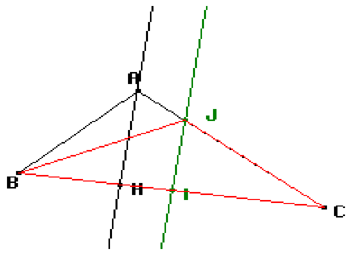
Esperamos que o aluno, após interpretar o enunciado, faça um esboço da figura procurando buscar as definições e as propriedades que serão usadas com as ferramentas intelectuais nesta demonstração.

Achamos que o aluno conseguirá indicar as hipóteses e a conclusão e conseguirá completar o esquema da demonstração com certo cuidado, devido a sua complexidade.

Acreditamos que redigirá a demonstração com certa facilidade após ter completado o esquema.

**RESULTADOS**

Os participantes, após discutirem o enunciado, construíram a figura, selecionaram as ferramentas intelectuais para fazer a demonstração:




Ferramentas para fazer demonstração:

**$D_1$** - Num triângulo *ABC*, a altura saída de *A* é a reta passando por *A* e perpendicular à reta *BC*

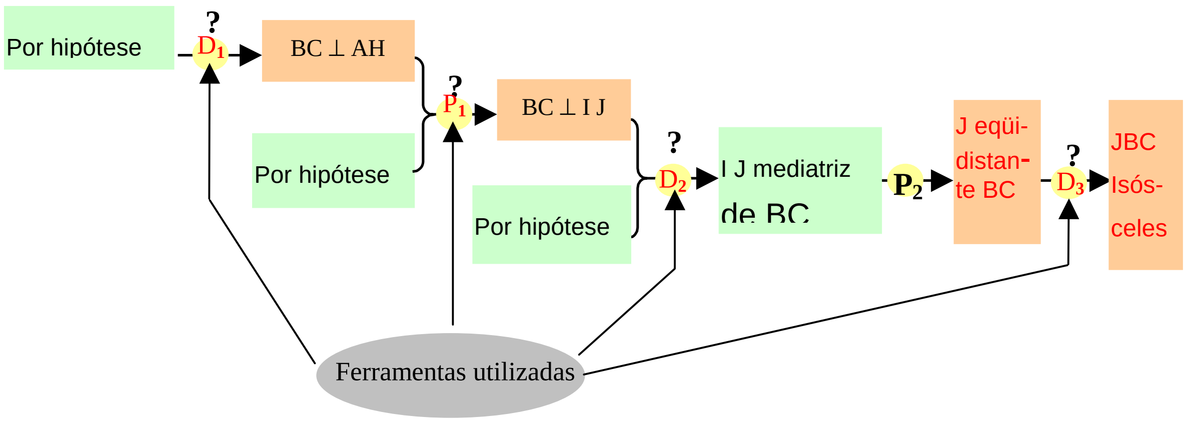
**$D_2$ -** A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a este segmento passando por seu ponto médio.

**$D_3$ -** Um triângulo isósceles é um triângulo tendo dois lados de igual comprimento.

**$P_1$ -** Se duas retas são paralelas, então toda perpendicular à uma, é perpendicular à outra.

**$P_2$ -** Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.

Os participantes indicaram as hipóteses e a conclusão e completaram o seguinte esquema:



1 - Qual o interesse (objetivo) para o aluno em se trabalhar um problema com essa estrutura?

Trabalhando com essa estrutura, estaremos possibilitando ao aluno poder desenvolver seus raciocínios, encadear suas idéias para enxergar um caminho para provar. Estaremos assim ajudando-o a perder o receio de externar seu pensamento, suas escolhas e usar as definições e as propriedades.

2 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

É sempre vantajoso poder motivar o aluno para construir seus conhecimentos percebendo a importância de seu uso. É nosso objetivo favorece o aluno a resolver problemas livremente selecionando caminhos conforme suas tendências e escolhas.

Os participantes apontaram como vantagem esse modo interessante de trabalhar porque conduz o aluno a raciocinar, a analisar, a compreender e a aprender efetivamente conceitos geométricos e técnicas de comprovação da verdade.

**DEBATE**

Durante a correção, foi discutida a possibilidade de o aluno, colocado numa situação de validação, utilizar a demonstração como ferramenta indispensável de prova. Mas, é preciso ajudá-los a adquiri-la. Cabe ao professor não induzir nem o método, nem o resultado. O professor não diz se as soluções propostas são exatas ou não. É a classe que vai debater sobre isso. Somente após o debate é que o professor poderá dizer se as soluções e as explicações estão corretas ou não. O professor terá que assumir esta postura e fazer esse tipo de contrato didático com a sua classe.

A parte da redação é a mais polêmica. Ninguém gosta muito de redigir. Mas a obrigação de produzir uma resposta favorece a consolidação dos argumentos.

ATIVIDADE 13 - **DEMONSTRAR COM SIMETRIAS**

⇒ **O problema:**

*Seja ABC um triângulo e seja I o ponto médio de BC.*

*Seja S o simétrico de I em relação à reta AB e seja T o simétrico de I em relação à reta AC.*

Demonstrar que os segmentos *SB* e *TC* têm o mesmo comprimento.

**OBJETIVOS**

Almejamos ajudar o aluno a participar de atos de prova e demonstrar proposições afirmativas como produção individual e coletiva, utilizando-se de definições e propriedades conhecidas.

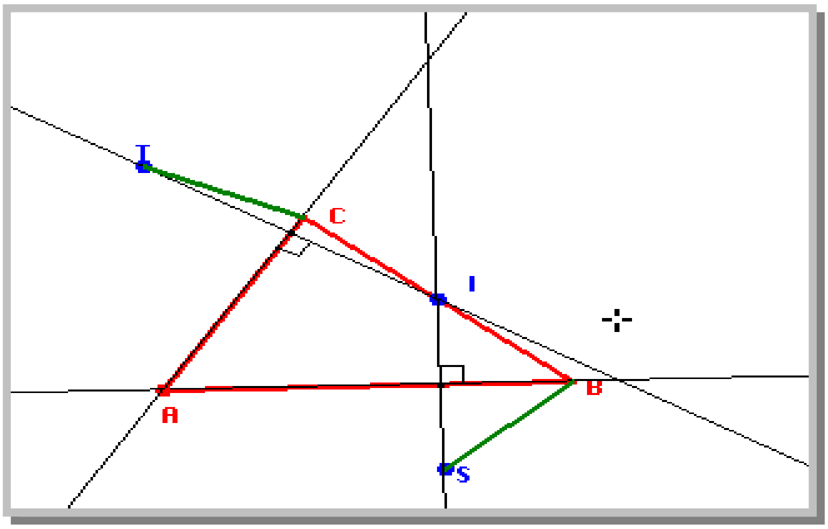
**NOSSAS PREVISÕES**

Esperamos que os desafiados usem ferramentas (definições e propriedades) estudadas e adequadas para discutir o que se quer afirmar no grupo social no qual está inserido. É imprescindível conhecer essas definições e propriedades e saber empregá-las.

Cada interessado poderá possuir um fichário, construído por ele próprio aos poucos, contendo definições e propriedades já esmiuçadas, discutidas e aceitas como verdadeiras em aulas anteriores. Não se pode demonstrar todas as propriedades, muitas são admitidas sem demonstração. Outras, porém, pode-se demonstrá-las com a ajuda de ferramentas precedentes.

**RESULTADOS**

Conforme prevíamos, cada participante construiu um triângulo ABC qualquer, isto é, não particular (nem eqüilátero, nem isósceles, nem retângulo). Um exemplo:




Foi determinado o ponto médio **I** do lado BC. Em seguida, determinou-se **S**, o simétrico do ponto **I** em relação à reta AB e o ponto **T**, simétrico do ponto **I** em relação à reta AC.

⇔ B ∈ ao segmento AB, (AB mediatriz do segmento IS ) e

⇔ C ∈ ao segmento AC (mediatriz do segmento IT)

⇒ comprimento do segmento SB = comprimento do segmento IB e

⇒ comprimento do segmento IC = comprimento do segmento TC

Temos que: os segmentos SB = IB = IC = TC

Logo: os segmentos SB e TC têm o mesmo comprimento.

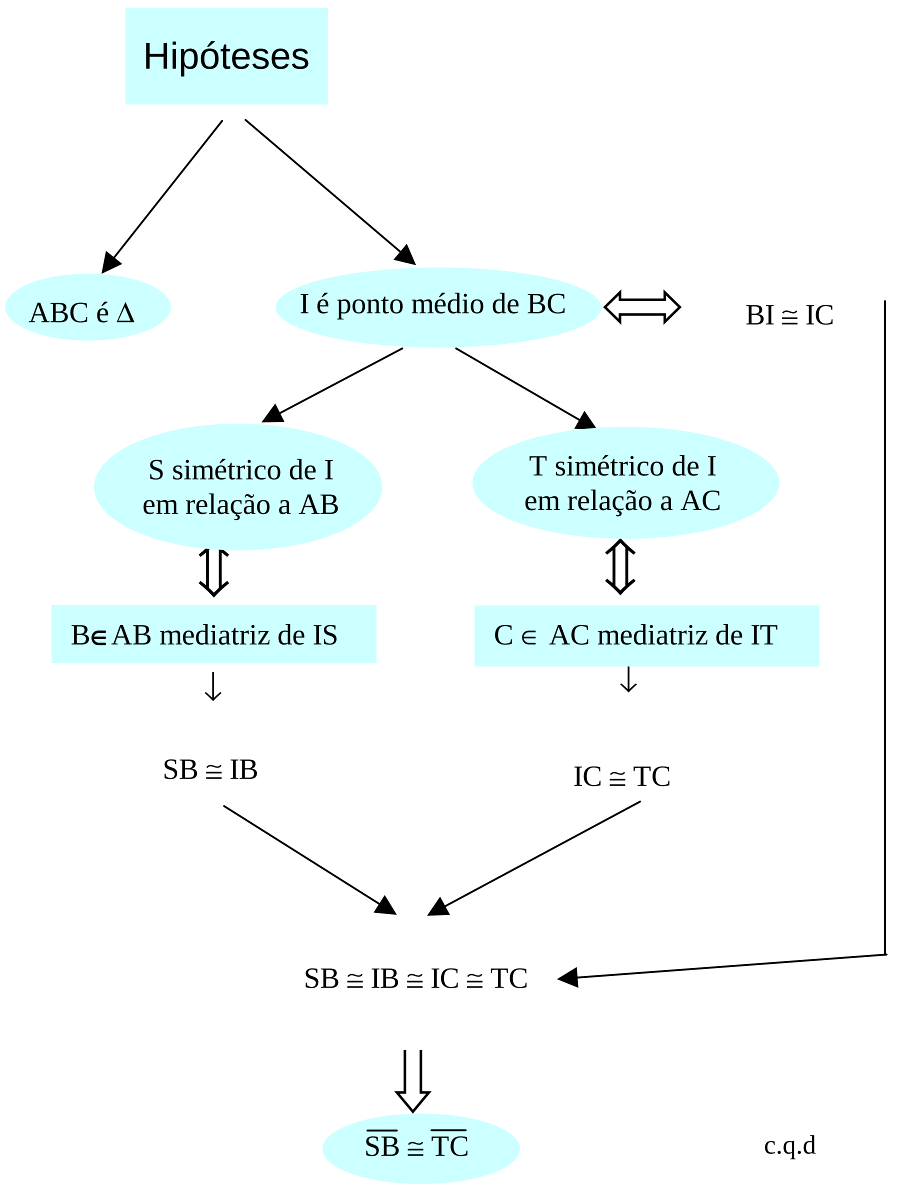
c.q.d.

Questões para o professor refletir e discutir:

1 - Qual esquema o aluno utilizará para demonstração?

Para fazer o esquema, o aluno, após separar as hipóteses da conclusão, poderá encadear suas idéias do seguinte modo, por exemplo:

*Seja ABC um triângulo e seja I o ponto médio de BC.*
Seja S o simétrico de I em relação à reta AB e seja T o simétrico de I em relação à reta AC.
*SB* e *TC* têm o mesmo comprimento?




Do grego: congruente (≅) "da mesma medida"

> 2 - Quais as ferramentas intelectuais que serão úteis para o seu aluno "provar" o problema dado?

O aluno, para conseguir provar, precisará da definição: *"Dois pontos I e S são simétricos em relação à uma reta AB quando AB é a mediatriz do segmento IS".*

E precisará dessas duas propriedades:

*$P_1$: Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades deste segmento.*

*$P_2$: Se M é o ponto médio de IS, então IM = MS*

> 3 - Quais vantagens didática e matemática você vê nesse tipo de questionamento?

Vantagens observadas pelos professores participantes: colocar a demonstração dos objetos presente na sala de aula, dar oportunidade para criar situações de ensino-aprendizagem que envolvam a demonstração geométrica do objeto social do conhecimento.

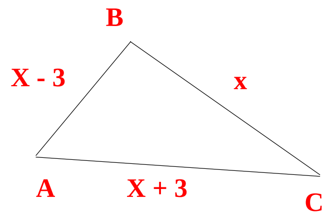
**DEBATE**

Na correção da atividade, perguntamos sobre o valor dessa experiência e a maioria dos participantes respondeu que, a partir de agora, gostariam de usar a prova também no ensino da Álgebra.

ATIVIDADE 14 - **VERDADEIRO OU FALSO? JUSTIFIQUE.**

⇒ **Enunciado**:

a) A medida do lado BC é sempre igual a **terços** do perímetro (X > 3)




( ) Sim

( ) Não

Por quê?

b) Seja o produto 5 x **n** , onde $n \in N$. Se se aumenta **n** de 2, o produto aumenta de 7.

( ) Sim

( ) Não

Por quê?

**OBJETIVOS**

Levar o aluno a:

- refletir sobre um enunciado matemático e vivenciar o ato de demonstrar não somente na sala de aula, mas também em sua vida diária;

- compreender que, em Matemática, deve-se debater sempre, apoiando-se em certo número de propriedades ou definições claramente anunciadas com as quais se está de acordo (axiomas).

**NOSSAS PREVISÕES**

As pessoas, porque estão acostumadas a separar a Matemática da vida diária, nem sempre vêem sua utilização.

Esperamos proporcionar aos alunos, na prática escolar, participar de atos de prova, terem ensejo de registrar, perguntar, explorar, confrontar suas hipóteses com as dos outros colegas.

**RESULTADOS**

No primeiro momento dessa atividade, os participantes, individualmente, não compreenderam bem o enunciado do item “a”, mas trocando idéias, registrando suas hipóteses na folha de papel, foram enxergando um caminho para a demonstração através de definições e propriedades, tais como:

Perímetro = m (AB) + m (BC) + m (AC)

p = x – 3 + x + x + 3

p = 3x

p/3 = x

Portanto, x é igual a terços do perímetro (proposição verdadeira)

Logo: a resposta é ( X ) sim

Concluíram:

$\exists$ triângulo ABC $\Leftrightarrow$ m (AB) = x – 3 > 0 $\therefore$ x > 3

Os participantes, para responder o item “b”, refletiram, trocaram idéias, buscaram propriedades e, como melhor conclusão, escolheram a seguinte:

$5 \times n = p_1$

$5 \times (n + 2) = p_2$

$5 \times n + 5 \times 2 = p_2$

$p_1 + 10 = p_2$

Portanto, o produto $p_1$ aumenta de 10 unidades

Logo: *"se se aumenta n de 2, o produto 5 x n ($n \in N$) aumenta de 7".*

É proposição falsa (item b).

Questões para o professor refletir e discutir:

1 - Quais dificuldades seu aluno sentirá em reescrever o problema, tornando verdadeira a propriedade **falsa** e tornando falsa a propriedade **verdadeira**?

Os participantes reconhecem que o aluno é, muitas vezes, apressado e preguiçoso, porque ele acredita que toda resposta é imediata e verdadeira. O aluno tem dificuldade em procurar os motivos pelos quais a sentença é verdadeira. Prefere "chutar" para ser breve. Não tem paciência em explorar um problema, muito menos para refazer o enunciado.

A pesquisadora, nesse momento, alertou para a necessidade de ser repensada nossa prática pedagógica.

2 - Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

Vantagens apontadas por alguns participantes:

- *"Excelente atividade para que o aluno se habitue a trabalhar com verdadeiro e falso. Em livros didáticos, o enfoque é outro."*
- *"Melhor entendimento da Geometria, no caso, o conceito de perímetro aliado à Álgebra."*
- *"Conduzir o aluno a prestar mais atenção aos detalhes e à essência da afirmação. O aluno refletir antes de escrever e criar confiança em suas decisões."*

**DEBATE**

Os participantes apreciaram muito essa atividade dizendo que estão convencidos de que é através da demonstração que o aluno poderá se sentir seguro em suas respostas.

Disseram mais que, se todo enunciado matemático ou é verdadeiro ou falso, o aluno, liberando sua criatividade, procurará provar de modo prazeroso e agradável. A partir daí, passará a gostar de Matemática.

ATIVIDADE 15 – **DEBATE SOBRE ARGUMENTOS**

⇒ **O problema:**

Na expressão $\boldsymbol{n^2 - n + 11}$, se substituirmos ***n*** por qualquer número inteiro natural, obter-se-á sempre um número que tem exatamente dois divisores?

**OBJETIVOS**

O objetivo principal é ajudar o aluno a se apropriar de regras matemáticas como:

- *"Exemplos mesmo numerosos que verificam um enunciado matemático não são suficientes para prová-lo que é verdadeiro."*
- *"Uma afirmação matemática sem prova não tem valor."*
- *"Um contra-exemplo é suficiente para invalidar uma proposição matemática.*

**NOSSAS PREVISÕES**

Enquanto em Geometria o aluno se contenta em ver ou medir no desenho para concluir, nos problemas numéricos ele se contenta em verificar a conjetura em alguns casos particulares.

Esperamos contribuir para que o aluno progrida em suas provas, fazendo uso de ferramentas intelectuais, apoiadas em regras da “lógica formal”.

Essas regras formais não são naturais para o aluno, bem como não é suficiente explicá-las. É preciso propor situações que levem o aluno a interessar-se por elas e sentir a necessidade de usá-las.

**RESULTADOS**

Os participantes tiveram, nessa atividade, a oportunidade de vivenciar como funciona uma das regras do debate matemático que diz: *“Vários exemplos não são suficientes para provar.*” Enquanto alguns professores buscaram uns primeiros exemplos e responderam “sim” para a pergunta, outros responderam “não”, sem estar convictos da resposta, pois não tinham o contra-exemplo.

Diante do entrave encontrado, os participantes ficaram desanimados numa situação desconfortável. Não tinham certeza da resposta. Para resolver esse problema, propusemos que os participantes continuassem trabalhando com mais exemplos para verificar aonde poderiam chegar.

Alguns participantes, à semelhança do que afirmaram a respeito dos seus alunos, não tiveram paciência suficiente para encontrar um contra-exemplo preferindo dar uma resposta imprecisa. Não acostumados a essa postura de característica mais abstrata e dedutiva, não souberam como resolver esse exercício o qual não consiste na repetição, na automatização de uma determinada técnica previamente exposta em classe.

A solução de um problema exige que o aluno compreenda o enunciado e o traduza para uma série de expressões e símbolos matemáticos.

A solução de qualquer problema é um processo complexo que requer compreensão do enunciado, elaboração de uma estratégia para sua solução, execução do plano e avaliação dos resultados alcançados.

Superado esse momento de obstáculos, surgiram respostas do tipo:

Se n = 0, então 0-0+11 = 11; D = {1,11}

Se n = 1, então 1-1+11 = 11; D = {1,11}

Se n = 2, então 4-2+11 = 13; D = {1,13}

Se n = 3, então 9-3+11 = 17; D = {1,17}

Se n = 4, então 16-4+11 = 23; D = {1,23}

Se n = 5, então 25-5+11 = 31; D = {1,31}

Se n = 6, então 36-6+11 = 41; D = {1,41}

Se n = 7, então 49-7+11 = 53; D = {1,53}

Se n = 8, então 64-8+11 = 67; D = {1,67}

Se n = 9, então 81-9+11 = 83; D = {1,83}

Se n = 10, então 100-10+11 = 101; D = {1,101}

Se n = 11, então 121-11+11 = 121; D = {1,11,121}

Foi encontrado o contra-exemplo 11.

Quando testaram n = 11, foi gerado o número composto 121 com mais de dois divisores. Por isso, não podemos estar de acordo com o enunciado do problema:

Na expressão $\boldsymbol{n^2 - n + 11}$, se substituirmos $\boldsymbol{n}$ por qualquer número inteiro natural, obter-se-á sempre um número que tem exatamente dois divisores? (Falso!)

Questões para o professor refletir e discutir:

> 1 - Como você pensa organizar a estrutura da classe para que haja um debate entre seus alunos em torno das estratégias de resolução deste problema?

Os participantes pensam que, para propiciar um debate entre seus alunos em torno das estratégias de resolução desse problema, a melhor estrutura é, por exemplo, num primeiro momento, agrupar a classe de três em três alunos. Posteriormente, cada grupo deverá expor suas soluções encontradas para a classe toda, quando dificuldades poderão ser discutidas, resolvidas e a institucionalização dos conceitos envolvidos poderá se concretizar a exemplo do que foi feito com os participantes nessa mesma atividade

> 2 - Que valores você vê em situações de ensino em que o aluno é quem vai decidir o que é verdadeiro, o que é falso? No caso, o professor não induz o método, nem o resultado, enquanto a classe é que debate sobre isso. Após o debate é que o professor dirá o que está correto ou não.

Quando é o aluno quem vai decidir o que é verdadeiro ou o que é falso, o interesse do aluno estará garantido pela responsabilidade que lhe está sendo atribuída, pela confiança que lhe está sendo depositada pelo professor que não induzirá o método, nem o resultado, ficando com a classe o debate sobre isso.

Supõe-se que haverá efetiva aprendizagem quando o professor confirmar o que está correto ou não.

> 3 - Qual o valor pedagógico de se permitir ao aluno fazer surgir suas concepções a partir da "prova"?

Os professores concordam que o aluno fica pré-disposto para a aprendizagem quando incentivado e pode atingir progressos em seus conhecimentos matemáticos se permite que ele fique livre para conjeturar, respeitadas suas representações e concepções.

> 4 - Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

A maioria acredita que problemas com essa estrutura poderão propiciar ao aluno bons hábitos nas pesquisas matemáticas, tais como: nunca ter pressa; testar e experimentar várias vezes antes de concluir; manter-se com segurança para apresentar respostas convincentes.

Outra vantagem é o debate entre os alunos sobre a técnica de pesquisa de divisores de um número, ressaltando o conceito de número primo. Encontrada a solução, acontecerá uma devolução individual.

**DEBATE**

Após discussão e um momento de reflexão, os participantes se apropriaram do argumento mediante o conector condicional*: "Se $n = 11$, então $n \times n - n + 11 = 121$".* O número 121 tem mais de dois divisores, portanto não é número primo. Logo, 11 é o contra-exemplo.

### 5.3.3 - PÓS-TESTE

O Pós-teste (**Anexo 4**), como parte de nossa metodologia, foi realizado duas semanas após a conclusão da Seqüência, com a finalidade de analisar seus resultados e compará-los com os do Pré-teste. Constou de quatro questões complementadas de outras quatro para serem discutidas e refletidas pelos professores.

#### OBJETIVOS

Objetivamos verificar se houve alguma mudança de atitude dos professores no processo de resolução e nas estratégias usadas quando trabalham Geometria com “provas” envolvendo visualização de desenhos de figuras geométricas.

A visualização é o primeiro nível na hierarquia do pensamento geométrico, é um estágio necessário que se desenvolve para fases mais elevadas desse tipo de pensamento  A visualização desenvolve um espírito crítico em relação a definições, atributos e conceitos novos dentro do processo de desenvolvimento de conceitos geométricos básicos.

#### RESULTADOS ESPERADOS

Esperamos progressos nessa nova metodologia de trabalho da Geometria com prova e que os professores apresentem resultados mais satisfatórios do que aqueles apresentados no Pré-teste. Recomendam-se ações intuitivas visuais na Geometria paralelamente com ações dedutivas

Mesmo sabendo que alguns obstáculos devam persistir, sabemos que, desde muito tempo, não se trabalha Geometria de maneira satisfatória, ou se trabalha a demonstração por imitação. Sabemos que esse novo enfoque dado às questões de Geometria com demonstração não é questão para ser resolvida de imediato. Isso vai levar algum tempo para reflexões e mudanças de atitude, porém esperamos que a maioria dos professores tenha adquirido uma nova visão da técnica de demonstrar a partir das concepções colocadas em jogo e que se sintam mais capazes para ensiná-la.

**QUESTÃO 01**

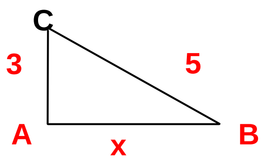
Esta questão tem como objetivo comparar com a questão semelhante apresentada no Pré-teste e observar se houve progresso na maneira de o participante:

- lidar com a visualização da figura ou com a habilidade espacial, ampliando uma visão intuitiva e global;
- lidar com os dados do enunciado, não inventando hipóteses secundárias que nele não constam;
- lidar com a organização e o funcionamento do raciocínio;
- lidar com a movimentação do vértice B, do triângulo dado, dinamizando infinitos valores para a medida **x** do seu lado AB, tal que $2 < x < 8$

**Isso se vê no desenho?**

⇒ **Enunciado:**

O que se pode dizer da medida do lado **x** do triângulo, sabendo-se que todas as medidas estão na mesma unidade?




Acreditamos que, pelo menos, alguns dos participantes não se deixarão enganar pelo desenho, o qual insinua ser x = 4 num “triângulo pitagórico” falso, pois o enunciado não garante ser reto o ângulo A.

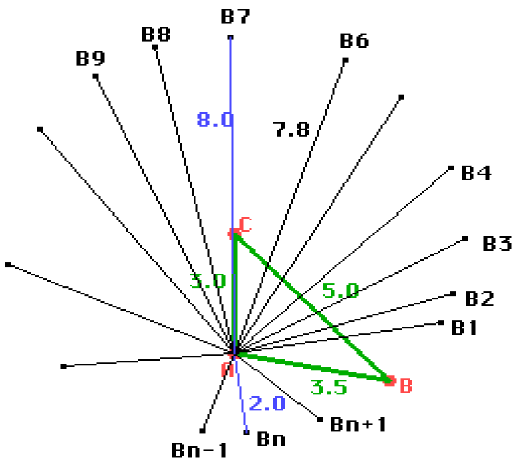
Os elementos visuais têm seu lado positivo, mas também podem limitar e empobrecer a representação conceitual e até mesmo travar o raciocínio.

**RESULTADOS**

Observamos ainda que há professores se deixando iludir pela figura apesar de prevenidos. Aplicaram o teorema de Pitágoras, calcularam o x, mas nada comentaram. Por outro lado, os professores que não utilizaram a relação de Pitágoras se justificaram assim:

> *1 - "O lado AB, que mede x, apenas é um terceiro lado de um triângulo. Se estivesse notado que o ângulo A é reto, então x = 4, pois seria o chamado 'triângulo de ouro', 'triângulo pitagórico', ou 'triângulo perfeito".*
>
> *2 - "Se o ângulo A for igual a 90º , então x = 4."*
>
> *3 - "Se o triângulo for retângulo (pois não foi citado), a medida x seria igual a 4*."

Observamos que o grupo de professores que não utilizou a relação de Pitágoras e não se justificou, também não resolveu completamente o problema. Nenhum deles pensou em utilizar a "desigualdade triangular". A resolução da questão foi assim finalizada: "*o triângulo não é retângulo, portanto não posso usar o teorema de Pitágoras*." No caso, deveriam garantir que a medida x está variando entre maior que 2 e menor que 8.



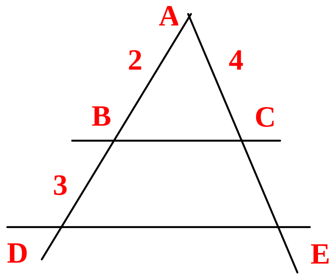
## QUESTÃO 02

Esta questão, como a primeira, visa verificar se houve progressos na maneira de o professor utilizar as estratégias de aprendizagem da demonstração em Geometria.

**Ser ou não ser?**

⇒ **Enunciado:**

Na figura abaixo, tem-se:
AB = 2cm,. BD = 3cm, AC = 4cm
O que podemos dizer da medida do segmento CE?




Prevíamos que alguns professores ainda pudessem se deixar levar pela intuição da figura confiando num aparente feixe de paralelas, que não está garantido no enunciado.

## RESULTADOS

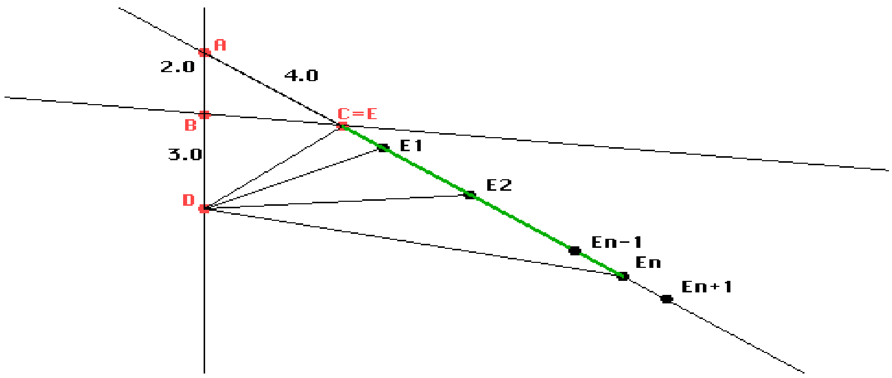
Alguns professores consideraram as retas BC e DE paralelas, justificando-se assim:

> "*A medida do segmento CE é 6 cm. Duas transversais determinam segmentos proporcionais quando interceptam retas paralelas.*"

Justificativa de dois professores que não foram enganados visualmente:

> "*Se soubéssemos que as retas horizontais são paralelas, poderíamos dizer que o segmento CE seria igual a 6, pois a proporção é mantida.*"

Observamos que nenhum professor pensou em recorrer ao teorema: "*Por um único ponto passam infinitas retas*" para explicar que o ponto D, sendo fixo, o segmento CE pode ter infinitas medidas.

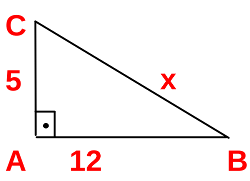



**<u>QUESTÃO 03</u>**

Esta questão tem como objetivo reforçar a necessidade de mudança do estatuto da figura, evoluindo de objeto de prova para suporte de propriedades e conceitos.

**Isso se vê no desenho?**

O que se pode dizer do comprimento **x** do lado do triângulo, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade?



Esperamos que todos os professores encontrem a verdadeira medida do segmento DC usando o teorema de Pitágoras porque, para utilizar tal teorema, é preciso estar seguro (no enunciado ou na prova) de que o triângulo considerado é retângulo.

**RESULTADOS**

Nossas previsões se concretizaram, pois todos os professores, sem exceção, acertaram e se sentiram gratificados

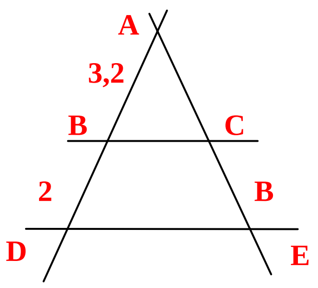
**QUESTÃO 04**

Aqui também o objetivo é reforçar a necessidade de mudança de metodologia para produzir provas geométricas

**Isso se vê no desenho?**

As retas BC e DE são paralelas.

O que se pode dizer do comprimento AC, se as medidas estão na mesma unidade?




Esperamos que todos os professores, através do enunciado, o qual garante o paralelismo entre as retas do feixe, se sintam seguros para aplicar o teorema de Tales e determinar o único comprimento do segmento AC.

## RESULTADOS

Foi concretizada a unanimidade prevista, pois o enunciado garante que as retas BC e DE são paralelas.

As questões seguintes foram propostas para discussão e reflexão dos professores:

1 - Pensar de modo padronizado pode levar a erros. Qual a melhor maneira de se evitar isso?

A seguir, selecionamos algumas respostas dadas à questão:

*1 - “Não padronizar.”*

*2 - “Compreender o enunciado.”*

*3 - “Estabelecer regras.”*

*4 - “Não confiar nos desenhos, raciocinar com os dados apresentados.”*

*5 - “Mostrar várias maneiras de raciocínio para o aluno escolher a melhor.”*

*6 - “Ler bem os enunciados.”*

2 - Quando o aluno deve dar respostas memorizadas?

Respostas dadas à questão:

*1 - “Quando tiver certeza.”*

*2 - “Quando entendeu o conceito.”*

*3 - “Quando as situações forem óbvias.”*

*4 - “Quando entendeu o que visualizou e não somente quando decorou o que foi passado.”*

3 - O que dá segurança num enunciado matemático?

Respostas de alguns professores:

*1 - “A clareza na apresentação dos dados.”*

*2 - “Dados completos.”*

*3 - “As propriedades das figuras e os dados.”*

4 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

Principais vantagens para os professores:

*1 - “Esse problema leva o aluno a ficar mais atento.”*

*2 - “O aluno examina melhor o problema.”*

*3 - “Fixa a importância do conhecimento.”*

*4 - “Desenvolve o raciocínio lógico e a observação.”*

*5 - “O aluno raciocina na ‘marra”.*

**DEBATE**

Os professores acharam muito interessante vivenciar uma situação em que a figura não tem função neutra. Acreditam que a mudança de atitude perante a figura e perante a estratégia da demonstração requer tempo, paciência, conscientização, por parte de quem trabalha com essa metodologia. É preciso ir em frente, ser ousado, deixar a criatividade solta e não ter medo de cometer erros. É preciso derrubar “mitos”, “tabus”, “preconceitos” e “medos” em relação à Geometria e em relação à demonstração. Há necessidade de multiplicar experiências ao alcance dos alunos que conduzam a alguma compreensão dessa disciplina.

Os professores reconhecem que estão acostumados a receber informações diretas, certas, imediatas, e quase nunca precisam refutar, justificar ou provar situações geométricas. Nossos livros didáticos também reforçam essa tendência. Por outro lado, acham muito significativo e interessante trabalhar essas propostas metodológicas da nossa pesquisa, porque são situações que ajudarão a formar conceitos geométricos básicos com a estratégia da demonstração. As técnicas envolvidas aqui são totalmente novas e inéditas para todos os participantes.

## 5.4 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS INICIAIS E FINAIS DA SEQÜÊNCIA

Acreditamos que, a partir das análises feitas anteriormente, a aplicação da Seqüência Didática despertou discussões interessantes entre os professores participantes das atividades, as quais os levaram a refletir e a repensar os seus conhecimentos sobre a Geometria com demonstração. Essas discussões constituíram-se em novos pontos de vista que motivaram os professores a optar por estratégias diferentes de ensino em sala de aula.

Em nossas hipóteses deste nosso trabalho prevíamos que o professor não trabalha a Geometria, nem as regras do raciocínio dedutivo, nem a demonstração em sala de aula, porque desconhece estratégias específicas que ajudam a construir o conhecimento geométrico dedutivo.

Nossas hipóteses residiam na construção de situações em sala de aula nas quais a figura tem um papel importante, que possibilita o aluno, ultrapassando a apreensão perceptiva, a atingir a apreensão operatória apoiada na identificação de reconfigurações pertinentes.

Para melhor avaliarmos os resultados obtidos, procederemos a uma comparação das questões do Pré-teste com as do Pós-teste, destacando também atividades da Seqüência.

A aplicação da **Questão 01** do Pré-teste serviu para avaliar a concepção dos professores sobre as similaridades e diferenças entre a “medida” nos exemplos dados e a prova dedutiva no contexto geométrico, como também para verificar que tipo de estratégia de ensino-aprendizagem está sendo usada para levar o aluno a sentir a necessidade de demonstrar.

Observamos nessa questão, pelas respostas dadas, que 50,9% dos professores pesquisados usam provas pragmáticas do tipo *empirismo ingênuo*, ou seja, avaliam a verdade de um resultado matemático após verificar vários casos, enquanto 41,8% não trabalham os teoremas e não sabem o que fazer em situações semelhantes.

A Seqüência Didática contemplou, nas suas atividades, a importância que, em Matemática, se dá à prova dedutiva com o intuito de levar o aluno a perceber que o resultado de “medições”, após o uso de instrumentos, fornece somente “uma idéia” de certas propriedades de uma figura, chamada de *conjetura*. Nesse caso, tem-se uma verificação empírica. Todavia, é preciso sempre *provar* quando se afirma um resultado. *Provar* é mostrar, ou demonstrar, servindo-se de uma ou várias propriedades já estudadas.

A estratégia de ensino-aprendizagem, que tem como objetivo despertar no aluno a necessidade de demonstrar, parece que diz respeito à modificação do contrato didático referente à prova. A evolução do raciocínio dedutivo em Geometria, no aluno, inicia-se com o conhecimento e a descrição dos objetos geométricos através da observação e das medidas. Aqui a demonstração ainda não se faz presente.

Nas séries mais avançadas (6ª em diante), as exigências em relação à Geometria mudam. O aluno encontra muitas propriedades chamadas de definições, teoremas, e nem sempre compreende o uso que delas deve fazer. Na medida em que a observação da figura e as medidas não são mais instrumentos válidos para justificar uma propriedade, ocorre uma modificação do contrato didático, que se constitui um dos principais obstáculos para a aprendizagem da demonstração. O professor deve, pois, levar em conta essa mudança de contrato, criando situações que questionem a confiabilidade do desenho e da medida como instrumentos de prova.

A **Questão 02** do Pré-teste, que também objetivava verificar que tipo de estratégia de ensino-aprendizagem da demonstração estava sendo utilizada pelo professor para resolver situações-problema nas quais a figura não devia ter a qualidade de ser instrumento de prova, serviu para constatar a ilusão da figura bloqueando o raciocínio.

Pudemos observar que o professor não trabalha com representações múltiplas do mesmo conceito e costuma ver uma Geometria estática, sem possibilidade de movimentos, sem poder sair da folha de papel, sem desenvolver um espírito crítico em relação a definições, atributos e conceitos novos.

Validando essas hipóteses, a **Questão 02** do Pré-teste visava alertar para a necessidade de mobilizar outras ferramentas, como a demonstração, para resolver situações-problema. Nesta questão, 80% dos professores, não habituados a fazer demonstrações, se deixaram influenciar pela ilusão da figura.

Posto que a figura tem um papel importante na aprendizagem inicial do raciocínio em Geometria e que, posteriormente, a figura não mais deve ser considerada como a representação da realidade física, mas como a representação de um modelo matemático, de um conceito, essa troca de estatuto constitui um obstáculo, pois passaremos a pedir ao aluno para raciocinar sobre o conceito e não sobre a figura.

Um desenho inexato não deveria ser obstáculo para raciocinar-se corretamente em Geometria. Mas a **Questão 02** do Pré-teste, referida acima, serviu para atestar a ilusão da figura bloqueando o raciocínio. O convencimento imposto por ela intervém na resolução de problemas e induz formas de raciocínio incorreto.

Os resultados observados após a aplicação da **Questão 01** do Pós-teste nos informam que os professores participantes da Oficina não estão acostumados a justificar suas respostas*: "se o triângulo for retângulo, a medida será igual a 4"* (p. 174). Perguntamos: e se o triângulo não for retângulo, qual será a solução?

Os resultados da **Questão 02** do Pós-teste confirmam que os participantes têm receio de organizar as proposições dadas (hipóteses) através do raciocínio de modo a produzir uma nova proposição: nenhum professor participante dos trabalhos recorreu a teoremas para explicar que o ponto D, sendo fixo o segmento CE, pode ter infinitas medidas (p. 176).

A **Questão 03** do Pós-teste ilustra o funcionamento natural do raciocínio o qual apresenta a vantagem de descrever um tratamento figural "provando" a resposta. Nessa questão, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras com segurança, garantido pelo enunciado. Em Matemática, todo enunciado é uma asserção.

A **Questão 04** do Pós-teste igualmente exemplifica um raciocínio espontâneo que descreve um tratamento figural “provando” a resposta.

No transcorrer da aplicação de nossa Seqüência, procuramos refletir com os participantes sobre certas tendências e certos hábitos arraigados dos professores de Matemática. Refletimos sobre a “prova”, no sentido que BALACHEFF entende, a qual consiste num raciocínio:

- que somente leva em conta o conteúdo das proposições;
- onde o aspecto raciocínio somente surge verdadeiramente em nível global;
- que exige que se guarde o conjunto de procedimentos para que se perceba a necessidade empírica da resposta.

As quatro questões do Pós-teste objetivavam verificar se houve mudança de atitude dos professores no processo de resolução e nas estratégias usadas quando trabalham com “provas” envolvendo desenhos geométricos. Observamos acentuado progresso por parte desses professores, os quais concordam com que as atividades em sala de aula, à semelhança das que foram trabalhadas na Seqüência, devem se constituir em desafios para os alunos. Estes devem ser solicitados a descobrir se a afirmação de um enunciado é verdadeira ou falsa, a demonstrá-la no caso de ser verdadeira, ou oferecer contra-exemplo no caso de ser falsa, sempre justificando suas conclusões, de modo a sentirem-se esclarecidos para se convencer e ou convencer os outros.

Existe um lugar para a demonstração verdadeira no ensino da Geometria em nossas escolas do ensino fundamental.

Precisamos resgatar aquela demonstração que nos permite ter uma plena consciência da maneira pela qual se produz um conhecimento matemático.

# *CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES*

Este trabalho, fundamentado nos estudos de BALACHEFF (1987) o qual considera a conjetura e a prova como estágios necessários dos processos pessoais relevantes na resolução de problemas, teve como objetivos levar os professores do ensino fundamental a:

1. Resgatar o ensino e a aprendizagem da Geometria como ciência do espaço e, num processo de desenvolvimento, prosseguir para níveis superiores de pensamentos geométricos, através de processos indutivos ou dentro de sistemas dedutivos, isto é, progredir para a Geometria enquanto uma estrutura lógica que se relaciona com a elaboração de conjeturas em todos os aspectos de justificativas das generalizações que não necessitam de uma fundamentação concreta. Conceber o ensino da Geometria em que tudo é para se construir. As situações propostas aos alunos devem ser ricas e constituir problemas.

2. Recuperar em Matemática o uso da "prova" que irá homologar as afirmações quando as proposições não estiverem muito transparentes, conduzindo os alunos a aceitar a prova como uma forma válida de argumentação: esta não deve se limitar a simples tarefas parciais pedidas aos alunos.

No estudo feito em alguns livros didáticos atuais (p. 44-47), constatamos que encontra-se negligenciado o ensino da Geometria através do processo de descoberta indutiva. Nesses livros, a "dedutividade", que está presente nos teoremas de Pitágoras e de Tales, não pode ser reinventada pelo aluno, porque tais demonstrações estão impostas aos alunos, os quais vêem somente o resultado final da descoberta matemática e devem assimilá-las para uma posterior repetição, impossibilitando-lhes a visão dos processos que as produziram. O aluno, segundo BALACHEFF (1987), não tem maturidade lógica para experimentar ou se conscientizar da necessidade das provas. É preciso ajudá-lo a sentir a necessidade de usar essa ferramenta a partir de situações problemáticas.

3. Reconquistar o aspecto da descoberta para que o aluno sinta a necessidade de provar o que tenha conjeturado, reinventando provas, usando espírito crítico para interpretar e explicar o mundo tridimensional que nos rodeia.

Para atingir os objetivos acima referidos, elaboramos uma situação de aprendizagem como um processo didático, na qual alunos, aproximadamente na faixa dos 13 aos 15 anos de idade, poderão estar envolvidos em experiências com possibilidades de fazer descobertas, formulações, conjeturas e construções de provas após esforço individual e de toda a classe.

Os professores participantes da Seqüência Didática foram convidados a vivenciar como se realiza esse processo e a dar suas opiniões validando ou não nossa proposta, a todo tempo aberta a sugestões. Durante cada sessão da Oficina, o professor pôde se colocar no lugar do seu aluno e pôde experimentar as situações para as quais seus conhecimentos ou não foram muito utilizados e, por isso mesmo, não suficientes, ou conduziram a erros.

Nossa pesquisa visa provocar um desequilíbrio que gere condições necessárias para uma eventual substituição dessa estratégia de ensino por outras, que venham trazer novos pontos de vista sobre o ensino-aprendizagem da Geometria com demonstração, juntamente com a criatividade didático-pedagógica, conforme pesquisas feitas por ARSAC, BARBIN, BALACHEFF, CHEVALLARD, DUVAL, PIAGET e outros. Nosso trabalho é refletir com o professor os pontos fundamentais da utilização da técnica da prova, as diversas concepções de representação (perceptivas, operacionais, etc.) e de explicação, a prova, a demonstração, buscando ter o domínio necessário para controlar as concepções espontâneas do aluno, dando significado a essa aprendizagem e até mesmo se responsabilizando por ela.

Visamos questionar as velhas práticas de ensino-aprendizagem e repensar as novas descobertas metodológicas em que toda atenção esteja na facilitação da aprendizagem autodirigida, ou seja, o professor ajudando o aluno a aprender.

O contrato didático estabelecido para vigorar durante a realização da Seqüência contemplava as seguintes cláusulas:

- primeiramente, as questões apresentadas deveriam ser analisadas individualmente para depois serem discutidas em dupla e, por último, discutidas com toda a classe;

- todos deveriam se sentir bem à vontade, descontraídos, relaxados, livres para conjeturar com criatividade. Nada seria imposto, nada deveria ser dirigido, nada deveria ser ensinado. Tudo seria discutido. Ao professor pesquisado caberia dizer se a conclusão final estava certa ou errada.

Essa atitude não mudou até mesmo durante as correções com discussões acaloradas, como ocorreu na **Atividade 02**, geradas pelo rompimento do contrato didático que propusemos com o conhecimento matemático estabelecido e devido a hábitos adquiridos com a estrutura dedutiva da Geometria tradicional, bem como devido ao modo como é geralmente ensinado o sistema lógico matemático.

Conforme tínhamos imaginado, alguns grupos não tiveram dúvidas durante a execução das tarefas, porque achavam, naquele momento, que estavam seguros e somente foram perceber seus equívocos na correção das atividades. Foi interessante observar que soluções apresentadas na folha não foram levadas para debate e, por outro lado, questões que aparentemente estavam bem resolvidas nas folhas tornaram-se questões polêmicas no momento da correção, como, por exemplo, a **Atividade 04**.

Quanto aos resultados, acreditamos que os professores resolveriam todas as questões do **Pós-teste** manifestando um domínio razoável do conteúdo trabalhado. No entanto, percebemos que alguns professores tiveram representações mentais adquiridas anteriormente, cujas raízes profundas exigem um trabalho mais demorado para que ocorra a “acomodação” do novo conhecimento, conforme PIAGET.

Nas justificativas que precedem a apresentação das **Atividades de nossa Seqüência** (p. 126), colocamos duas questões: *ensinar Geometria para quê? Ensinar demonstrar por quê?*

Muitos matemáticos consideram a demonstração como a entrada para o mundo da Matemática.

Nossa preocupação e nosso interesse são enfatizar que, num sistema dedutivo, é preciso geralmente, quando se afirma um resultado matemático, basear-se em afirmações provadas anteriormente ou consideradas verdadeiras e que não se pode demonstrar uma afirmação com base exclusiva em figuras. E o professor, que ensina a demonstrar, deve intervir induzindo esse questionamento entre os alunos e propor respostas a essas questões.

Mas, para a maioria dos professores pesquisados, que estratégias devem ser usadas, perguntam eles, para superar os obstáculos que se acham no ensino-aprendizagem da demonstração? Como levar o aluno a sentir a demonstração como um instrumento eficiente de prova? Como agir para que a dificuldade de expressão de certos alunos não se transforme em dificuldade relacionada à Geometria? Parece-nos que não há uma resposta pronta para todas essas preocupações, mas o conhecimento dos obstáculos mais importantes encontrados pelos alunos, relatados pelos professores ao longo das atividades da Seqüência, pode ser levado em conta na aprendizagem da demonstração.

Os conhecimentos e as concepções espontâneas, que os professores trouxeram durante a realização das atividades, foram obstáculos que observamos durante os estudos preliminares da Seqüência. Daí podermos classificá-los como de origem didática, epistemológica, metodológica e lingüística.

O obstáculo didático por nós observado, que confirma. os resultados das pesquisas de DUVAL (1993 ), foi a dificuldade de se perceber o desenho e a decomposição da figura como suporte para a solução de algumas situações. geométricas. A passagem da Geometria de observação para a de dedução é um dos obstáculos mais importantes. O contrato didático entre o professor e os alunos parece ser um ponto crucial nos problemas com prova, porque o professor precisa mostrar aos alunos certas formas de explicação submetidas a certas regras que nem sempre lhes são evidentes. A figura, ligada à troca do contrato didático, vê também seu estatuto evoluir. Para que a demonstração seja um meio eficiente para convencer, é preciso que os instrumentos à disposição dos alunos sejam colocados à prova. O professor, na situação de sala de aula, deve fornecer, o mais cedo possível, atividades onde a observação e a medição não permitem validar um resultado, advindo daí a necessidade de serem utilizados outros instrumentos.

O obstáculo de origem epistemológica foi o fato de os professores considerarem a demonstração um texto formalizado, que não tem sentido para eles, ou uma atividade que não tem sentido em relação ao saber matemático. Entretanto, todo o ensino de Matemática se baseia em concepções epistemológicas, em concepções do saber matemático geralmente implícitas.

Baseando-nos nos estudos de BARBIN (1989), sabemos que a atividade de demonstrar pode ter três significados: *convencer* para saber, *esclarecer* para saber como se sabe e i*nteressar* para saber por que se sabe.

Foi importante para nossa pesquisa perceber que alguns participantes esboçaram tentativas de entender o processo da prova pelos alunos. Foram sendo confirmadas nossas previsões de que os participantes acreditam que os alunos têm condições para aprender tal conteúdo, uma vez trabalhadas as concepções de demonstração e aproveitadas todas as concepções espontâneas por eles trazidas.

Outro obstáculo é de ordem metodológica. Uma das dificuldades encontradas pelos alunos, como relataram os professores durante a Seqüência, é o procedimento de resolução: como começar? Quais conhecimentos a serem utilizados? O aluno tem dificuldade em descobrir no enunciado os pontos que levam ao uso de determinada propriedade. Sabemos que não é automático, para o aluno, o processo mental que permite, a partir de certos dados, mobilizar conhecimentos adequados. O aluno tem a tendência de utilizar as propriedades estudadas recentemente, mas tem dificuldade para utilizar seus conhecimentos anteriores. Diante disso, ou ele pede explicações ao professor antes de começar o trabalho, ou se desencoraja, ou dá uma resposta absurda.

Em diferentes momentos da Seqüência, solicitamos atividades que nos permitiram avaliar a evolução da aprendizagem da demonstração e a habilidade espacial e desenvolvimento do pensamento geométrico. Constatamos, através de produções escritas dos professores, a evolução dessa aprendizagem por meio de criativas resoluções de atividades elaboradas por eles, algumas experimentações com tarefas não conhecidas pelo aluno visando desenvolver um espírito crítico em relação a conceitos novos, definições e propriedades não conhecidas.

O professor, nas atividades de demonstração, muitas vezes se satisfaz com um ensino-aprendizagem por analogia. O aluno, colocado diante de um modelo de demonstração, procura observar e, em seguida, imitar o método de resolução numa situação aproximada. Esta aprendizagem por imitação não tem nada de evidente para os alunos: a maioria deles tem dificuldade para começar um problema. A demonstração não pode ser apresentada como um produto pronto para o aluno mas, sim, como um processo que é construído a partir de problemas que tomam sentido na vida prática. Por outro lado, não há método geral que se aplique à situação e é difícil para o professor resolver o trabalho para o aluno. Dar uma “mãozinha” ao aluno nessa situação de bloqueio é dar parte da resposta.

A aquisição de uma linguagem correta é um dos objetivos da escola. Mas sabemos que a realidade escolar registra as sérias dificuldades, por que passam os alunos, ao precisar decompor uma frase, ao analisar o papel de cada palavra num texto. Os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP, 1996), como foi mencionado na Introdução deste trabalho, fazem menção ao baixo desempenho alcançado pelos alunos do ensino fundamental também em Língua Portuguesa. A dificuldade dos alunos em ler um texto de modo inteligente e a incapacidade de reproduzi-lo com um mínimo de vocábulos apropriados, resultam na falta de competência em compreender também os enunciados dos problemas em Matemática e em elaborar uma resposta com argumentos articulados dentro de um texto coerente.

Nesse sentido, a redação das demonstrações constitui um obstáculo lingüístico importante. Muitos alunos, como alertaram os professores pesquisados, têm um raciocínio correto e percebem a solução do problema, mas têm dificuldade na formulação da resposta com argumentos precisos. Muitas vezes, os textos são sucintos e escritos numa linguagem aproximativa não muito claros para o leitor. Esses problemas, todavia, estão longe de serem resolvidos nas escolas. O trabalho de redação deve ser proposto o mais cedo possível.

Nas atividades de resolução de problemas e de busca de explicações, parece-nos fundamental a gestão da classe por parte do professor. A “alergia” sentida por certos professores e alunos na aprendizagem da demonstração, como foi mencionada pelos professores pesquisados, pode ter sua causa nos métodos inadequados de trabalho do professor. Alguns alunos decoram definições e teoremas não compreendendo o que ficou retido, incapazes de aplicá-los nas atividades. Com isso, permanecem desmotivados e têm geralmente um comportamento passivo em sala de aula.

Em face dessa situação é que fomos levados a pesquisar o ensino-aprendizagem da Geometria com demonstração, junto a professores do ensino fundamental que lecionam a partir da 6ª série, no intuito de integrar a demonstração às demais áreas da Matemática e a resgatar a historicidade do seu conceito vista como instrumento técnico de prova.

Propomos que a demonstração seja vivenciada de modo interativo no contexto da sala de aula como sendo um tempo de construção do saber geométrico no processo de resolução de problemas, quando as ações dos alunos devem ser respostas a constantes e gratificantes desafios. A demonstração, como vimos, tem suas origens em atos de comunicação, ou seja, em trabalhos em grupos, em confrontações verbais entre alunos, em que se evidenciam as concepções verdadeiras ou falsas, os erros de raciocínio, os diferentes procedimentos utilizados, as conjeturas manifestadas. O debate que daí resulta permite que seja elaborada uma síntese e sejam institucionalizados os diferentes métodos de resolução da situação estudada.

Esta nossa proposta vai ao encontro do método da ação, proposto por PIAGET (1988), para o qual é fundamental o papel da ação para que a verdade a ser construída seja reinventada pelo próprio aluno e não transmitida, como é comum acontecer. O professor deve propor uma série variada de atividades que venham favorecer um comportamento de pesquisa, a elaboração de conjeturas, despertando assim o raciocínio dedutivo.

Esperamos que os resultados e as conclusões desta pesquisa contribuam para o desenvolvimento do ensino de Geometria e da demonstração tornando-os significativos para professores e alunos.

> *"… o fim da educação é… facilitar a mudança e a aprendizagem … e facilitar a aprendizagem reside em certas qualidades de atitude que existem na relação pessoal entre o facilitador e o aprendiz".*
>
> (CARL R. ROGERS. ***Liberdade para aprender***)

## *BIBLIOGRAFIA*

A sigla RDM é designativo da revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*.


AG ALMOULOUD, Saddo. *Thèse d'universite l'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la demonstration et de traitement de données didactiques.* 1992.

_________________ *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve: des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration.* RDM, vol. 12, n. 23, 1992.

_________________ *DEFI: outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration au collège*. REPÈRES-IREM. n. 9, octobre 1992, pp. 35-60.

_________________ *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* CEMA (Caderno de Educação Matemática), vol. III, PUC, São Paulo, 1997.

ARSAC, G, *Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France,* RDM, vol. 9, n. 3, 1988.

ARSAC, G*. L'origine de la démonstration: essai d'Épistemologie didactique*. RDM, 8 (3), p. 267-312, 1987.

ARTIGUE, Michèle. Ingenierie didactique. RDM, v. 9. n. 3, p. 281-308, 1988.

_________________ *Épistemologie et didactique*, RDM vol. 10, 2.3, 1990.

AUTOLYCOS DE PITANE (1979). *La sphère en mouvement, levers et couchers héliaques. Testimonia*. Les belles lettres, Paris.

BACHELLARD (1938), *Le rationalisme appliqué*, P.U.F., Paris, 1949.

BACHELLARD, G. *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris, 1965.

BALACHEFF, N. (1982). *Preuve et démonstration au collège*. RDM, 3 (3), p. 261-304

_________________ (1987). *Processus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, vol. 18, nº 2, Mai 1977, p. 147-176

_________________ (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier

BARBIN, E. *La demonstration mathématique: significations epistemologiques et questions didactiques*. Bulletin de l'APMEP nº 366. Dec 1988

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática atual*. 8ª série. São Paulo, Atual Editora, 1994.

BONNEFOND, Gérard e outros. *Mathématiques. Pythagore* - 4è, Hatier, Paris, 1992

BKOUCHE, R. (1989). *De la démonstration*, IREM de Lille.

__________________ (1990) *Enseigner la géometrie, pourquoi?* IREM de Lille. Repères n. 1, p. 92-102.

BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques.* RDM,vol. 4, nº 2, 1983.

BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques*. RDM, v. 7, n. 2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

__________________ *Le contrat didactique: le milieu*. RDM, v. 9, n.3, p. 309-336, 1988

CAVEING, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Université de Lille III, 1982.

CHEVALLARD, Yves et JOHSUA, Marie-Alberte. *La transposition didactique,* édition de la Pensée Sauvage, 1991

DELORD, R. e outros. *Mathématiques*. 4è, Hachette, Paris, 1992.

DOUADY, Régine. *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*. Repères, IREM nº 6, Topiques Editions, Janvier 1992.

DUVAL, Raymond. "Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement congnitif de la pensée'. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, vol. V, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. e EGRET, M. A., 1989. "L'organisation deductive du discours. Interaction entre Structure profonde et Structure de surface dans l'accès à la demonstration". in: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 2*,* IREM de Strabourg

DUVAL, R., 1988, "Approche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence". in: *Annales de Didactique et de sciences cognitives* 1 IREM de Strasbourg

GAUD, D. "Les deux fonctions de la démonstration". In: BONAFE, Freddy. *Un outil pour appendre à démontrer*. IREM de Montpellier, Mai 1989, p. 202-208.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. *Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP. Relatório Final dos Resultados da 1ª Aplicação.* vol. I, 1996

HENRY, M. *Didactique des Mathématiques: une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants*. Besançon: IREM, 1991.

HOUDEBINE, J. *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question.* IREM de Rennes. Repères n. 1, p. 5-27, 1990

IMENES e LELLIS. *Matemática*. 7ª série, Editora Scipione, 1997.

LAKATOS (1976). *Preuves et réfutations*. Paris, Hermann, 1985

LORENZATO, Sérgio. "Por que não ensinar Geometria". In: *A Educação Matemática em Revista*, SBEM, n. 4, p. 3-13, 1995.

__________________ “Os “porquês” matemáticos dos alunos e as respostas dos professores”. In: *Proposições*, Faculdade de Educação UNICAMP, v. 10, Campinas, 1993.

MANTE, M. Autour de la notion de situation-problème. In: *Suivi Scientifique*, Classe de 4ème, VII, 2. 1987-1988.

MULLER, Jean-Pierre. *La démonstration en geometrie en quatrième et en troisième*. REPERES-IREM. N. 15, avril, 1994.

OLIVEIRA, Antonio Marmo de e SILVA, Agostinho. *Biblioteca da Matemática Moderna*. Tomo I, Livros Irradiantes S/A, 1968.

PAVANELLO, Regina Maria. “O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências”. *Revista Zetetiqué*, nº I, pp. 7-17. UNICAMP, 1993.

PIAGET, J. *Para onde vai a educação?* 10ª ed., Rio de Janeiro, José Olympio, 1988

__________________ *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neufchâtel, 1967.

PIRES, Célia Carolino. *A relação entre a produção do conhecimento e os fundamentos das Propostas Curriculares*. Secretaria de Estado da Educação, FDE, São Paulo, 1004, p. 4

PLUVINAGE, F., 1989. “Aspects multidimensionnels du raisonnement en geometrie”. in: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 2, IREM de Strabourg

QUINTELA, Ary. *Matemática*. Terceiro ano. Companhia Editora Nacional, 1945.

ROBERT, Aline et ROBINET, Jacqueline. Répresentation des enseignants de mathématiques sur les mathématiquesa et leur enseignement”, Cahier de DIDIREM n. 1, publié par L'IREM de Paris 7, 1989.

ROXO, THIRÉ, MELO e SOUZA. *Matemática ginasial*. 3ª série. Livraria Francisco Alves, 1944.

SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática, curso ginasial*. 3ª série. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1958.

SÃO PAULO(ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS. *Proposta Curricular para o ensino de Matemática. 1º Grau*. 3ª ed., São Paulo, SE/CENP, 1988

STÁVALE, Jácomo. *Quarto anno de Mathematica* (Para o quarto anno dos cursos gymnasiaes seriados e dos cursos fundamentaes das Escolas Normaes). Companhia Editora Nacional, 1935.

SZABO, A. “Greck dialectic and Euclids axiomatics”, in: LAKATOS, *Problems in the philosophy of mathematics*, North Holland Company, 1972.

VERNANT, J. P., *Les origines de la pensée grecque*. PUF, Paris, 1962.

__________________ *Mythe et pensée chez les Grecs*, Maspero, Paris, 1971, I, p.175.

**(ANEXO 01)**

## PESQUISA

**Nome:** ______________________________________________ **Data**: __________

**Telefone**: _________________ **Cidade**: ________

Por gentileza, as respostas ao **Questionário** abaixo têm como objetivo oferecer subsídios para estudos e pesquisa na área do ensino da Matemática na 7ª e 8ª séries.

**Entrevistado** (formação e experiência**)**

( ) Apenas 2º grau
( ) Licenciado em Matemática
( ) 3º grau incompleto
( ) Outras habilitações.
Especifique: _________________

**Há quanto tempo leciona?**
____________________________________________________________________

**Faixa etária**

( ) 20 - 29 ( ) 30 - 39 ( ) 40 - 49 ( ) 50 - 60

**Escolas em que leciona** (graus e séries)

____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________

## QUESTIONÁRIO

01. Você conhece a **Proposta Curricular de Matemática** da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo para o 1º grau? ( ) sim ( ) não ( ) em parte

Dê sua opinião a respeito dela:
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________
____________________________________________________________________

Você a utiliza? ( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

02. Você utiliza livro didático em suas aulas de Geometria?
( ) sim ( ) não ( ) às vezes
Justifique sua resposta:

03. Você acha que os livros didáticos, no tocante ao assunto Geometria, estão de acordo com as orientações da Proposta Curricular? ( ) sim ( ) não( ) em parte

Comente sua resposta:

04. À época da sua formação profissional (Faculdade), você teve oportunidade de estudar **Geometria** de forma a lhe dar subsídios para trabalhar com os alunos?
( ) sim ( ) não ( ) em parte
Comente sua resposta:

05. Você trabalha os teoremas da Geometria Plana?
( ) sim ( ) não ( ) em parte
Justifique sua resposta:

Se respondeu (sim), comente a abordagem de sua preferência (geometria experimental, demonstrativa, outras).

06. Quando você trabalha os teoremas, cita-os considerando-os como verdades a serem aceitas pelos alunos e, em seguida, dá exercícios para aplicação?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

07. Você acha importante fazer a demonstração dos teoremas da Geometria?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

08. Para você, o que é uma demonstração?

09. Você propõe aos seus alunos exercícios em que se solicita uma demonstração formal?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta.

10. O que você espera dos alunos quando tentam fazer uma demonstração? Justifique.

11. Que sugestão você dá para trabalhar formalmente o teorema relativo à "**a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º**"?

12. A respeito das relações métricas num triângulo retângulo:

a) (     ) Você costuma apresentar uma figura do triângulo retângulo com os seus elementos e a lista das relações (fórmulas) e, em seguida, dar os exercícios para a aplicação das fórmulas?

Justifique:

b) (     ) Você costuma trabalhar a partir de semelhança de triângulos, fazendo a dedução das relações métricas para os alunos?

Justifique:

c) (    ) Você costuma orientar os alunos de modo que eles, através de conhecimentos anteriores, possam discutir e chegar à verdade?

Justifique:

---

d) (    ) Você costuma dar um tempo para que os alunos façam suas tentativas e, depois, discutir com eles os procedimentos usados chamando a atenção para as relações métricas?

Justifique:

---

e) (    ) Você costuma fazer do seu jeito? Explique seu procedimento.

---

13. Você acha que o aluno é capaz de atingir um nível mais elevado do pensamento geométrico dedutivo?    (    ) sim    (    ) não    (    ) às vezes

Comente sua resposta:

---

14. Quando você trabalha a Geometria em sala de aula,

a) (    ) exige que o aluno faça construções com régua e compasso.

(    ) sim    (    ) não    (    ) às vezes

Comente sua resposta:

---

b) (    ) trabalha com esboços, achando ser suficiente para a compreensão de um teorema.

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

c) ( ) acha necessário que algumas construções sejam feitas com régua e compasso, muitas vezes fazendo um desenho bem feito.

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

15. Você acha que a figura é indispensável na resolução de um problema de geometria?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

16. Você utiliza material didático para ensinar Geometria?

( ) sempre ( ) nunca ( ) às vezes

Comente sua resposta:

17. Você acha que uma demonstração ajuda a "esclarecer" o aluno?

( ) sempre ( ) nunca ( ) às vezes

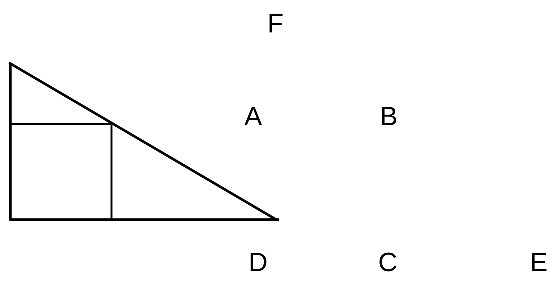
Comente sua resposta:

18. Você acha que uma demonstração "convence" o aluno?

( ) sempre ( ) nunca ( ) às vezes

Comente sua resposta:

19. Suponha que um professor, em sua sala de aula, "coloque" a seguinte **dúvida** para os alunos:




ABCD é um quadrado de lado 8 cm

AFB é um triângulo retângulo e AF = 5 cm

BCE é um triângulo retângulo e CE = 13 cm

**Pergunta–se:**

– Os pontos **F, B, E** estão alinhados?

Justifique sua resposta.

A. Você acha que o seu aluno, de imediato, irá responder que ...

Por quê?

B. Liste pelo menos três dificuldades que você considera mais comuns entre seus alunos quando estão em situações como esta.

C. Na sua opinião, quais as causas dessas dificuldades?

D. Qual a importância da figura relacionada aos dados do problema para os alunos?

E. Como você resolveria esse exercício para os alunos?

F. Você considera problema acima:

( ) bem formulado ( ) mal formulado

Sugira uma reformulação.

20. Os alunos, de modo geral, gostam de demonstrar?

( ) sim ( ) não

Justifique sua resposta:

21. Quais as causas das dificuldades para os alunos ao fazerem demonstrações?

Comente sua resposta:

22. É possível estudar geometria sem recorrer a demonstrações?

( ) sim ( ) não ( ) às vezes

Comente sua resposta:

23. Qual o objetivo de uma demonstração?

Comente:

24. Responda as questões abaixo, classificando as afirmações com os códigos colocados nos parênteses:

(C) significa que você concorda plenamente com a afirmação.
(CP) significa que você mais concorda com a afirmação do que discorda dela.
(DP) significa que você mais discorda da afirmação do que concorda com ela.
(D) significa que você discorda totalmente da afirmação.

a) ( ) A Geometria deve permitir ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

b) (   ) A Geometria deve ser apresentada, formalmente, de modo a permitir um trabalho com demonstrações, fundamental ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

c) (   ) A Geometria pode contribuir para a aprendizagem de outros assuntos, como números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.

d) (   ) A Geometria é um assunto no qual os alunos mostram dificuldades e, por isso, deve ser trabalhada unicamente nas séries finais.

e) (   ) Como o trabalho com Geometria pode ser feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, de pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, é melhor que ele seja feito em Educação Artística.

f) (   ) Nas aulas de matemática, o trabalho com Geometria deve centrar-se na identificação das figuras e na obtenção das fórmulas essenciais.

25. Faça, por gentileza, um COMENTÁRIO sobre esta pesquisa (sugestão, crítica positiva e/ou negativa, sua validade, etc.).

**(ANEXO 02)**

Nome: ______________________________________________ - 1997

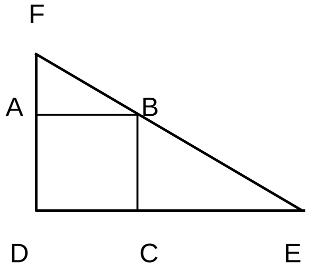
PRÉ-TESTE

**QUESTÃO 01**

1 – Que sugestão você dá para trabalhar **formalmente** o teorema relativo à "*a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°*" ?

**QUESTÃO 02**

2 – Suponha que um professor, em sua sala de aula, "coloque" a seguinte **dúvida** para os alunos:




ABCD é um quadrado de lado 8 cm

AFB é um triângulo retângulo e AF = 5 cm

BCE é um triângulo retângulo e CE = 13 cm

**Pergunta–se:**

– Os pontos **F, B, E** estão alinhados?

Justifique sua resposta.

A. Você acha que o seu aluno, de imediato, irá responder que ...

Por quê?

B. Liste pelo menos três dificuldades que você considera mais comuns entre seus alunos quando estão em situações como esta.

C. Na sua opinião, quais as causas dessas dificuldades?

D. Qual a importância da figura relacionada aos dados do problema para os alunos?

E. Como você resolveria esse exercício para os alunos?

F. Você considera problema acima: ( ) bem formulado ( ) mal formulado
Sugira uma reformulação.

**(ANEXO 03)**

Nomes:________________________________________________________________

________________________________________________________________

Escolas: ______________________________________________________________

________________________________________________________________

ATIVIDADE 01 - CONJETURAR? ou PROVAR?

⇒ **Enunciado:**

*Traçar um triângulo ABC tal que o lado AB = 6 cm, ângulo A = 33º e ângulo B = 56º .*

*O triângulo ABC é retângulo?*

Respostas orais de três alunos:

***João**: "Sim; medindo o ângulo C com o meu transferidor, eu encontro 90º."*
***Paulo**: "Concordo com você, João, eu verifiquei com o meu esquadro."*
***Ana**: "Não concordo! Eu estou segura de que o ângulo C não é reto: ele mede 91º."*

1. Um só dos três alunos tem razão. Quem é? Por quê?

2. Dê uma explicação para o erro dos outros alunos.

Quais regras do debate matemático você acha que os alunos aprenderam, ou seja, institucionalizaram?

Acha importante levar o aluno a fazer diferença entre ***provar*** e ***conjeturar***?

Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes nessa situação-problema?

Dê suas sugestões.

## ATIVIDADE 02 - CONTRA-EXEMPLO

⇒ **Enunciado:**

Um aluno da professora Ana, numa prova, respondeu:

a) *Não importa qual triângulo eqüilátero, ele tem somente um eixo de simetria.*

b) *Todo quadrilátero, tendo suas diagonais perpendiculares, é um losango.*

c) *Se os segmentos MA = MB, então M é o ponto médio do segmento AB.*

1. Você acha que o aluno acertou tudo?

2. Se não acertou, como você poderia convencê-lo de que ele está errado?

| Dê sugestão de um método para que seu aluno use e se sinta convencido ao provar uma propriedade falsa. |
|---|

| Quais vantagens didáticas, para o professor, e matemáticas, para o aluno, você vê nesse tipo de questionamento? |
|---|

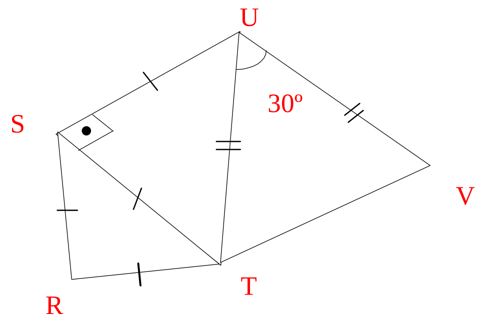
| Dê suas sugestões. |
|---|

ATIVIDADE 03 - **PROVAR**

⇒ **Enunciado:**

*Apoiando-se sobre os dados desta figura a mão livre, pode-se afirmar que os pontos **R**, **T** e **V** estão alinhados?*

*Justifique matematicamente sua resposta.*



A exploração da figura ajudou na descoberta da solução? De que modo?

Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes ?

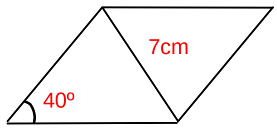
Dê suas sugestões.

## ATIVIDADE 04 - REPRODUZIR EM VERDADEIRA GRANDEZA

⇒ **Enunciado:**

*Reproduzir em verdadeira grandeza o losango que foi desenhado a mão livre. Usar papel sulfite.*

*Redigir os passos de sua construção.*



Quais dificuldades o aluno pode encontrar ao resolver essa questão?

Quais as vantagens e as inconveniências de se utilizar estratégias de raciocínio, incentivando o espírito explorador em problemas desse tipo?

Qual o valor pedagógico no fato de o aluno experimentar suas próprias intuições para compreender conceitos e propriedades?

Quais informações do ponto de vista matemático, para o aluno, e didático, para o professor, você acha relevantes nessa experimentação?

Dê sua sugestão.

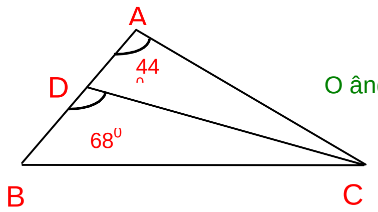
ATIVIDADE 05 - **PROVA**

## ⇒ Enunciado:

*Considere a figura a mão livre.*

*Um aluno quer demonstrar que os lados CB = CD.*

*Com os dados do problema, quais deverão ser as etapas de sua demonstração?*




O ângulo ACB mede 68º

Quais propriedades matemáticas são necessárias para resolver o problema?

Se o aluno não conseguir obter uma boa estratégia de demonstração, que sugestão você lhe daria?

Para encorajar seus alunos a participarem ativamente, e de modo independente, na construção de seus conhecimentos, como você acha que seria a resposta deles se lhes fosse pedido para proporem “outras soluções” ou para “reescreverem o problema”?

Quais vantagens didáticas, para o professor, e matemáticas, para o aluno, você vê ao serem propostas situações-problema desse tipo?

Dê suas sugestões.

Nomes:______________________________________________________________

______________________________________________________________

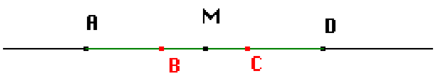
Escolas: ______________________________________________________________

______________________________________________________________

**Atividade 06 – A LEI DO PONTO MÉDIO**

⇒ **Enunciado:**

*Sejam quatro pontos A, B, C e D alinhados nesta ordem e tal que AB = CD*




Demonstre que o ponto médio do segmento de *BC* é também o ponto médio do segmento *AD*.

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

Coloque em ordem as sete frases seguintes para obter uma demonstração desta propriedade:

(1) donde *AM* = *MD*

(2) Ora, por hipótese: *AB* = *CD*

(3) M é, então, o ponto médio de *AD*

(4) Por definição de ponto médio, tem-se: *BM* = *MC*

(5) Seja *M* o ponto médio de *BC*

(6) Então, *AB* + *BM* = *CD* + *MC*

(7) A, M e D alinhados.

O seu aluno aprecia problema desse tipo? Explique.

Em caso negativo, que fazer para motivá-lo?

Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de problema

Dê suas sugestões.

## ATIVIDADE 07 - **JUSTIFICAR**

⇒ **Enunciado**:

Eis um diálogo entre um aluno e seu professor:

*Traçar uma semicircunferência de diâmetro BC, em seguida marcar dois pontos D e E sobre a semicircunferência.*
*Seja A o ponto de intersecção das retas BD e CE.*

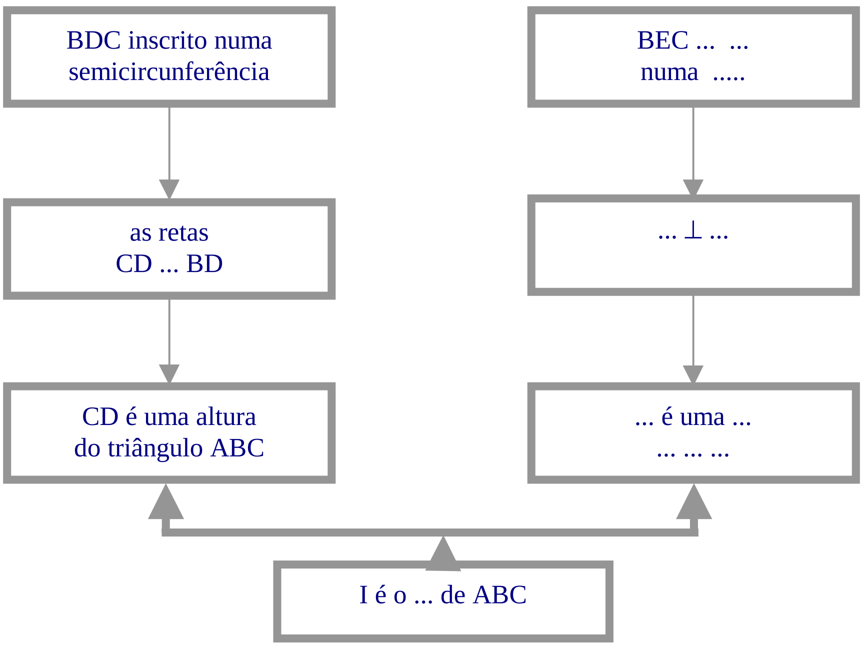
*Apenas com a régua, traçar a perpendicular à reta BC passando por A.*

**Rui**: "*Eu tracei as retas BE e CD que se cortam em I. Em seguida, eu tracei a reta AI : usei este caminho".*

**O** "**Prof**" (irônico): "*Você não tinha muitas possibilidades para traçar retas a partir da figura; mas é preciso agora justificar sua construção*."

### 1ª PARTE

Pede-se:
1. Efetuar a construção de Rui, em seguida completar, justificando, o organograma seguinte:



2. Redigir a justificativa da construção de Rui.

1ª PARTE

Quais propriedades geométricas importantes você levantaria para os seus alunos nesse problema?

Qual metodologia de construção?

## 2ª PARTE

⇒ **Enunciado**:

*Trace um círculo de diâmetro AB, em seguida marque um ponto M no seu interior.*

*É possível construir, apenas com a régua, a perpendicular à AB passando por M ?*

*Como?*

*Explique.*

Qual justificativa o aluno poderá apresentar para validar a sua construção?

E se ele não conseguir, que "empurrãozinho" você daria?

Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nessa situação-problema?

ATIVIDADE 08 - PESQUISAR E, EM SEGUIDA, REDIGIR UMA DEMONSTRAÇÃO.

⇒ **Enunciado**:

*Traçar dois paralelogramos ABCD e AECF*
*Provar que EBFD é um paralelogramo.*

## 1ª PARTE

Pede-se:

1. Assinalar com um (**x**), dentre as afirmações (verdadeiras) abaixo, aquela única que seja útil para resolver o problema. Qual? Por quê?

"Um quadrilátero convexo

*( ) cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo."*
*( ) cujas diagonais têm o mesmo ponto médio é um paralelogramo."*
*( ) cujos lados opostos têm o mesmo comprimento é um paralelogramo."*

2. Colocar as frases seguintes na ordem de um esquema de demonstração:

*Ora, se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo ponto médio, é um paralelogramo.*

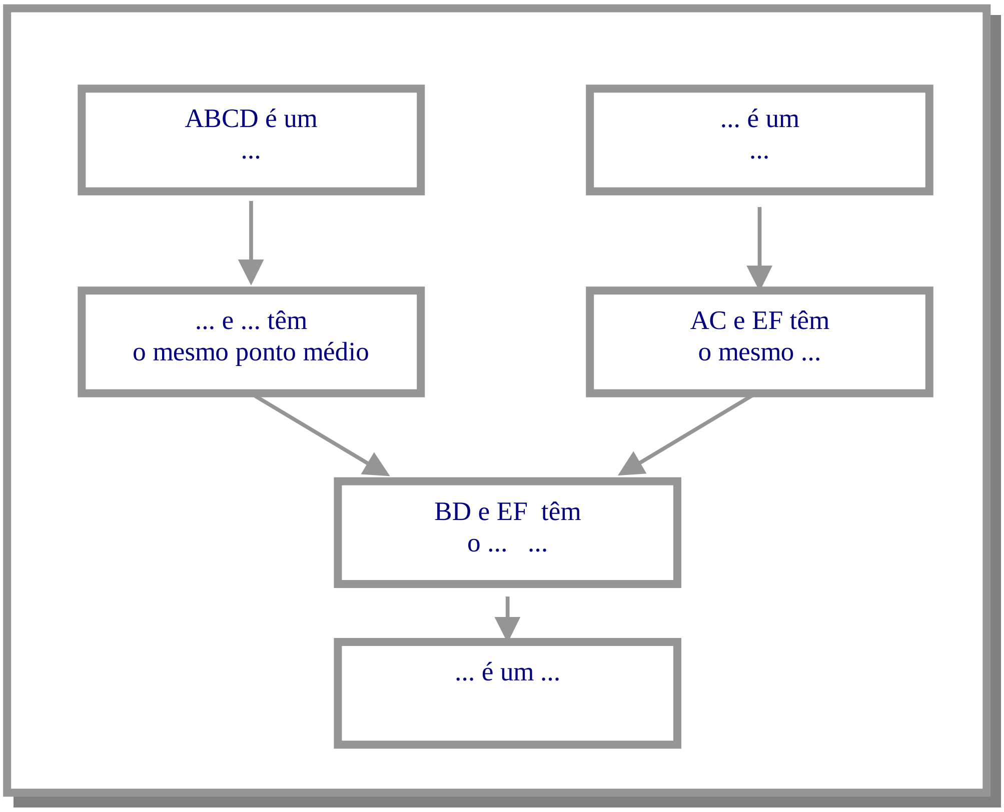
*ABCD é um paralelogramo, portanto AC e BD têm o mesmo ponto médio.*

*Portanto, EBFD é um paralelogramo.*

*Resulta que BD e EF têm o mesmo ponto médio*

*AECF é um paralelogramo, então AC e EF têm o mesmo ponto médio.*

b) Completar o esquema abaixo:




1ª PARTE

Quais as vantagens que você vê, para os seus alunos, no uso desse tipo de esquematização dos passos de uma demonstração?

## 2ªPARTE

Inspirando-se no exercício precedente, resolver o problema seguinte, depois redigir sua solução.

⇒ **Enunciado:**

*Sejam dois retângulos EFGH e EIGJ.*

*Qual é a natureza do quadrilátero IFJH?*

Como você acha que seus alunos irão resolver o problema proposto na 2ª parte?

Como redigirão sua solução?

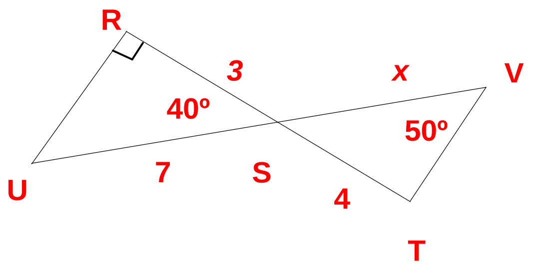
Como verificarão a quantidade de figuras diferentes?

Quais dificuldades irão encontrar em construir a figura EIGJ ?

Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nessa situação-problema?

## ATIVIDADE 09 - PROVAR, CALCULAR E REFLETIR: V ou F?

⇒ **Enunciado:**




Considere a figura dada:

♦ as retas RU e VT são paralelas.

( ) Verdadeiro?
( ) Falso?
Por quê?

♦ X = 7

( ) Verdadeiro?
( ) Falso?
Por quê

♦ $\frac{VT}{SV} = \frac{RU}{US}$ ?

( ) Verdadeiro?
( ) Falso?
Por quê?

Quais sugestões você faria para o aluno que não acertou tudo ou parte das questões acima?

Quais são as vantagens didáticas e matemáticas em se propor questões como estas?

## ATIVIDADE 10 - CASOS ESPECIAIS. DEBATE.

⇒ **Enunciado**:

1) Uma só das duas alunas seguintes tem razão. Qual?

Rita - "*Um triângulo retângulo tem uma única altura".*
Cris - *"As três alturas de um triângulo retângulo são concorrentes".*

2) Explicar por que, num triângulo eqüilátero, as alturas passam pelo centro da circunferência circunscrita.

3) Considere um triângulo *ABC* isósceles em *A*.

a) Verdadeiro ou falso? "A altura saída de *A* é eixo de simetria do triângulo."

b) Trace as alturas saídas dos vértices *B* e *C.* Sobre qual reta está situada seu ponto de intersecção? Justifique a resposta.

| Quais conceitos matemáticos seu aluno deverá adquirir nesta situação-problema? |
|---|

| Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de questionamento? |
|---|

Nomes:____________________________________________________________

Escolas: ____________________________________________________________

## ATIVIDADE 11 - CULTIVANDO A ARTE DE DEMONSTRAR.

### ⇒ O problema

Seja *ABCD* um trapézio tal que as retas *AB // CD*. Constrói-se a reta altura *AH* do triângulo *ACD*, em seguida, a reta *d* paralela à reta *AH* e passando por *C*.

Demonstre que *d* é a altura do triângulo *ABC* relativa ao vértice *C*.

### a) **A figura**

De que instrumentos precisa o aluno para construir a figura enunciada no problema?

### b) **As hipóteses e a conclusão**

Quais são as **hipóteses** (o que se sabe) e qual é a **conclusão** (o que se quer demonstrar)?

## c) **Um esquema de demonstração**

Para fazer uma demonstração, é preciso ferramentas intelectuais.

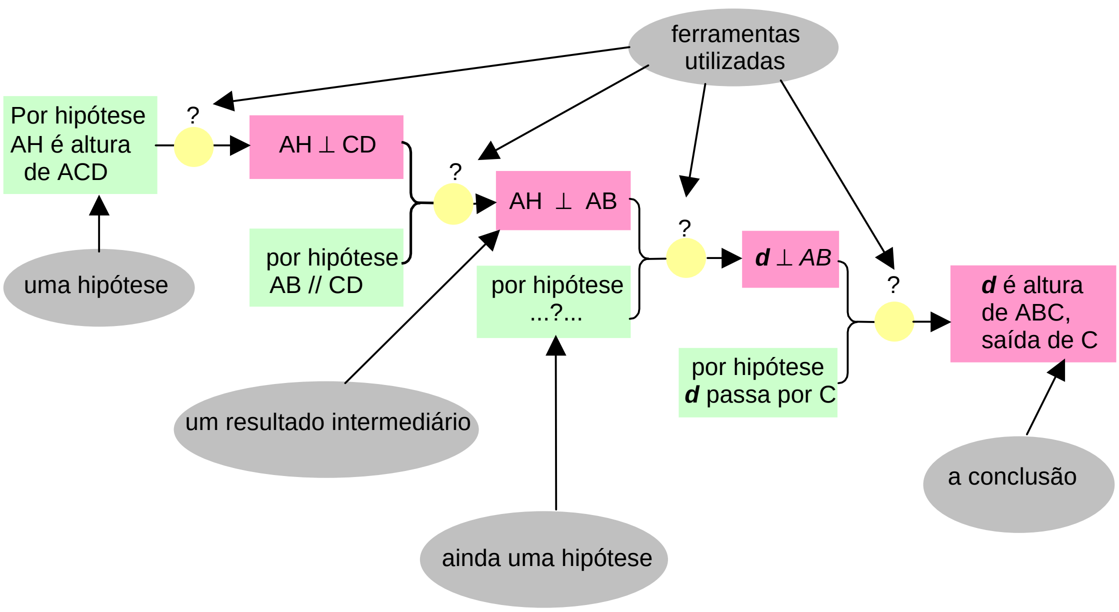
Qual definição **D** devemos usar?

---

Que propriedades **P** nos interessam para a demonstração?

---

Complete o **esquema de demonstração** seguinte:



d) **A redação**

Redija esta demonstração.

Quais dificuldades o aluno pode encontrar para completar este esquema?

Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de problema?

ATIVIDADE 12 - É PRECISO DEMONSTRAR.

## ⇒ O problema

Num triângulo qualquer *ABC,* traça-se a altura *AH*, o ponto médio *I* do lado *BC* e a reta passando por *I*, paralela à *AH*.
Esta reta corta *AB* ou *AC* em *J.*

Demonstre que o triângulo *BJC* é isósceles.

## a) A figura

De quais instrumentos precisará o aluno para construir a figura?

## b) As hipóteses e a conclusão

Indique as **hipóteses** (o que se sabe) e a **conclusão** (o que se quer provar).

## Ferramentas para fazer demonstração:

Indique três **definições** e duas **propriedades** que serão usadas como ferramentas intelectuais nesta demonstração.

D1:

D2:

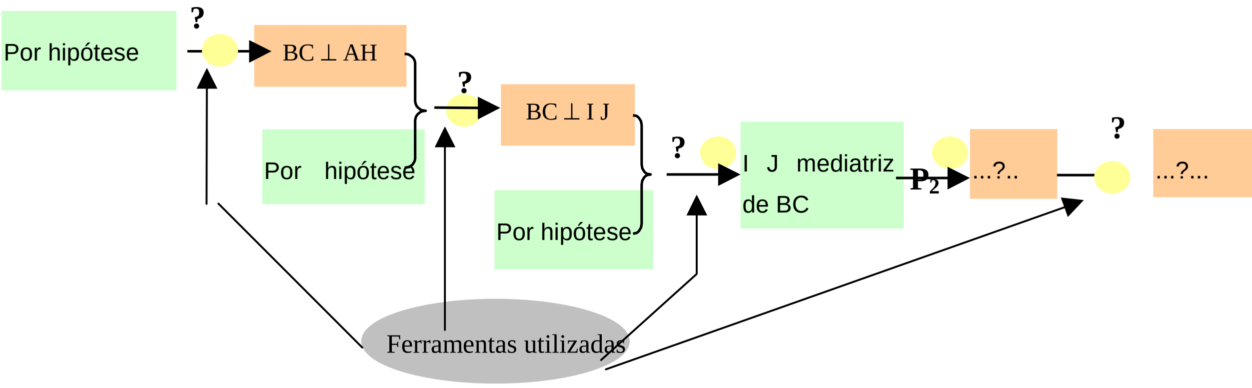
D3:

P1:

P2: Todo ponto da mediatriz de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.

### c) Um esquema da demonstração

Complete o esquema da demonstração.




### d) A redação

Redija esta demonstração.

Qual o interesse (objetivo) para o aluno em se trabalhar um problema com essa estrutura?

Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

## ATIVIDADE 13 - **DEMONSTRAR**

⇒ **O problema:**

*Seja ABC um triângulo e seja I o ponto médio de BC.*

*Seja S o simétrico de I em relação à reta AB e seja T o simétrico de I em relação à reta AC.*

Demonstrar que os segmentos *SB* e *TC* têm o mesmo comprimento.

Quais são os instrumentos que seu aluno precisará para construir a figura?

Qual esquema o aluno utilizará para demonstração?

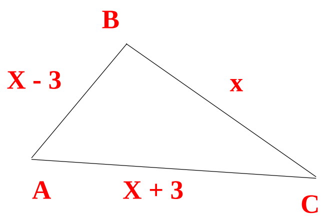
Quais as ferramentas intelectuais que serão úteis para o seu aluno “provar” o problema dado?

Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse tipo de questionamento?

## ATIVIDADE 14 - VERDADEIRO OU FALSO? JUSTIFIQUE.

⇒ **Enunciado**:

a) A medida do lado BC é sempre igual a **terços** do perímetro (X > 3).




( ) Sim

( ) Não

Por quê?

b) Seja o produto 5 x **n**. Se aumenta **n** de 2, o produto aumenta de 7.

( ) Sim

( ) Não

Por quê?

| |
|---|
| Quais dificuldades seu aluno sentirá em reescrever o problema, tornando verdadeira a propriedade **falsa** e tornando falsa a propriedade **verdadeira**? |

| |
|---|
| Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema? |

## Atividade 15 - Debate sobre argumentos

⇒ **O problema:**

Na expressão $n^2 - n + 11$, se substituirmos ***n*** por qualquer número inteiro natural, obter-se-á sempre um número que tem exatamente dois divisores?

Como você pensa organizar a estrutura da classe para que haja um debate entre seus alunos em torno das estratégias de resolução deste problema?

Que valores você vê em situações de ensino em que o aluno é quem vai decidir o que é verdadeiro, o que é falso? No caso, o professor não induz o método, nem o resultado, enquanto a classe é que debate sobre isso. Após o debate é que o professor dirá o que está correto ou não.

Qual o valor pedagógico de se permitir ao aluno fazer surgir suas concepções a partir da “prova”?

Que vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?

***(ANEXO 04)***

*Nome:* ______________________________________________ - *1997*

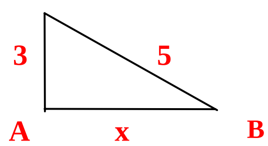
***PÓS-TESTE***

***QUESTÃO 01***

**Isso se vê no desenho?**

⇒ **Enunciado:**

O que se pode dizer da medida do lado **x** do triângulo, sabendo-se que todas as medidas estão na mesma unidade?

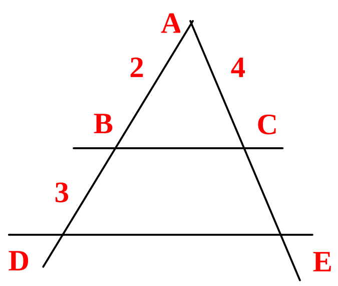


## QUESTÃO 02

***Ser ou não ser?***

⇒ **Enunciado:**

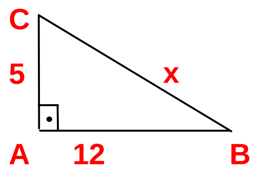
I - Na figura abaixo, tem-se:
AB = 2cm,. BD = 3cm, AC = 4cm
O que podemos dizer da medida do segmento CE?



## QUESTÃO 03

**Isso se vê no desenho?**

O que se pode dizer do comprimento **x** do lado do triângulo, sabendo-se que as medidas estão na mesma unidade?

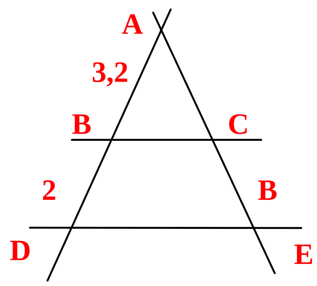


**QUESTÃO 04**

**Isso se vê no desenho?**

As retas BC e DE são paralelas.

O que se pode dizer do comprimento AC, se as medidas estão na mesma unidade?



1 - Pensar de modo padronizado pode levar a erros. Qual a melhor maneira de se evitar isso?

2 - Quando o aluno deve dar respostas memorizadas?

3 - O que dá segurança num enunciado matemático?

4 - Quais vantagens didáticas e matemáticas você vê nesse problema?