CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE POR UMA VISÃO FREQÜENTISTA

Estudo Epistemológico e Didático

MESTRADO: MATEMÁTICA

PUC - SP

1994

CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE

POR UMA VISÃO FREQÜENTISTA

Estudo Epistemológico e Didático

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA** à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da **Professora Tânia Maria Mendonça Campos.**

PUC - SP

1994

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

RESUMO

Este trabalho sobre o ensino de probabilidades é de natureza didática, no sentido utilizado na França atualmente, seguindo os trabalhos de Guy Brousseou: um estudo teórico e aplicado das relações entre o ensino e a aprendizagem em matemática.

Nosso objetivo é estudar as concepções espontâneas ou pré-construídas dos alunos à propósito do acaso e de probabilidades, analisando as seqüências experimentais de introdução a estes conceitos, a partir da observação da estabilização da freqüência relativa de um evento após um grande número de repetições da experiência aleatória.

O objetivo final da escolha freqüentista é, sem dúvida, estender a noção de probabilidade às situações não somente de "casos igualmente prováveis" segundo o enunciado de Laplace em seu segundo princípio, na obra "Ensaio Filosófico de Probabilidades", mas também modelizar as situações complexas tais como as questões de confiabilidade, difusão (epidemias), na pesquisa petrolífera ou no controle estocástico. Como objetivo didático, trata-se de ligar de forma profunda o ensino às condições de aprendizagem nas quais o aluno de hoje está inserido.

Os dados obtidos através de um questionário elaborado com o objetivo de detectar as concepções pré-construídas dos alunos, da aplicação e análise de uma seqüência de ensino elaborada a partir dos resultados deste questionário foram analizados à luz de resultados anteriormente obtidos por outros pesquisadores, tais como S. Maury e J. Bordier, entre outros.

"É essencial convencermo-nos da prioridade da ética sobre a técnica, do primado da pessoa sobre as coisas, da superioridade do espírito sobre a matéria.

Servir-se-á a causa do homem somente se o conhecimento estiver unido à consciência. Os homens da ciência só ajudarão realmente a humanidade se conservarem o sentido da transcendência do homem sobre o mundo e de Deus sobre o homem."

Constituição Apostólica do Sumo Pontífice João Paulo II.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Tânia Maria Mendonça Campos, pelo incentivo para a realização deste trabalho.

Ao Professor Michel Henry, que com sua hospitalidade, amizade, paciência e conhecimento possibilitou que este estudo fosse realizado.

Ao professor Doutor Airton Fontenele Sampaio Xavier, pela preciosa colaboração na redação final do trabalho.

Acima de tudo, ao meu filho e à minha mãe, pela compreensão e apoio ao longo do caminho.

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE

POR UMA VISÃO FREQÜENTISTA

Estudo Epistemológico e Didático

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho tem por objetivo mostrar as vantagens encontradas quando da utilização da visão freqüentista para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade. Procuramos aqui clarificar e desmistificar este conteúdo, mostrando a necessidade de uma mudança no programa atual desenvolvido no Brasil, que explora apenas a visão clássica, pascaliana, que limita-se ao estudo dos casos nos quais existe a eqüiprobabilidade.

A visão aqui proposta, sugerida primeiramente por J. Bernoulli [5], parece-nos mais adequada a um primeiro contato com as probabilidades pois pode utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, uma vez que não precisa estar limitado à hipótese de eqüiprobabilidade.

Desta forma, procuramos organizar uma engenharia didática que nos fornecesse resultados eficientes para este conteúdo dividimos nossa pesquisa em algumas etapas, que tiveram início por uma busca, ao longo da história, aos principais obstáculos epistemológicos, conforme detalhamos no Capítulo I.

No Capítulo II, descrevemos a problemática desenvolvida e a metodologia utilizada, assim como tentamos descrever alguns trabalhos realizados por outros pesquisadores do ensino das Probabilidades. Esta descrição é feita através de pequenas citações de alguns trabalhos importantes nesta área, no que concerne à utilização da visão freqüentista.

Para que pudessemos conhecer as concepções espontâneas dos alunos antes do início da aprendizagem, foi aplicado um questionário no qual deveriam optar entre as diversas situações propostas assim como justificar suas escolhas, pois através desta justificativas é que procuramos identificar as suas concepções. Esta fase do trabalho encontra-se no desenvolvimento do Capítulo III.

A seqüência gerada para aplicação junto alunos franceses, com idades entre 15 e 18 anos, encontra-se no Capítulo IV, onde descrevemos os resultados da observação feita em Janeiro e Fevereiro de 1993, em Besançon, França, em uma escola de Segundo Grau.

Finalmente, no Capítulo V, descrevemos a seqüência realizada no Brasil, no primeiro ano do curso de Fonoaudiologia mantido pela Fundação Lusíada, em Santos.

Como conclusão, podemos dizer que este trabalho nos permitiu verificar o grau de influência que as concepções espontâneas exercem sobre a aprendizagem do conceito de Probabilidades, destacando a importância da fase experimental para colocar os alunos diante de um problema a ser resolvido através da modelização do real, aumentando a motivação para o aprendizado. Desta forma, podemos dizer que a visão freqüentista nos permite destacar a diferença entre modelo matemático e situação real, entre probabilidade e freqüência relative de um evento, ajudando nas possíveis dificuldades para a elaboração de um raciocínio lógico, científico, utilizado para a confecção deste modelo.

CAPÍTULO I:
HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA

HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA

I.1. HISTÓRIA.

Para bem compreender as dificuldades inerentes ao ensino e à aprendizagem do Cálculo de Probabilidades, faremos um pequeno recuo histórico até Platão e sua obra "A República", livro VI, 380a.C., descrevendo o que ele entendia por Geometria:

> *O termo Geometria designa aquilo que, sempre observando o mundo sensível, eleva seu raciocínio ao mundo das Idéias para atingir o conhecimento. Ele engloba as atividades matemáticas de observação do mundo sensível, que se desenrolam no mundo das Idéias.*

Como mundo sensível ele entendia o mundo dos objetos imperfeitos, complexos e mutantes, enquanto que o mundo das Idéias era aquele dos modelos eternos, perfeitos e imutáveis.

Vinte séculos mais tarde, em 1654, Pascal, referindo-se à Probabilidade, denomina-a "GEOMETRIA DO ACASO", afirmando ser:

> *(...)tratado de toda forma novo, de uma matéria absolutamente inexplorada até aqui, a saber: a repartição do acaso nos jogos (...). Assim, juntando o rigor das demonstrações da ciência à incertitude do acaso, e conciliando coisas aparentemente contrárias, ela pode (...) se arrogar com todo direito o título estupefaciente: A Geometria do Acaso.* [11]

A noção de acaso data da História Antiga, tendo sua origem ligada aos jogos de azar, notadamente na civilização egípcia, primeira dinastia, 3500 a.C., certamente com um aspecto lúdico. O desenvolvimento, porém, das idéias que formam a base do desenvolvimento da probabilidade ocorreu bem mais tarde, com Jérome Cardan ("De Ludo Aleae"), Galileu ("Sulla Scoperta dei Dadi") e Fra Luca dal Borgo, que em sua obra publicada em 1494 e intitulada "Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita", enuncia o problema mais tarde resolvido por Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), a quem podemos, de certa forma, atribuir a origem da concepção de Probabilidade. Na carta de 29 de julho de 1654 destinada a Fermat, Pascal descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favoráveis}}{\text{total de casos possíveis}}$$

Nessa carta ele expõe seu método de resolução para o problema das partes, proposto por Chevalier de Méré, homem de letras e filósofo (1607-1684), cujo enunciado, em sua forma mais geral, trata do problema da divisão proporcional de ganhos em um jogo que não chegou ao seu final.

Fortemente influenciado pelos trabalhos de Pascal, Huygens (1629-1695) publica em 1657 um tratado "De rariociniis in ludo aleae", no qual introduz explicitamente e utiliza a noção de esperança matemática. Um dos problemas enunciados em seu trabalho, porém sem a solução, constitui uma primeira versão do problema da ruína dos jogadores.

Antes deles, Jérome Cardan (1501-1576) já utilizava a noção de Probabilidade para estudar jogos de azar. Em sua obra "De Ludo Aleae", publicada em 1663, encontram-se as primeiras citações sobre as regras da adição e da multiplicação (axioma do condicionamento e da independência) e também sobre a regra que podemos interpretar como a primeira avaliação assintótica de uma probabilidade.

A visão freqüentista de Probabilidade foi iniciada por Jacques Bernoulli (1654-1705) em sua obra "Ars Conjectandi"(1713), que aproxima Probabilidade de um evento pela sua freqüência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes:

(...) Assim são conhecidos os números de casos para que seja sorteado de uma urna um cartão branco ou preto, e dizemos que todos são igualmente possíveis, uma vez que é evidentemente determinado e conhecido o número de cartões de cada espécie, e que não vemos nenhuma razão para que este ou aquele deva ser sorteado mais vezes que não importa qual outro. Mas quem então, entre os mortais, definiria, por exemplo, o número de doenças, que são tantos casos; quem tem o poder de invadir as inumeráveis partes do corpo humano na medida que se quiser, e quem tem o poder de nos prever a morte? Quem definirá o quanto é mais fácil a este ou aquele, a peste ou a hidropisia, a hidropisia ou a febre, de aniquilar um homem de modo que a partir disto possa ser formada uma conjectura sobre o estado futuro de vida ou de morte?(...) Mas, na verdade, aqui se oferece a nós um outro caminho para obtermos o que procuramos. Os dados que não nos são oferecidos "a priori" o são ao menos "a posteriori", isto é, será possível extrai-los observando os resultados de numerosos exemplos semelhantes; porque devemos presumir que, em seguida, cada fato pode acontecer ou não acontecer no mesmo número de casos nos

quais foi constatado anteriormente, em um estado de coisas semelhantes (...). [5].

Bernoulli justifica este processo através de uma forma fraca da "Lei dos Grandes Números", conhecida pelo nome de Teorema de Bernoulli, demonstrada na seqüência da obra, e cujo enunciado é o seguinte:

Para evitar a fadiga de uma exposição sem que se aborde diretamente o assunto, chamarei de "fecundos" ou "férteis" os casos nos quais um evento pode se produzir, e "estéreis" aqueles nos quais o mesmo evento não pode se produzir ; da mesma forma, chamarei experiências "fecundas" ou "férteis" aquelas nas quais constata-se que um dos casos férteis pode ocorrer, e "infecundas" ou "estéreis" aquelas para as quais observa-se que um dos casos estéreis se produz. Seja então o número de casos férteis em relação ao número de casos estéreis, precisamente ou aproximadamente na razão r/s , e que seja , em conseqüência, em relação ao número total na razão r/(r+s) *ou* r/t, *admitindo os limites* (r+1)/t *e* (r-1)/t. *É necessário mostrar que se pode conceber experiências em tal número que as tornem mais verossímeis quantas vezes se quiser que o número de observações caia no interior destes limites* *mais freqüentemente que fora deles, isto é, que o número de observações férteis seja, em comparação ao número de todas as observações, uma razão nem maior que* (r+1)/t *nem menor que*(r-1)/t. [5].

Em 1763, Thomas Bayes (1702-1761) escreveu "La Doctrine des Chances", publicada apenas dois anos após sua morte, introduzindo uma nova concepção de Probabilidade, matematicamente idêntica à probabilidade da "Geometria do Acaso" , que depende da análise do observador e da hipótese de equiprobabilidade por simetria. Os métodos bayesianos têm sua origem na idéia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado "a priori" e recalculado em função dessa observação, de onde a classificação de **"subjetiva"**. Note-se bem a diferença entre esta e a concepção de Jacques Bernoulli, dita **"objetiva" ,** uma vez que dependia apenas do número de observações feitas sobre o evento estudado.

A dificuldade maior, tanto para Bayes como para Bernoulli, era a **estimação (e não o cálculo)** das probabilidades elementares associadas aos eventos elementares.

Um dado muito importante na história do desenvolvimento do estudo das Probabilidades é o questionamento sobre a independência entre duas jogadas consecutivas de uma moeda, por Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783):

(...) no curso normal da natureza, o mesmo evento (qualquer que seja ele) ocorre muito raramente duas vezes consecutivas, mais raramente três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas.(1760).

Existe aqui uma confusão entre realidade sensível e modelo matemático, observada principalmente na atribuição do valor 1/3 para a probabilidade de obter "cruz" no lançamento . Vejamos a explicação de D'Alembert no artigo "Croix et Pile", ou seja, "Cruz ou Cunho", atualmente conhecido como o jogo de "Cara ou Coroa", em [10]:

Este jogo, que é muito conhecido , e que não tem necessidade de definição, nos fornecerá as reflexões seguintes. Queremos saber qual a aposta a se fazer para tirarmos "cruz" jogando duas vezes consecutivas. A resposta que encontramos em todos os autores, e seguindo os princípios ordinários, é esta. Existem quatro combinações:

PRIMEIRA JOGADA	*SEGUNDA JOGADA*
cruz	*cruz*
cunho	*cruz*
cruz	*cunho*
cunho	*cunho*

Destas quatro combinações, uma fará perder e três farão ganhar; existem então 3 contra 1 para apostar a favor do jogador que lança a moeda. Se apostamos em três jogadas, encontramos oito combinações, das quais uma fará perder e sete farão ganhar; assim, existirão 7 contra 1 a apostar. Entretanto, isto é exato? Por que tomando apenas o caso das duas jogadas não é necessário reduzir a uma as duas combinações que resultam "cruz" na primeira jogada? Porque, uma vez que temos "cruz" como resultado, o jogo está terminado, e a segunda jogada de nada adianta. Assim, existem propriamente apenas três combinações de possibilidades:

Cruz, primeira jogada

Cunho, cruz, primeira e segunda jogadas

Cunho, cunho, primeira e segunda jogadas.

Logo, existem apenas 2 contra 1 para apostar (...). Isto é digno, me parece, da atenção dos calculistas, e irá reformar as regras unanimemente reconhecidas sobre os jogos de azar.

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, Marquês de Condorcet (1743-1794), tentou utilizar as técnicas probabilistas na tentativa de fundar uma Matemática Social quando, em 1785, publicou "Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Decisions Rendues à la Pluralité des Voix", onde escreve:

> *Ver-se-á quanto, se esta ciência for mais divulgada, mais cultivada, ela contribuirá para a felicidade e para o aperfeiçoamento da raça humana.*

Continuamos nosso estudo temporal com Pierre-Simon Laplace (1749-1827), e suas obras "Teoria Analítica da Probabilidade" (1812), "Ensaio Filosófico sobre Probabilidade" (1825), entre outros trabalhos, que colocam a Probabilidade definitivamente no quadro matemático. Laplace acreditava num determinismo absoluto: "*uma coisa não pode começar a ser sem uma causa que a produza*", e afirma que ***"a probabilidade é relativa em parte à nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos"***.

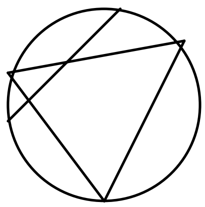
Ele desenvolveu seu modelo matemático baseando-se em dez princípios dispostos como axiomas e definições, traduzindo sua visão "pascaliana", e, utilizando os dois primeiros, corrigiu o exercício de D'Alembert , "cruz ou cunho" com dois lançamentos. Vejamos então os dois princípios:

> *<u>Primeiro princípio</u>: (a probabilidade) é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.*

<u>Segundo princípio</u>: mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o são, determina-se primeiro suas possibilidades respectivas, cuja justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria do acaso. Então, a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável.

Em seu sexto princípio, Laplace reflete sobre as probabilidades condicionais e enuncia a fórmula impropriamente devida a Bayes. Com Laplace e sua "Teoria Analítica da Probabilidade", tem impulso o desenvolvimento do cálculo probabilístico que, no entanto, se deparou com os mesmos paradoxos já existentes além de outros novos devidos à larga utilização, pelos matemáticos, do infinito e das passagens ao limite sem embasamento suficiente. Citamos, por exemplo, o problema proposto por Joseph Bertrand(1822-1900), cujo enunciado é o seguinte:

Escolhemos uma corda de circunferência ao acaso. Qual a probabilidade que seu comprimento seja superior ao comprimento do lado do triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência?



Segundo René Thom (1923-   ), no seu prefácio à obra de Laplace "Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades", Laplace se aproveitou do espírito de uma certa abertura social, em parte devido ao fenômeno da Revolução Industrial, para mostrar que, mesmo no domínio das ciências "morais", a matemática poderia servir a qualquer coisa. Condenando a imoralidade dos jogos de azar e loterias, vê-se na necessidade de introduzir para todo indivíduo uma esperança moral, diferente da esperança matemática, suscetível de determinar suas escolhas.[21]

Henri Poincaré (1854-1912) deu ao conceito de acaso um enfoque moderno, ligando-o à complexidade dos fenômenos observados, sem contudo, tentar mudar os instrumentos fundamentais do Cálculo das Probabilidades.

Citamos aqui o que ele escreve sobre o equilíbrio do cone, evidenciando a limitação do determinismo de Laplace:

> *Se um cone repousa sobre sua ponta, nós sabemos que ele vai tombar, mas não sabemos para que lado; nos parece que somente o acaso vai decidir.[29]*

Segue esta afirmação fazendo uma avaliação sobre todas as variáveis que podem influir: a simetria do cone em relação ao seu eixo, causas aleatórias como uma trepidação muito ligeira ou um sopro de ar. São todas causas muito pequenas, que nos escapam, mas que determinam um efeito considerável que não pode passar despercebido, e, então, dizemos que este efeito é devido ao acaso (que assim, é mais que a medida de nossa simples ignorância).

Émile Borel (1871-1956) forneceu uma das primeiras contribuições à axiomatização do Cálculo das Probabilidades com sua obra "Le Hasard" em 1914. Em suas diversas obras sobre o assunto, retoma numerosas considerações epistemológicas sobre a noção de Probabilidade, assim como discorre sobre inúmeras aplicações. Com a publicação da obra de John Maynard Keynes (1883-1946), "A Treatise on Probability" (1921), Borel resume estas concepções em uma análise deste livro, publicada em "Revue de Philosophie". Destacamos que tanto Borel quanto Keynes tratam de uma probabilidade subjetiva, segundo nos destaca Maurice Fréchet em [15]. Podemos observar um enfoque de probabilidade na forma mais objetiva , sob uma forma breve e simplificada, no trabablho desenvolvido por Fréchet, notadamente desenvolvendo a integração sobre conjuntos abstratos, baseado nos trabalhos de Lebesgue.

Citamos também a teoria de von Mises, que aproxima a noção de probabilidade à de freqüência experimental, dentro de sua teoria dedutiva, e supõe essencialmente a probabilidade defenida como limite de freqüências.

No que concerne à obra de Henri Lebesgue (1875-1941), a elaboração de uma Teoria de Integração fundamentada pela Teoria das Medidas de Borel colocou a Análise Matemática em uma perspectiva revolucionária, mesmo que Lebesgue não tenha desenvolvido suas conseqüências e aplicações à Teoria das Probabilidades.

Finalizamos com a teoria de Andrei Kolmogorov (1903-1987), que dá uma apresentação axiomática à teoria das Probabilidades, colocando-a no quadro da Teoria dos Conjuntos e tornando-a mais clara em suas limitações (1933). No plano matemático, Kolmogorov percebeu que seria possível, através da associação de **probabilidade e medida,** utilizar todo o arsenal de resultados conhecidos neste domínio (devidos a Borel e Lebesgue) e, por outro lado, relegar à etapa das aplicações o difícil problema da relação com o real. No prefácio de sua obra ele destaca que seu objetivo é explicitar e sistematizar o conjunto de axiomas que já estavam sendo utilizados, embora de forma implícita, pela maioria dos teóricos contemporâneos do Cálculo de Probabilidades.

I.2. EPISTEMOLOGIA.

Analisando a evolução histórica da formação do conceito de Probabilidade podemos observar fatos muito importantes:

- a dificuldade na escolha adequada de um modelo matemático para expressar sua ligação estreita com o mundo real, o mundo sensível, tal como a Geometria. Segundo Michel Henry, em [19], *a dificuldade de* *um problema de probabilidade reside na construção do modelo adequado a partir de dados de observação;*

- a dificuldade provocada pela falta de um suporte matemático adequado, evidenciada nos estudos anteriores ao trabalho de Kolmogorov;

- a dificuldade na resolução de questões envolvendo o caráter subjetivo ou objetivo da Probabilidade;

- a dificuldade pela complexidade de certos problemas da lógica combinatória.

A estas dificuldades chamamos **obstáculos epistemológicos**, segundo os termos de Guy Brousseau [8]:

> *(...) os obstáculos de origem propriamente epistemológica são aqueles dos quais não podemos nem devemos fugir, devido ao seu papel construtivo no conhecimento visado.(...)*
>
> - *os obstáculos em questão são verdadeiramente identificados na história da Matemática;*

- *seu vestígio é encontrado nos modelos espontâneos dos alunos;*
- *as condições pedagógicas de sua transposição ou sua rejeição são estudados com precisão de modo a propor aos professores um projeto didático preciso.*

Estes obstáculos, quando não trabalhados adequadamente, podem reforçar as concepções errôneas dos alunos. Por exemplo, o difícil caráter subjetivo da probabilidade, definido por Bayes vem, muitas vezes, reforçar a concepção errônea de que a probabilidade de um evento depende das informações obtidas sobre esse evento, ou seja, das informações obtidas pelo observador (observações diferentes geram probabilidades diferentes para um mesmo evento).

Observemos também a dificuldade encontrada por D'Alembert em separar uma informação objetiva relativa ao evento observado, de tal forma a situar-se em um outro modelo probabilista, integrando-a de forma dependente das faculdades do observador. Destaca-se aqui a necessidade da escolha do modelo matemático adequado.

Reproduzindo um parágrafo da tese de Jacques Bordier [6], pp19, podemos concluir este estudo do desenvolvimento temporal da Probabilidade:

Este breve resumo da evolução histórica da Probabilidade destaca muitas das dificuldades previsíveis no seu ensino. Se os matemáticos que contribuíram com a criação e o desenvolvimento da teoria tiveram certa dificuldade de ver claramente, podemos presumir, sem grande risco de erro, que acontecerá o mesmo com alunos e professores. No entanto, a análise retrospectiva destas dificuldades podem nos ajudar a definir uma forma de ensino que leve isto em conta.

ESQUEMA CRONOLÓGICO.

Cardano (1547)

↓

Pascal e Fermat (1654)

↓

Huygens (1657)

↓

Jacques Bernoulli (1713)

↓

Bayes (1763) e D'Alembert (1760)

↓

Condorcet (1785)

↓

Laplace (1825)

↓

Poisson (1781-1840) e Bienayme (1796-1878)

↓

Lebesgue (1901)

↓

Poincaré (1902)

↓

Borel (1909)

↓

Von Mises (1919) e Keynes (1921)

↓

Kolmogorov (1933)

CAPÍTULO II:

OBJETIVO, REFERÊNCIAS E METODOLOGIA

OBJETIVO, REFERÊNCIAS E METODOLOGIA.

II.1. OBJETIVO

.

Nosso trabalho tem como objetivo **investigar como se dá a aquisição dos primeiros conceitos de Probabilidade utilizando a visão freqüentista** proposta, como vimos em I.1., por Jacques Bernoulli e, mais recentemente, retomada por alguns pesquisadores do ensino da Matemática.

II.2. REFERÊNCIAS.

Citamos primeiramente M.Henry [19], que desenvolve estudos sobre a implantação do novo programa de Matemática para a segunda série do segundo grau do ensino francês. Reproduz o pensamento de Alfred Rényi (1966), segundo o qual "*probabilidade de um evento é o número ao redor do qual oscila a freqüência relativa desse evento considerado",* assim como Hélène Ventsel (1973), para quem "*caracterizar a probabilidade de um evento como um número qualquer significa atribuir a esse número um valor e uma significação que não pode ser outra que não a de freqüência relativa desse evento*".

Ainda em [19], M. Henry exibe exemplos que mostram com clareza que a relação **Probabilidade-Freqüência** pode ser estabelecida muito simplesmente e que, em uma população na qual existe uma proporção **p** de indivíduos com uma propriedade que os distinga dos demais, a visão freqüentista torna-se, a este nível, muito mais próxima da noção pascaliana nos casos onde os extratos populacionais são conhecidos. Pela visão freqüentista teremos:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{indivíduos com característica A}}{\text{número total de indivíduos}}$$

Citamos também os trabalhos de A.Rogerson [31], que fez um estudo de como aproximar o ensino do cálculo das probabilidades às situações do dia-a-dia dos alunos e, sem utilizar o termo "freqüentista", dá algumas sugestões de análise de séries estatísticas para a introdução do conceito de Probabilidade.

Com uma análise semelhante à de A. Rogerson, Maria Cristina S. A. Maranhão [24] detalha o ponto de partida deste ensino, afirmando que

> *para iniciar o trabalho com **Espaço Amostral-Eventos e Regularidade Estatística-Probabilidade**, deve-se partir da diferenciação entre os conceitos de fenômeno aleatório(...). Por isso propomos que, no início, o professor procure exercícios em que os Espaços Amostrais sejam finitos e equiprováveis. É*

> *bom que esses trabalhos sejam executados com dados experimentais que devem ser tratados como dados estatísticos: convenientemente registrados e contados, obtidos de experiências ligadas aos interesses dos alunos(...).*

Gottfried E.Noether [28] também utiliza a visão freqüentista para ensinar estatística não paramétrica. Segundo ele, *quando falamos da probabilidade de um evento, o que temos em mente é este valor limite da freqüência relativa*.

Muito significativo também é o trabalho de J.Bordier [6], que apresenta um laboratório para o ensino da Probabilidade com auxílio do computador, partindo da constatação de que alunos considerados fortes em Matemática encontravam todo tipo de dificuldade para compreender o sentido da aplicação do cálculo de probabilidades. Sua hipótese era que a interação com o computador, desestabilizando os modelos mentais, permitiriam aos usuários do laboratório uma construção mais fiel da realidade. Interessa-nos particularmente o capítulo V de sua tese, no qual propõe três etapas para o ensino desse tema:

1. identificação das concepções dos alunos;
2. elaboração de situações didáticas que permitam ao aluno construir uma ciência experimental da probabilidade;
3. formalização da teoria experimental.

Na elaboração de um questionário para a identificação das concepções dos alunos, J. Bordier seguiu as seguintes recomendações, que serão também seguidas em nosso trabalho:

- as questões devem ser direcionadas para as representações espontâneas da probabilidade e não sobre problemas que exijam habilidades lógicas ou matemáticas particulares. Elas devem propor ao aluno situações que o levem a fazer uma escolha entre diversas possibilidades;

- deve-se pedir que o aluno comente suas respostas indicando o que o levou a fazer determinada escolha, sem necessidade de justificações matemáticas para tal.

Citaremos, para finalizar, a contribuição de S. Maury [26], que trabalhou a partir da necessidade de estudos que permitissem uma melhor evidenciação dos problemas conceituais e didáticos devidos às noções de Probabilidade e de capacidade combinatória, assim como um melhor conhecimento das aquisições - espontâneas ou não - dos alunos. Para isto, realizou a análise exaustiva de uma enquete composta por questões que visavam as concepções dos alunos quanto ao acaso, preocupando-se com as performances e os argumentos de jovens do primeiro ano de Psicologia e de Ciências Exatas nas universidades francesas, assim como de jovens de primeiras e terceiras séries do segundo grau francês, opção Letras e opção Científico. Essa prova era constituída de oito exercícios que abrangiam quantificação de probabilidade, noção de independência e probabilidade condicional, e, em sua análise, S.Maury considera diversos tipos de parâmetros tais como o contexto, o vocabulário, a idade e o nível escolar.

Uma constatação que nos parece importante é que as respostas dos alunos para questões de probabilidades são influenciadas pela sua formulação e pelo contexto, evidenciando que sem uma intervenção didática apropriada, a aprendizagem da Teoria das Probabilidades tornar-se-á muito difícil para os alunos.

Uma vez que já conhecemos, a este momento, os principais obstáculos epistemológicos do ensino do Cálculo das Probabilidades apresentados em I.2., assim como alguns trabalhos já desenvolvidos na área de ensino, vamos procurar informações na psicologia cognitiva que possam nos auxiliar. Lembramos, porém, que os obstáculos epistemológicos devem, primeiramente, ser superados pelo professor, o que muitas vezes não é tão natural quanto para o aluno devido à sua bagagem cultural.

O primeiro e mais importante trabalho que aparece deve-se a Piaget e Inhelder (1952) que, estudando a natureza e as condições da gênese das idéias de acaso e probabilidade elementar, colocam em evidência uma estreita relação entre a formação destes conceitos e as operações formais já estudadas por Piaget. Assim:

- no estado sensori-motor (4 a 7 anos aproximadamente) a criança não está "pronta" para comparar as chances de ocorrência de diversos eventos aleatórios. Elas não possuem, ainda, nenhuma medida intuitiva de probabilidade;

- no estado das operações concretas (7 a 11 anos aproximadamente) a criança já tem capacidade para estabelecer certos tipos de comparações entre as probabilidades recíprocas de eventos. Existe a diferenciação entre as operações (associadas ao domínio do dedutível) e o acaso (associado ao domínio do imprevisível);

- no estado das operações formais (11-12 anos em diante) já existe na criança uma assimilação do acaso às operações formais e aparece o julgamento de probabilidade, a construção dos sistemas de combinatória, permitindo determinar o conjunto de casos possíveis e o acesso ao raciocínio proporcional.

Diretamente ligados ao prolongamento dos trabalhos de Piaget, Nassefat (1963) e Longeot (1969) mostram em suas conclusões as falhas desses trabalhos quando estudam crianças maiores, baseados em grandes amostras. Nassefat coloca em evidência a existência de um patamar intermediário dentro do desenvolvimento genético, conhecido pelo nome de estado pré-formal, e de uma compatibilidade entre a ordem quantitativa das dificuldades e a ordem genético-concreta, intermediário formal.

Todos os resultados obtidos por Fischbein (1971 e 1991) convergem para um encorajamento de um ensino precoce de probabilidades e afirma:

> *A evolução mental prepara, na realidade, unicamente uma série de potencialidades. Sua valoração efetiva pode ser realizada apenas por um exercício sistemático, de longa duração, ao longo destes estados de evolução intelectual.*(1971).

Deixa claro também a necessidade de uma pesquisa sobre concepções pré-construídas:

> *O desenvolvimento cultural, conjunto de currículos existentes concernentes a outros domínios, o nível sócio-econômico da população, a filosofia atrás da metodologia didática, etc., pode ter um certo impacto na receptividade da criança para o respectivo tópico.*(1991).

Finalmente, citaremos Tversky e Kahneman (1971), que em seus trabalhos observaram que as concepções errôneas podem persistir nos indivíduos mesmo após adquirirem noções básicas sobre probabilidades. Numa enquete realizada junto a pesquisadores de psicologia cognitiva, eles mostram que o conhecimento formal e/ou o hábito de utilizar técnicas matemáticas não têm por efeito a modificação das concepções espontâneas dos alunos.

Existem outros trabalhos publicados sobre o ensino das Probabilidades, mas nosso estudo tomará como base os de M. Henry, que partem de uma compreensão do espírito dos programas de segunda série de segundo grau francês, os quais determinam uma visão frequentista da Probabilidade, evitando porém, qualquer desenvolvimento teórico. Segundo o Boletim Oficial publicado na França em 2 de maio, temos:

> *Durante o primeiro grau e a primeira série do segundo grau os alunos estudaram a descrição de séries estatísticas de uma variável. O programa para os segundos anos S e E (científicos) comporta um primeiro contato com as probabilidades. O objetivo é preparar o aluno para descrever algumas experiências aleatórias simples e calcular as probabilidades. Evite-se todo o desenvolvimento teórico. Para introduzir a noção de probabilidade a base de apoio será o estudo das séries estatísticas*

obtidas pela repetição de uma experiência aleatória, sublinhando as propriedades das freqüências e a relativa estabilidade da freqüência de um evento dado, quando esta experiência é repetida um grande número de vezes. A descrição de experiências aleatórias leva também à organização dos dados: limitar-se-á a alguns exemplos permitindo uma valoração das idéias, mas não comportando dificuldades combinatórias.

II.3. METODOLOGIA.

II.3.1. Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa.

A estrutura do ensino francês é, de certa forma, muito parecida com a brasileira, conforme o quadro abaixo:

Quadro I

Idade (aprox. em anos)	**BRASIL**	**FRANÇA**
7 a 10 anos	1a. a 4a. série do 1° grau	CM1 e CM2 (Ècole Primaire)
11 anos 12 anos 13 anos 14 anos	5a. série do 1° grau 6a. série do 1° grau 7a. série do 1° grau 8a. série do 1° grau	6ème - Collège 5ème - Collège 4ème - Collège 3ème - Collège
15 anos 16 anos	1a. série do 2° grau 2a. série do 2° grau	Seconde - Lycée Première - Lycée

17 anos	3a. série do 2º grau	Terminales - Lycée

A diferença básica é que, terminada a primeira série do segundo grau francês, o aluno opta pelo tipo de curso que mais se adapte a sua vocação e capacitação. Para cursar a série subseqüente tem as seguintes opções: Letras, Economia, Científico, Tecnologias Industriais e Administração, sendo que cada uma delas ainda se subdivide em campos mais específicos, de acordo com as áreas de concentração.

Tendo em vista estas semelhanças, nosso trabalho tem início com a aplicação de uma engenharia didática para o ensino do conceito de Probabilidade junto a alunos do segundo grau francês para, em seguida, estudar a aplicação desta mesma engenharia em alunos da primeira série do terceiro grau no Brasil, na cadeira de Estatística. Para tanto, procuramos seguir as etapas propostas por M.Artigue [3] para uma metodologia de pesquisa:

> *A engenharia didática, vista como uma metodologia de pesquisa, se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental, baseado em realizações didáticas em classe.*

Essa concepção de engenharia nos faz passar por escolhas macro-didáticas ou globais, que orientam o conjunto de trabalho. No nosso caso, são três:

- construção dos primeiros conceitos de estabilização de freqüência relativa, por meio de atividades práticas comparativas, tais como o lançamento de uma moeda duas vezes consecutivas e o lançamento de um percevejo;

- busca de modelos matemáticos que visem uma resolução qualitativa com objetivo de atingir conhecimentos mais complexos, aplicados à área de atividade do público ao qual é dirigido o ensino. No nosso caso, alunos de primeiro ano do curso de Fonoaudiologia;

- a limitação da complexidade ao nível da Análise Combinatória.Com isto queremos dizer que os problemas por nós selecionados comportarão apenas os problemas de contagem que possam ser ssolucionados pelo aluno com auxílio de uma árvore de possibilidades, sem a necessidade de raciocínios que possam aumentar a dificuldade do problema em questão, desviando a atenção do aluno do objetivo principal, que é a aquisição e aplicação dos primeiros conceitos de probabilidade.

Assim, após uma análise do nosso objeto de ensino sob um plano epistemológico, feita em I.2., e da definição de um projeto de renovação segundo o qual fizemos, logo acima, nossas escolhas globais, passaremos à fase seguinte, que é uma análise dos entraves existentes, em seus três aspectos:

- entraves de natureza epistemológica, ligados ao saber matemático em jogo, às características de seu desenvolvimento e de seu funcionamento atual. Em relação ao ensino da Probabilidade, o longo domínio da visão pascaliana, ou seja, a definição de Probabilidade de um evento como sendo "a razão entre o número de realizações favoráveis e o número de realizações possíveis";

- entraves de natureza cognitiva, ligados ao público visado pelo ensino. No nosso trabalho, podemos levantar dois tipos de entraves cognitivos: o fato de que este ensino é destinado a jovens que ainda não dominam a linguagem da Teoria dos Conjuntos e a resistência, por parte destes mesmos jovens, ao trabalho com números decimais ou fracionários, uma vez que na realidade brasileira a calculadora eletrônica ainda não é utilizada no ensino de segundo grau e é pouco utilizada em cursos do terceiro grau que não sejam da área das Ciências Exatas;

- entraves de natureza didática, ligados ao funcionamento institucional do ensino, notadamente do domínio concernente, ou seja, no Campo

Conceitual a ser trabalhado, e domínios conexos, ouseja, os domínios interligados a serem utilizados como ferramentas para o aprendizado. Aqui também temos dois tipos de entraves: a necessidade de que o professor crie situações a-didáticas adequadas e a dificuldade de encontrar-se uma bibliografia que adote a visão freqüentista como ponto de partida para o ensino do cálculo das Probabilidades.

Todos estes fatores justificam nossa escolha no que diz respeito à metodologia de trabalho conforme detalhamos anteriormente, e mostram a relevância de uma pesquisa que busque uma desmistificação do ensino do cálculo de Probabilidades através de uma clarificação de sua aplicabilidade nas diversas áreas e profissões.

Assim, faz-se necessário que o professor conheça as concepções que os alunos já possuem sobre o assunto, concepções essas que são consequência da vivência de cada um desses alunos, assim como é necessário o conhecimento das concepções do próprio professor. Também se faz necessário que o professor conheça, e transmita aos alunos, a importância da estatística e da probabilidade no mundo atual. Acreditamos que os professores consideram a "organização de dados estatísticos" como o item mais fácil e menos importante do programa, conforme [1].

Os instrumentos por nós utilizados nesse trabalho foram: um questionário para levantamento das concepções pré-construídas, observações de seqüências de ensino elaboradas com base nos resultados obtidos pelo questionário, um teste para verificação dos conhecimentos adquiridos.

II.3.2. O Questionário.

Para investigarmos a aquisição das primeiras noções de Probabilidades utilizando a visão freqüentista, servimo-nos de um questionário elaborado com base nos trabalhos de J.Bordier e S.Maury. O objetivo, nessa fase, era levantar os conceitos pré-construídos pelos alunos e, assim, identificar as concepções errôneas para que pudessem ser devidamente trabalhadas. Este questionário foi respondido pelos alunos antes que recebessem qualquer aprendizagem sobre Probabilidades.

Em uma primeira etapa, na cidade francesa de Besançon, foi aplicado em alunos da segunda série do segundo grau, com idades entre 15 e 18 anos:

- o primeiro grupo, constituído por 24 alunos, respondeu em casa sem qualquer indicação do tempo dispendido nessa atividade;

- o segundo grupo, constituído por 17 alunos, respondeu em sala de aula, na presença do professor, indicando o tempo dispendido nessa atividade.

Em uma segunda etapa, na cidade de Santos, Brasil, um questionário análogo foi respondido por 34 alunos com idades entre 17 e 19 anos, cursando a primeira série do terceiro grau, curso de Fonoaudiologia, em sala de aula.

Quadro II

Idade (anos)	**Brasil**	**França**
15	—	2
16	—	31
17	5	6
18	15	2
19	14	—

II.3.3. Observação da Seqüência de Ensino com Alunos Franceses.

Com base nos resultados obtidos pela aplicação do questionário, pudemos elaborar, juntamente com os professores das classes participantes, uma seqüência de ensino que partisse da visão freqüentista para a compreensão do conceito de Probabilidade. Esta seqüência, dividida em três sessões de duas horas cada, consistiu em um trabalho para a correção das concepções errôneas identificadas e da construção, partindo de dados experimentais obtidos pelo próprio aluno, desse conceito como sendo a freqüência limite de um evento. Foram realizadas e analisadas várias experiências aleatórias com esse objetivo.

As sessões foram administradas pelos próprios professores, cabendo-nos realizar, juntamente com M.Henry, as observações dos fatos ocorridos durante as mesmas, realizando pequenas intervenções, sempre que necessárias.

II.3.4. Observação da Seqüência de Ensino com Alunos Brasileiros.

Com base nos resultados dos questionários, mas também aproveitando a experiência junto a alunos franceses, elaboramos uma seqüência a ser aplicada por nós e observada por um professor da área. A duração foi também de seis horas, divididas em três etapas de duas horas cada, porém com um número menor de atividades experimentais. Limitamo-nos apenas ao lançamento de duas moedas para a observação do número de caras e ao lançamento de um percevejo, para a observação do número de vezes que ele se imobilizava com a ponta tocando o solo.

- <u>As duas seqüências compunham-se primeiramente de uma parte experimental, seguida pela discussão conjunta sobre as respostas dadas no questionário, para em seguida, ser feita a institucionalização dos conceitos aprendidos.</u>

II.3.5. Teste Para Verificação dos Conhecimentos Adquiridos.

Para os dois grupos de alunos, tanto franceses quanto brasileiros, foi aplicado um teste que tinha por objetivo verificar a correção ou não das concepções errôneas identificadas pelo questionário, como conseqüência da seqüência de ensino aplicada. Este teste constava de cinco questões dissertativas conceituais, ou seja, não visavam verificar técnicas operatórias mas sim utilização dos conceitos institucionalizados em situações determinadas, assim como verificar se o aluno sabe descrever uma experiência aleatória e seu espaço amostral.

CAPÍTULO III:
O QUESTIONÁRIO

O QUESTIONÁRIO

III.1. ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO

Seguindo as hipóteses apresentadas por J. Bordier e S. Maury, M. Henry elaborou dez questões que objetivavam verificar o que os jovens com idades entre 15 e 18 anos pensavam sobre o **acaso** e quais as concepções já existentes sobre **probabilidades e suas aplicações**. Tinha em vista que

> *em probabilidades, as concepções espontâneas se exprimem em um contexto no qual o irracional não está ausente, principalmente quando são colocados problemas sobre predição.*[18]

Esse questionário foi aplicado em duas classes de segunda série do segundo grau científico do "Lycée Polyvalent Claude Nicolas LEDOUX", na cidade de Besançon, França.

Para que se pudessem obter dados mais significantes de acordo com os objetivos traçados, os alunos foram informados que não havia respostas certas ou erradas. Desta forma, poderiam expressar realmente suas idéias, sem a preocupação de satisfazer às expectativas de outros, ou seja, procurar a resposta que seu professor, e não necessariamente o próprio aluno, julgasse correta.

As questões apresentadas continham sempre duas etapas: na primeira, o aluno deveria escolher uma entre as opções apresentadas e na segunda, justificar sua escolha. Essa parte era, para nós, muito importante, à medida que evidenciava as possíveis contradições existentes no raciocínio do jovem, permitindo-nos identificar o real conceito que ele possuía sobre **acaso** e **probabilidade**.

A única questão que fugia a esse modelo era a de número "dez", de resposta facultativa, que buscava mais uma posição filosófica do que uma concepção. Note-se que apenas um aluno não respondeu a esta pergunta.

III.2. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

- **Questão 1:** *Em uma urna A existem numerosas bolas, azuis e vermelhas. Tira-se uma bola ao acaso, recolocando-a na urna e* *misturando-a às demais. Repete-se esta experiência 100 vezes. Entre as 100 bolas tiradas e recolocadas, observam-se 60 bolas vermelhas e 40 azuis. Tira-se uma nova bola após agitar bem o conteúdo da urna.*

1. Como você interpreta as palavras "ao acaso" deste enunciado?

2. A informação dada: "sobre 100 bolas, obtém-se 60 vermelhas e 40 azuis" é útil par fazer uma predição sobre a próxima bola a ser sorteada?

sim☐ *não*☐

3. Com qual frase você concorda mais?

a) Sendo as bolas misturadas dentro da urna, a próxima bola será sorteada ao acaso, não se podendo prever com certeza a sua cor.

b) Todas as bolas têm a mesma chance de sorteio. A probabilidade de ter uma bola vermelha é igual à proporção de bolas vermelhas na urna.

c) Na falta de informação precisa sobre a composição da urna, uma bola vermelha tem tantas chances de ser sorteada quanto uma azul.

d) Pelas experiências precedentes, existem 6 chances em 10 de tirar uma bola vermelha.

Quais são as outras frases com as quais você também concorda?

Esperávamos, nessa questão, bem identificar o que os jovens pensavam sobre o acaso e sua interferência em acontecimentos próximos.

A comparação entre as respostas dadas pelos alunos nos itens 2 e 3 ajudaram-nos a identificar contradições no raciocínio desenvolvido por eles.

Não foi notada nenhuma diferença significativa entre as respostas dos dois grupos analisados. Entre os 41 alunos respondentes, para 35 deles, as palavras "ao acaso" significam "sem intervenção" enquanto que para os demais, significam "sem poder prever o resultado".

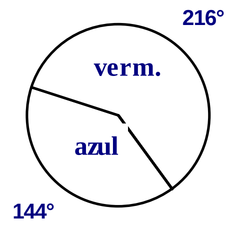
No segundo item temos 34 alunos afirmando que a informação dada não é útil para uma predição, isto é, para que se possa saber o próximo resultado. Esta taxa é confirmada no item seguinte, onde 9 desses alunos indicam a frase (d) como sendo a com que mais concordam, 25 indicam a frase (c), o que já nos fornece indícios sobre a existência da concepção errônea que afirma que "na falta de informações, todos os eventos são equiprováveis", concepção essa já citada em I.2., segundo a qual a probabilidade de um evento pode ser alterada pelas informações obtidas sobre esse evento. Queremos deixar claro aqui que estamos falando de informações com outras bases que não a repetição do experimento um número muito grande de vezes, que é a base do enfoque freqüentista.

Alguns alunos apresentaram atitudes contraditórias nessa questão ao afirmar que "a informação dada não é útil para fazer uma predição" e assinalar, em seguida, a frase (d) como sendo a que julgavam mais correta, ou ao afirmar que "a informação não é útil para fazer uma predição" e não assinalar a frase (d). Citamos como exemplo a resposta da aluna Sandrine, 16 anos, que após optar pelo "não", escolhe a frase (b), "todas as bolas têm a mesma chance de sorteio", e, ao escolher as outras frases com as quais também concorda, escreve que *pode ser a (d).*

Outro exemplo está na resposta do aluno Jean-Philippe, que após optar pelo "sim", afirma concordar com a frase (b) e com nenhuma outra mais.

Destacamos também alguma opções por sentenças contraditórias entre si. Vejamos a resposta dada por Nejma, que assinalou as sentenças (b) e (d), quando cada uma delas indicava um tipo oposto de raciocínio, uma pela importância das informações anteriores para a previsão do próximo resultado e outra pela igualdade de chances de todas as bolas. Na mesma linha está a resposta dada por Valérie, que escolheu a frase (c) em primeira opção, ou seja, demonstra acreditar que a ausência de uma informação precisa leva à equiprobabilidade para, em seguida, indicar a frase (d), que justamente considera as informações anteriores como influenciando os próximos resultados.

- **Questão 2:** *Dispondo-se de uma outra urna B contendo 3 bolas vermelhas e 2 azuis, e de uma "roleta" C, dividida em dois setores, um vermelho e um azul, como indica a figura seguinte:*

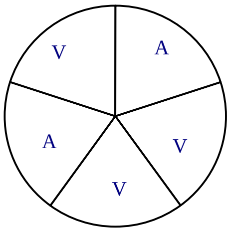


Para obter a cor vermelha com as melhores chances possíveis, qual instrumento você utilizaria:

a) a urna A ☐ *b) a urna B* ☐ *c) a urna C* ☐

Explique sua escolha.

Se você tivesse a roleta D seguinte:



você daria preferência a ela ao invés da roleta C para obter vermelho com as melhores chances?

sim ☐ *não* ☐ *são semelhantes* ☐

Explique sua resposta.

Ainda buscando a noção de **acaso** para o aluno, essa questão pesquisa também o conceito de proporcionalidade para verificar se os alunos acreditam que a disposição dos elementos a serem sorteados alteram a chance de sorteio. Não encontramos diferenças significativas entre os dois grupos (respostas em classe/respostas em casa). De um total de 41 alunos que responderam a esta questão, 37 deles, escolheram a urna B e/ou a roleta C e, pelas suas justificativas, parecem compreender que as chances são as mesmas nos dois casos. No entanto, quando apresentamos a roleta D, 19 alunos, mudam de opção, acreditando que um número maior de "zonas" vermelhas, embora na mesma proporção anterior, oferecem melhores chances. As justificativas aqui mostram mais uma escolha intuitiva do que uma análise lógica, como podemos observar na resposta de Stéphanie, 16 anos:

> *(...) Se reagruparmos os ângulos por cores, obteremos 216° e 144°, como na roleta C. A diferença pode ser o fato de que não estão reagrupados. Então podemos ter maiores chances de cair sobre o vermelho.*

Um exemplo de resposta não baseada em qualquer raciocínio matemático é dado por Sandrine, 16 anos, quando afirma, a título de conclusão, que *dividida, a roleta parece menos perigosa*.(grifo nosso). Esta resposta pode ser explicada pelo fato de que, para o aluno, é mais fácil interpretar uma situação que envolva uma variável discreta, como nos mostra a roleta D, do que uma situação com outra variável que possa ser classificada como contínua, como é o caso da roleta C.

Como ilustração de uma boa resposta, ou seja, de uma resposta baseada em um raciocínio lógico, temos a explicação dada por Sophie, 16 anos, que afirma *existirem também 3 chances em 5 para obtermos o vermelho e a disposição das porções não influencia as chances.*

- **Questão 3:** *Da urna B tiram-se 5 bolas (repondo e agitando a cada sorteio). Em qual seqüência você apostaria?*

a) vermelha, vermelha, vermelha, vermelha, vermelha. ☐

b) vermelha, vermelha, azul, vermelha, vermelha. ☐

c) as duas seqüências têm a mesma chance. ☐

Esta questão tinha por objetivo pesquisar a aplicação da noção de proporcionalidade pelo aluno. Esperávamos que ele pudesse perceber que devido a composição da urna as bolas vermelhas teriam maior chance de ocorrência, sendo portanto mais adequada a opção (a).

Confirmamos porém as observações feitas na questão anterior, ou seja, os jovens, em se tratando de "acaso", não levam em conta as informações sobre as proporções existentes entre os elementos envolvidos na experiência realizada. **Nenhum** aluno escolheu a seqüência (a). Entre os 17 alunos que responderam ao questionário em sala de aula, 16 optaram pelo item (c), que também foi o item escolhido por 14 entre os 24 alunos que responderam em casa.

Parece-nos que, a este momento, houve um raciocínio semelhante ao de D'Alembert quando este afirmava que

> *no curso normal da natureza, o mesmo evento (qualquer que seja ele) acontece muito raramente duas vezes seguidas, mais raramente três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas.* [10]

- **Questão 4:** *Em uma urna E existem 10 bolas numeradas de 0 a 9. Tiram-se sucessivamente, com reposição, 1000 bolas, obtendo-se a* *seqüência de números da página seguinte, chamada "tabela de números aleatórios". Você quer jogar dados com um amigo, mas vocês não têm os dados. Esta tabela pode ser útil para o jogo?*

sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

Como você a utilizaria?

O objetivo aqui era saber qual o conhecimento dos jovens sobre a utilização de uma tabela de números aleatórios fornecida a cada um deles, mas principalmente, verificar se eles associariam o termo "aleatório" com a construção da tabela. Observamos que, entre os 17 alunos que concordaram em utilizar a tábua, todos inventaram regras de utilização que envolviam sorteios dos números apresentados, ignorando o significado do "aleatório".

Citamos como ilustração a resposta dada por Liliane, 17 anos, que *utilizaria a tábua de números aleatórios como no jogo de Batalha Naval(...)*, ou ainda a resposta de Bruno, 16 anos, que *deixaria o dedo cair sobre a tábua de números aleatórios, certamente sem olhar, e então observaria sobre que número ele caiu.* Outros alunos, assim como Bruno, descreveram um procedimento semelhante ao de um professor ao sortear um nome qualquer em sua lista de alunos.

- **Questão 5:** *Lançam-se ao mesmo tempo 2 dados idênticos. A frase seguinte é verdadeira ou falsa? "A probabilidade de ter um "5" e um "6" é a mesma probabilidade de ter dois "6". "*

verdadeira ☐ *falsa* ☐ *eu não sei* ☐

Explique sua escolha.

Como você interpreta a palavra "probabilidade"?

Esta questão compreende a descrição do conjunto de possibilidades ou conjunto de resultados possíveis de uma experiência aleatória, o qual denominaremos, daqui por diante, **Espaço Amostral,** que tem como símbolo Ω. Caso não fizessem a distinção entre os resultados (5 , 6) e (6 , 5), os alunos correriam o risco de cometer o mesmo engano de D'Alembert em seu artigo "Cruz ou Cunho".

A análise destas respostas complementa os dados obtidos nas questões 1 e 3, reforçando que

> *sob hipótese de equiprobabilidade, se uma experiência aleatória não está suficientemente explicada, pode ser fonte de ambigüidades e pequenos paradoxos elementares*,

conforme [18], dado este também identificado por S.Maury em [26], quando do seu estudo sobre a influência do vocabulário e do contexto nas respostas dos alunos para questões de probabilidade.

Entre as respostas obtidas, temos a seguinte distribuição:

Resposta	Número de alunos
Verdadeira	30
Falsa	07
Eu não sei	04

Apesar da opção correta, os sete alunos que assinalaram "falsa" justificaram erroneamente, através de argumentos fracos. Vejamos, por exemplo, a resposta de Jean Baptiste, 16 anos. Para ele, *as chances de tirarmos um número duplo são muito pequenas*. Temos ainda a resposta de Hervé, 16 anos, que escreveu apenas "*Intuição!*"

A resposta de Nejma, 16 anos, segue o raciocínio de D'Alembert, citado anteriormente na questão 3, sobre a ocorrência do mesmo evento por vezes consecutivas. Tendo escolhido a seqüência (b) na questão 3, ela agora justifica que *tirar dois "6" é sempre uma chance muito rara. tirar um "5" e um "6" é mais provável.*

A palavra **probabilidade** significa **chance** para a maioria, no sentido subjetivo do termo, ou seja, não existe uma distinção entre o uso da probabilidade objetiva ou subjetiva.

- **Questão 6:** *Em 100 lançamentos de "cara ou coroa" obtém-se 60 coroas e 40 caras. Esta informação é útil para estimar a probabilidade de termos "coroa" no 101º lançamento?*

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

Vamos lançar a moeda outras 10 vezes. Em qual eventualidade você apostaria?

a) Existirão tantas caras quantas coroas.

b) Existirão mais coroas que caras.

c) Existirão mais caras que coroas.

Explique sua escolha.

Que diferença você vê, comparando as questões 1 e 6?

Esta questão tinha como objetivo confirmar as observações feitas na primeira questão sobre proporcionalidade e composição da urna, embora **nenhum** aluno tenha percebido a real diferença entre as duas situações, que vinha do fato de na questão 1 não conhecermos a composição exata da urna e, portanto, não conhecermos a proporção de bolas vermelhas. Num jogo de "cara ou coroa" sempre conhecemos a composição, ou seja, a moeda que será lançada e que possui apenas duas faces.

Nesta questão encontramos uma diferença significativa entre as respostas dos dois grupos aqui analisados (respostas em casa/respostas em classe).

Entre os 24 alunos que responderam em casa, 8 deles, contra apenas 1 aluno entre os 17 que responderam em aula, assinalaram "sim" no primeiro item, e que existirá um número maior de "coroas" porque existe uma informação anterior (60 coroas e 40 caras). Isto nos faz supor que eles podem acreditar que a moeda não está equilibrada, mas não temos informações suficientes para confirmar esta hipótese.

Um dado que nos mostra claramente a indecisão dos alunos quanto à validade de informações prévias, que consiste na concepção errônea de que os resultados anteriores a uma experiência aleatória vão interferir nos seus próximos resultados, vem do fato que, entre os alunos que responderam "não" à primeira indagação, 10 optaram pela eventualidade (b), de onde podemos concluir que 46% do total de respondentes acreditam na importância de uma informação sobre resultados anteriores.

- **Questão 7:** *A frase seguinte parece verdadeira para você?*

  "Não se sabe se em 1993 um novo cometa aparecerá no céu: existe uma chance em duas para que isto aconteça."

  verdadeira ☐ *falsa* ☐ *eu não sei* ☐

  Explique sua escolha.

Através da análise das justificativas dos alunos identificamos a possibilidade da existência de dois conceitos errôneos: "**da ausência de informações sobre as condições da experiência aleatória conclui-se a equiprobabilidade dos seus resultados**" e/ou "**a probabilidade de um evento dependerá das informações obtidas pelo observador**".

Temos como exemplo a resposta de Sandrine, 16 anos, para quem a sentença era *verdadeira, (...) com uma chance sobre duas porque eles são imprevisíveis*, ou a de Emmanuelle, 16 anos, que justifica sua opção "verdadeira" concluindo que *(...) uma chance em duas porque a incerteza é completa.*

Muitos alunos citaram técnicas científicas como base de previsão, alterando a probabilidade de "1 sobre 2", como por exemplo a aluna Sophie, 15 anos, que afirma "*não saber quantos cometas existem*", ou Céline, 16 anos, que escreve "*não conheço o ciclo dos cometas*", ou mesmo Céline B., 16 anos, que opta pelo "verdadeiro" mas completa "*uma chance sobre duas não é uma boa estatística*".

- **Questão 8:** *Em um bairro de Paris onde existem cerca de um milhão de habitantes, queremos saber a proporção de crianças de 5 a 15 anos que não sabem nadar. Fazemos uma sondagem através de uma amostra de crianças escolhidas ao acaso. Para ter uma idéia precisa desta proporção, podemos limitar esta amostra a:*

  ☐ *10 crianças.*

  ☐ *100 crianças.*

  ☐ *1000 crianças.*

  ☐ *mais de 1000 crianças.*

  Queremos conhecer igualmente esta proporção para toda a cidade de Paris. Qual o número de crianças que deverão ser interrogadas para se ter uma idéia precisa desta proporção?

  ☐ *10 crianças.*

☐ *100 crianças.*

☐ *1000 crianças.*

☐ *mais de 1000 crianças.*

Você pode explicar suas escolhas?

A análise das respostas obtidas nesta questão possibilitou a confirmação de nossa hipótese de existência da concepção de que a **probabilidade de um evento depende das informações obtidas pelo observador**, levantada devido aos dados obtidos nas questões anteriores. Deixamos claro que a resposta por nós esperada independia de conhecimentos sobre amostragem, embora não possamos deixar de levar em consideração a bagagem construída através de noticiários, revistas, enfim, quaisquer publicações para divulgar resultados estatísticos.

Sabemos que para uma amostra de tamanho N=1000, o erro projetado varia em torno de 1%, mas nesta análise buscamos verificar a atitude dos jovens frente a resultados obtidos através de amostragens, sua idéia sobre a **proporção população-amostra**.

Obtivemos a seguinte distribuição de respostas:

a) mantiveram o tamanho amostral: 6 alunos;

b) aumentaram o tamanho amostral: 23 alunos;

c) diminuíram o tamanho amostral: 1 aluno;

d) optaram por mais de 1000 crianças em ambos os casos: 8 alunos;

e) não responderam: 3 alunos.

Vejamos alguns exemplos de justificativas dadas por eles. Entre os que mantiveram o tamanho amostral temos Sébastien, 16 anos, para quem *quanto maior o número de crianças, maior a precisão dos resultados*, ou ainda a boa justificativa de Celine, 17 anos, quando afirma que *é necessário escolher crianças que representem bem as diversidades de uma população; isto bastará então para uma porcentagem bastante justa.*

Entre aqueles que aumentaram o tamanho amostral podemos citar a resposta dada por Corinne, 16 anos, para quem *se interrogarmos, por exemplo, apenas dez crianças que não sabem nadar quando todas as outras o sabem, teremos um resultado completamente falso.* Note-se aqui que ela não observou a palavra "**ao acaso**" no enunciado proposto, fato também constatado nas respostas de outros seus colegas.

Com isto, percebemos que os jovens não compreendem bem o significado das palavras "**ao acaso**" e "**aleatório**", não confiando nos resultados de uma amostragem: 25 dos alunos entrevistariam mais de 1000 crianças por motivos de precisão.

- **Questão 9:** *A partir das estatísticas dos anos precedentes podemos ter uma idéia aproximada sobre o número de acidentes rodoviários que acontecerão na França em 1993?*

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

Você pode explicar a ligação entre os acidentes registrados em 1992 e os que acontecerão em 1993?

Apenas um aluno não respondeu a esta pergunta. As justificativas recaem sobre as condições da evolução do número de acidentes dos diferentes anos, o que reflete, conforme [2], o pensamento da coletividade, porque para um motorista dentro de um automóvel, o acidente acontece devido ao acaso.

Suas justificativas, que nos permitiram a conclusão acima, podem ser ilustradas por "*todos os fatores serão praticamente os mesmos*" ou "*o número de carros em circulação não terá mudado muito*", ou ainda, "*um número maior de motoristas deverá aumentar a média de acidentes*".

- **Questão 10:** *(resposta facultativa)*

  O futuro já está escrito na realidade de hoje?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  O acaso pode modificar este futuro?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  Os homens podem fazer escolhas que modifiquem seu futuro?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

Uma vez que esta questão era facultativa e de cunho mais filosófico, não influindo diretamente nas concepções freqüentistas sobre probabilidades, não faremos sua análise.

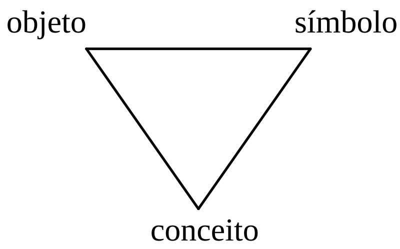
III.3. CONCLUSÃO

Através da análise do questionário pudemos verificar que a familiaridade que os alunos têm com a estatística resume-se à cultura adquirida fora de sua vida escolar, confirmando a pouca importância dada a este ensino pelos professores, fato este já observado na Avaliação do Programa de Matemática para Primeira Série do Segundo Grau [1].

Em relação ao conceito de probabilidade, confirmamos a presença da influência da formulação e do contexto nas respostas dos alunos, também observada nos trabalhos de S. Maury [27]. Segundo Maury, podemos distinguir dois níveis de funcionamento do conhecimento: o da ação imediata ao nível dos julgamentos probabilistas intuitivos, e o nível dos conhecimentos de ordem conceitual que se exprimem através de um raciocínio probabilista.

No nível da ação imediata, pudemos constatar que para estes jovens "**a ocorrência de um evento durante uma experiência aleatória pode ser influenciada por resultados anteriores a este**", ou ainda que "**a probabilidade de um evento depende das informações obtidas anteriormente sobre esse evento**", ou mesmo que "**da ausência de informações sobre condições da experiência aleatória conclui-se a equiprobabilidade de seus resultados**", caracterizando uma visão subjetiva da probabilidade. Esta visão fica caracterizada por uma argumentação com bases subjetivas e não com bases empíricas.

Notamos então que no triângulo epistemológico



definido por H. Steinbring em [32] ou falta para o aluno o vértice relativo ao conceito ou ele não consegue fazer a associação "objeto-símbolo". A falta do conceito é quase sempre substituída por raciocínios intuitivos, não científicos, provenientes de sua vivência quotidiana. Para Steinbring, *o triângulo epistemológico representa um diagrama no qual o significado do conhecimento não pode ser deduzido a partir de um dos vértices, mas exige sempre em equilíbrio entre eles.*

Este desequilíbrio entre os pólos fica bem evidenciado quando observamos que vários alunos produzem justificativas contraditórias para questões complementares. Um exemplo é dado pelo aluno que, na primeira questão, responde que uma informação anterior não é útil para prever os próximos resultados porém, na questão 6, utiliza a informação dada para escolher a alternativa que julga correta.

Observamos também que as palavras "**ao acaso**", "**aleatório**", "**chance**" e "**probabilidade**" têm seu significado limitado a uma forma mais ingênua. Novamente podemos notar a ruptura do triângulo epistemológico quanto a relação "símbolo-conceito".

Esta limitação também foi observada por Fischbein em [14], quando afirma que

muitas crianças identificam "raro" com "impossível" e "impossível" com "incerto"(...). Tendem a substituir significados matemáticos por expectativas subjetivas (...).

Em outro parágrafo completa:

o que a criança não entende é que as situações devem ser consideradas como meras roupagens para experimentos ideais, que a matemática trata com o ideal, operações abstratas e indivíduos(...).

Isto fica claro quando observamos que, na questão 3, apesar de existir um número maior de bolas vermelhas na urna, nenhum aluno opta pela seqüência formada apenas por elas, ou quando afirmam que podemos obter um "5" e um "6" com a mesma chance de obtermos dois "6".

Torna-se então, para nós, necessária a construção de uma seqüência de ensino baseada nestes dados, ou seja, uma seqüência que formalize os conceitos de "**acaso**" e "**probabilidade**" a partir da correção das concepções errôneas aqui evidenciadas.

Destacamos, finalmente, que as respostas obtidas neste questionário fornecem ainda um material riquíssimo para outros tipos de análise, o que, porém, não é nosso objetivo, uma vez que nos limitamos somente ao levantamento das concepções pré-construídas pelos alunos antes do aprendizado do cálculo das Probabilidades.

CAPÍTULO IV:
A SEQÜÊNCIA - ENSINO FRANCÊS

A SEQÜÊNCIA - ENSINO FRANCÊS

IV.1. APLICAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE SEGUNDO O PROGRAMA ESTABELECIDO PARA A SEGUNDA SÉRIE DO SEGUNDO GRAU DO ENSINO FRANCÊS

De posse da análise dos questionários, começamos, juntamente com os professores das classes entrevistadas, a trabalhar para uma seqüência de ensino que, dentro do espírito do programa afixado, pudesse corrigir as concepções errôneas existentes e melhor explorar o processo de modelização, ou seja, da busca do modelo matemático adequado. Note-se que a modelização é um obstáculo sempre presente no estudo das probabilidades, como pudemos observar na análise histórica da evolução deste conceito.

Citando os termos do programa:

> (...)*O objeto desta parte da formação é então a descoberta, apoiada em experimentações numéricas, de algumas noções qualitativas e quantitativas ligadas à modelização matemática dos fenômenos aleatórios.*
>
> *O objetivo é formar, de maneira qualitativa e eventualmente crítica, algumas noções probabilistas no registro e análise de situações nas quais são construídos ou observados fenômenos aleatórios ou de aparência aleatória.*
>
> *Aborda-se em seguida uma análise mais quantitativa, permitindo formar, a partir do estudo das freqüências, e em relação com os trabalhos efetuados em estatística, a noção de probabilidade.*

Procuramos também manter nossos objetivos em acordo com aqueles propostos pela EVAPM1/93 [13], assim descritos:

- *Situações e Experiências Aleatória*

Sendo dada uma situação aleatória,

▹ *saber descrevê-la em termos de eventualidades (análise daquilo que pode advir),*

▹ *saber associá-la a um conjunto de eventos elementares (espaço amostral ou conjunto dos resultados possíveis).*

Saber utilizar, quando possível, para representar ou descrever uma experiência aleatória, um quadro ou uma árvore de possibilidades.

Estas representações podem conduzir a desdobramentos simples.

Identificar um evento composto como uma parte do Espaço Amostral.

- *Linguagem de Eventos*.

Sendo descrita uma experiência aleatória (com um conjunto de eventos elementares associado):

▹ *saber determinar o conjunto dos eventos elementares que realizam ou formam um evento dado,*

▹ *saber explicitar o evento complementar de um evento dado,*

▹ *saber reconhecer eventos disjuntos (ou incompatíveis),*

▹ s*aber explicitar o evento resultante da reunião de dois eventos dados,*

▹ s*aber explicitar o evento resultante da intersecção de dois eventos dados,*

▹ d*ar sentido às expressões "evento impossível", e "evento certo".*

- *Probabilidades.*

Estando descrita uma experiência aleatória (com um conjunto de eventos elementares associado):

▹ *na hipótese de eqüiprobabilidade dos eventos elementares, dar a probabilidade comum destes eventos a partir das hipóteses da Geometria do Acaso.*

Saber associar, quando da repetição de uma experiência aleatória, a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes.

Sendo dada uma estatística de tais freqüências, saber reconhecer, se possível, a estabilização destas freqüências.

Utilizar tal estatística de forma razoável para estimar a probabilidade de um evento dado.

Sendo descrita uma experiência aleatória e conhecidas as probabilidades dos eventos elementares, saber utilizar, quando possível, um quadro ou uma árvore de possibilidades para encontrar a probabilidade dos eventos compostos.

Sendo dada uma distribuição de probabilidades (sem eqüiprobabilidade), associada a uma experiência aleatória explícita, calcular a probabilidade:

- ▹ *de um evento,*
- ▹ *da intersecção de dois eventos,*
- ▹ *do evento complementar de um evento dado.*

Na hipótese de eqüiprobabilidade dos eventos elementares, saber utilizar as probabilidades elementares para calcular a probabilidade:

- ▹ *de um evento,*
- ▹ *da reunião e da intersecção de dois eventos,*
- ▹ *do evento complementar de um evento dado.*

Conhecer e utilizar a relação ligando as probabilidades de dois eventos às de sua reunião e de sua intersecção.

IV.2. OBJETIVOS.

1. Dar a noção de experiência aleatória de forma que se possa identificar o momento no qual o acaso intervém.

2. Dar condições a que o aluno possa descrever uma experiência aleatória e identificar os seus resultados possíveis, ou seja, os eventos elementares.

3. Dadas as freqüências relativas de um evento elementar resultante de uma experiência aleatória que é repetida um grande número de vezes, reconhecer, quando possível, a sua estabilização.

4. Utilizar a freqüência estabilizada de um evento elementar para estimar sua probabilidade quando não é possível obtê-la "a priori".

5. Mostrar a relação entre a freqüência relativa de um evento elementar e o cálculo "a priori" de sua probabilidade.

Para a aplicação de uma engenharia didática que mostrasse como se dá a aprendizagem do Conceito de Probabilidade pela visão freqüentista optamos pela elaboração de uma seqüência a ser ministrada pelos próprios professores dos grupos estudados e observada por nós, juntamente com o professor e pesquisador M. Henry. Ao longo das sessões seriam feitas pequenas intervenções por nós, observadores, sempres que se julgasse necessário.

Toda a seqüência será desenvolvida através de atividades que coloquem o aluno em situação de ação ou de formulação, conforme define Guy Brousseau em sua Teoria das Situações:

> *uma situação de ação faz evoluir o aluno por uma mudança de ponto de vista; uma situação de formulação faz evoluir por uma mudança de códigos, de linguagem...*[17]

A seqüência foi então dividida em fases a serem desenvolvidas em cada um dos dois grupos participantes: o primeiro formado pelos alunos que responderam ao questionário em classe e o segundo, pelos alunos que responderam em casa.

- **Primeira Fase:** composta por atividades que permitissem a percepção do conceito de probabilidade através da observação da estabilização da freqüência relativa de um evento resultante de uma experiência aleatória, com aproximadamente 3 horas de duração.

- **Segunda Fase:** discussão com os alunos sobre suas respostas ao questionário, com aproximadamente 1 hora de duração.

- **Terceira Fase:** institucionalização do conteúdo, com aproximadamente 2 horas de duração.

- **Quarta Fase:** aplicação de um teste para verificar os conhecimentos adquiridos, com aproximadamente 30 minutos de duração.

Desta forma, os dados por nós obtidos foram registros de observações, que receberão tratamento qualitativo, o que nos permitirá fazer distinções, decidir os índices a serem privilegiados para, então, quantificarmos algumas destas informações, analisando-as através de uma estatística descritiva simples.

Segundo A. Robert e R. Gras [30], para garantir a eficácia da pesquisa e da interpretação de seus resultados, devemos definir muito claramente as variáveis envolvidas (sua dimensão, os fatores que pensamos influenciar nosso objeto de estudo), o ponto de vista e a sua localização na realidade.

As **variáveis didáticas**, ou seja, as variáveis cujo comando está à disposição do professor e que determinam a situação didática [17], serão:

- a **formulação do problema**, conforme Bordier [6] e Maury [26], que é uma variável de vocabulário,
- a **gestão da seqüência**, que é uma variável de contexto.

As variáveis de vocabulário influenciam na compreensão dos textos. Um problema que não foi bem formulado, que não foi exaustivamente explicitado, pode gerar pequenos paradoxos. As variáveis de contexto, no nosso entender a gestão da seqüência, serão fatores determinantes no sucesso da aprendizagem, uma vez que o aluno deve sentir-se à vontade para expressar suas próprias concepções, sem a preocupação de procurar as respostas que julgar esperadas pelo professor.

Nosso ponto de vista é que o ensino do Conceito de Probabilidades pela visão freqüentista proporciona ao aluno uma ligação mais estreita com o mundo real, o mundo do quotidiano, uma vez que este ensino é fundamentado na definição de Probabilidade como sendo a freqüência limite de um evento, quando repetimos uma experiência aleatória um grande número de vezes.

Os **pré-requisitos conceituais** necessários para o desenvolvimento da seqüência são **noções de proporcionalidade** e de **Estatística Descritiva**, tais como freqüências relativas, freqüências relativas acumuladas, análise de dados tabelados.

Para o controle das variáveis didáticas e de uma possível recapitulação dos pré-requisitos necessários, os dois professores optaram por direcionar o raciocínio dos alunos através de documentos que, trabalhados individualmente, orientariam os debates em sala de aula.

IV.3. ANÁLISE "A PRIORI"

IV.3.1.Primeiro Grupo - Respostas ao questionário em sala de aula.

A primeira fase, para este grupo, será iniciada no dia 29/01/93, com a presença de 19 alunos, início às 8h00 com a distribuição do primeiro documento (DOC N°1), que se relacionava com as questões 1, 5, 6 e 7 do questionário. O objetivo é, então, confrontá-los com a "ação do acaso" em experiências aleatórias e experiências que não podem ser consideradas como tal.

Deixaremos claro aqui que os documentos apresentados são apenas uma tradução do original, **mantendo a forma com a qual os alunos franceses tiveram contato.**

Entendemos como **experiência aleatória** aquela que satisfaz às seguintes condições, conforme [12]:

▹ *não podemos prever seu resultado; se repetida em condições idênticas, podem ser obtidos resultados diferentes (o emprego do condicional significa que a experiência pode ser única, mas é ao menos reprodutível em pensamento);*

▹ *o Espaço Amostral da experiência é conhecido.*

Este documento é composto por uma tabela reproduzindo os resultados de 1123 jogos de Loto, relacionando cada número com o total de vezes que foi sorteado em todos os jogos e o total de vezes nas vinte últimos sorteios.

bola	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
total	132	134	134	132	136	134	140	146	123	122
20	7	1	5	2	5	2	1	4	1	4

bola	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
total	127	139	119	136	144	154	126	148	150	146
20	3	1	2	4	4	4	3	3	3	0

bola	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
total	140	137	133	152	141	144	133	140	129	130

20	4	2	3	3	2	2	3	1	2	6

bola	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
total	138	132	126	150	130	142	152	165	129	154
20	3	2	4	3	1	4	3	6	4	3

bola	41	42	43	44	45	46	47	48	49
total	123	130	134	126	148	131	117	154	150
20	2	1	2	2	4	0	1	3	4

As questões propostas pelo documento nesta primeira parte são as seguintes.

1) Estas informações são úteis para jogar uma próxima vez?

2) Se você respondeu SIM, diga como utilizaria este quadro e dê os seis números que terão sua preferência. Se respondeu NÃO, explique por quê.

Em uma segunda parte são solicitadas as opiniões sobre as seguintes afirmações.

1) Existe uma chance em duas para que eu tenha sucesso no meu exame final.

2) Existe uma chance em duas para que o tempo seja bom amanhã.

3) Se eu lançar duas moedas de 1F (Franco: unidade monetária francesa), tenho uma chance em três de obter uma "cara" e uma "coroa".

Uma vez confirmado que todos os alunos conhecem o sistema de extração de Loto, o professor deverá iniciar um debate sobre as questões propostas.

De acordo com os dados obtidos pela análise do questionário, questões 1 e 6, devemos encontrar um grande número de alunos utilizando a tabela fornecida para selecionar os números a serem apostados em um próximo sorteio. As duas questões relativas ao jogo de

Loto não devem apresentar dificuldades na identificação da ação do acaso, ou seja, na identificação do momento no qual existe a sua ação.

Esta situação se inverte quando passamos à segunda parte: de acordo com as questões 5, 7 e 9, estamos aqui lidando com a noção de acaso em um fenômeno aleatório e não em uma experiência aleatória. Esperamos, para a questão sobre a previsão do tempo, respostas que vinculem a chance de tempo bom a uma análise da estação do ano ou das condições do tempo durante a semana. Alguns alunos também podem afirmar a não existência do acaso uma vez que existe a Ciência da Meteorologia para este tipo de previsão. De fato, o estudo de condições meteorológicas não pode ser caracterizado como uma experiência aleatória, mas sim como um **fenômeno aleatório**, uma vez que não podemos reproduzi-lo indefinidamente em condições idênticas, ou seja, não podemos controlar as variáveis, controle este que caracteriza o contexto no qual se desenvolveu o trabalho. Esta posição poderá ser alterada se, ao invés de questionarmos sobre o tempo amanhã, procurarmos saber qual a chance de que ele seja bom em qualquer outra data do ano. Neste caso, poderemos esperar respostas do tipo "uma chance em dois, pois pode ou não fazer bom tempo", mostrando a concepção levantada pelo questionário de que **"na falta de informações, todos os eventos são eqüiprováveis"**. Esta posição será adotada inclusive por aqueles que anteriormente negaram a ação do acaso na previsão do tempo. Podem variar as chances da ocorrência em analisando fatores como a época do ano, porém sempre admitindo aqui a ação do acaso.

Um dado importante que pudemos verificar através das respostas ao questionário é que para o aluno prevalece sempre a linguagem do quotidiano, enquanto que, em se falando de linguagem científica, **"se não houver experiência aleatória não podemos falar de chance ou probabilidade"**, no sentido objetivo, uma vez que para os fenômenos aleatórios, a probabilidade atribuída depende de técnicas estatísticas mais avançadas, como por exemplo o estudo de séries temporais, fora do nosso contexto. Limitaremos nossos estudos ao campo das Experiências Aleatórias, que fornecem, pelo que acreditamos, um conjunto de situações mais claras para que o aluno consiga compreender os primeiros conceitos de probabilidades.

Em relação à terceira questão levantada, sobre o lançamento de duas moedas idênticas, acreditamos que a falta de familiaridade com a linguagem de conjuntos e com os métodos combinatórios tornará o raciocínio dos alunos semelhante ao de D'Alembert para uma situação idêntica, já descrito no item I.1., uma vez que não devem distinguir os pares ordenados (cara,coroa) e (coroa,cara). Esta diferenciação ocorrerá somente no caso de propormos o lançamento de duas moedas distintas, por exemplo, de valores deferentes entre si.

Para a questão sobre o próprio sucesso ou não nos exames finais os alunos devem interpretar não como uma ação do acaso, mas sim de esforço. Na realidade, não temos aqui, assim como na questão da meteorologia, uma experiência aleatória e, portanto, não podemos falar em "chances". A experiência poderia ser caracterizada se modificássemos a questão para o estudo da chance de sucesso de um aluno escolhido aleatoriamente dentro de um grupo, ou seja, dentro de uma população.

Estimamos o tempo gasto na análise deste documento em aproximadamente 30 minutos, ao final dos quais os alunos já devem ter compreendido a diferença entre fenômeno aleatório e experiência aleatória, bem como as variáveis necessárias para sua quantificação.

Seguimos esta fase da seqüência planejada com a distribuição do Documento n°2, o qual reproduzimos a seguir.

Uma floresta contém 1000 árvores de 6 essências diferentes. Encontramos 200 faias, 30 carvalhos, 10 bétulas, 50 abetos, 700 "épicéas" e 10 freixos.

1) Deseja-se "sortear ao acaso" uma entre as 1000 árvores. Qual método você propõe para isto?

2) Quais são os resultados possíveis para esta experiência?

Interessa-nos as essências das árvores.

3) Qual é o conjunto de eventualidades que representa esta experiência aleatória?

Ω: Conjunto das Eventualidades.
Ω = {_____________________}

4) Qual é a probabilidade:

- do evento "sair um Freixo": P(Fr)=
- do evento "sair um Abeto": P(A)=
- do evento "sair um "Épicéa"": P(E) =
- do evento "sair uma Bétula": P(B)=
- do evento "sair um Carvalho" :P(C)=
- do evento "sair uma Faia" :P(F)=

Como você determinou suas respostas?

5) Qual é a probabilidade:

- do evento "sair uma Conífera"
- do evento "sair uma árvore não Conífera"

6) É necessário conhecer o número de árvores da floresta e o de cada essência para responder às questões precedentes?

Este documento reproduz a experiência narrada em [16] e preocupa-se com a utilização da noção de proporcionalidade para determinação "a priori" da probabilidade de um evento, quando da realização de uma experiência aleatória. Como tal, está relacionado com as questões 2 e 3 do questionário, cuja análise aponta para uma correta utilização das proporções desde que não se tenham referências sobre a posição de cada elemento ou grupo de elementos dentro da população estudada.

Estimamos em 20 minutos a duração do debate sobre este documento, fazendo com que os alunos compreendam de forma satisfatória a descrição de um Espaço Amostral e da utilização de seus extratos para o cálculo "a priori" de uma probabilidade, ou seja, é a proposição de um raciocínio e de um cálculo para obter a probabilidade de diversas eventualidades, ou seja, de diversos eventos não necessariamente elementares, antes de efetuarmos uma experiência aleatória. Existe aqui um questionamento a ser feito: quais são os argumentos para justificar estes cálculos para os alunos?

Passemos então ao estudo do terceiro documento proposto pelo professor responsável por este primeiro grupo, que vai relacionar os resultados obtidos pelos alunos para o lançamento de um percevejo e observação da posição em que ele se paralisa - se com a ponta tocando o solo ou não. Cada aluno deverá relacionar seus resultados para, em seguida, somar aos resultados obtidos pelos demais alunos do grupo e assim observar a estabilização da freqüência relativa dos eventos estudados. O Documento consta apenas de uma tabela a ser preenchida pelos alunos, com os seguintes itens:

Primeira tabela: N° de Lançamentos x N° de Pontas x N° de Não Pontas
Segunda tabela: N° de Lançamentos x N° de Pontas (Total e Freqüência) x N° de Não Pontas (Total e Freqüência)

Relacionando-se com as questões 6, 8 e 9, tem-se como objetivo tornar clara para o aluno a noção de probabilidade como freqüência limite, ou seja, o número ao redor do qual a freqüência relativa de um evento se estabiliza.

A escolha do percevejo, e não, por exemplo, de uma moeda ou um dado, vai obrigar o aluno a observar a estabilização das freqüências relativas para estimar a probabilidade, sem um cálculo "a priori".

Esta atividade não pode ser analisada sozinha, mas sim em conjunto com outras que propiciem ao aluno a oportunidade de confrontar as diferentes formas para o cálculo de uma probabilidade: "a priori" e "a posteriori". Para isto são propostos mais dois documentos, um com os resultados obtidos após 1000 lançamentos de duas moedas num jogo de "cara ou coroa" e outro com os gráficos mostrando a evolução dos valores da freqüência acumulada para os eventos "cara-cara", "cara-coroa" e "coroa-coroa".

Devido às concepções errôneas existentes, os alunos devem questionar a não estabilização da freqüência dos eventos produzidos pelo lançamento das moedas exatamente nos valores calculados "a priori", porém, ao fim deste debate, devem compreender com certa clareza a diferença entre freqüência relativa e probabilidade. Isto supõe que eles saibam o que é uma experiência aleatória assim como saibam descrevê-la.

A divisão do tempo esperada é:

▹40 minutos para o cálculo das freqüências relativas e verificação da estabilização no caso do lançamento do percevejo;

▹30 minutos para o estudo do Documento n°5, a ser descrito na continuidade do trabalho;

▹20 minutos para a análise dos resultados dos 1000 lançamentos de duas moedas (tabela e gráficos);

▹20 minutos para a comparação com os resultados obtidos pelo lançamento dos percevejos e conclusão.

Documento n°5: procura estudar a estabilização da freqüência relativa das letras do alfabeto que compõem um texto qualquer escolhido aleatoriamente por cada aluno. O objetivo é estimar a probabilidade de utilização de uma determinada letra do alfabeto em um texto na língua francesa. Procura completar as observações feitas quando do estudo do lançamento do percevejo.

IV.3.2. Segundo Grupo - Respostas ao questionário em casa

A primeira fase deste grupo tem início previsto para 01/02/93, às 11h00, com a proposição das seguintes questões para reflexão individual:

1) Tenho uma chance em três para obter uma face "cara" e uma face "coroa" quando lanço duas moedas de 1F.
2) Existe uma chance em duas que chova amanhã.

Como apoio, será distribuído um quadro com os resultados de 1000 lançamentos de duas moedas idênticas e o respectivo gráfico de freqüências acumuladas. A análise a priori destas questões é a mesma já feita quando da análise do primeiro documento estudado pelo outro grupo, variando apenas na estimação do tempo, que aqui será estimado em aproximadamente 60 minutos.

A segunda série de questões a ser proposta para reflexão individual é a seguinte:

1) Existem duas chances em vinte que o número 25 seja sorteado na próxima rodada de um jogo de Loto.
2) Existem cento e quarenta e uma chances em mil cento e vinte e três para que o número 25 seja sorteado na próxima rodada de um jogo de Loto.
3) Existem quatrocentas e oito chances em novecentas para obtermos a posição "zero", ou seja, com a ponta tocando o solo.

Como material de apoio, será distribuído um documento com os resultados anteriores de 1123 jogos de Loto. Esta análise também foi feita no primeiro documento do grupo anterior. É importante que observemos que de um grupo para outro as atividades propostas são praticamente as mesmas, variando apenas a ordem e a forma de proposição, ou seja, variando a gestão da seqüência, conforme havíamos previsto como variável de contexto. Este grupo vai se distinguir do outro pela complementação das atividades com a leitura de textos relativos à história das probabilidades.

O tempo previsto para o desenvolvimento desta segunda fase de debates é de 60 minutos.

IV.4. ANÁLISE "A POSTERIORI"

IV.4.1. Primeiro grupo - respostas do questionário em classe.

Após confirmar que todos os alunos conheciam o sistema de extração de Loto, o professor inicia o debate sobre o documento n§1, pedindo aos alunos que coloquem suas posições em relação às questões propostas. Obtivemos os seguintes resultados nesta primeira rodada de opiniões:

- 8 alunos, entre os 19 presentes, respondem SIM à primeira questão sobre o jogo de Loto, ou seja, acreditam que o quadro contendo os resultados anteriores é útil para se jogar uma próxima vez, conforme previmos em nossa análise "a priori", confirmando uma cultura popular que reforça a concepção errônea de que a probabilidade de um evento pode ser alterada por quaisquer informações que obtemos sobre este evento, e não somente estimada ou calculada baseada em informações pertinentes sobre a repetição do experimento aleatório um grande número de vezes;

- 16 alunos optam pela aceitação da conjectura sobre a aprovação no exame final. Podemos supor que não perceberam que não se trata de uma experiência aleatória, ou melhor, que não depende de uma ação do acaso para a aprovação ou não em exames quando falamos de uma pessoa específica;

- 11 alunos afirmam que a conjectura sobre a previsão do tempo para o dia seguinte é verdadeira, confirmando o observado na questão anterior, ou seja, a não distinção entre Experiências Aleatórias, no sentido de que podem ser controladas e repetidas infinitas vezes, e outros tipos de situação aleatórias que não podem sofrer este tipo de controle, conforme nossa análise "a priori";

- 12 alunos aceitam a conjectura sobre o lançamento das duas moedas idênticas, confirmando nossa análise "a priori" e efetuando um erro na escolha do modelo matemático adequado, tal como o de D'Alembert, citado anteriormente.

Após um debate no qual os alunos defenderam suas opções, pudemos constatar uma mudança em alguns alunos, modificando o quadro anterior devido às argumentações apresentadas. Vejamos por exemplo as respostas de Benjamin, 18 anos, e de Jean-Baptiste, 16 anos, com relação ao jogo de Loto:

> ▹ Benjamin: selecionou na linha "Total" os mais freqüentes, ou seja, aqueles com mais de 150 sorteios, refinando esta seleção através da última linha, que indicava os 20 últimos resultados. Em caso de igualdade, fez uma escolha aleatória. Seus números preferidos: 16-24-38-40-48-49.

> ▹ Jean-Baptiste: escolheu os menos sorteados na linha "Total", obtendo os números 9-10-13-33-41-47.

As demais justificativas podem ser resumidas nestes dois exemplos citados, o que nos forneceu a seguinte configuração do grupo:

- 10 alunos aceitam a utilidade do quadro como previsão para o próximo sorteio, mantendo a concepção errônea sobre a interferência de informações anteriores na probabilidade de ocorrência de um evento;

- 6 alunos mantém a posição anterior de não acreditar na utilidade do quadro, justificando essa posição com o argumento de que cada sorteio é independente dos anteriores. Esta argumentação era esperada por nós, porém em um número maior de alunos, conforme análise "a priori". Mesmo após as intervenções realizadas por M. Henry apenas estes alunos conseguem perceber a não utilidade do quadro. Um dos argumentos que nos pareceu bastante forte para o grupo foi apresentado por Benjamin, que afirmou: *não sabemos se o acaso existe ou não. Não sabemos se existe uma regra de cálculo que rege o Universo,* mostrando um pensamento que indicava uma analogia com o pensamento determinista de Laplace;

- 3 alunos foram desestabilizados pelos argumentos apresentados pelos colegas.

Com isto, confirmamos nossa análise "a priori" sobre a utilização do quadro para a seleção de números para uma próxima aposta, porém notamos uma certa resistência na identificação da ação do acaso, contrariamente ao que havíamos previsto.

Em relação à questão sobre a aprovação nos exames, encontramos as seguintes justificativas:

- "*existem duas possibilidades - passar ou não - mas não é uma questão de chance*";
- "*existem duas possibilidades - passar ou não - logo, uma chance em duas*".

Alguns alunos, tais como Benjamin, afirmaram não ser uma *questão de acaso, mas sim de trabalho*. Notamos então que a posição anteriormente adotada pelo grupo foi desestabilizada devido às argumentações apresentadas. Ficou claro porém que para estes alunos, <u>probabilidade = chance = possibilidade</u>, independentemente da existência da Experiência Aleatória, ou seja, existe uma certa confusão no uso da probabilidade objetiva e da probabilidade subjetiva, mostrando a grande dificuldade da busca de um raciocínio diferente do raciocínio quotidiano, não matemático.

Com relação à pergunta sobre a previsão do tempo para o dia seguinte, a justificativa apresentada por aqueles que confirmaram a conjectura confirmou a existência da concepção errônea que induza a equiprobabilidade devido à falta de informações sobre a Experiência Aleatória e, mais ainda, mostrou que estes alunos não souberam distinguir Fenômeno Aleatório de Experiência Aleatória, ou seja, não houve a observação de que não poderíamos controlar as variáveis para a repetição do experimento. Pudemos observar também que a maioria dos alunos que responderam SIM à questão sobre a aprovação nos exames, respondeu SIM a esta questão, conforme mostramos no quadro seguinte:

SIM - SIM	11/19
SIM - NÃO	4/19
NÃO - SIM	1/19

Conforme nossa previsão, houveram respostas que associavam a ocorrência de chuvas ao período do ano às estações do ano, afirmando não ser uma questão de chance, mas o número de alunos com este raciocínio foi muito pequeno dentro deste grupo.

Com relação ao lançamento das moedas encontramos as seguintes justificativas, exemplificando a posição do grupo:

- SIM: "*temos 2 "coroas", ou 2 "faces" ou 1 "coroa" e 1 "face", de onde, 1 chance em 3*". (Sebastian - 16 anos)
- NÃO: "*são duas chances em quatro pois podemos ter os seguintes eventos: coroa-coroa, coroa-cara, cara-coroa, cara-cara.*". (Sylvaine- 16 anos).

Pudemos também observar que, para estes alunos, aleatório= sem ordem = ao acaso.

Através das argumentações e das comparações com argumentos anteriores os alunos conseguiram perceber que a aprovação nos exames não depende do acaso, ou seja, não representa uma Experiência Aleatória, que é então definida pelo professor, após o que eles percebem que a questão sobre a previsão do tempo também não o é. Esperávamos levar apenas 30 minutos neste debate, mas o tempo necessário para sua conclusão foi de 60 minutos, o que já pode indicar insuficiência no tempo total previsto para o desenvolvimento deste conteúdo.

Como já fizemos referências em nossa análise "a priori", o segundo documento a ser discutido com os alunos preocupa-se com a utilização da noção de proporcionalidade para determinação "a priori" da probabilidade de um evento, quando da realização de uma Experiência Aleatória.

Pudemos observar que, entre os alunos participantes do grupo, um deles não compreendeu a proposta do documento e outros seis compreenderam mas não puderam encontrar o argumento procurado, ou seja, não souberam fornecer um método para o sorteio das árvores. M. Henry esclareceu aos alunos que o método de escolha depende do projeto definido, o que lhes permitiu uma melhor compreensão da Experiência proposta. Contudo, ainda não lhes foi possível definir se os resultados desta Experiência, ou seja, o Espaço Amostral, seria formado por árvores ou por essências. Em relação ao uso das proporções, não pudemos observar maiores dificuldades por parte dos alunos.

Iniciou-se então a análise do documento nº3, na qual os alunos tiveram uma participação bastante ativa, mas, pelo fato da tachinha não apresentar a simetria a qual estavam habituados, ficaram bastante inseguros quanto aos resultados obtidos. Concordaram que os resultados seriam válidos apenas para a tachinha lançada. Mudando-a, mudariam também as posições obtidas para cada situação, "ponta" ou "não ponta".

Quando da distribuição do documento contendo os resultados obtidos após 1000 lançamentos de duas moedas, pudemos confirmar nossa análise "a priori" quanto às dúvidas sobre a estabilização das freqüências obtidas no lançamento das tachinhas, ou seja, pudemos observar que, pelo fato desta estabilização ter ocorrido próxima ao valor 50%, os alunos ficaram questionando a causa de, neste caso, não poderem adotar esta valor tal como o ocorrido no lançamento das moedas.

Novamente aqui utilizamos um tempo maior do que o esperado, confirmando o fato de que o tempo estipulado no cronograma geral para o aprendizado do conceito e do cálculo das Probabilidades é insuficiente para que possamos corrigir as concepções errôneas existentes neste domínio.

IV.4.2. Segundo grupo - respostas ao questionário em casa.

Os resultados obtidos neste grupo não apresentaram diferenças significativas em relação ao estudo feito no item anterior. As diferenças na ordem de apresentação de alguns documentos não alteraram os resultados observados.

IV.4.3. Conclusão.

De uma forma geral, as seqüências elaboradas pelos dois professores que colaboraram nesta experiência provocaram nos alunos, em um primeiro momento, insegurança em relação ao objetivo do ensino a ser ministrado, que pode ser explicada pela alteração do contrato didático que aparentemente existia nos grupos. Era esperado que o professor explicasse com clareza qual a atividade a ser desenvolvida e qual o seu objetivo final. Uma vez que as seqüências tiveram como característica uma primeira fase na qual o aluno deveria realizar determinadas atividades e relatar o que observou para que através de um resumo dos fatos observados pelo conjunto pudessem começar a obter alguma informação do conteúdo a ser ministrado, verificou-se aí a quebra do contrato didático.

Faltou também, ao nosso ver, a proposição de uma situação a-didática adequada que colocasse o aluno diante de um problema real a ser resolvido, ligado ao seu quotidiano ou ao meio social no qual estivesse inserido, como o exemplo seguinte: "Como podemos estimar o número mínimo de profissionais que devem prestar serviço em um posto de saúde comunitário nas tardes de segunda feira para que os usuários não esperem mais do que 10 minutos na fila?"

O aluno deve perceber que para esta estimativa faz-se necessário conhecer o movimento dos postos comunitários nas tardes de segunda feira (enquete), ou melhor, qual a porcentagem de usuários que esperam mais do que 10 minutos para o atendimento. Deve perceper que esta estimativa não poderá ser feita "a priori", uma vez que não conhecemos os estratos, ou seja, as proporções que formam a população estudada, no caso, os usuários de um posto de saúde. Assim, sua pesquisa pode contar com os dados "Total de usuários" x "porcentagem de usuários com espera". Com esta estimativa pode-se planejar o número de profissionais necessários para o atendimento.

O caráter a-didático da situação: segundo C. Margolinas em [25], *uma situação a-didática é uma situação que pode ser vivida pelo aluno enquanto pesquisador de um proplema matemático, independente , neste sentido, do sistema do ensino.* Ela afirma ainda que, do ponto de vista do aluno, *a situação é a-didática somente se ele tem consciência de poder utilisar unicamente um raciocínio matemático*. Neste sentido, a situação proposta a situação só poderá ser resolvida através do estudo da estabilização das freqüências relativas do número de usuários com espera, ou seja, deverá fazer uso de um raciocínio matemático, que neste caso consta da identificação da Experiência Aleatória em questão (em um posto de saúde, observar o tempo de espera de um usuário) e da observação da existência ou não da estabilização das freqüências do evento "esperar mais que 10 minutos".

Desta forma, nossa hipótese é que a utilização de uma situação a-didática adequada agiria como um agente facilitador da aprendizagem pretendida.

CAPÍTULO V:
A SEQÜÊNCIA - ENSINO BRASILEIRO

A SEQÜÊNCIA - ENSINO BRASILEIRO

V.1. APLICAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE PROBABILIDADE SEGUNDO O PROGRAMA ESTABELECIDO PARA O CURSO DO FONOAUDIOLOGIA DA FUNDAÇÃO LUSÍADA DE SANTOS.

A seguinte seqüência será aplicada em alunos do primeiro ano do curso de Fonoaudiologia, mantido pela Fundação Lusíada, Santos. Seu desenvolvimento ocorrerá na disciplina Estatística, após os alunos terem aprendido conceitos básicos de Estatística Descritiva, tais como elaboração e interpretação de tabelas e gráficos estatísticos, cálculo de freqüências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

Desejamos fazer uma análise causal da aquisição de novos conceitos e da correção dos conceitos errôneos identificados na análise do questionário aplicado, ou seja, uma análise baseada sobre a hierarquia evidente das qualidades dessas aquisições e correções. Em outras palavras, queremos verificar o conceito de aprendizagem segundo o triângulo epistemológico de Steinbring, já citado em II.3.

Tal como na seqüência concebida para alunos franceses, nosso trabalho consistirá em elaborar situações que possam ser vivenciadas como a-didáticas pelos estudantes, segundo Margolinas [25], facilitando a aquisição e a correção de conceitos, colocando estes alunos em uma situação de ação, formulação e validação.

O programa da disciplina Estatística estabelecido para este curso reserva um capítulo para o desenvolvimento do conceito de probabilidade, "*restringindo-se apenas aos problemas mais simples de operação de eventos e evitando-se as dificuldades combinatórias. Devem ser trabalhados os espaços equiprováveis e não eqüiprováveis.*"

V.2.OBJETIVOS

Esta seqüência será ministrada em duas etapas de 100 minutos cada uma, com os seguintes objetivos:

1. dar a noção de Experiência Aleatória, de forma que se possa identificar o momento no qual existe a intervenção do acaso;

2. dar condições a que o aluno possa descrever uma Experiência Aleatória e identificar os resultados possíveis (eventos elementares);

3. conhecidas as freqüências relativas de um evento elementar resultante de uma Experiência Aleatória que é repetida um grande número de vezes, reconhecer, quando possível, sua estabilização;

4. utilizar a freqüência relativa estabilizada de um evento elementar para estimar sua probabilidade, quando não é possível obtê-la "a priori";
5. mostrar a relação entre freqüência relativa de um evento elementar e o cálculo "a priori" de sua probabilidade.

Foram feitas as seguintes escolhas locais ou micro-didáticas, segundo M. Artigue [3]:

- variáveis didáticas: de vocabulário, ou seja, a formulação do problema, e de contexto, na gestão da seqüência;

- pré-requisitos conceituais: noções de proporcionalidade e de Estatística Descritiva, já descritas no início do capítulo, as quais os alunos vinham recebendo nas aulas precedentes.

A seqüência a ser desenvolvida será aplicada pelo próprio professor do grupo estudado, portanto, para as observações, contaremos com a ajuda de outra professora de Estatística. Isto minimizará o problema da quebra de contrato didático, já existente pela própria situação de pesquisa proposta aos alunos.

Para um melhor aproveitamento, dividiremos o trabalho em quatro fases.

- **Primeira Fase:** composta por atividades que permitam a percepção e/ou a correção do conceito de probabilidade através da estabilização da freqüência relativa, com aproximadamente 130 minutos de duração.

- **Segunda Fase:** institucionalização do conteúdo, com aproximadamente 70 minutos de duração.

- **Terceira Fase:** além dos 200 minutos destinados a atividades práticas e institucionalização, dedicaremos mais 200 minutos, divididos em duas sessões de 100 minutos cada para a resolução de exercícios de fixação do conteúdo aprendido.

- **Quarta Fase:** aplicação de um teste para verificar os conhecimentos adquiridos, com aproximadamente 60 minutos de duração.

V.3. ANÁLISE "A PRIORI"

A primeira fase terá início com a proposta de uma questão sobre a intervenção do acaso em situações meteorológicas, ou seja, um fenômeno aleatório. Esta relaciona-se com o último item do questionário, que também apresentou uma situação que não poderia ser caracterizada como Experiência Aleatória, ilustrada pela ocorrência ou não de uma guerra no Oriente Médio. A questão a ser escrita no quadro negro será:

"*Qual a chance de chover em Santos no dia 30 de julho?*"

Esperamos que o grupo forneça respostas do tipo "chove ou não chove", com uma chance de 50%, ou ainda do tipo "depende da meteorologia", com outras sugestões para a chance de ocorrência, embora percebessem a não existência da ação do acaso nesta situação, mostrando claramente a utilização de um raciocínio tipicamente quotidiano em situações nas quais deve ser usado o raciocínio científico, conforme estudo de M. Legrand [22]. Pudemos perceber um grande número de alunos com este tipo de erro quando analisamos as respostas ao questionário, ou seja, pudemos perceber que um grande número de alunos utiliza conceitos muitas vezes subjetivos do ponto de vista lógico-matemático. Assim, esperamos a utilização de uma probabilidade subjetiva, segundo a definição dada por Noether [28], página 11:"*(...) Essas probabilidades exprimem numericamente a intensidade com que a pessoa acredita, isto é, a sua disposição de apostar na ocorrência ou não ocorrência de um determinado evento.*"

Tal como para os estudantes franceses, esperamos respostas que condicionem as chances de chuva às condições meteorológicas da época do ano. Após debate sobre o assunto, lançaremos uma questão sobre a chance de chover no dia seguinte ao da seqüência, para a qual esperamos uma mudança nas posições assumidas pelos alunos, que passarão a considerar apenas a análise das condições meteorológicas no momento, aumentando ou diminuindo a chance de ocorrência de chuva, predominando de maneira mais acentuada a linguagem do quotidiano.

A segunda questão a ser proposta para debate será:

"*No lançamento de duas moedas idênticas, qual a chance de obtermos uma face "cara"?*"

Relacionada com as perguntas de número 4 e 5 do questionário, esperamos com esta segunda questão levantar as possíveis dificuldades de modelização, também percebida em alunos franceses, tal como a dificuldade em perceber que mesmo em moedas idênticas os resultados "cara-coroa" e "coroa-cara" são resultados distintos. Esperamos encontrar o mesmo valor calculado por D'Alembert para esta situação, ou seja, uma probabilidade igual a 1/3. Para tal conclusão estamos fundamentados na análise da questão 4 do questionário, na qual os alunos não perceberam a diferença entre os eventos (5,6) e (6,5) resultantes do lançamento de dois dados simultaneamente.

Dificuldades geradas pela formulação do problema foram também estudadas nas perguntas 3 e 6 do questionário, e esperamos inclui-las durante o desenrolar do debate, conforme as argumentações dos alunos para as probabilidades procuradas.

Para completar a discussão deste item, será construída em sala, com base em resultados obtidos individualmente pelos alunos, uma tabela de freqüências relativas acumuladas para o evento "sair uma face "cara"". Esperamos que, de posse destes resultados, os alunos estabeleçam a ligação freqüência-probabilidade desejada.

Aqui, como com os alunos franceses, as concepções errôneas existentes levarão os alunos a questionar a diferença entre os valores obtidos "a priori" e "a posteriori". Este questionamento é muito bem definido por G. Bachelard [4] quando afirma

> *(...) não é porque as probabilidades são colocadas habitualmente como ocorrências que o fenômeno que elas representam deve ocorrer. Da probabilidade "a priori" à probabilidade "a posteriori" existe o mesmo abismo que entre a geometria lógica "a priori" e uma descrição geométrica "a posteriori" do real. Que existam coincidências entre a probabilidade calculada e a probabilidade medida, é provavelmente a prova mais delicada, a mais sutil, a mais*

convincente da permeabilidade da natureza para a razão. Esta racionalização da experiência do provável deve sem dúvida se realizar por uma correspondência entre a probabilidade e a freqüência".

Com esta citação esperamos deixar claro o objetivo da questão colocada, a ser complementada com a seguinte:

"*No lançamento de uma tachinha, qual a chance de obtermos a posição "ponta"?*"

Esta proposta de discussão visa clarificar as concepções percebidas nas questões 1, 2, 5 e 6 do questionário sobre a estimação de uma probabilidade sem que se possa calculá-la "a priori". Esperamos que os alunos percebam que a tachinha não possui a simetria apresentada pela moeda e que, portanto, não poderíamos esperar a eqüiprobabilidade para os eventos elementares "ponta" ou "não ponta", que identificam a posição na qual toca o solo.

Para completar a discussão, como no caso anterior, será construída a tabela de freqüências relativas acumuladas a partir de dados obtidos anteriormente pelos alunos. Estes resultados deverão gerar, através da comparação com a situação do lançamento das moedas, a confirmação da possibilidade de estimação de uma probabilidade que não pode ser calculada "a priori".

Após a realização das três atividades práticas, os alunos terão condições de identificar uma Experiência Aleatória, reconhecer o conjunto de resultados possíveis para essa Experiência, ou seja, seu Espaço Amostral. Esperamos também que a associação **freqüência-probabilidade** fique clara a ponto de que os próprios alunos identifiquem os três axiomas básicos do cálculo de Probabilidades:

Sejam A e B eventos disjuntos em um Espaço Amostral Ω. Então:

▹ $P(A) \geq 0$

▹ $P(\Omega) = 1$

▹ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A institucionalização dos axiomas deverá provocar nos alunos a dúvida sobre a probabilidade da união de conjuntos não disjuntos. Esperamos que após debate e com alguns exemplos, os próprios alunos concluam o enunciado correto do teorema:

"*Se* $A \cap B \neq \varnothing$ *, então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$"

Com isto, estarão aptos a modelizar situações simples, calculando as probabilidades de eventos simples e compostos, desde que isto não envolva grandes dificuldades combinatórias. A árvore de possibilidades poderá ser utilizada como uma alternativa de regra de contagem.

V.4. ANÁLISE "A POSTERIORI"

As duas primeiras etapas, constituídas das atividades práticas e institucionalização, tiveram lugar nos dias 21/05/93 e 28/05/93, com duração total de 200 minutos, conforme o previsto.

Em aulas anteriores os alunos haviam recebido esclarecimentos sobre os objetivos da seqüência, uma vez que a permanência de um observador em sala de aula deveria provocar uma quebra no contrato didático estabelecido. Foram também instruídos a efetuar os experimentos das moedas e da tachinha em casa, anotando os resultados a cada lançamento.

Dando início à atividade, colocamos no quadro a questão sobre a meteorologia: "*Qual a chance de chover em Santos no dia 30/07/93?*" e sugerimos que os alunos pensassem por 10 minutos.

Após este tempo foi dada por eles a seguinte posição: "*Existe uma chance de 50% , pois pode ou não chover*", conforme havíamos previsto em nossa análise "a priori". Induzidos a um debate sobre esta afirmação, chegamos a seguinte divisão de opiniões:

V	F	?	TOTAL
23	04	03	30

Embora esperássemos este tipo de argumentação explicada pela concepção errônea de que na falta de informações sobre a Experiência Aleatória podemos concluir a eqüiprobabilidade de seus eventos, a quantificação contraria as projeções feitas pela análise do questionário em sua última questão. Vejamos o quadro seguinte, no qual expomos os dados porcentuais das duas situações:

	V	F	?	TOTAL
QUEST.	29%	18%	53%	100%
CLASSE	77%	13%	10%	100%

Observamos assim que em situação de aula o número de respostas errôneas aumenta consideravelmente. Embora o número de alunos indecisos (?) tenha diminuído bastante, isto não significou uma correção na concepção, mas sim uma provável influência pela qualidade de argumentação apresentada: "*não podemos saber as condições meteorológicas para um período distante, logo, podemos dizer que haverá ou não haverá chuva.*"

Entre os alunos que optaram pelo F, a justificativa dada foi a seguinte: "*devemos observar a média de chuvas em Santos*", que é uma resposta análoga a dos alunos que alegaram falta de informações suficientes para estimar se haverá ou não uma guerra, quando responderam a última pergunta do questionário.

Se considerarmos que entre os que responderam F ao questionário, poderemos apenas considerar como "boas respostas" 9% delas, podemos afirmar que o debate em aula provocou um aumento de "boas respostas" para 13%. Queremos lembrar que uma resposta foi considerada como correta quando não continha contradições entre a opção feita e sua justificativa, não contendo concepções errôneas, no caso, a interpretação do fato como uma Experiência Aleatória, a suposição da eqüiprobabilidade pela falta de informações, acarretando a utilização de uma probabilidade subjetiva.

Notamos também, até este momento, a existência de dúvidas sobre a intervenção do acaso nesta situação, evidenciadas pela quantidade de opções pelo V.

Conforme programamos, lançamos para os alunos a mesma questão na qual mudamos apenas a data focal: "*Qual a chance de chover amanhã? Vocês ainda acham que esta chance é de 50%?*"

Após um rápido debate, pudemos constatar que uma mudança na data provocou a mudança esperada nas respostas dos alunos, conforme podemos observar no quadro abaixo:

V	F	?	TOTAL
25	01	04	30

Observamos assim que o conceito errôneo da eqüiprobabilidade pela falta de informações é muito forte junto aos alunos. Mesmo após conduzirmos o debate de forma a deixarmos claras as condições para que uma experiência possa ser considerada como Experiência Aleatória, de onde concluímos que os fenômenos meteorológicos não poderiam ser considerados como tal, e que portanto, não poderíamos falar de chance ou probabilidade, os alunos mantiveram, em sua maioria, a posição anteriormente adotada. Confirmamos assim os trabalhos de Tversky e Kahneman (1971), que constatam que as concepções errôneas podem persistir nas pessoas mesmo após adquirir noções básicas sobre probabilidades.

Colocamos então a segunda questão para debate: "*No lançamento de duas moedas idênticas, qual a chance de obtermos uma face "cara"?*"

Após 10 minutos de troca de opiniões com os colegas mais próximos, foram sugeridos os seguintes resultados:

3/4	"*temos 3 chances em 4, pois os resultados podem ser cara-cara, cara-coroa, coroa-cara e coroa-coroa*".
1/4	"*temos uma cara em 4 possibilidades*" - estes alunos consideraram como sucesso apenas o evento onde não ocorreria nenhuma "coroa".
4/4	"*em cada moeda temos 50% de chance de "cara". Jogando as duas ao mesmo tempo teremos 50%+50%=100%*".
1/2	"*podemos obter "cara-coroa" ou "coroa-cara", logo, 2 chances em 4 possibilidades*".

Passamos então à análise dos resultados obtidos pelos alunos nos lançamentos feitos em casa, conforme a tabela seguinte, na qual cada aluno dividiu seus resultados em grupos de 30 lançamentos e, a cada linha, foram somados os resultados anteriores. Na última coluna temos representadas, assim, as freqüências relativas acumuladas para o evento "sair uma cara" na Experiência Aleatória "Lançar duas moedas idênticas e observar o número de caras na face superior".

LINHA	LANCE	F	F%
1	30	16	53.33%
2	60	32	53.33%
3	90	49	54.44%
4	120	61	50.83%
5	150	77	51.33%
6	180	94	52.22%
7	210	117	55.71%
8	240	139	57.92%
9	270	155	57.41%
10	300	174	58.00%
11	330	190	57.58%
12	360	208	57.78%
13	390	219	56.15%
14	420	235	55.95%
15	450	251	55.78%
16	480	267	55.63%
17	510	279	54.71%
18	540	291	53.89%

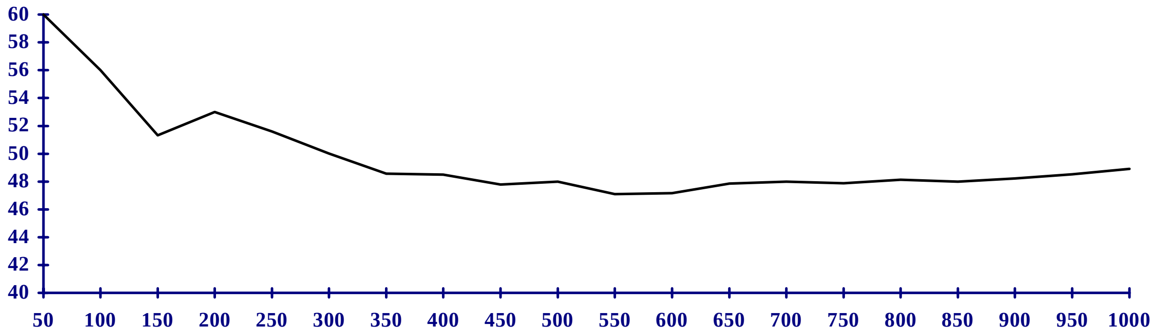
LINHA	LANCE	F	F%
31	930	504	54,19%
32	960	520	54,17%
33	990	536	54,14%
34	1020	547	53,63%
35	1050	562	53,52%
36	1080	577	53,43%
37	1110	595	53,60%
38	1140	617	54,12%
39	1170	637	54,44%
40	1200	649	54,08%
41	1230	663	53,90%
42	1260	679	53,89%
43	1290	692	53,64%
44	1320	708	54,64%
45	1350	726	53,78%
46	1380	741	53,70%
47	1410	755	53,55%
48	1440	769	53,40%

19	570	306	53.68%	49	1470	782	53,20%
20	600	324	54.00%	50	1500	800	53,33%
21	630	342	54.29%	51	1530	816	53,33%
22	660	358	54.24%	52	1560	830	53,21%
23	690	379	54.93%	53	1590	843	53,02%
24	720	397	55.14%	54	1620	854	52,72%
25	750	418	55.73%	55	1650	865	52,42%
26	780	433	55.51%	56	1680	883	52,56%
27	810	449	55.43%	57	1710	894	52,28%
28	840	465	55.36%	58	1740	914	52,53%
29	870	480	55.17%	59	1760	925	52,56%
30	900	490	54.44%	60	1790	938	52,40%

Através desta análise os alunos puderam observar a estabilização da freqüência relativa em torno do valor 52%. Em seguida, para completar este estudo, foi distribuída uma tabela com os resultados de 1000 lançamentos consecutivos de duas moedas idênticas, divulgada em [16], que resumimos a seguir, juntamente com o respectivo gráfico:

LANCE	F	F%
50	30	60,00%
100	56	56,00%
150	77	51,33%
200	106	53,00%
250	129	51,60%
300	150	50,00%
350	170	48,57%
400	194	48,50%
450	215	47,78%

500	240	48,00%
550	259	47,09%
600	283	47,17%
650	311	47,85%
700	336	48,00%
750	359	47,87%
800	385	48,13%
850	408	48,00%
900	434	48,22%
950	461	48,53%
1000	489	48,90%



Após a análise conjunta dos resultados obtidos em classe e dos resultados apresentados, os alunos retornaram aos resultados propostos quando da exposição do problema e concluíram que o correto seria o valor 1/2 ou 50% para a chance de ocorrência de uma face "cara" quando lançamos duas moedas idênticas. Conseguem perceber a ação do acaso, identificando a Experiência Aleatória e justificam por essa ação as diferenças obtidas nos valores da freqüência estabilizada.

Lançamos então a terceira e última questão desta fase, escrevendo no quadro: "*No lançamento de uma tachinha, qual a chance de obtermos a posição "ponta", ou seja, qual a chance que ela caia com a ponta tocando o solo?*"

Conforme esperávamos, os alunos perceberam a ausência de simetria na tachinha, contrariamente ao ocorrido com as moedas. Os valores estimados "a priori" pelos alunos foram 1, 1/2 e 1/3, citando como fator de influência o tamanho da ponta desta tachinha.

Passamos então à análise dos resultados obtidos por cada aluno para o lançamento de uma tachinha previamente distribuída, somando os resultados a cada etapa, como já havíamos feito para o lançamento das duas moedas. Obtivemos os seguintes valores, conforme a tabela abaixo, na qual a primeira coluna indica a ordem de chamada, a segunda indica o número de lançamentos, a terceira indica o total de sucessos e, a última, a freqüência relativa acumulada.

LINHA	LANCE	F	F%
1	30	15	50,00
2	60	27	45,00
3	90	42	46,67
4	120	54	45,00
5	150	66	44,00
6	180	80	44,44
7	210	95	45,24
8	240	110	45,83
9	270	128	47,41
10	300	146	48,67
11	330	159	48,18
12	360	169	46,94
13	390	191	48,97
14	420	209	49,76
15	450	231	51,33
16	480	248	51,67
17	510	256	50,20
18	540	266	49,26
19	570	280	49,12

LINHA	LANCE	F	F%
30	900	434	48,22
31	930	454	48,82
32	960	467	48,65
33	990	479	48,38
34	1020	502	49,22
35	1050	518	49,33
36	1080	531	49,17
37	1110	546	49,19
38	1140	561	49,21
39	1170	570	48,72
40	1200	579	48,25
41	1230	594	48,29
42	1260	614	48,73
43	1290	624	48,37
44	1320	639	48,41
45	1350	651	48,22
46	1380	662	47,97
47	1410	678	48,09
48	1440	695	48,26

20	600	293	48,83
21	630	305	48,41
22	660	323	48,94
23	690	331	47,97
24	720	346	48,06
25	750	368	49,07
26	780	380	48,72
27	810	392	48,40
28	840	404	48,10
29	870	418	48,05

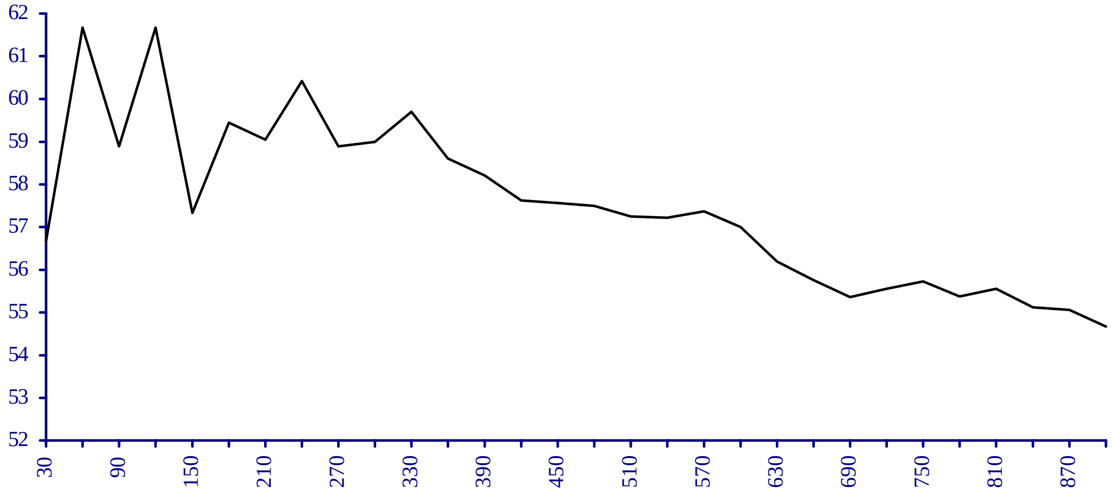
49	1470	708	48,16
50	1500	723	48,20
51	1530	738	48,24
52	1560	747	47,88
53	1590	761	47,86
54	1620	778	48,02
55	1650	790	47,88
56	1680	805	47,92
57	1700	814	47,88
58	1720	826	48,02

Após estes resultados, os alunos optaram pelo valor 1/2 como sendo a melhor chance de obtermos a posição "ponta", a exemplo do ocorrido no lançamento das moedas. Contrariamente ao previsto em nossa análise "a priori", os alunos não perceberam a impossibilidade do cálculo "a priori" deste resultado. Mesmo percebendo a falta de simetria, insistiram que sendo apenas duas posições possíveis não teríamos motivos de não calculá-la.

Apresentamos então uma tabela contendo os resultados obtidos pelos alunos franceses, com os valores seguintes:

LANCE	F	F%
30	17	56,67
60	37	61,67
90	53	58,89
120	74	61,67
150	86	57,33
180	107	59,44
210	124	59,05
240	145	60,42
270	159	58,89
300	177	59,00
330	197	59,70
360	211	58,61
390	227	58,21
420	242	57,62
450	259	57,56
480	276	57,50
510	292	57,25
540	309	57,22
570	327	57,37
600	342	57,00

630	354	56,19
660	368	55,76
690	382	55,36
720	400	55,56
750	418	55,73
780	432	55,38
810	450	55,56
840	463	55,12
870	479	55,06
900	492	54,67



Tal como na Experiência do lançamento de duas moedas idênticas, os alunos continuaram atribuindo as diferenças entre os resultados obtidos à ação do acaso, não demonstrando dúvidas quanto a identificação do Experimento Aleatório e seus possíveis resultados, ou seja, seu Espaço Amostral. Isto porém não contribui para a dissolução ou mesmo minimização da dúvida sobre o valor a ser adotado como probabilidade "a priori" para este evento.

Após estas análises, retomamos a pergunta sobre a meteorologia, e só então os alunos perceberam que não podemos estimar uma probabilidade objetiva para este tipo de fenômeno, ou seja, para fenômenos não aleatórios.

Completamos assim a seqüência de atividades para o ensino do conceito de probabilidades. A partir de então continuamos com uma série de exercícios para fixação e aplicação deste conceito, com duração de 200 minutos divididos em duas séries de 100 minutos cada, nas quais os alunos apresentaram dúvidas principalmente quanto à linguagem de conjuntos. Os problemas de contagem foram resolvidos, sempre que possível, com ajuda da árvore de possibilidades, o que facilitou bastante sua compreensão. Os exercícios de proporcionalidade não apresentaram maiores dificuldades, assim como aqueles que utilizavam a freqüência relativa dos eventos como estimativa da probabilidade destes eventos.

Uma vez que nesta seqüência também não foi apresentada uma situação a-didática conforme nossa análise em IV.4.3, não nos foi possível verificar a hipótese de que esta seria um agente facilitador da aprendizagem, o que deixaremos para um futuro trabalho de complementação.

V.5. TESTE PARA VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM

O seguinte teste consistiu de uma prova com 5 questões que têm por objetivo verificar o grau de aprendizagem do conteúdo desenvolvido, ou seja, sobre o conceito de Probabilidade, assim como seu cálculo em situações que não envolvam dificuldades combinatórias. Iniciamos com Experimentos Aleatórios, passando em seguida ao cálculo de probabilidades "a priori" e "a posteriori".

Elaboramos duas provas diferentes, mas com questões que verifiquem o mesmo conteúdo com o mesmo grau de dificuldade. Os alunos devem responder a estas questões durante 90 minutos, de forma individual.

Questão 1: *Seja* $\Omega = \{(P;V);(P;\overline{V});(M;V);(M;\overline{V});(G;V);(G;\overline{V})\}$, *onde P, M, G e V são os eventos P:"pequeno"; M:"médio"; G:"grande" e V:"verde". descreva uma Experiência Aleatória que tenha* Ω *como Espaço Amostral.*

Esta questão teve como objetivo verificar se os alunos sabem descrever uma Experiência Aleatória, bem identificando a ação do acaso nesta situação. Consideramos corretas as respostas que continham esta descrição e identificação bem definidas. Entre os 67 testes analisados, obtivemos os seguintes resultados:

Certo	Errado	Branco	Total
39	20	8	67

Estes valores nos mostram que aproximadamente metade do grupo ainda não consegue descrever uma Experiência Aleatória corretamente, muitos deles confundindo esta descrição com o ato de enunciar um exercício sobre o cálculo de Probabilidades, com termos na forma: "*calcular a probabilidade de...*", que já era por nós esperado. Devemos ressaltar que muitos destes alunos não participaram da seqüência experimental, porém tendo participado da resolução de exercícios em sala de aula. Com base nos resultados apresentados no quadro acima, podemos esperar alguma dificuldade por parte dos alunos para responderem aos próximos itens.

Questão 2: *Imagine que os dados seguintes são relativos ao número de erros de dicção por uma criança de um grupo experimental. Construa uma tabela de freqüências relativas (%). A partir dessa estatística, podemos estimar a probabilidade de termos mais de 8 erros para uma criança?*

3	1	0	6	1	2	4	11	8	3
0	7	8	9	6	5	12	3	12	4

Esta questão objetivava verificar a associação de freqüência relativa e probabilidade feita pelo aluno. O número de respostas corretas para a confecção da tabela de distribuições encontra-se no quadro abaixo:

Certo	Errado	Branco	Total
47	17	3	67

O número de respostas corretas para a estimativa da probabilidade através da sua associação com a freqüência relativa encontra-se no quadro abaixo:

Certo	Errado	Branco	Total
29	20	18	67

Observamos aqui que a maioria do grupo observado não consegue associar a freqüência relativa à probabilidade do evento analisado, tendo aumentado bastante a porcentagem de alunos que deixaram de responder a este item, tendo respondido ao anterior corretamente. Podemos então concluir que o aprendizado não ocorreu, seja por motivo de ausência do aluno nas seqüências da engenharia aplicada, seja por tempo de fixação insuficiente, tendo em vista as características da classe, composta em sua maioria por alunos com grande dificuldade em Matemática.

Questão 3: *Uma urna A contém 5 bolas numeradas: 1; 1; 1; 2; 2. Uma urna B contém 3 bolas numeradas: 4; 6; 8. Seja a Experiência Aleatória "tiramos ao acaso uma bola da urna A e uma bola da urna B". Utilizando uma árvore de possibilidades, complete: a)Ω=*

b) A probabilidade de obtermos números iguais nas duas bolas é _______ porque__________ .

Esta questão procurou verificar se o aluno aplicava corretamente o conceito de proporcionalidade para calcular a probabilidade "a priori" de um evento associado a uma Experiência Aleatória. Esperávamos que não se apresentassem maiores dificuldades para sua resolução, uma vez que este foi um dos itens melhor assimilados durante os exercícios resolvidos em classe. A distribuição de respostas corretas encontrada foi:

Certo	Errado	Branco	Total
39	16	12	67

Observamos aqui ainda um grande número de questões respondidas incorretamente ou deixadas sem qualquer resposta. Comparando estes resultados com os da primeira questão apresentada pudemos observar que 20 alunos, entre os 67 analisados, não acertaram nenhuma das duas questões, seja por resposta incorreta, seja por ausência de resposta. Isto confirma nossa expectativa diante dos erros cometidos na descrição de uma Experiência Aleatória, uma vez que a identificaçào de um Espaço Amostral depende exclusivamente do reconhecimento da Experiência que o gera.

Para o próximo item, que diz respeito ao cálculo da probabilidade para o evento "sair dois números iguais" encontramos a seguinte distribuição :

Certo	Errado	Branco	Total
42	13	14	69

Podemos observar uma grande porcentagem de acertos que podemos atribuir ao fato de que, em sendo o evento impossível, bastava a simples observação da composição de cada uma das urnas para responder corretamente a esta questão. Tornam-se, portanto, mais significativos os resultados obtidos no item anterior, uma vez que desejamos analisar o grau de aprendizagem sobre o Conceito de Probabilidades.

As questões 4 e 5 propostas no teste não nos permitiram avaliar o conteúdo de Probabilidades, uma vez que os estudantes se detiveram em dificuldades geradas pela formulação do problema (variável de vocabulário), dificuldades estas previstas porém não com tal intensidade, uma vez que apenas 3 entre os 67 respondentes resolveram corretamente este problema. Assim como para alunos franceses, a linguagem de conjuntos introduz uma dificuldade extra ao cálculo das Probabilidades, fazendo com que os alunos desistam da resolução por não conseguirem identificar um modelo matemático adequado.

V.6. TESTE PARA REAVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Visando clarificar ou completar algumas conclusões decidimos aplicar um teste para reavaliação do grupo estudado, cujas respostas não dependessem de um conhecimento baseado em métodos ou fórmulas de resolução, ou seja, um teste composto por perguntas as quais os alunos pudessem responder através da utilização correta da lógica matemática.

Elaboramos para isto três questões que seriam aplicadas durante o mes de Outubro, ou seja, 5 meses após a realização da seqüência, e os alunos deveriam responder em duplas, sem tempo limitado.

Questão 1: *Dê um exemplo de Experiência Aleatória e um de Experiência não Aleatória. Indique a diferença entre as duas situações e descreva o Espaço Amostral da Experiência Aleatória.*

O objetivo desta questão é verificar se o aluno reteve o conceito correto de Experiência Aleatória, sabendo diferenciá-la de outros tipos de experiências que podem ocorrer.

Questão 2: *Uma classe especial, turma A, contém 7 crianças, das quais 2 são destras. Outra classe, turma B, contém 8 crianças das quais 3 são destras. Seja a Experiência Aleatória "**sortear uma criança de cada sala e verificar se é destra**".*

a) Descreva o Espaço Amostral.

b) Qual a probabilidade de sortearmos apenas uma criança destra entre as duas escolhidas?

O objetivo desta questão é verificar se o aluno mantém a associação proporção-probabilidade, ou seja, se consegue utilizar corretamente a proporcionalidade para o cálculo "a priori" da probabilidade de um evento.

Questão 3: *Qual a probabilidade de um certo time ganhar um campeonato de futebol? Por quê?*

O objetivo desta questão é verificar se a concepção errônea que deduz a eqüiprobabilidade pela insuficiência de informações ou que utiliza a probabilidade subjetiva em situações não adequadas para tal foi corrigida ou ainda persiste junto aos alunos, conforme os estudos de Tversky e Kahneman (1971), já citados em I.3.

CONCLUSÃO

CONCLUSÃO.

Nossa pesquisa objetivou utilizar a visão freqüentista como um agente facilitador para o aprendizado dos conceitos básicos em Probabilidades, devido a sua maior proximidade com a realidade dos alunos. Seguindo o pensamento de Bernoulli, poderíamos utilizar exemplos tais como a estimação da probabilidade de ocorrência de fatos sociais que não poderiam ser calculadas "a priori", o que tornaria o ensino mais significativo.

Partimos das noções de Experiência Aleatória, Espaço Amostral, freqüência de um evento simples e a busca de um modelo matemático que melhor expressasse a realidade. Para isto, optamos por colocar os alunos em situações as quais, através da experimentação, pudessem realizar esta modelização do real e descrever a Experiência Aleatória, seu Espaço Amostral, observando a estabilização da freqüência relativa quando repetimos a Experiência um grande número de vezes.

Assim, buscamos trabalhar sobre as concepções espontâneas dos alunos, conforme nos sugere o trabalho de J. Bordier e S. Maury, algumas das quais pudemos classificar como dificuldades didáticas, ou seja, concepções que dificultariam a aprendizagem desejada. Podemos citar como as mais freqüentes e que foram por nós identificados como devidos a entraves de natureza cognitiva:

- a crença da eqüiprobabilidade devido a ausência de informações sobre o evento a ser observado;
- a crença de que a probabilidade de um evento pode ser influenciada por informações obtidas pelo observador;

Estas concepções ganham maior evidência quando comparamos as respostas dadas no questionário para a questão sobre roletas com diferentes configurações e a urna, assim como as respostas quando perguntamos sobre a probabilidade de obtermos uma determinada posição quando do lançamento das moedas ou da tachinha. Nestas situações ficou bastante claro que os alunos utilizavam as informações dadas (ou não) para o cálculo estimativo destas probabilidades, sem contudo realizar uma análise científica dos fatos, mas simplesmente utilizando sua intuição para filtrar as informações que julgasse pertinentes.

Este fato gera uma certa confusão na busca do modelo matemático adequado, causada pela substituição de significados específicos por outros subjetivos, o que podemos supor devido a entraves de natureza didática conforme definimos em nossa metodologia.

Um ponto bastante positivo e que reforça nossa opção pela visão freqüentista reside no fato de que a maioria dos alunos, devido a sua própria experiência de vida, já utilizam a freqüência relativa de um evento para estimar sua probabilidade, mesmo que de uma forma bastante intuitiva, ingênua, independente da realização de experimentos para verificar sua estabilização.

Com isto, confirmamos os estudos de Fischbein e de Tversky e Kahneman, já citados no Capítulo II, e que concluem pelo encorajamento de um ensino precoce de Probabilidades e também que certas concepções errôneas podem persistir mesmo após o aprendizado de noções básicas deste conteúdo. Ficou bastante clara para nós a diferença na aquisição destas noções e mesmo na correção dos erros de raciocínio, que aconteceu de forma muito mais significativa, com menos dificuldades para os alunos mais jovens.

No que concerne ao grupo observado no Brasil, esta cultura adquirida informalmente, juntamente com o fato de que alguns alunos haviam recebido noções de probabilidade durante o segundo grau sem contudo tê-las assimilado como uma interpretação da realidade, provocou uma maior dificuldade no aprendizado, muito embora a utilização da visão freqüentista tenha minorado, conforme pudemos constatar, esta situação.

Pudemos observar que nas respostas do teste realizado durante o mês de outubro, ou seja, cinco meses após as seqüências aplicadas, ressurgiram algumas concepções errôneas que pareciam ter sido corrigidas anteriormente. Este fato nos faz levantar a hipótese da necessidade de um maior período para o desenvolvimento deste conteúdo e da aprendizagem, em séries anteriores, no caso, no Segundo Grau, de conceitos Estatísticos básicos para que houvesse um tempo maior de maturação deste tipo de atitude, ou seja, da utilização de um raciocínio científico para a descrição de uma situação real. Citamos como exemplo os trabalhos de A. Xavier [34], que sugerem uma seqüência para este ensimo bastante simplificada, destinada à jovens a partir de 11 anos de idade. O livro para o aluno é dividido em quatro capítulos que discorrem desde os primeiros conceitos de estatística, passando pela organização de dados, contagem, e finalmente, freqüências e probabilidades, sugerindo o trabalho em grupos para a realização de experimentos em condições reais e resolução de problemas.

Durante as sessões observadas, pudemos constatar que os alunos conseguiram assimilar proporção como probabilidade, o que foi mais difícil para a relação "freqüência relativa - probabilidade", ou seja, verificamos que uma única observação da estabilização desta freqüência não foi suficiente, principalmente quando estudamos eventos cuja probabilidade não pode ser calculada "a priori". Acreditamos que este fato é devido à dificuldade em analisar as condições particulares de cada evento através de uma lógica adequada, conforme já mencionamos. Poderíamos aqui sugerir a utilização do computador para simular situações, conforme o estudo de J. Bordier [6] e Xavier [34], mas também a realização de outros experimentos que possam ser associados à realidade de cada aluno, conforme sugere Cristina Maranhão em [24].

Esta dificuldade é ampliada pela falta do hábito dos alunos em construir um modelo matemático, ou seja, um modelo que utilize o raciocínio científico, diferente do raciocínio quotidiano. A situação tendeu a um agravamento quando da introdução da linguagem dos conjuntos, também identificada como um entrave didático devido à organização do conteúdo programático para o Primeiro e Segundo Graus.

Com relação às dificuldades combinatórias, limitamo-nos, conforme detalhado em nossa metodologia, aos problemas mais simples de contagem, para os quais pudemos recorrer ao recurso da árvore de possibilidades com bastante sucesso. Queremos com isso dizer que a utilização deste instrumento não causou maiores dificuldades para os alunos. Em classes mais avançadas, para as quais já houve um estudo anterior da Análise Combinatória, não precisaríamos ter esta preocupação, e este conhecimento seria utilizado para o cálculo da probabilidade "a priori", quando estivéssemos sob a hipótese da eqüiprobabilidade.

Analisando agora as atividades desenvolvidas nas seqüências de trabalho, pudemos constatar que as experimentações foram, em um primeiro momento, vista pelos alunos como uma atividade de lazer e não como algo que objetivasse um aprendizado. Houve certamente uma quebra no contrato didático existente até o momento, provocando uma dispersão por parte de alguns alunos, embora poucos. Esta atitude, pensamos, poderia ter sido minorada ou mesmo evitada se o aluno fosse colocado diante de um problema a ser resolvido, tal como a estimação de algum fato ligado, como dissemos anteriormente, a sua realidade, e cuja probabilidade não pudesse ser calculada a priori, mas unicamente através da observação da estabilização da freqüência. Constatamos assim que as questões lançadas anteriormente à realização do experimento das moedas e da tachinha não foram suficientes para colocar os alunos nestas situações, já definidas por nós como a-didáticas.

O fato de termos realizado a análise do lançamento das moedas anteriormente à análise do lançamento da tachinha nos parece ter reforçado a utilização de um raciocínio não científico para a estimação da probabilidade, reforçando a concepção errônea sobre a existência da eqüiprobabilidade quando da ausência de informações suficientes sobre o evento observado. O argumento mais freqüente foi que *existem apenas duas posições possíveis*, e que foi reforçado, contrariamente ao desejado, pelo valor ao redor do qual se estabilizou esta freqüencia, como já observamos, 50%. Acreditamos que este fato teria sido evitado, ou pelo menos minorado, se a tachinha escolhida possuísse ponta mais alongada ou mesmo, se lançássemos qualquer outro objeto irregular que não permitisse um cálculo "a priori" da probabilidade da posição na qual se imobilizaria após lançado.

O ponto de vista social nos leva, finalmente, a reforçar a necessidade de um ensino do cálculo de Probabilidades desde o Segundo Grau através da visão freqüentista, para que possa mais um instrumento de leitura da realidade na qual estamos inseridos e a qual podemos diariamente acompanhar pelos noticiários, repletos de dados estatísticos. No Brasil, principalmente, onde convivemos com uma inflação crescente, se faz necessária a análise de todas as informações que possam nos levar a uma estimativa correta para uma tomada de decisão que nos ajude a administrar nosso dia-a-dia. Podemos citar como exemplo a necessidade de se estimar a probabilidade de sucesso em determinado investimento, para que tenhamos nossos rendimentos com a menor perda de poder aquisitivo que se faça possível, o que só será possivel através da observação da estabilização da freqüência deste sucesso.

ANEXOS

ANEXO I - Questionário aplicado em alunos franceses.

- **Questão 1:** *Em uma urna A existem numerosas bolas, azuis e vermelhas. Tira-se uma bola ao acaso, recolocando-a na urna e misturando-a às demais. Repete-se esta experiência 100 vezes. Entre as 100 bolas tiradas e recolocadas, observam-se 60 bolas vermelhas e 40 azuis. Tira-se uma nova bola após agitar bem o conteúdo da urna.*

  1. Como você interpreta as palavras "ao acaso" deste enunciado?

  2. A informação dada: "sobre 100 bolas, obtém-se 60 vermelhas e 40 azuis" é útil par fazer uma predição sobre a próxima bola a ser sorteada?

  sim☐ *não*☐

3. Com qual frase você concorda mais?

a) Sendo as bolas misturadas dentro da urna, a próxima bola será sorteada ao acaso, não se podendo prever com certeza a sua cor.

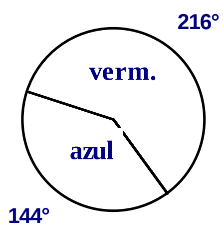
b) Todas as bolas têm a mesma chance de sorteio. A probabilidade de ter uma bola vermelha é igual à proporção de bolas vermelhas na urna.

c) Na falta de informação precisa sobre a composição da urna, uma bola vermelha tem tantas chances de ser sorteada quanto uma azul.

d) Pelas experiências precedentes, existem 6 chances em 10 de tirar uma bola vermelha.

Quais são as outras frases com as quais você também concorda?

- **Questão 2:** *Dispondo-se de uma outra urna B contendo 3 bolas vermelhas e 2 azuis, e de uma "roleta" C, dividida em dois setores, um vermelho e um azul, como indica a figura seguinte:*

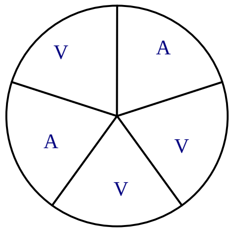


Para obter a cor vermelha com as melhores chances possíveis, qual instrumento você utilizaria:

a) a urna A ☐ *b) a urna B* ☐ *c) a urna C* ☐

Explique sua escolha.

Se você tivesse a roleta D seguinte:



você daria preferência a ela ao invés da roleta C para obter vermelho com as melhores chances?

sim ☐ *não* ☐ *são semelhantes* ☐

Explique sua resposta.

- **Questão 3:** *Da urna B tiram-se 5 bolas (repondo e agitando a cada sorteio). Em qual seqüência você apostaria?*

  a) vermelha, vermelha, vermelha, vermelha, vermelha. ☐

  b) vermelha, vermelha, azul, vermelha, vermelha. ☐

  c) as duas seqüências têm a mesma chance. ☐

- **Questão 4:** *Em uma urna E existem 10 bolas numeradas de 0 a 9. Tiram-se sucessivamente, com reposição, 1000 bolas, obtendo-se a seqüência de números da página seguinte, chamada "tabela de* *números aleatórios". Você quer jogar dados com um amigo, mas vocês não têm os dados. Esta tabela pode ser útil para o jogo?*

sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

Como você a utilizaria?

- **Questão 5:** *Lançam-se ao mesmo tempo 2 dados idênticos. A frase seguinte é verdadeira ou falsa? "A probabilidade de ter um "5" e um "6" é a mesma probabilidade de ter dois "6". "*

  verdadeira ☐ *falsa* ☐ *eu não sei* ☐

  Explique sua escolha.

  Como você interpreta a palavra "probabilidade"?

- **Questão 6:** *Em 100 lançamentos de "cara ou coroa" obtém-se 60 coroas e 40 caras. Esta informação é útil para estimar a probabilidade de termos "coroa" no 101º lançamento?*

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  Vamos lançar a moeda outras 10 vezes. Em qual eventualidade você apostaria?

  a) Existirão tantas caras quantas coroas.

  b) Existirão mais coroas que caras.

  c) Existirão mais caras que coroas.

  Explique sua escolha.

Que diferença você vê, comparando as questões 1 e 6?

- **Questão 7:** *A frase seguinte parece verdadeira para você?*

  "Não se sabe se em 1993 um novo cometa aparecerá no céu: existe uma chance em duas para que isto aconteça."

  verdadeira ☐ *falsa* ☐ *eu não sei* ☐

  Explique sua escolha.

- **Questão 8:** *Em um bairro de Paris onde existem cerca de um milhão de habitantes, queremos saber a proporção de crianças de 5 a 15 anos que não sabem nadar. Fazemos uma sondagem através de uma amostra de crianças escolhidas ao acaso. Para ter uma idéia precisa desta proporção, podemos limitar esta amostra a:*

  ☐ *10 crianças.*

  ☐ *100 crianças.*

  ☐ *1000 crianças.*

  ☐ *mais de 1000 crianças.*

  Queremos conhecer igualmente esta proporção para toda a cidade de Paris. Qual o número de crianças que deverão ser interrogadas para se ter uma idéia precisa desta proporção?

  ☐ *10 crianças.*

☐ *100 crianças.*

☐ *1000 crianças.*

☐ *mais de 1000 crianças.*

Você pode explicar suas escolhas?

- **Questão 9:** *A partir das estatísticas dos anos precedentes podemos ter uma idéia aproximada sobre o número de acidentes rodoviários que acontecerão na França em 1993?*

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  Você pode explicar a ligação entre os acidentes registrados em 1992 e os que acontecerão em 1993?

- **Questão 10:** *(resposta facultativa)*

  O futuro já está escrito na realidade de hoje?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  O acaso pode modificar este futuro?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

  Os homens podem fazer escolhas que modifiquem seu futuro?

  sim ☐ *não* ☐ *eu não sei* ☐

ANEXO II - Questionário para reavaliação de aprendizagem, aplicado em alunos brasileiros.

Questão 1: *Dê um exemplo de Experiência Aleatória e um de Experiência não Aleatória. Indique a diferença entre as duas situações e descreva o Espaço Amostral da Experiência Aleatória.*

Questão 2: *Uma classe especial, turma A, contém 7 crianças, das quais 2 são destras. Outra classe, turma B, contém 8 crianças das quais 3 são destras. Seja a Experiência Aleatória "**sortear uma criança de cada sala e verificar se é destra**".*

a) Descreva o Espaço Amostral.

b) Qual a probabilidade de sortearmos apenas uma criança destra entre as duas escolhidas?

Questão 3: *Qual a probabilidade de um certo time ganhar um campeonato de futebol? Por quê?*

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

[1] APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). Avaliação do Programa de Matemática para a Primeira Série do Segundo Grau - 1991.

[2] Artigo publicado na revista Ça m'interesse, 141, nov/92, pp18.

[3] ARTIGUE, Michèle. Ingénierie Didactique em Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9/3,pp281-308.1989.

[4] BACHELARD, Gaston. Le nouvel Esprit Scientifique. Presses Universitaires de France, Paris. 1958.

[5] BERNOULLI, Jacobi. L'Ars Conjectandi . Texto original em latim, com tradução francesa de Norbert MEUSNIER. Publicação do IREM de ROUEN, 1987. pp42 e pp66.

[6] BORDIER, Jacques. Un Modèle Didactique Utilisant la Simulation sur Ordinateur pour l'Enseignement de la Probabilité. Thèse de Doctorat - Paris VII. 1991.

[7] BOREL, Émile. Valeur Pratique et Philosophie des Probabilités. Gauthier-Villars. Paris. 1939.

[8] BROUSSEAU, Guy. Les Obstacles Epistémologiques et les Problèmes en Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathémetiques, Vol. 4, n§2, pp165-198. 1983.

[9] BRU, Bernard. Petite Histoire du Calcul des Probabilités, dans Fragments d'histoire des Mathématiques - Brochure A.P.M.E.P.n§41, 1981, pp141-157.

[10] D'ALEMBERT, Jean Le Rond. La Grande Encyclopédie. Artigo "Croix ou Pile".

[11] DROESBEKE, Jean-jacques e TASSI, Philippe. Histoire de la Statistique. Presses Universitaires de France, 1990. 127páginas. (citação na pp25).

[12] Enseigner les Probabilités en Classe de Première (PRG- 1991), par un groupe de l'Irem de Strasbourg. Brochure de l'IREM de Strasbourg. 1992.

[13] Evaluation des compètences des élèves acquises en fin de programme de l'APMEP - Publicação do IREM de Besançon.

[14] FISCHBEIN, Efraim et al. Factors Affecting Probabilistic Judgements in Children and Adolescents, em Educational Studies in Mathematics, 22, pp523-549. 1991.

[15] FRÉCHET, Maurice. Les Mathématiques et le Concret em Philosophie de la Matière. Presses Universitaires de France. Paris. 1955. pp153-164.

[16] HENRY, Annie et Michel. L'Enseignement des Probabilités dans le Programme de Première , em Repères n§6.1991. Publicação IREM.

[17] HENRY, Michel. Une Présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants. Irem de Besançon. 1991.

[18]__________ Des Statistiques aux Probabilités: l'approche fréquentiste. Actes du Colloque inter - IREM, premier et seconde cycle. Saint Nazaire. Junho de 1993.

[19] __________ Introduction à la Théorie des Probabilités et à son Enseignement. em Repères-IREM, número 14. Publicação dos IREM. 1994 (à publicar).

[20] IREM. Groupe Epistémologie et Histoire. Les Paradoxes du Calcul des Probabilités em Mathématiques au Fil des Âges. Gauthier-Villars. pp231-234.

[21] LAPLACE, Pierre-Simon. Essai Philosophique sur les Probabilités. (1825) Christian Bougeois Editeur. 5è edition, 1986. Prefácio de René Thom.

[22] LEGRAND, M. "CIRCUIT" ou les règles du débat mathématique. em Enseigner autrement les mathématiques en DEUGA - premiére année. Comission Inter-IREM Université. Edição IREM de Lyon. 1991. pp.129-145.

[23] Les Cahiers de Fontenay n§32: La Correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat, E.N.S.Fontenay aux Roses (sept 1983).

[24] MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Matemática. Coleção magistério 2§ Grau, Série formação geral. Ed. Cortez. 1991. pp101-102.

[25] MARGOLINAS, Claire. De L'Importance du Vrai et du Faux dans la classe de Mathématique. La Penseé Sauvage Éditions. 1993.

[26] MAURY, Silvette. Contribuition à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes . Thèse d'Etat, Montpellier I. 1986.

[27] ___________. Procedures dans la resolution de Problemes Probabilistes, em Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. La Pensée Sauvage Editions.

[28] NOETHER, Gottfried E. Introdução à Estatística - Uma abordagem não Paramétrica. Guanabara Dois.1983.

[29] POINCARÉ, Henri. Calcul des Probabilités.(1912). Editions Jacques Gabay. 2nd edition. Paris. 1987.

[30] ROBERT, A. et GRAS, R. Problemes Methodologiques en Didactique des Mathématiques.

[31] ROGERSON, Alan. Papers on the Teaching of Probability and Statistics. 1982.

[32] STEINBRING, Heinz. The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge, em Educational Studies in Mathematics, 22, pp 503-522. 1991

[33] TAILLARD, Freddy. Probabilités et Statistique. Monographies de la comission Romande de Matheématique. Societé Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique.Editions du Tricorne. 1991.

[34] XAVIER, Airton Fontenele Sampaio. L'Enseignement de Notions de Statistique et Probabilités à l'école élementaire : Le rôle de L'Informatique. Apresentado no "International Symposium on the Informatics and the Teaching of Mathematics in Developing Countries", Fevereiro de 1986.