ARMANDO RAPHAEL D'AVOGLIO

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Uma forma significativa de introduzir o conceito

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2002

ARMANDO RAPHAEL D'AVOGLIO

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Uma forma significativa de introduzir o conceito

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

PUC/SP
São Paulo
2002

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ Local e Data: ___________

Aos meus pais

Cezar D’Avoglio e
Vicenza Donato
“In Memoriam”

AGRADECIMENTOS

À ***Professora Doutora. Sonia Barbosa Camargo Igliori****, pela orientação sábia e segura que me proporcionou nesta pesquisa.*

Aos ***Professores Doutores Benedito Antonio da Silva*** *e* ***Octávio Mattasoglio Neto****, por aceitarem participar da Banca Examinadora e pelas sugestões que me foram muito proveitosas.*

Aos ***Professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP****, pela sabedoria na condução do processo ensino-aprendizagem*

Aos ***meus colegas****, pelo convívio e amizade*

Aos ***funcionários da PUC/SP****, pela maneira cordial com que sempre me trataram.*

À ***minha esposa Marlene****, também* ***professora de Matemática****, pelo incentivo, revisão do trabalho e compreensão pelas ausências,*

Aos meus filhos, ***Vânia****,* ***Adriano****,* ***Alessandra*** *e* ***Luciana*** *e ao meu* ***irmão Heitor****, pelo incentivo que sempre me proporcionaram*

Aos ***professores e alunos****, que colaboraram para que esta pesquisa se tornasse realidade.*

O autor

RESUMO

Esta é uma pesquisa de intervenção. Foi realizada com alunos que iniciavam o curso superior, na área de Exatas.

O objetivo dela é o de investigar se a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, por meio de conceitos familiares aos alunos e com um certo relacionamento com o cotidiano deles, como o de velocidade por exemplo, produziria efeitos para a melhoria da aprendizagem dessa noção.

A intervenção foi realizada pela aplicação de uma seqüência didática, contendo sete atividades. Na elaboração da mesma, foram utilizados conceitos básicos de cinemática, de modo a contribuir com que o aluno participasse da sistematização do conceito de derivada de uma função num ponto. E, com o pressuposto de que, se assim ocorresse, eles poderiam dar mais significado ao novo conceito, tornando sua aprendizagem mais significativa.

Para as análises dos resultados, nos apoiamos na Teoria da Aprendizagem Significativa de AUSUBEL. Nossa conclusão é que houve vantagens nessa forma de introduzir derivada; que o aluno pode dar mais significado à essa noção; e que houve melhoras na compreensão da mesma.

Palavras-Clave: Cálculo, Derivada, Cinemática, Aprendizagem *significativa*.

ABSTRACT

This is na intervention research. It was carried through with students who initiated the superior course, in the area of Accurate.

The objective of it is to investigate if the introduction of the concept of derivative of a function in a point, by means of familiar concepts to the students and with a certain relationship with the daily one of them, as of speed for example, it would produce effect for the improvement of the learning of this notion.

The intervention was carried through by the application of a didactic sequence, contends seven activities. In the elaboration of the same one, basic concepts of kinematics had been used, in order to contribute with that the student participated of the systematization of the concept of derivative of a function in a point. And, with estimated of that, if thus it occurred, they could give more meant to the new concept, becoming its more significant learning.

For the analyses of the results, in we support them in the Theory of the Significant Learning of AUSUBEL. Our conclusion is that it had advantages in this form to introduce derived; that the student can give more meant to the this notion; e that had improvements in the understanding of the same one.

Keywords: Calculus, Derivative, Kinematics, Meaningful Learning.

SUMÁRIO

CAPITULO 6

CAPÍTULO 7

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Esta dissertação é o resultado de uma pesquisa realizada com um grupo de estudantes de cálculo diferencial e integral, tendo como objetivo verificar se a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade instantânea, poderia favorecer o seu aprendizado.

A opção de procurar introduzir o conceito de derivada a partir do conceito de velocidade, se deve, por ser este, um conceito bastante conhecido dos alunos. De fato, eles estão familiarizados com as velocidades dos carros e de outros móveis, sabendo também que existe um instrumento para medir essas velocidades, que é o velocímetro. No momento de se estudar taxas de variação instantâneas, de uma maneira geral, a velocidade é um caso bem próximo do aluno e que está relacionado com suas experiências extra escolares de cada dia.

Corrobora com isso, os dizeres de Simmons (1987, p.86),

> *"O conceito de derivada está intimamente relacionado com o problema de calcular a velocidade de um objeto móvel. Foi esse fato que tornou o Cálculo um instrumento de pensamento essencial para Newton, em seus esforços para descobrir os princípios da Dinâmica e compreender os movimentos dos planetas. Poderia parecer que só os estudantes de Física achariam vantajoso preocupar-se com idéias precisas acerca da velocidade. No entanto, essas idéias dão uma introdução bastante fácil ao conceito geral de taxa de variação e esse*

conceito é importante em muitos outros campos de estudo, incluindo as ciências biológicas e sociais – especialmente Economia"

Nossa pesquisa, sofreu influência do trabalho de Silva e Igliori (1996), no qual os autores elaboram uma seqüência didática, composta de seis fichas, com o objetivo de introduzir o conceito de derivada, evidenciando que esse conceito se refere a medida de variação. Na primeira ficha apresentam um problema do mundo concreto, a fim de que, ao tentar resolvê-lo, os alunos sentissem a necessidade de um instrumental que atendesse as suas atuais necessidades. Essa seqüência foi aplicada à duas duplas de alunos, selecionados dentre os que haviam apresentado os piores resultados na disciplina de Cálculo, do curso de Computação da PUC-SP, os quais afirmaram ao final, que aprenderam o que é derivada. Os autores sugerem que o trabalho pode ser continuado, tentando-se aplicar uma seqüência para uma classe inteira de alunos.

Após a leitura de alguns trabalhos relacionados com o tema, como Cassol (1998), Dall'anese (2000), Silva (1995), Silva e Igliori (1996), dentre outros, e a aplicação de um questionário a cinco professores de cálculo, com o propósito de obter informações sobre suas práticas de ensino do conceito de derivada, preparamos e aplicamos um teste de sondagem a 138 alunos, de três instituições de ensino superior, duas particulares e uma oficial, que já haviam estudado o assunto, visando verificar seus conhecimentos sobre o conceito de derivada.

Com base nas informações obtidas, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática, composta de sete atividades, envolvendo conceitos básicos de cinemática, familiares, desde o ensino médio, à uma população de alunos que iria iniciar o estudo de derivada. Nosso objetivo era introduzir o conceito de derivada num ponto, a partir do conceito físico de velocidade instantânea, fazendo com que eles participassem da construção de seus conhecimentos e sentissem a necessidade de um novo instrumental que pudesse resolver problemas, cujos enunciados continham dados de sua realidade.

CAPÍTULO 2

PROBLEMÁTICA

Através de nossa prática docente de muitos anos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, foi possível constatar, que os alunos apresentam dificuldades para entender o conceito de derivada, definido de maneira formal a partir do conceito de limite.

Pesquisas realizadas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, apontam e analisam essas dificuldades.

Cornu (1991) e Sierpinska (1985) realizaram investigações a respeito do conceito de limite, analisando as respostas dos alunos, submetidos a tarefas e processos de aprendizagem.

Segundo eles, *"é grande a dificuldade do ensino e aprendizagem desse conceito, que se radica não somente em sua riqueza e complexidade, mas também no fato de que os aspectos cognitivos implicados, não podem ser gerados simplesmente a partir da definição matemática, que pode ser memorizada. A primeira noção que se tem de limite é uma noção dinâmica de* ***aproximação*** *e a maneira que se utiliza o conceito para resolver problemas está relacionada não somente com a definição mas com propriedades de um aspecto intuitivo do conceito. Isto explica por que muitos alunos acreditam compreender o conceito de limite sem haver adquirido as implicações do conceito formal".*

Esses estudos de Cornu (1991), mostraram que os estudantes possuem o que ele denomina de **“concepções espontâneas pessoais”,** oriundas de suas experiências pessoais.

Assim, por exemplo, a expressão **“tende a”,** pode-se interpretar de várias maneiras, como *aproximar mantendo a distância*, *aproximar sem alcançar*, *aproximar alcançando*, enquanto que a palavra **limite** tem o sentido de *não poder ser ultrapassado*, embora possa ser interpretado como, *alcança mas não ultrapassa* ou *não se ultrapassa e nem se alcança*.

Tanto Cornu como Sierpinska também sinalisam obstáculos cognitivos no **aspecto geométrico do limite**, e em particular, no problema de considerar a tangente num ponto de uma curva, como o *limite das secantes que passam por esse ponto*.

Orton (1980), em suas investigações sobre a concepção dos alunos a respeito do conceito de derivada, baseada em entrevistas com 110 estudantes, classifica os erros dos alunos em três tipos:

a) **erros estruturais** (relacionados com os conceitos essenciais implicados);
b) **erros arbitrários** (o aluno se comporta arbitrariamente sem levar em conta os dados do problema) e
c) **erros executivos** (erros na manipulação, apesar dos conceitos implicados terem sido entendidos).

Quanto aos resultados mais relevantes de sua investigação, ele destaca:

- *Dificuldades na manipulação de fórmulas* para se obter a derivada de uma função.
- *Dificuldades significativas dos estudantes na conceituação dos processos de limite* que sustentam o conceito de derivada.

- *Dificuldades em utilizar apropriadamente as representações gráficas*. Estudantes capazes de obter corretamente a função derivada de uma função polinomial e de achar o coeficiente angular da tangente num ponto dado, se mostram incapazes de avaliar essa mesma taxa de variação a partir do gráfico correspondente.

Tanto Orton, como Tall (1986), sinalisam também a dificuldade dos alunos na compreensão e manejo dos símbolos dx, dy, dy/dx, Δx e Δy.

Considerando então, que os alunos apresentam dificuldades na compreensão do conceito de derivada, definido de maneira formal a partir do conceito de limite, colocamos a seguinte pergunta:

Em que medida, a introdução do conceito de derivada num ponto, a partir do conceito de velocidade, isto é, taxa variação instantânea entre espaço e tempo, apresenta efeitos na aprendizagem ?

Para tentar responder essa indagação, organizamos uma seqüência didática, constituída de atividades compostas de problemas relacionados com situações reais, envolvendo os conceitos básicos da cinemática escalar, tempo, posição, espaço, variação do tempo, variação do espaço, velocidade média e instantânea, com o objetivo de introduzir o conceito de derivada, a partir do conceito físico de velocidade, de modo que o aluno pudesse participar da construção de seu conhecimento e sentisse a necessidade de um novo instrumento para resolver problemas relacionados com o mundo concreto, para que sua aprendizagem se tornasse mais significativa.

CAPÍTULO 3

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLOGIA

3.1. Referencial Teórico

Para elaborar a seqüência didática e analisar seus resultados, nos apoiamos na Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1963, 1968, 1978)

Segundo Ausubel (1963), aprendizagem significativa é um processo por meio do qual, uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de *maneira substantiva* (não literal) e *não arbitrária*, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo, isto é, nesse processo, a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, chamada por ele de "conceito subsunçor", existente na estrutura cognitiva do aprendiz, capaz de servir de "ancoradouro" à nova informação, de modo que esta adquira, assim, significado para o sujeito.

Pode-se dizer, então, que para ocorrer a aprendizagem significativa, aquilo que se ensina deve se relacionar aos conhecimentos prévios do aluno.

Não arbitrariedade e substantividade são, para ele, as características básicas da aprendizagem significativa. *Não arbitrariedade* quer dizer que a nova informação não se relaciona com qualquer aspecto da estrutura cognitiva, mas sim com conhecimentos relevantes (subsunçores), nos quais se "ancora" e, *substantividade* significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva, é a substância do novo conhecimento, não as palavras precisas usadas para expressá-lo.

Ausubel (1968) ao explicitar as condições para a aprendizagem significativa, diz que além do material da aprendizagem ser potencialmente significativo, isto é, ser relacionável à estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e não literal, o aprendiz deve, também, *manifestar uma disposição* para relacionar o novo material, de modo substantivo e não arbitrário, à sua estrutura de conhecimento.

Ou seja, para ocorrer a aprendizagem significativa, é preciso que o aprendiz *queira* relacionar de maneira não arbitrária e não literal, o novo material aos seus conhecimentos prévios e não ter, apenas, a intenção de memorizá-lo de maneira arbitrária e literal.

Este outro tipo de aprendizagem, que é aquela em que novas informações são armazenadas de maneira arbitrária e literal, não interagindo com as já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação, Ausubel chama de "*mecânica*".

Ele próprio (1978, p. 41), fornece um exemplo da área de física:

> "*Um estudante pode aprender a lei de Ohm, a qual indica que, num circuito, a corrente é diretamente proporcional à voltagem. Entretanto, essa proposição não será aprendida de* ***maneira significativa*** *a menos que o estudante já tenha adquirido, previamente, os significados dos conceitos de corrente, voltagem, resistência, proporcionalidade direta e inversa (satisfeitas estas condições, a proposição é potencialmente significativa, pois seu significado lógico é evidente), e* ***a menos que tente*** *relacionar estes significados como estão indicados na lei de Ohm."*

Para Ausubel (1963, p. 58), "*a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de idéias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento".*

Com base nesse referencial teórico, procuramos construir a seqüência didática, com a finalidade de introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade, com atividades envolvendo conceitos familiares aos alunos, de modo que eles manifestassem uma **disposição de**

relacionar, **de maneira não arbitrária e não literal**, o novo conceito com um aspecto específico de sua estrutura cognitiva (conceito subsunçor), visando a ocorrência de uma **aprendizagem significativa**.

3.2. Metodologia

Para organizarmos nosso trabalho, utilizamos alguns princípios da **Engenharia Didática**, que julgamos ser a metodologia de pesquisa mais apropriada para o que estamos propondo realizar.

Segundo Douady (1988), a engenharia didática é uma seqüência de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de forma coerente, para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos.

Para Artigue (1988), a engenharia didática vista como **metodologia de pesquisa**, se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em classe, isto é, sobre a *concepção*, a *realização*, a *observação* e a *análise* de seqüências de ensino.

Distinguem-se no processo experimental da engenharia didática, quatro fases:

Fase 1: **A fase das análises preliminares**

a) Iniciamos nossa pesquisa procurando ler e analisar artigos, teses e livros relacionados com o tema (Ref. Bibliográficas)

b) Aplicamos um questionário a cinco professores de Cálculo Diferencial e Integral, para saber como eles introduzem o conceito de derivada de uma função num ponto, quais os livros que utilizam na preparação de suas aulas, quais indicam a seus alunos e as principais dificuldades encontradas por eles na aprendizagem desse conceito. Perguntamos também, quais eram seus cursos de graduação e os principais cursos de pós graduação que fizeram, há quanto tempo lecionam Matemática e há quanto tempo lecionam Cálculo.

Os resultados deste questionário indicam que quase todos eles introduzem esse conceito da forma tradicional, sugerida pelos livros didáticos, isto é, apresentam a definição formal, utilizando o conceito de limite, dão alguns exemplos e depois exercícios para os alunos resolverem. Um dos professores disse que gosta de apresentar inicialmente, um pouco de história, mostrando como surgiu o Cálculo, falando de “Newton” e de “Leibniz” e também de algumas das aplicações da derivada de uma função. Um deles disse que costuma apresentar esse conceito, geometricamente, como sendo o coeficiente angular da reta tangente.

Dos cinco professores, todos são licenciados em matemática e um possui também o curso de engenharia civil. Um é doutorando em educação matemática/, dois são mestres em matemática e os outros dois são especialistas. Todos lecionam matemática há menos de dez anos e Cálculo há menos de cinco anos. Utilizam vários livros na preparação de suas aulas, mas não indicam todos a seus alunos.

Quanto as principais dificuldades apresentadas pelos alunos, todos eles disseram que os mesmos apresentam grande dificuldade de entender a definição formal de derivada a partir do conceito de limite, como é geralmente apresentada nos livros didáticos. Um deles disse que os alunos apresentam dificuldade para entender função composta e a regra da cadeia para derivação e um outro também respondeu que os alunos não têm a base necessária para a compreensão desse assunto.

c) Em seguida, preparamos e aplicamos um teste de sondagem a três grupos de alunos, de três Instituições de Ensino Superior, uma oficial e duas particulares, que já haviam estudado esse assunto, para diagnosticar seu conhecimento sobre o aspecto conceitual de derivada e verificar o que ficou para eles, sobre esse conceito.

Fase 2: A fase da concepção e da análise a priori das situações didáticas da engenharia.

a) Após essas análises preliminares, escolhemos uma população de alunos que iria iniciar o estudo de derivada e procuramos elaborar uma seqüência didática para lhe ser aplicada.

b) Para cada atividade da seqüência, procuramos fazer uma análise a priori, prevendo os comportamentos dos alunos frente às atividades.

Fase 3: A fase da experimentação

a) Em seguida passamos à fase de experimentação, ou seja, da aplicação dessa seqüência didática à população de alunos escolhida, composta de 42 alunos de uma Instituição Particular de Ensino Superior de uma cidade do interior do Estado de São Paulo.

b) Durante a aplicação da seqüência, foram discutidas as respostas e feita a institucionalização dos conceitos envolvidos.

Fase 4: A fase da análise a posteriori e da validação.

a) Em cada sessão, após a aplicação de cada uma das atividades da seqüência didática, foi feita uma análise a posteriori da produção dos alunos.

b) A validação do trabalho fundamentou-se na confrontação das duas análises, a priori e a posteriori.

CAPÍTULO 4

TESTE DE SONDAGEM

Com o objetivo de diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre o aspecto conceitual da derivada e não sua habilidade na manipulação de fórmulas para obtenção da derivada de uma função e verificar o que ficou para eles sobre esse conceito, aplicamos um teste de sondagem em seis turmas que já haviam estudado o assunto, num total de **138 alunos**, sendo 110 de Instituições Particulares de Ensino Superior, uma da cidade de São Paulo e outra do interior desse Estado e 28 de uma Universidade Pública do interior do Estado de São Paulo.

O teste constituiu-se de quatro questões, que foram aplicadas uma de cada vez, durante o período correspondente a duas aulas seguidas de 50 minutos cada, com um tempo médio de 25 minutos para a resposta de cada questão, tempo esse que achamos suficiente para que os alunos pudessem responder e procurar justificar suas respostas.

Esse teste foi aplicado durante o horário normal de aulas de cálculo, pelo próprio professor da classe, sob nossa orientação, que explicou aos alunos que se tratava de uma pesquisa que procurava saber sobre o que havia ficado para eles, sobre o conceito de derivada e que estariam prestando uma grande colaboração se procurassem tentar responder as questões com seriedade, individualmente, sem consulta e sem recorrer à ajuda dos colegas. Foi dito também, que não era necessário se identificarem.

Um aluno, perguntou se aquela “pesquisa” estava sendo realizada somente para eles, ou também para alunos de outras escolas superiores. Dissemos que estava sendo realizada também em duas outras instituições de ensino superior, uma oficial e outra particular.

Percebemos que os alunos, a princípio, ficaram um pouco apreensivos, mas em seguida se descontraíram, tendo o trabalho se desenvolvido num clima de responsabilidade e interesse.

São apresentadas a seguir, as questões propostas.

EXERCÍCIO 1

(Identificar o conceito de derivada)

Quais dos problemas seguintes envolvem o conceito de derivada?

Você sabe dizer porquê?

a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1; 2) e é paralela à reta tangente à parábola $y = x - 4x + 3$, no ponto (3 ; 0)

b) Um triângulo equilátero está inscrito num círculo de 3 cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

c) Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

demonstre que:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número **N** de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo **t** (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$.

Qual a **taxa** de expansão da epidemia quando t = 4 ?

e) Uma fábrica produz **x** unidades mensais de um determinado produto. Se o custo de produção é dado por **C** = 150 + 300x e o valor obtido na venda é dado por **V** $= 1500x - 10x^2$, determine o número que deve ser produzido por mês, para que o lucro **L = V – C** seja máximo.

Este exercício foi apresentado, com o objetivo de verificar se os alunos conseguiriam identificar os três problemas (a, d, e) que envolvem o conceito de derivada de uma função e dizer o porquê dessa escolha.

Os alunos foram de início informados que não era necessário resolver os problemas, mas apenas mencionar quais deles envolviam o conceito de derivada e procurar justificar a escolha.

Resultado do Exercício 1

O problema a) foi escolhido por 54% dos alunos, sendo que 47 deles conseguiram dar uma explicação aceitável, relacionando com reta tangente, e os demais não conseguiram justificar.

Percebemos pelas justificativas apresentadas, que alguns alunos *confundem coeficiente angular da reta tangente com reta tangente*.

O problema d) foi escolhido por 57% dos alunos, mas apenas 24 deles conseguiram apresentar uma justificativa aceitável, em termos de *taxa de variação instantânea*. Os demais não justificaram sua escolha.

O problema e) foi indicado por 50% dos alunos, tendo 42 deles dado uma justificativa aceitável relativa ao *máximo de uma função* e, os demais não justificaram.

Esperava-se que o número de alunos que indicariam esse problema fosse maior, uma vez que problemas de máximos e mínimos são bastante comuns nos livros didáticos.

Dos problemas que não envolvem o conceito de derivada, ou seja, b) e c), apenas 9% dos alunos indicaram b) enquanto que 45% indicaram c). Foi possível verificar, pelas justificativas apresentadas em relação ao problema c), que o mesmo foi escolhido porque *esses alunos confundiram a fórmula apresentada com a fórmula da derivada do produto de duas funções*.

Do total dos alunos que responderam esta primeira questão, apenas 9% escolheram corretamente *os três e somente os três* problemas que envolvem o conceito de derivada.

O quadro a seguir, mostra esses resultados:

Problemas Apresentados	a	b	c	d	e	(ade)
Porcentagem da Escolha	54%	9%	45%	57%	50%	9%

EXERCÍCIO 2

(Derivada no ponto x_o)

Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função ***f*** no ponto x_o?

Esta questão foi apresentada visando verificar se os alunos conseguiriam apresentar algum dos significados da derivada de uma função num ponto.

Eles receberam esta questão e as devolveram num prazo de 20 minutos.

Do total dos alunos, 16% conseguiram explicar de modo satisfatório o que é derivada de uma função num ponto, sendo que 13 deles explicaram através de limite, 6 como coeficiente angular da reta tangente, 2 por meio de velocidade instantânea e 1 como taxa de variação.

26% tentaram explicar e os 58% restantes entregaram em branco.

Dentre aqueles que tentaram explicar, foi possível perceber que 12 confundem *coeficiente angular da reta tangente com reta tangente* e 24 confundem a *derivada num ponto com a função derivada*.

O quadro a seguir mostra os resultados obtidos:

1) Conseguiram explicar de modo satisfatório:	**22 (16%)**
a) Como Limite:	13
b) Como Coeficiente Angular:	6
c) Como Velocidade Instantânea:	2
d) Como Taxa de Variação:	1
2) Tentaram explicar, mas não conseguiram:	**36 (26%)**
a) Confundem Coeficiente Angular com a Reta Tangente:	12
b) Confundem Função Derivada com a Derivada num ponto:	24
3) Entregaram em Branco:	**80 (58%)**

EXERCÍCIO 3

(Derivada num ponto)

Quais das afirmações seguintes você associa a derivada de uma função num ponto? Justifique.

a) É uma regra.

b) É uma reta tangente.

c) É uma função.

d) É um número que corresponde à tangente de um ângulo.

e) É um número que corresponde à área de uma figura plana.

Com este tipo de questão, pretendia-se diagnosticar a concepção dos alunos sobre a derivada de uma função num ponto.

Foi distribuída aos alunos e dado um tempo de 20 minutos para que respondessem. Pelas respostas, constatou-se o seguinte:

- 21% acham que é uma regra,
- 34% acham que é uma reta tangente,
- 45% acham que é uma função,
- 33% acham que é um número correspondente à tangente de um ângulo e

- 24% acham que é um número que corresponde à área de uma figura plana.

O maior número de alunos acha que a derivada de uma função num ponto é uma função, o que nos mostra que *não sabem diferenciar a função derivada*, *da derivada num ponto*, imagem do ponto através da função derivada.

Pareceu-nos, que dos 34% que acham que a derivada num ponto é uma reta tangente, muitos *confundem reta tangente com coeficiente angular da reta tangente*, que é a tangente (trigonométrica) do ângulo que essa reta forma com o eixo das abscissas.

Conforme Cassol (1998), para os 21% que acham que é uma regra, *o significado produzido pela derivada é o do resultado de uma fórmula*.

Dentre os que acham que a derivada corresponde à área de uma figura plana, alguns mostraram em suas justificativas, *a confusão que fazem entre derivada e integral*.

Dos 46 alunos que acertaram respondendo que *a derivada num ponto é um número que corresponde à tangente de um ângulo*, 22 conseguiram justificar satisfatoriamente sua opção, identificando esse número como o coeficiente angular da reta tangente. Os outros 24 alunos deixaram de fazer sua justificação.

Dentre todos os alunos, somente 18% responderam corretamente essa questão, ou seja, indicando tão somente a alternativa d).

O quadro seguinte, procura mostrar esses resultados:

a) É uma regra:	21%
b) É uma reta tangente:	34%
c) É uma função:	45%
d) É um número correspondente à tangente de um ângulo:	33%
e) É um número que corresponde à área de uma figura plana:	24%
Responderam corretamente indicando apenas a alternativa d):	18%

EXERCÍCIO 4

(Noção de derivada)

Quais das afirmações seguintes, você acha que corresponde à noção de derivada? Justifique.

a) É uma regra

b) É um medidor de variação

c) É um ângulo

d) É um limite

e) É uma função

Pretendia-se com esta questão, verificar se os alunos conseguiriam identificar dentre as alternativas propostas, as três noções básicas sobre derivada de uma função, ou seja, que *é um limite*, que *é uma função* e que *é um medidor de variação*.

95 alunos, isto é, 69%, acham que *a derivada é um limite*, sendo que 33 deles conseguiram justificar satisfatoriamente.

71 alunos (51%) acham que *a derivada é uma função*.

70 alunos acham que *a derivada de uma função é um medidor de variação*, tendo 24 deles apresentado uma justificação satisfatória.

26 (19%) acham que *a derivada é uma regra* e apenas 7 (5%), acham que *a derivada de uma função é um ângulo*, os quais não apresentaram justificativas.

De todos os alunos, *somente 17 (12%) indicaram as três e apenas as três* afirmações esperadas.

O quadro a seguir, mostra esses resultados:

a) É uma regra:	19%
b) É um medidor de variação:	51%
c) É um ângulo:	5%
d) É um limite:	69%
e) É uma função:	51%
f) Responderam corretamente.	12%

CONCLUSÃO

Foi possível observar por esta sondagem, que alguns alunos confundem:

a) **derivada** com **reta tangente**

b) **derivada num ponto** com a **função derivada**,

c) **derivada** com **regra para se achar a derivada**,

d) **reta tangente** com **coeficiente angular da reta tangente** e também, que muitos apresentam **dificuldade de expressão**.

É interessante notar que apesar dos alunos terem dificuldade nos exercícios 1, 2 e 3, muitos responderam corretamente, pelo menos parcialmente, o exercício 4.

Portanto, quando estimulados pelas alternativas a), b), c), d) e e), sabem mais o que é derivada do que derivada num ponto.

CAPÍTULO 5

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo apresentamos a seqüência didática, para ser aplicada a um grupo de *42 alunos que ainda não estudaram derivada*, visando a introdução do conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade num determinado instante.

Esta seqüência constituiu-se de sete atividades, envolvendo os conceitos de movimento e velocidade, do dia a dia dos alunos, para que eles pudessem ver sentido na sua aprendizagem, a fim de que ela se tornasse significativa.

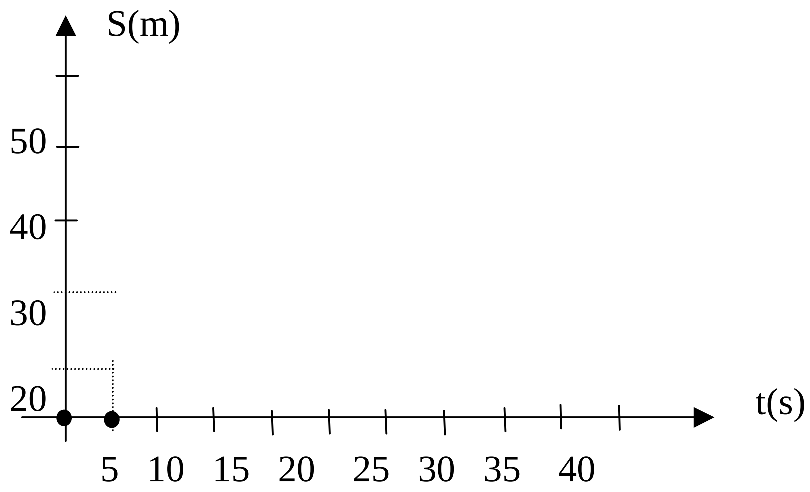
Para cada atividade fizemos uma análise a priori, prevendo os comportamentos dos alunos frente às situações propostas.

5.1. ATIVIDADE I

No estudo do comportamento cinemático de uma partícula, numa trajetória retilínea, foram registradas suas posições a cada 5 segundos, resultando a tabela seguinte, onde o espaço S, que indica a posição da partícula na trajetória, no instante t, é medido em metros e o tempo t, em segundos.

T(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
S(m)	0	10	20	25	30	45	50	40	20	15	5

1. Qual o espaço, quando t = 5s?
2. Qual o espaço, quando t = 40s?
3. Em que instante o espaço assume seu maior valor?
4. Em quais instantes a partícula ocupa a mesma posição na trajetória?
5. Em qual intervalo de tempo os espaços crescem?
6. A partir de que instante os espaços decrescem?
7. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 25s?
8. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 40s?
9. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 20 a 45s?
10. O que você acha que indica uma variação negativa do espaço?
11. Em que instante tem-se S = 15m?
12. Represente num diagrama cartesiano os pontos (t;S) obtidos da tabela



Análise a priori

O que se espera com esta primeira atividade é fazer com que os alunos, a partir dos dados fornecidos por uma tabela, trabalhem com os conceitos básicos da Cinemática, principalmente o de **variação**, essenciais à introdução do conceito de derivada da forma como estamos pretendendo, ou seja, através da velocidade instantânea.

Acreditamos que os alunos não sintam dificuldade em responder as questões apresentadas nesta atividade, uma vez que *esses conceitos já lhes são* *familiares desde quando estudaram Física no curso médio* e também porque as informações podem ser obtidas diretamente da tabela apresentada.

As respostas esperadas são as seguintes:

1. S=10m
2. S=20m
3. No instante t=30s
4. Nos instantes 10s e 40s
5. De 0 até 30s
6. A partir de 30s

Para encontrar a variação do espaço nas questões 7, 8 e 9, espera-se que achem a diferença entre o espaço correspondente ao instante posterior e o espaço correspondente ao instante anterior, obtendo-se os seguintes valores:

7. 45m – 20m = 25m
8. 20m – 20m = 0
9. 15m – 30m = - 15m

Alguns poderão apresentar dificuldade para responder a questão 10, sobre o que indica uma variação negativa do espaço, que acontece quando o movimento se dá no sentido em que os espaços estão decrescendo.

Com relação a questão 11, espera-se que respondam t = 45s e num instante entre 10 e 20s. Quanto a questão 12, acreditamos que não terão dificuldade em representar os pontos (t ; S) obtidos da tabela.

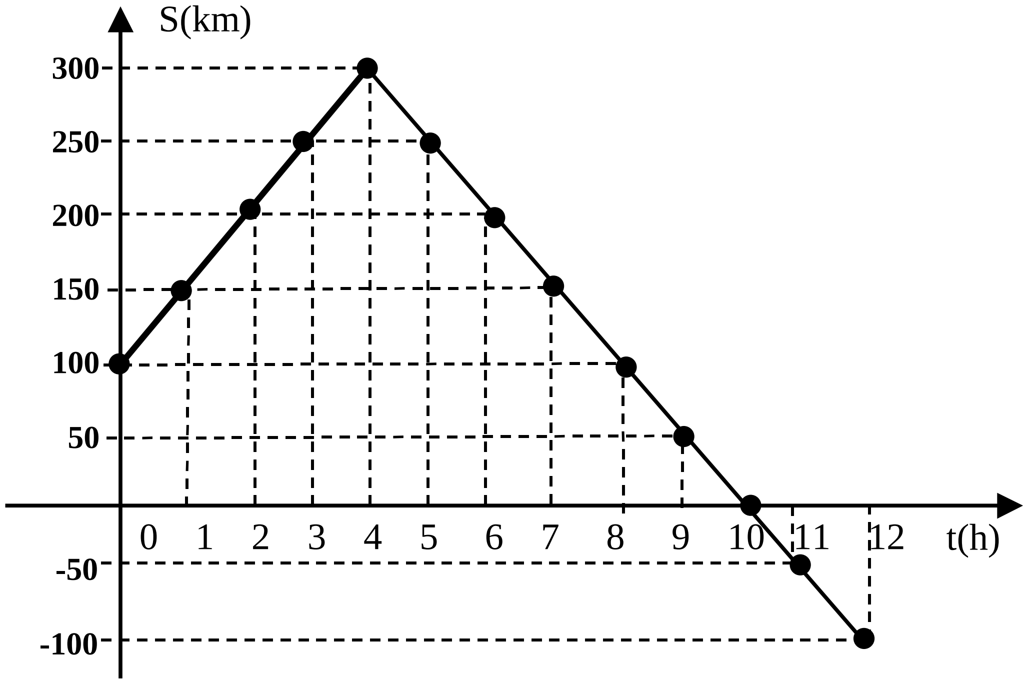
Após o término da atividade, serão discutidas as respostas e feita a **institucionalização** do conceito da variação do espaço, como sendo a diferença entre seu valor final e seu valor inicial, isto é:

$$\mathbf{\Delta S = S_2 - S_1}$$

5.2. ATIVIDADE II

O gráfico abaixo mostra como varia o espaço S, em função do tempo t, de uma moto rodovia.

Os espaços são dados em quilômetros e os tempos em horas.



1. Qual o espaço inicial S_0? (t=0)
2. Qual o espaço para t=2h?
3. Qual o espaço para t=4h?
4. Em que instante o espaço é nulo?
5. Para quais valores de t se tem S=150Km?
6. Em que intervalo de tempo os espaços são crescentes?
7. Em qual são decrescentes?
8. Em qual intervalo de tempo os espaços são negativos?
9. Qual o maior valor do espaço e quando isso acontece?
10. Qual o menor valor do espaço e quando isso acontece?

11. Determine a variação ΔS do espaço, nos seguintes intervalos de tempo:

   a) 0 a 1h
   b) 1 a 3h
   c) 2 a 5h
   d) 1 a 7h
   e) 3 a 8h
   f) 8 a 12h

12. Calcule a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, entre a variação do espaço e a variação do tempo, para cada um dos intervalos considerados no exercício anterior.

Análise a priori

Com esta atividade pretendemos que os alunos *continuem trabalhando com os conceitos básicos da Cinemática*, buscando desta vez as informações numa nova fonte de dados, ou seja, num diagrama cartesiano, que permite uma melhor visualização dos casos de variação, para que sejam superadas as possíveis dificuldades surgidas na atividade anterior e cheguem ao conceito de **velocidade média**, fundamental para as atividades seguintes.

Acreditamos que os alunos não apresentem dificuldade para responder as questões desta atividade, pela observação direta do gráfico e também porque na atividade anterior foram discutidas as respostas e estabelecida a fórmula para o cálculo da variação do espaço.

Espera-se que apresentem as seguintes respostas:

1) 100 km
2) 200 km
3) 300 km
4) 10 h
5) 1 h e 7 h
6) 0 e 4 h
7) 4 a l2 h

8) acima de 10 h, até 12 h.

9) 300 km, quando t = 4 h

10) - 100 km, quando t = 12 h

11) a) 50 km

b) 100 km

c) 50 km

d) 0

e) - 150 km

f) - 200 km

12) a) 50 km/h

b) 50 km/h

c) 50/3 ou 16,66 km/h

d) 0

e) - 30 km/h

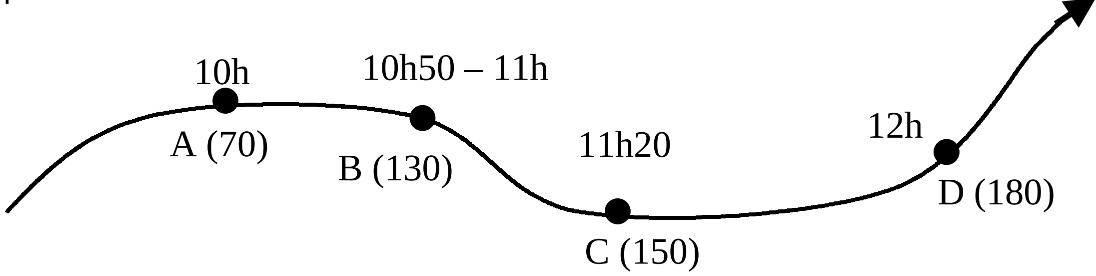
f) - 50 km/h

No término desta atividade, deverão ser discutidas as respostas e institucionalizado o conceito de velocidade média, como sendo *a razão entre a variação do espaço e a correspondente variação do tempo*, isto é:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

5.3. ATIVIDADE III

Um trem parte de uma estação A, localizada no Km 70 de uma ferrovia, às 10h, e após 50 minutos chega à uma estação B, localizada no Km 130, onde permanece parado por 10 minutos. Em seguida passa por uma estação C, no Km 150, às 11h20 e chega à estação D, localizada no Km 180, às 12h, conforme esquema.



Calcule a velocidade média desse trem, em km/h, nos seguintes percursos:

a) de A a B
b) de A a C
c) de A a D
d) de B a C
e) de B a D
f) de C a D

Anásile a priori

Pretende-se com esta questão, que os alunos se exercitem no cálculo da velocidade média, num problema envolvendo uma situação bastante real, visando uma melhor compreensão das atividades seguintes.

Espera-se que apresentem as seguintes respostas:

a) $V_m = (130 - 70) \div 50/60 = 60 \div 5/6 = 360 \div 5 = 72$ km/h
b) $V_m = (150 - 70) \div 80/60 = 80 \div 8/6 = 480 \div 8 = 60$ km/h
c) $V_m = (180 - 70) \div 2 = 110 \div 2 = 55$ km/h
d) $V_m = (150 - 130) \div 20/60 = 20 \div 2/6 = 120 \div 2 = 60$ km/h
e) $V_m = (180 - 130) \div 1 = 50$ km/h
f) $V_m = (180 - 150) \div 40/60 = 30 \div 4/6 = 180 \div 4 = 45$ km/h

Pode acontecer de alguns alunos errarem na transformação de minutos em horas e também não descartamos a hipótese de alguns não levarem em consideração os 10 minutos que o trem permaneceu parado na estação B.

Terminada a atividade, serão discutidas as respostas e mostrado como se faz a transformação de minutos em horas.

5.4. ATIVIDADE IV

A cada intervalo de 5 segundos, observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de verificar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida que é 20m/s (72 km/h).

Com os dados obtidos construiu-se a tabela seguinte:

t(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
S(m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

1) Calcule a velocidade média do carro durante o intervalo total de tempo (40s).
2) Calcule a velocidade média do carro em cada um dos intervalos de 5 segundos.
3) Faça uma estimativa da velocidade do carro no momento em que o cronômetro indica 20 segundos.
4) Durante quanto tempo você acha que a velocidade foi inferior a 18m/s?
5) Você acha que em algum momento a velocidade máxima permitida foi superada?

Análise a priori

O que se espera com esta atividade, é que os alunos percebam que somente a velocidade média não é suficiente para responder com exatidão a terceira e a quarta questões e *sintam necessidade de um novo instrumento matemático para isso*.

Acreditamos que eles não apresentem dificuldade para responder as duas primeiras questões.

1) $V_m = 720m \div 40s = 18$ m/s

2) 0 a 5s V_m = 100m : 5s = 20m/s

0 a 5s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
5 a 10s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
10 a 15s	V_m = 90m : 5s = 18m/s
15 a 20s	V_m = 80m : 5s = 16m/s
20 a 25s	V_m = 60m : 5s = 12m/s
25 a 30s	V_m = 80m : 5s = 16m/s
30 a 35s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
35 a 40s	V_m = 110m : 5s = 22m/s

Na terceira questão, acreditamos que a maioria dos alunos estimará em 16m/s a velocidade no instante t = 20s, considerando que a velocidade média no intervalo de 15 a 20s é de 16m/s. O importante é que eles percebam que a velocidade quando o cronômetro indica 20s, pode ser um pouco maior que 16m/s, visto que essa velocidade média pode não se manter constante em todos os instantes do intervalo de tempo considerado.

Na quarta questão, acreditamos também que a maioria dirá que a velocidade foi inferior a 18m/s, durante 15 segundos, visto que as velocidades médias nos intervalos de tempo de 15 a 20s, 20 a 25s e 25 a 30s, são menores que 18m/s e as demais maiores que ou igual a 18m/s.

Com relação à última questão, acreditamos que todos dirão que sim, tendo em vista que a velocidade média no último intervalo de tempo é 22m/s, maior portanto que a máxima permitida que é 20m/s.

No final da atividade serão discutidas as respostas, procurando mostrar aos alunos, que na terceira questão, a velocidade quando o cronômetro indica 20s, pode não ser igual a velocidade média de 16m/s, uma vez que a velocidade do carro pode ter sofrido variação nesse intervalo de tempo e que na quarta questão, podem haver outros instantes em que a velocidade foi inferior a 18m/s, além dos intervalos 15 a 20s, 20 a 25s e 25 a 30s e mesmo nesses intervalos pode acontecer da velocidade ter sido, em alguns instantes, superior a 18m/s. *O que se espera é que os alunos fiquem cientes de que a velocidade média num certo intervalo de tempo, não informa com exatidão, o valor da velocidade num determinado instante desse intervalo.*

5.5. ATIVIDADE V

Um projétil é lançado verticalmente para cima e seu movimento segue aproximadamente a equação $h = 40t - 5t^2$, onde a altura h em relação ao solo, num instante t, é medida em metros e t em segundos.

1) Calcule a velocidade média desse projétil, nos seguintes intervalos de tempo:

a) 2 a 3s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 80 - 20 = 60m$$
$$t_2 = 3 \Rightarrow h_2 = 120 - 45 = 75m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{15}{1} = 15m/s$$

b) 2 a 2,5s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60m$$
$$t_2 = 2{,}5 \Rightarrow h_2 = 68{,}75m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} =$$

c) 2 a 2,2 s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60\ m$$
$$t_2 = 2{,}2 \Rightarrow h_2 =$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

d) 2 a 2,1 s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60m$$
$$t_2 = 2{,}1 \Rightarrow h_2 =$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

e) 2 a 2,01 s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60m$$
$$t_2 = 2{,}01 \Rightarrow h_2 = 6{,}1995m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

2) Calcule sua velocidade média, nos seguintes intervalos:

a) 1 a 2s

$$t_1 = 1 \Rightarrow h_1 = 40 - 5 = 35m$$
$$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{25}{1} = 25m/s$$

b) 1,5 a 2s

$$t_1 = 1{,}5 \Rightarrow h_1 =$$
$$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} =$$

c) 1,8 a 2s

$$t_1 = 1{,}8 \Rightarrow h_1 = 55{,}8m$$
$$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} =$$

d) 1,9 a 2s

$$t_1 = 1{,}9 \Rightarrow h_1 =$$
$$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60m$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} =$$

e) 1,99 a 2s

$t_1 = 1{,}99 \Rightarrow h_1 = 59{,}7995m$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60m$

$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0{,}2005}{0{,}01} =$$

3) Analisando os resultados obtidos nas duas questões anteriores, o que você observa?

Análise a priori

O que se espera com esta atividade, é que **os alunos percebam, que calculando-se a velocidade média em intervalos de tempo de amplitudes cada vez menores, com um dos extremos fixo, no caso 2s, os valores obtidos tendem a um determinado valor, no caso 20m/s** (aproximando-se por valores maiores se o extremo fixo for o extremo inferior do intervalo e por valores menores se for o extremo superior).

Este tipo de exercício sugere a necessidade de se determinar a velocidade em um instante, a partir da velocidade média entre instantes próximos do instante considerado, ou seja, t = 2s.

Acreditamos que as duas primeiras questões não apresentem dificuldade para os alunos, tendo em vista as atividades anteriores e também porque os cálculos já estão direcionados visando a terceira questão, a qual estará prejudicada se os cálculos não apresentarem os resultados esperados.

Para as duas primeiras questões, espera-se as seguintes respostas dos alunos:

1) a) 15 m/s	2) a) 25 m/s
b) 17,5 m/s	b) 22,5 m/s
c) 19 m/s	c) 21 m/s
d) 19,5 m/s	d) 20,5 m/s
e) 19,95 m/s	e) 20,05 m/s

Quanto a terceira questão, a resposta esperada é que quanto menor a amplitude do intervalo de tempo (tendo 2s como um dos extremos), mais a velocidade média se aproxima de 20 m/s, podendo acontecer de alguns alunos perceberem que 20 m/s é a velocidade do projétil no instante t = 2s. Entretanto, por se tratar de uma questão aberta, várias tipos de respostas poderão surgir.

No final da atividade, as respostas serão discutidas e o professor procurará levar todos os alunos a perceberem, que quanto menor a amplitude do intervalo de tempo, mais a velocidade média se aproxima da velocidade do projétil no instante t = 2s.

5.6. ATIVIDADE VI

Considere o movimento do projétil da atividade anterior de equação $h = 40t - 5t^2$.

Sabemos que a altura alcançada pelo projétil após 2 segundos do lançamento é 60m.

Suponhamos que o tempo t sofra uma variação Δt, passando de $t_1 = 2$ para $t_2 = 2 + \Delta t$. Em conseqüência, a altura h sofrerá uma variação Δh, passando de $h_1 = 60$ para $h_2 = 60 + \Delta h$.

1) Calcule a variação Δh.
2) Calcule a velocidade média $v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$, no intervalo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 2 + \Delta t$.
3) Se a variação Δt fosse tão pequena (infinitesimal) a ponto de poder ser desprezada (anulada), qual seria o valor da velocidade média?

O valor obtido é chamado de velocidade instantânea, no instante t = 2s e é indicada por $V_{(2)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$.

Análise a priori

O que se espera com esta atividade é que os alunos percebam que quando a variação Δt do tempo, tende a zero (infinitésima), a velocidade média tende a um valor limite, chamado de velocidade instantânea, no instante t=2s.

Espera-se que calculem Δh, conforme a atividade anterior,

$$
\begin{aligned}
& t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60 \\
& t_2 = 2 + \Delta t \Rightarrow h_2 = 40(2+\Delta t) - 5(2+\Delta t)^2 = \\
& \quad = 80 + 40\Delta t - 5(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) = 80 + 40\Delta t - 20 - 20\Delta t - 5\Delta t^2 = \\
& \quad = 60 + 20\Delta t - 5\Delta t^2 \\
& \quad \Delta h = h_2 - h_1 = 20\Delta t - 5\Delta t^2
\end{aligned}
$$

Podem também substituir t por $2 + \Delta t$ e h por $60 + \Delta h$, na equação $h = 40t - 5t^2$

$$
\begin{aligned}
& 60 + \Delta h = 40(2+\Delta t) - 5(2+\Delta t)^2 \\
& 60 + \Delta h = 80 + 40\Delta t - 20 - 20\Delta t - 5\Delta t^2 \\
& \Delta h = 20\Delta t - 5\Delta t^2
\end{aligned}
$$

Acreditamos que muitos alunos poderão ter dificuldade em calcular Δh, pois ainda não estão acostumados com esse tipo de exercício.

Na segunda questão, esperamos que aqueles que encontraram $\Delta h = 20\Delta t - 5\Delta t^2$, consigam obter a velocidade média,

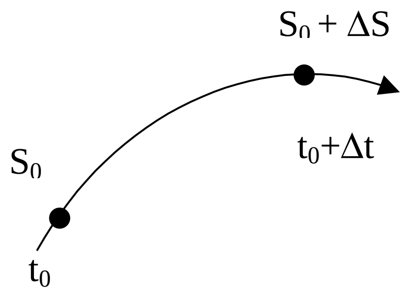
$$V_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = 20 - 5\Delta t$$

Com relação a última questão desta atividade, acreditamos que os alunos que obtiveram $V_m = 20 - 5\Delta t$, não terão dificuldade em responder que o valor da velocidade média seria 20m/s, inclusive pelo que foi tratado na atividade anterior.

Após o término desta atividade serão discutidas as respostas e comentado que o valor obtido é chamado de velocidade instantânea, para t=2s, e indicada por:

$$V_{(2)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (20 - 5\Delta t) = 20m/s$$

Em seguida será feita a institucionalização do conceito de velocidade instantânea.



$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

ou seja,

A velocidade no instante t_0, é o limite da velocidade média no intervalo de tempo de t_0 a $t_0+\Delta t$, quando Δt tende a zero.

5.7. ATIVIDADE VII

Na atividade anterior, você viu que para obter-se a velocidade do projetil no instante t = 2s, basta calcular sua velocidade média entre os instantes 2 e 2 + Δt e fazer Δt tender a zero.

Imagine agora, que a equação da atividade anterior, $y = 40x - 5x^2$, defina uma função f qualquer, onde as variáveis x e y não representem obrigatoriamente tempo e espaço.

Assim sendo, refaça os cálculos anteriores, ou seja:

1) Calcule f(2).

2) Calcule $f(2+\Delta x)$ onde Δx representa uma variação da variável independente x.

3) Quando x varia de 2 a $2+\Delta x$, calcule a variação Δy, sofrida pela variável dependente y, isto é, calcule $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2)$.

4) Calcule a razão entre as variações $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

5) Como na atividade anterior, faça Δx tender a zero, ou seja, calcule $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

O valor obtido é chamado de ***derivada da função f, no ponto x=2***, e costuma ser indicado por f'(2) ou $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=2}$

Então: $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

Análise a priori

O que se espera com esta última atividade, é que os alunos, agora com o conceito de velocidade instantânea da atividade anterior, *cheguem ao conceito mais geral de derivada de uma função num ponto, onde as variáveis x e y não se restringem apenas a tempo e espaço*.

Considerando a analogia com a atividade anterior e a discussão das respostas apresentadas, acreditamos que os alunos não apresentarão dificuldade em responder as questões propostas.

1) $f(2) = 40.2 - 5.2^2 = 80 - 20 = 60$

2) $f(2+\Delta x) = 40(2+\Delta x) - 5(2+\Delta x)^2 = 80 + 40\Delta x -$
$5(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) = 80 + 40\Delta x - 20 - 20\Delta x - 5\Delta x^2 = 60 + 20\Delta x - 5\Delta x^2$

3) $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = 60 + 20\Delta x - 5\Delta x^2 - 60 = 20\Delta x - 5\Delta x^2$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{20\Delta x - 5\Delta x^2}{\Delta x} = 20 - 5\Delta x$

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(20 - 5\Delta x) = 20$

No término desta atividade, o professor deverá dizer que o valor encontrado é chamado de **derivada da função f, no ponto x = 2** e que no caso de f ser uma função horária, onde x representa o tempo e y o espaço, *a derivada representa a velocidade instantânea*. A seguir faz-se a institucionalização do conceito de derivada de uma função f, num ponto x_0.

Dada uma função $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$, o valor $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (se existir), chama-se **derivada da função f, no ponto x_0.**

CAPÍTULO 6

A REALIZAÇÃO DA SEQÜÊNCIA E ANÁLISE A POSTERIORI

A **seqüência didática** foi aplicada a um grupo de **42 alunos** de uma Instituição Particular de Ensino Superior, dos cursos de Engenharia de Computação, Sistemas de Informação e Habilitação em Matemática, que estavam iniciando seus estudos de Cálculo Diferencial e Integral, que possuíam disponibilidade de tempo e que *demonstraram interesse em participar do trabalho*. A seqüência foi desenvolvida em três sessões, durante o mês de junho de 2001, e pudemos contar com a colaboração dos três professores de Cálculo dos cursos citados.

Para cada atividade, foi feita uma análise a posteriori, das respostas dos alunos.

As questões a serem investigadas com a aplicação da seqüência didática, para a ocorrência de uma aprendizagem significativa, eram:

a) A nova informação se relacionou de maneira não arbitrária e não literal aos conhecimentos prévios dos alunos?

b) Os alunos manifestaram uma disposição para relacionar de maneira não arbitrária e não literal os novos conhecimentos à sua estrutura de conhecimento?

6.1. SESSÃO 1

A primeira sessão foi realizada no dia 09 de junho de 2001, com início às 8h30. Compareceram 42 alunos, e foram desenvolvidas as duas primeiras atividades da seqüência.

Explicamos inicialmente, que o objetivo dessa seqüência didática é *introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade*, que lhes é bastante familiar, fazendo parte de seu cotidiano, *criando situações de modo que eles pudessem sentir a importância de seu estudo e participar ativamente do conhecimento que iriam construir*.

Dissemos também, que as atividades deveriam ser realizadas **em duplas**, que eles tinham liberdade para a formação das 21 duplas as quais deveriam ser mantidas nas demais sessões, e que sabíamos das dificuldades que eles poderiam sentir, pois estavam acostumados com as tradicionais aulas expositivas, mas que estaríamos ali para orientá-los, sempre que algum grupo necessitasse.

Foi dito ainda, que se tratava de um trabalho de "pesquisa" e pedimos que todos colaborassem, participando com seriedade dos trabalhos, para que essa pesquisa pudesse atingir seus objetivos.

Após a formação das duplas, distribuímos a **primeira atividade**.

Falamos que eles dispunham de uma hora para resolver essas questões e que no final, discutiríamos as respostas.

6.1.1. ATIVIDADE 1 – Análise a Posteriori

O objetivo desta primeira atividade da seqüência didática, era fazer com que os alunos, a partir dos dados fornecidos pela tabela, *trabalhassem com os conceitos básicos da cinemática, principalmente o conceito de variação*, essenciais para a introdução do conceito de derivada num ponto, da forma como estávamos pretendendo.

Como foi previsto, a maioria dos alunos não apresentou dificuldade para responder as questões desta primeira atividade.

O resultado apresentado pelos alunos foi o seguinte:

As 21 duplas acertaram as duas primeiras questões

Apenas uma dupla errou a 3ª questão, respondendo 50.

Na 4ª questão, 20 duplas acertaram e uma respondeu 0, provavelmente porque viu na tabela que no instante 0, o espaço é 0

19 duplas responderam corretamente a 5ª questão, isto é, de 0 a 30s, uma não respondeu e a outra dupla respondeu de 5 em 5s.

Na 6ª questão, 16 duplas responderam a partir de 30s, 4 responderam a partir de 35s e uma a partir de 31s.

19 duplas acertaram a 7ª questão, respondendo 25m e duas erraram respondendo 15, provavelmente por não saber ler a tabela.

Na 8ª questão, 20 duplas acertaram respondendo 0 e a mesma dupla que havia errado a questão anterior respondendo 15, também errou respondendo 30, demonstrando assim que não sabe ler a tabela ou que faz confusão entre espaço e tempo.

15 duplas acertaram a 9ª questão, respondendo – 15m. Das 6 duplas restantes, 4 responderam 15m, não levando em consideração a orientação do eixo e as 2 outras erraram nos cálculos.

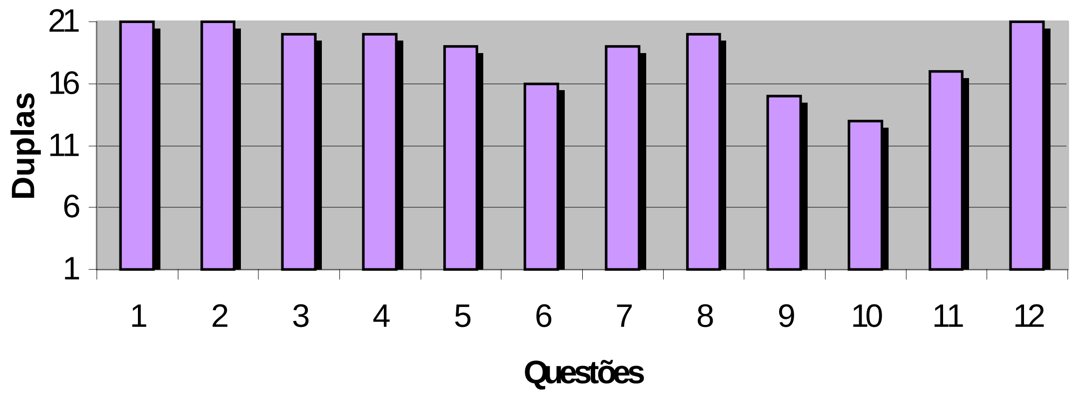
Na 10ª questão, 13 duplas conseguiram explicar satisfatoriamente. 3 delas disseram que o movimento está se realizando no sentido contrário ao sentido da trajetória, 2 disseram que a velocidade é negativa, 6 disseram que o espaço final é menor que o espaço inicial, uma respondeu que o movimento é retrógrado e a outra disse que os espaços são decrescentes. Das 8 duplas restantes, 3 deixaram em branco e das 5 que não responderam corretamente, 2 disseram que indica uma desaceleração, outras 2 que a partícula está à esquerda da origem e a outra que indica uma aceleração.

Na 11ª questão, a resposta esperada era 45s e um instante entre 5 e 10s. **17 duplas responderam 45s**, enquanto que as outras **4 responderam 7,5s**, provavelmente pela observação da tabela entre os instantes 5s e 10s, que correspondem respectivamente aos espaços 10m e 20m, associando à média aritmética dos espaços, a média aritmética dos tempos, o que nos pareceu sensato por parte dessas 4 duplas, embora o instante entre 5s e 10s, onde ocorre S = 15m, pode não ser precisamente 7,5s, uma vez que nada assegura que nesse intervalo de tempo, o movimento seja uniforme.

Quanto a 12ª questão, todas as 21 duplas conseguiram representar os pontos (t; S) da tabela, no diagrama cartesiano.

Depois de discutidas as respostas, foi institucionalizado o conceito de variação ΔS do espaço, num certo intervalo de tempo, como sendo a diferença entre o espaço correspondente ao instante posterior e o espaço correspondente ao instante anterior, isto é: $\mathbf{\Delta S = S_2 - S_1}$

Os acertos obtidos pelas duplas nesta primeira atividade, são mostrados no gráfico do número de acertos por questão, a seguir:



Foi possível perceber durante o desenvolvimento do trabalho, que os alunos demonstraram interesse em resolver as questões desta primeira atividade.

6.1.2. ATIVIDADE II – Análise a Posteriori

Após um intervalo de 15 minutos, foi iniciada a segunda atividade

O objetivo desta segunda atividade, era fazer com que os alunos continuassem trabalhando com os conceitos básicos da Cinemática, buscando as informações numa nova fonte de dados, ou seja, num diagrama cartesiano, que permite uma melhor visualização dos casos de variação, para que fossem superadas as possíveis dificuldades surgidas na atividade anterior e chegassem ao conceito de velocidade média, fundamental para as atividades seguintes.

Das 21 duplas, 16 acertaram todas as 12 questões desta atividade, conforme previsto.

Das 5 duplas restantes, uma respondeu a questão 4 dizendo que o espaço é nulo quando a moto está parada. Na questão 9 essa dupla respondeu que o espaço é 600 km, quando t = 12h, o que para t=12h, 600km correspondem à distância percorrida e na questão 10 respondeu que o menor valor do espaço é quando a moto está parada. Essa mesma dupla errou nos cálculos da questão 11 e consequentemente, da questão 12, respondendo corretamente as demais questões. Pelas respostas dadas, essa dupla confunde alguns conceitos básicos da Cinemática, notadamente o de espaço com o de velocidade e com o de distância percorrida

Uma outra dupla não respondeu corretamente apenas a questão 10, dizendo que o menor valor do espaço é 0, quando t = 10h, deixando assim, de considerar os *espaços negativos*.

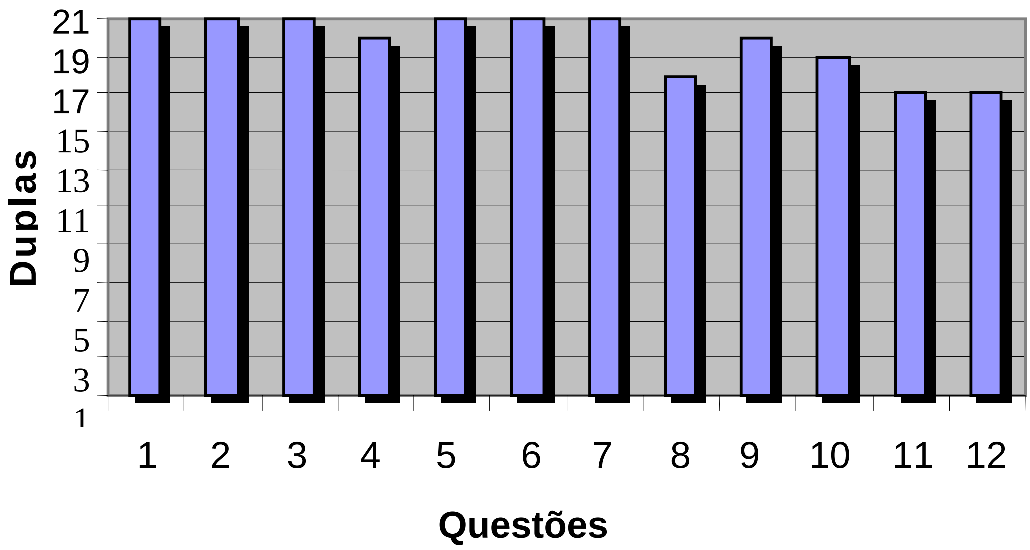
As outras 3 duplas erraram nos cálculos das questões 11 e 12 e responderam na questão 8, que os espaços são negativos quando t = 11h e quando t = 12h, não considerando, dessa forma, os instantes entre 10 e 11h e entre 11 e 12h. Responderam corretamente as demais questões.

No final da atividade, foram discutidas as respostas das questões e dito que na questão 12, **essa razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ era chamada de velocidade média.** A seguir foi feita a institucionalização do conceito de **velocidade média, como sendo a razão entre a variação do espaço e a corresponde variação do tempo.** O interesse dos alunos continuou sendo demonstrado nesta segunda atividade da primeira sessão.

Cabe considerar, que o acerto nesta atividade foi melhor do que na atividade anterior, pois o diagrama cartesiano apresentado permitiu uma melhor visualização dos casos de variação, conforme foi previsto na análise a priori**.**

Foi pedido aos alunos que procurassem não faltar na próxima sessão.

Os acertos dos alunos são mostrados no gráfico abaixo:



6.2. SESSÃO 2

Esta segunda sessão foi realizada no dia 16 de junho de 2001, das 8h30 às 11h30.

Compareceram as 21 duplas da sessão anterior e foram aplicadas as atividades III e IV.

6.2.1. ATIVIDADE III – Análise a posteriori

O que se esperava desta atividade, era que os alunos diante de um problema envolvendo uma situação real, se exercitassem no cálculo da velocidade média, para uma melhor compreensão das próximas atividades.

Das 21 duplas, **13 acertaram todos os seis itens da atividade.**

Das 8 restantes, foi constatado o seguinte:

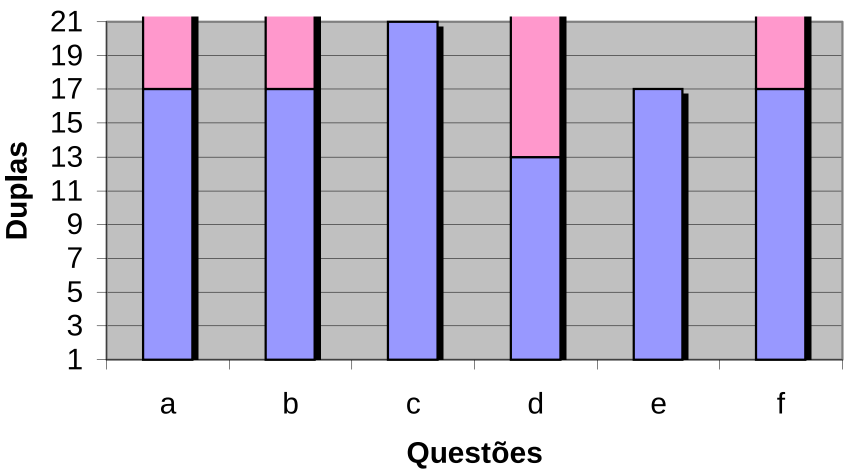
4 duplas erraram as questões d) e e), pois consideraram o trem saindo da estação B às 10h50, quando deveriam considerar saindo às 11h, uma vez que conforme o enunciado, o trem permaneceu parado nessa estação durante 10 minutos. Provavelmente isso tenha ocorrido por falta de atenção ao enunciado ou por mal interpretação da figura.

2 outras duplas, obtiveram valores aproximados nos cálculos das 4 velocidades médias onde apareciam minutos, porque na transformação de minutos em horas, utilizaram números decimais com duas casas após a virgula e calcularam corretamente as 2 outras.

As 2 duplas restantes erraram no cálculo das 4 velocidades médias onde apareciam minutos, pois não souberam efetuar as devidas transformações e acertaram as outras duas.

No final da atividade, foram discutidas as respostas e mostrado aos alunos, como se faz a transformação *de minutos em horas*.

O gráfico a seguir, mostra os acertos dos alunos.



Verifica-se, que os resultados apresentados pelos alunos estão de acordo com o que foi previsto na análise a priori.

Após um intervalo de 15 minutos, foi distribuída a quarta atividade.

6.2.2. ATIVIDADE IV – Análise a posteriori

Com esta atividade, pretendia-se que os alunos percebessem que somente a velocidade média não é suficiente para responder com exatidão, a terceira e a quarta questões e *sentissem a necessidade de um novo instrumento matemático para isso*.

As 21 duplas responderam corretamente a 1ª questão, ou seja: 720m : 40s = 18m/s, como era esperado, tendo em vista haverem praticado bastante esse tipo de cálculo, nas duas atividades anteriores.

Todas as duplas acertaram também, a 2ª questão, isto é:

0 a 5s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
5 a 10s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
10 a 15s	V_m = 90m : 5s = 18m/s
15 a 20s	V_m = 80m : 5s = 16m/s
20 a 25s	V_m = 60m : 5s = 12m/s
25 a 30s	V_m = 80m : 5s = 16m/s
30 a 35s	V_m = 100m : 5s = 20m/s
35 a 40s	V_m = 110m : 5s = 22m/s

Na terceira questão, foi previsto que uma grande parte dos alunos estimaria em 16 m/s a velocidade no instante t = 20s, por ser esta, a velocidade media no intervalo de 15 a 20s. Entretanto apenas 3 duplas responderam como foi previsto.

A maioria (18 duplas) **respondeu 18,5m/s**, dividindo a distância percorrida nesses 20s, por 20s, isto é: 370m : 20s = 18,5m/s.

Na quarta questão, **como era esperado, todas as 21 duplas responderam 15s.**

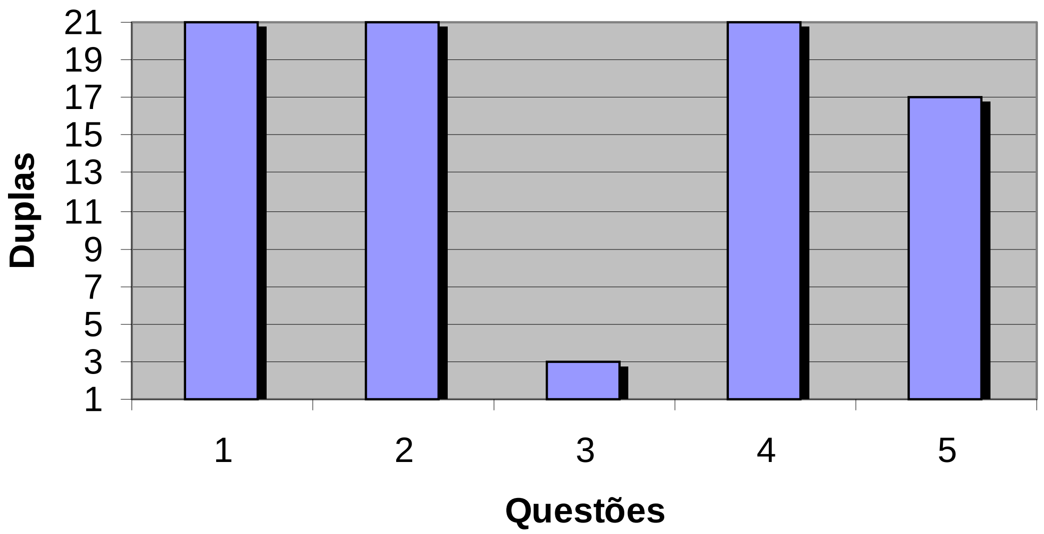
Na 5ª questão, **17 duplas responderam que a velocidade máxima permitida foi superada** e as outras **4 disseram que não,** provavelmente por não terem observado que no último intervalo de tempo, a velocidade média foi superior a 20m/s.

Como na sessão anterior, foi possível perceber que os trabalhos desta sessão, desenvolveram-se num clima de grande interesse por parte dos alunos.

No final da atividade, foram discutidas as respostas com os alunos, fazendo-os perceberem que o fato da velocidade média do carro apresentar um determinado valor num certo intervalo de tempo, não significa que o carro tenha sempre aquela mesma velocidade, em qualquer instante desse intervalo, podendo sofrer variação.

Foi dito aos alunos que na próxima sessão iriam "descobrir" um método matemático para calcularem a velocidade de um móvel num certo instante, que procurassem não faltar e não se esquecessem de trazer uma calculadora.

O gráfico a seguir mostra os acertos dos alunos.



6.3. SESSÃO 3

Nesta última sessão, compareceram as 21 duplas da sessão anterior e foram aplicadas as três últimas atividades, V, VI e VII.

Ela foi realizada no dia 23 de junho de 2001, das 8 às 12 horas.

Entre as atividades V e VI, houve um intervalo de 15 minutos, o mesmo acontecendo entre a VI e a VII.

6.3.1. ATIVIDADE V – Análise a posteriori

Com esta atividade pretendia-se que os alunos percebessem que quanto menor a amplitude dos intervalos de tempo, mais a velocidade média se aproxima de um determinado valor (no caso, 20m/s).

Este tipo de exercício sugere a necessidade de se determinar a velocidade num instante a partir da velocidade média entre instantes próximos do instante considerado (no caso, t = 2s).

Das 21 duplas que participaram desta atividade, **17 acertaram as duas primeiras questões** e 4 erraram nos cálculos conforme previsto.

Com relação a terceira, por se tratar de uma questão aberta, obtivemos vários tipos de respostas:

> “**A velocidade média não é constante” (2 duplas).**
> **“Quando a variação do tempo é pequena, a do espaço também é” (1 dupla).**
> **“Na primeira questão a velocidade média aumenta e na segunda diminui” (5 duplas).**
> **“Quando t = 2s, V=20m/s” (2 duplas)**

Essas 2 duplas conseguiram perceber que a velocidade no instante t=2s é 20m/s, conforme previsto.

“Nos dois casos, conforme Δt vai diminuindo, V_m vai se aproximando de 20m/s” (6 duplas).

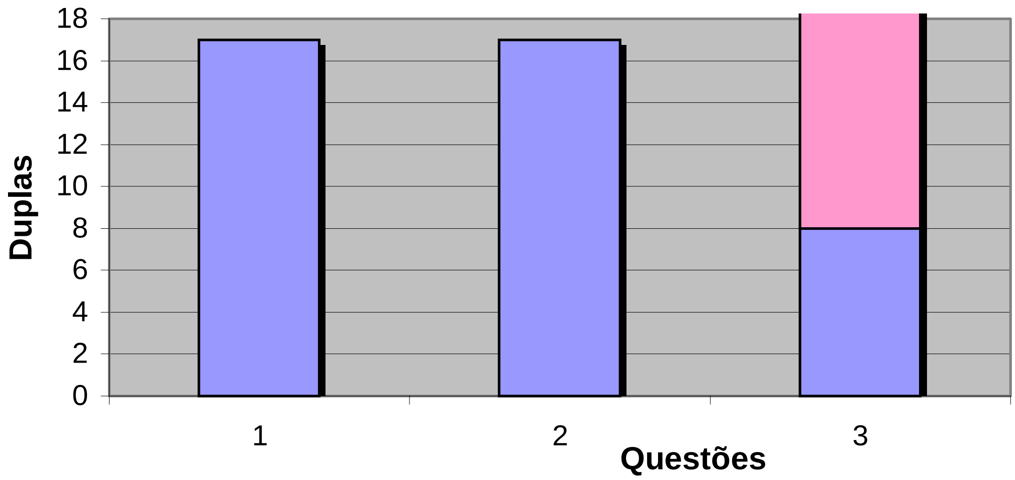
Essas 6 duplas perceberam a noção de limite envolvida.

“A velocidade do projétil diminui na subida e aumenta na descida, até atingir o solo” (2 duplas).
“Conforme aumenta o tempo, a velocidade diminui” (1 dupla).
2 duplas deixaram em branco.

Pelas respostas apresentadas, pudemos observar que a maioria não respondeu a terceira questão como era esperado, não percebendo a noção de limite envolvida. Entretanto, com exceção das duas que deixaram em branco e da dupla que disse que conforme aumenta o tempo, diminui a velocidade, *todas as demais fizeram uma afirmação verdadeira*, demonstrando com isso, que possuem uma boa compreensão dos conceitos envolvidos.

Apesar de 13 duplas não responderem a terceira questão da forma esperada, no final da atividade, na discussão das respostas, todas conseguiram perceber que quanto mais diminuía o intervalo de tempo, mais a velocidade média do projétil se aproximava de sua velocidade no instante t=2s, ou seja, 20m/s

Esses resultados são mostrados no gráfico abaixo, onde a região entre 8 e 16, no item 3, representa as duplas que embora não tenham dado a resposta esperada, fizeram uma afirmação verdadeira.



6.3.2. ATIVIDADE VI – Análise a posteriori

Após um intervalo de 15 minutos, foi distribuída a 6ª atividade.

Com esta atividade pretendia-se que os alunos percebessem que **quando a variação Δt do tempo, tende a zero (infinitésima), a velocidade média tende a um valor limite, chamado de velocidade instantânea.**

Das 21 duplas que participaram desta atividade, **15 conseguiram calcular corretamente a variação da altura e a velocidade média,** as outras 6 erraram nos cálculos, conforme previsto.

Observamos que essas 6 duplas que não conseguiram obter os valores corretos da variação da altura e da velocidade média, possuem dificuldade em cálculos algébricos.

Dessas 15 duplas, **11 conseguiram responder corretamente a terceira questão, ou seja, 20m/s,** enquanto que das 4 restantes, 2 deixaram em branco e 2 responderam 15m/s, apenas eliminando **Δt no valor da velocidade média obtida anteriormente, e calculando a diferença 20-5=15**

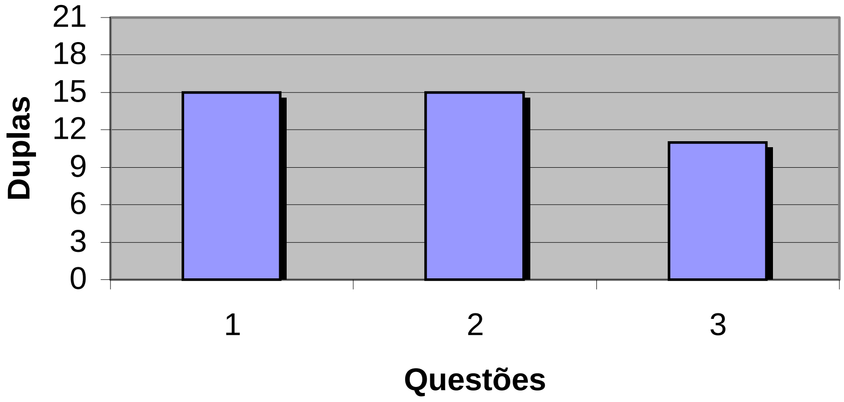
Após o término desta atividade, foram discutidas as respostas das questões feitas a **institucionalização da definição de velocidade instantânea,** ou seja:

Dada a função horária $S = f(t)$, de um movimento qualquer, a velocidade do móvel num instante $t = t_0$, é o limite de sua velocidade média no intervalo de tempo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt tende a zero, isto é:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S / \Delta t$$

Em seguida foi dito aos alunos, que *esse instrumental que acabaram de obter* para o cálculo da velocidade num certo instante, poderia ser utilizado, de uma maneira geral, para o estudo da taxa de variação de uma função num ponto, conforme seria visto na atividade seguinte.

O gráfico a seguir mostra os acertos dos alunos.



6.3.3. ATIVIDADE VII – Análise a posteriori

Depois de um intervalo de 15 minutos, foi distribuída a sétima e última atividade da seqüência didática.

O objetivo desta última atividade era fazer com que os alunos, de posse do conceito de velocidade instantânea da atividade anterior, chegassem ao conceito mais geral de derivada de uma função num ponto, onde as variáveis x e y não se restringem apenas a tempo e espaço.

Antes de iniciarem os trabalhos, foi explicado que eles haviam encontrado um instrumental matemático, que lhes permitia, dada a função horária $S = f(t)$ de um movimento qualquer, calcular a velocidade num certo instante e, sendo a velocidade uma taxa de variação entre espaço e tempo, iríamos procurar generalizar e utilizar esse instrumental para encontrar a taxa de variação instantânea de uma função qualquer, $y = f(x)$, onde y e x não representassem obrigatoriamente, espaço e tempo.

Conforme nossa previsão, após a discussão das respostas da atividade anterior, todos os cálculos foram refeitos e **as 21 duplas chegaram aos resultados esperados.**

Dissemos aos alunos, que o valor obtido no item 5 (20), era chamado de *derivada da função f no ponto x = 2*, e que, no caso particular de f ser uma função horária, com y e x representando as grandezas espaço e tempo, respectivamente, a derivada de f no ponto x = 2, indicava a velocidade do móvel no instante x = 2.

A seguir foi feita a institucionalização do conceito de derivada de uma função num ponto, isto é:

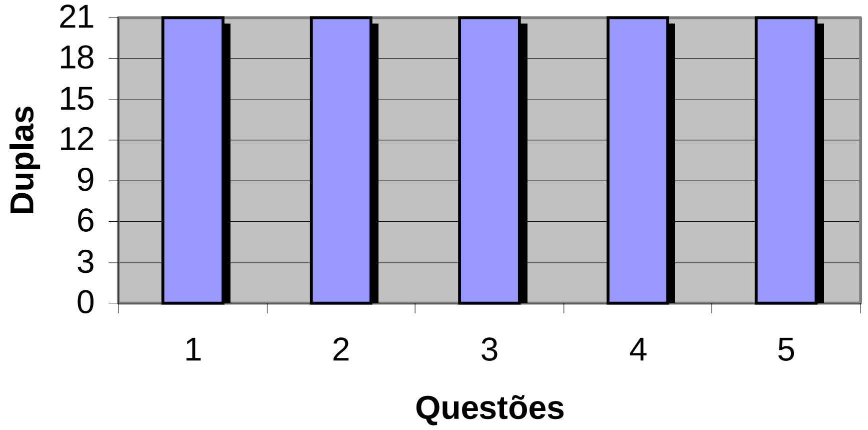
Dada a função $f : A \to B$**, definida por** $y = f(x)$**, o valor**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} \quad \textbf{(caso exista),}$$

é chamado de derivada da função f, no ponto $x = x_0$**.**

Foi possível perceber o interesse dos alunos durante o desenvolvimento das atividades desta última sessão e também o grau de satisfação demonstrado por haverem obtido as respostas esperadas.

O gráfico abaixo, mostra os resultados obtidos.



CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Considerando que os alunos apresentam dificuldade para entender o conceito de derivada de uma função num ponto, definida da maneira formal a partir do conceito de limite, conforme foi visto, procuramos verificar se a introdução desse conceito a partir do conceito físico de velocidade instantânea, traria benefícios para a sua aprendizagem.

Com fundamento na Teoria da Aprendizagem Significativa, e utilizando como metodologia da pesquisa a Engenharia Didática, preparamos uma seqüência de ensino, composta de atividades envolvendo "conhecimentos prévios" dos alunos, de modo que despertasse seu interesse em relacionar os novos conhecimentos, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, com esses seus conhecimentos prévios, a fim de que sua aprendizagem se tornasse significativa.

Durante a aplicação da seqüência, foi possível perceber o interesse demonstrado pelos alunos, uma vez que as atividades envolviam problemas de Física que já lhes eram familiares.

Observando o desempenho dos alunos nas duas primeiras atividades, foi possível observar que eles apresentaram maior facilidade de interpretar um gráfico do que uma tabela.

Notamos ainda que a confusão entre espaço (posição), velocidade e distância percorrida, por parte de um grupo de alunos, verificada nas atividades iniciais, poderá comprometer sua aprendizagem. Esta é uma questão que poderia ser aprofundada.

Os resultados apresentados pelos alunos, vieram confirmar nossa previsão feita na análise a priori, com raras exceções, como na terceira questão da atividade IV e na terceira questão da atividade V, validando dessa forma, esta pesquisa.

Pela produção dos alunos e pela discussão das respostas no final de cada atividade, foi possível perceber, que eles entenderam que a velocidade instantânea pode ser calculada como o limite da velocidade média num intervalo de tempo de amplitude tendendo a zero e, na última atividade, que a derivada de uma função num ponto é uma generalização da velocidade instantânea.

Esses resultados nos fazem acreditar, que a opção de introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto, a partir do conceito de velocidade, bastante familiar aos alunos, fazendo parte de seus conhecimentos prévios, contribuiu bastante para a sua aprendizagem, fazendo com que eles vissem sentido no que estavam aprendendo e fosse despertado o seu interesse em relacionar, de maneira substantiva e não arbitrária, o novo conhecimento aos seus conhecimentos prévios, tornando assim, a sua aprendizagem significativa.

Gostaríamos que esta pesquisa pudesse influenciar os professores no sentido de modificarem suas aulas puramente expositivas, propondo atividades envolvendo questões relacionadas com os conhecimentos prévios dos alunos, para que eles possam participar ativamente da construção de seus novos conhecimentos, vendo sentido na sua aprendizagem.

Esperamos, com este trabalho, estar dando uma modesta contribuição ao ensino-aprendizagem do conceito de derivada de uma função num ponto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIGUE, M. *Ingénerie Didatique*. Recherches en Didatique des Matematiques, vol.9, nº 3, pp. 281-308. Grenoble, 1988.

[2] AUSUBEL, D. P. *The psychology of meaningful verbal learning*. Nova York: Grune and Stratton, 1963.

[3] AUSUBEL, D. P. *Educacional psycology: a cognitive view*. Nova York: Holt Rinehart and Winston, 1968

[4] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. *Educacional psycology: a cognitive view*. 2ª ed., Nova York: Holt Rinehart and Winston, 1978.

[5] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*, São Paulo. Editora Edgard Blucher Ltda., 1993.

[6] AZCÁRATE, C., et al. *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid: Editorial Síntesis, S. A., 1996.

[7] BOYER, C. B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974

[8] BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathematiques, vol. 7, nº 2, pp. 33-115, Grenoble, 1986.

[9] CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1963

[10] CASSOL, A. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. Rio Claro, 1998. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

[11] CORNU, B. Limits. En Tall, D. (ed). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht/Boston/London. Kluwer Academic Publisher. Págs. 153-166, 1991

[12] COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral Vol.1*, tradução de Alberto Nunes Serrão, Editora Globo, Rio de janeiro, 1965.

[13] DALL'ANESE, C. *Conceito de Derivada: Uma proposta para seu Ensino e Aprendizagem*. Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000

[14] DOUADY, R. *L'ingénierie didactique: un moyen pour l'enseigmant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage*. Cahier de DIDIREM 19, IREM, Paris VII, 1993.

[15] FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. *Cálculo A – Funções, Limite, Derivação e Integração*. Editora da UFSC, 1986.

[16] FRANCHI, A.; et al. *Educação Matemática – Uma Introdução*, EDUC – Editora da PUC-SP, 1999.

[17] MOREIRA, M. A. *APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA*, Editora Universidade de Brasília, 1999

[18] MOREIRA, M. A. e MASINI, E. F. S. *Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel*. São Paulo: Editora Mores, 1982

[19] ORTON, A. *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and yong adults*. Tesis Doctoral. University of Leeds, 1980

[20] SIERPINSK, A. *Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite*. Recherches en Didatique des Mathematiques, vol. 6, núm. 1, págs. 5-67. Cambridge University Press, 1985

[21] SILVA, B. A. e IGLIORI, S. B. C. *Um estudo exploratório sobre o conceito de Derivada*. Anais IV Encontro Paulista de Educação Matemática. PUC-SP, janeiro de 1996.

[22] SILVA, M. R. G. da. *Taxa de variação: A Atribuição de Significado ao Conhecimento Matemático pela Resolução de Problemas "Práticos"*. Didática (São Paulo), v.30, p.149-157, 1995.

[23] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Trad. Seiji Hariki; ver. Técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de A. Pregnolato. São Paulo: McGraw-Hill, 1987, v. 1, 829 p. Tradução de Calculus with Analytic Geometry

[24] SPIVAC, M. Calculus. *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Editora Reverté S.A., 1978

ANEXOS

Apresentamos a seguir, o questionário aplicado aos cinco professores de cálculo e algumas respostas dos alunos que participaram do teste de sondagem e dos que participaram das atividades da seqüência didática.

Cursos de graduação: ....

....

Principais cursos de pós graduação: ....

....

Há quanto tempo leciona Matemática?...

Há quanto tempo leciona Cálculo Dif. e Integral?...

Quais livros utiliza para suas aulas de Cálculo? ....

....

....

Quais indica aos seus alunos? ....

....

Como você costuma introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto ?

....

....

....

....

Quais as principais dificuldades apresentadas por seus alunos, para entender derivada ?

....

....

....

EXERCÍCIO 1

1. Quais dos problemas seguintes envolvem o conceito de derivada? Você sabe dizer por quê?

a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1;2) e é paralela à reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$, no ponto (3;0).

b) Um triângulo eqüilátero está inscrito num círculo de 3cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

c) Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right),$$

demonstre que:

$$f(x+y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$$

d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número N de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$.

Qual a razão de expansão da epidemia quando t = 4?

e) Uma fábrica produz x unidades mensais de um determinado produto. Se o custo de produção é dado por C = 150 + 300x e o valor obtido na venda é dado por V = 1500x – 10x², determine o número que deve ser produzido por mês, para que o lucro L = V – C seja máximo.

EXERCÍCIO 1

Quais dos problemas seguintes envolvem o conceito de derivada?
Você sabe dizer porquê?

a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1;2) e é paralela à reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$, no ponto (3;0). não

b) Um triângulo eqüilátero está inscrito num círculo de 3cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

c) Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right),$$

demonstre que:

$$f(x+y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$$

d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número N de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \dfrac{t^3}{3}$.

Qual a razão de expansão da epidemia quando t = 4?

e) Uma fábrica produz x unidades mensais de um determinado produto. Se o custo de produção é dado por C = 150 + 300x e o valor obtido na venda é dado por $V = 1500x - 10x^2$, determine o número que deve ser produzido por mês, para que o lucro L = V – C seja máximo.

O item d, e o item e
O e é a derivada da divisão

EXERCÍCIO 1

1. Quais dos problemas seguintes envolvem o conceito de derivada?
Você sabe dizer por quê?

a) Encontre a reta que passa pelo ponto (1;2) e é paralela à reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$, no ponto (3;0).

• geometria analítica

b) Um triângulo eqüilátero está inscrito num círculo de 3cm de raio. Calcule a área desse triângulo.

• geometria plana

c) Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right),$$

demonstre que:

$$f(x+y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$$

d) Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número N de pessoas atingidas pela moléstia, depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia), é aproximadamente $N = 64t - \frac{t^3}{3}$.

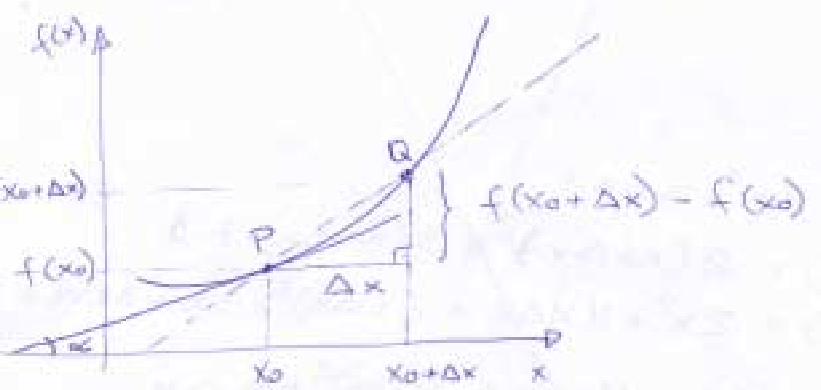
Qual a razão de expansão da epidemia quando t = 4?

e) Uma fábrica produz x unidades mensais de um determinado produto. Se o custo de produção é dado por C = 150 + 300x e o valor obtido na venda é dado por V = 1500x – 10x^2 , determine o número que deve ser produzido por mês, para que o lucro L = V – C seja máximo.

EXERCÍCIO 2

2. Se você tivesse que explicar a alguém o que é derivada de uma função f no ponto x_0, como você faria?

- Faria a interpretação geométrica da derivada de uma função f no ponto x_0



- Explicaria que geometricamente a derivada de uma função no pto x_0 é o valor da tangente (em relação ao eixo x) da "reta" tangente que passa pelo pto P.

O ponto auxiliar Q foi tomado em função da impossibilidade inicial de determinar a reta tangente a P

Pelo conceito de limite, aproximaríamos cada vez mais o pto Q do ponto P, até seu limite.

EXERCÍCIO 2

Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função f no ponto x_0?

NÃO RESPONDERIA NADA, POIS DERIVADA É E SEMPRE FOI UM ASSUNTO COMPLEXO, UM PROFESSOR PARA APLICAR TAL ASSUNTO TEM QUE TER UMA DIDÁTICA E CONHE - CIMENTO AMPLO E UMA FORMA SIMPLES PARA PASSAR A MESMA.

EXERCÍCIO 2

Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função f no ponto x_0 ?

A gente sabemos derivar, mas não o que é derivada.
Olhamos os exercícios, decoramos as regras e resolvemos, mas não sabemos direito o que é derivada

EXERCÍCIO 3

Quais das afirmações seguintes você acha que corresponde a derivada de uma função num ponto? Justifique.

a) É uma regra.
b) É uma reta tangente.
c) É uma função.
d) É um número correspondente à tangente de um ângulo.
e) É um número que corresponde à área de uma figura plana.

Esse número é o coeficiente angular da reta tangente.

EXERCÍCIO 3

Quais das afirmações seguintes você acha que corresponde a derivada de uma função num ponto? Justifique.

a) É uma regra.
b) É uma reta tangente.
c) É uma função.
d) É um número correspondente à tangente de um ângulo.
e) É um número que corresponde à área de uma figura plana.

(b) Tomando como exemplo uma parábola a derivada da função em um ponto é a reta que passa tangente a ela

(c) como no exemplo anterior, uma reta é represen-tada por uma função

(d) Dado a função é uma reta a derivada em um ponto é o valor do coeficiente angular da mesma, ou seja, o valor da tangente do ângulo que é um número.

EXERCÍCIO 4

Quais das afirmações seguintes você acha que corresponde a noção de derivada? Justifique.

a) É uma regra.
b) É um medidor de variação.
c) É um ângulo.
d) É um limite.
e) É uma função.

É uma função, pois apartir da função encontra-se a derivada, que é um medidor de variação.

EXERCÍCIO 4

Quais das afirmações seguintes você acha que corresponde a noção de derivada? Justifique.

a) É uma regra.
b) É um medidor de variação.
c) É um ângulo.
d) É um limite.
e) É uma função.

É um medidor de variação, pois para cada x determinamos um y determinando variações do que se estuda.

É um limite, por exemplo, quando queremos determinar a área de um local qualquer.

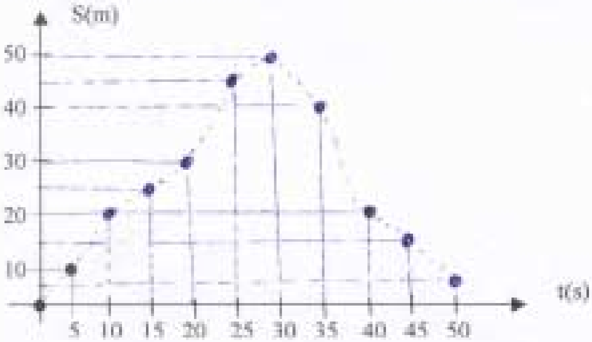
É uma função, pois através de uma função que surge as derivadas.

Atividade 1

No estudo do comportamento cinemático de uma partícula, numa trajetória retilínea, foram registradas suas posições a cada 5 segundos, resultando a tabela seguinte, onde o espaço S, que indica a posição da partícula na trajetória, no instante t, é medido em metros e o tempo t, em segundos.

t(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
S(m)	0	10	20	25	30	45	50	40	20	15	5

1. Qual o espaço, quando t = 5s? 10 m
2. Qual o espaço, quando t = 40s? 20 m
3. Em que instante o espaço assume seu maior valor? 30 s
4. Em quais instantes a partícula ocupa a mesma posição na trajetória? 10 e 40 s
5. Em qual intervalo de tempo os espaços crescem? 0 a 30 s
6. A partir de que instante os espaços decrescem? 30 s
7. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 25s? 45 - 20 = 25 m
8. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 40s? 20 - 20 = 0
9. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 20 a 45s? 15 - 30 = - 15 m
10. O que você acha que indica uma variação negativa do espaço? O espaço final é menor que o inicial
11. Em que instante tem-se S = 15m? 45 s
12. Represente num diagrama cartesiano os pontos (t; S) obtidos da tabela.

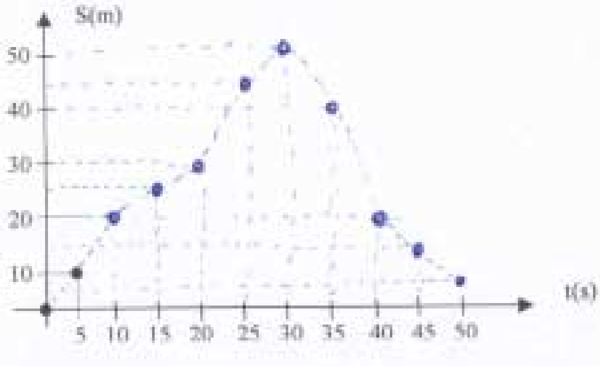


Atividade I

No estudo do comportamento cinemático de uma partícula, numa trajetória retilínea, foram registradas suas posições a cada 5 segundos, resultando a tabela seguinte, onde o espaço S, que indica a posição da partícula na trajetória, no instante t, é medido em metros e o tempo t, em segundos.

t(s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
S(m)	0	10	20	25	30	45	50	40	20	15	5

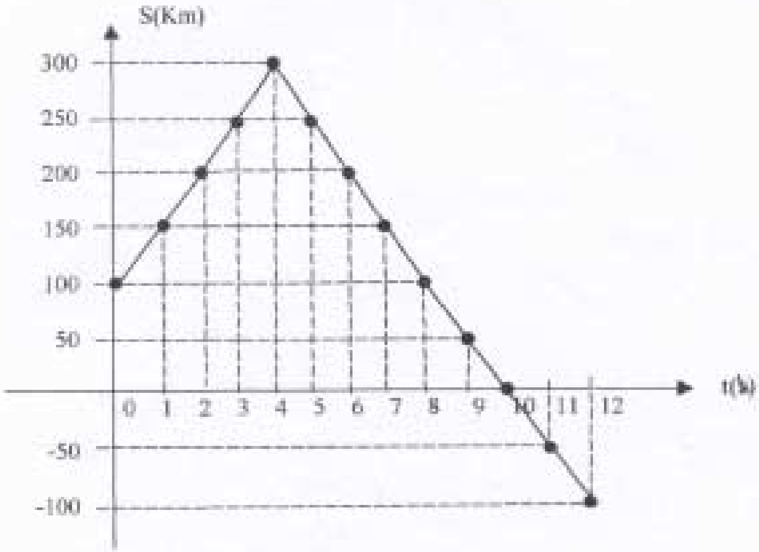
1. Qual o espaço, quando t = 5s? 10 m
2. Qual o espaço, quando t = 40s? 20 m
3. Em que instante o espaço assume seu maior valor? t = 30 s
4. Em quais instantes a partícula ocupa a mesma posição na trajetória? t = 10 e t = 40 s
5. Em qual intervalo de tempo os espaços crescem? 0 a 30 s
6. A partir de que instante os espaços decrescem? 35 s
7. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 25s? 25 m
8. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 10 a 40s? 0
9. Qual a variação do espaço quando o tempo varia de 20 a 45s? 15 m
10. O que você acha que indica uma variação negativa do espaço? desaceleração
11. Em que instante tem-se S = 15m? 45 s
12. Represente num diagrama cartesiano os pontos (t; S) obtidos da tabela.



<u>Atividade II</u>

O gráfico abaixo mostra como varia o espaço S, em função do tempo t, de uma moto numa rodovia.

Os espaços são dados em quilômetros e os tempos em horas.



1. Qual o espaço inicial S_0? (t = 0) 100
2. Qual o espaço para t = 2h? 200
3. Qual o espaço para t = 4h? 300
4. Em que instante o espaço é nulo? t = 10 h
5. Para quais valores de t se tem S = 150 Km? t = 1, t = 7
6. Em qual intervalo de tempo os espaços são crescentes? t = 0 a t = 4
7. Em qual são decrescentes? t = 4 a t = 12
8. Em qual intervalo de tempo os espaços são negativos?
   t = 10 a t = 12

9. Qual o maior valor do espaço e quando isso acontece?

$S = 300$ no $t = 4$

10. Qual o menor valor do espaço e quando isso acontece?

$S = -100$ no $t = 12$

11. Determine a variação $\triangle S$ do espaço, nos seguintes intervalos de tempo:

a) 0 a 1h $\Delta s = 150 - 100 \Rightarrow \boxed{\Delta s = 50}$

b) 1 a 3h $\Delta s = 250 - 150 = \boxed{\Delta s = 100}$

c) 2 a 5h $\Delta s = 250 - 200 = \boxed{\Delta s = 50}$

d) 1 a 7h $\Delta s = 150 - 150 = \boxed{\Delta s = 0}$

e) 3 a 8h $\Delta s = 100 - 250 = \boxed{\Delta s = -150}$

f) 8 a 12h $\Delta s = -100 + 100 = \boxed{\Delta s = -200}$

12. Calcule a razão $\frac{\triangle S}{\triangle t}$, entre a variação do espaço e a variação do tempo, para cada um dos intervalos considerados no exercício anterior.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}$$

a) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{50}{1} = \boxed{50}$

b) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100}{2} = \boxed{50}$

c) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{50}{3} = 16{,}6$

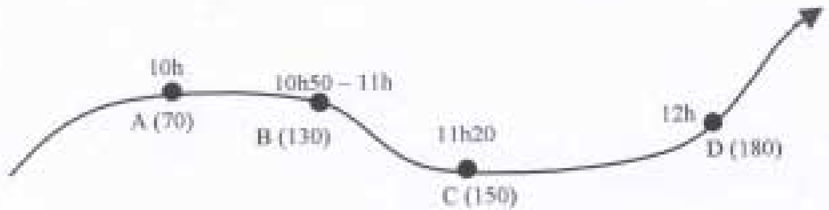
d) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{6} = 0$

e) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-150}{5} = \boxed{-30}$

f) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-200}{4} = \boxed{-50}$

Atividade III

Um trem parte de uma estação A, localizada no Km 70 de uma ferrovia, às 10h, e após 50 minutos chega à uma estação B, localizada no Km 130, onde permanece parado por 10 minutos. Em seguida passa por uma estação C, no Km 150, às 11h20 e chega à estação D, localizada no Km 180, às 12h, conforme esquema.



Calcule a velocidade média desse trem, em km/h, nos seguintes percursos:

a) de A a B → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{130}{5/6} = \frac{60}{5/6} = 60 \cdot \frac{6}{5} = 12 \cdot 6 = 72$ km/h

b) de A a C → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{150-70}{4/3} = 80 \cdot 3/4 = 20 \cdot 3 = 60$ km/h

c) de A a D → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-70}{2} = \frac{110}{2} = 55$ km/h

d) de B a C → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{150-130}{1/3} = 20 \cdot 3 = 60$ km/h

e) de B a D → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-130}{1} = 50$ km/h

f) de C a D → $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-150}{2/3} = 30 \cdot 3/2 = 15 \cdot 3 = 45$ km/h

Atividade III

Um trem parte de uma estação A, localizada no Km 70 de uma ferrovia, ás 10h, e após 50 minutos chega à uma estação B, localizada no Km 130, onde permanece parado por 10 minutos. Em seguida passa por uma estação C, no Km 150, ás 11h20 e chega à estação D, localizada no Km 180, ás 12h, conforme esquema.

Calcule a velocidade média desse trem, em km/h, nos seguintes percursos:

a) de A a B
b) de A a C
c) de A a D
d) de B a C
e) de B a D
f) de C a D

a) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{130-70}{0,83} = \frac{60}{0,83} = 72,28$ Km/h

b) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{150-70}{1,33} = \frac{80}{1,33} = 60,15$ Km/h

c) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-70}{2} = \frac{110}{2} = 55$ Km/h

d) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{150-130}{0,33} = \frac{20}{0,33} = 60,60$ Km/h

e) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-130}{1} = \frac{50}{1} = 50$ Km/h

f) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180-150}{0,66} = \frac{30}{0,66} = 45,45$ Km/h

Atividade IV

A cada intervalo de 5 segundos, observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de verificar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida que é 20m/s (72 km/h).

Com os dados obtidos construiu-se a tabela seguinte:

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
S (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

1) Calcule a velocidade média do carro durante o intervalo total (40s) $\frac{720}{40} = 18\,m/s$

2) Calcule a velocidade média do carro em cada um dos intervalos de 5 segundos.

3) Faça uma estimativa da velocidade do carro no momento em que o cronômetro indica 20 segundos. 18 m/s

4) Durante quanto tempo você acha que a velocidade foi inferior a 18m/s? 15 s

5) Você acha que em algum momento a velocidade máxima permitia foi superada? Sim

2) 0 a 5s → $\frac{100}{5} = 20\,m/s$ 5 a 10s → $\frac{100}{5} = 20\,m/s$

10 a 15s → $\frac{90}{5} = 18\,m/s$ 15 a 20s → $\frac{80}{5} = 16\,m/s$

20 a 25s → $\frac{60}{5} = 12\,m/s$ 25 a 30s → $\frac{80}{5} = 16\,m/s$

30 a 35s → $\frac{100}{5} = 20\,m/s$ 35 a 40s → $\frac{110}{5} = 22\,m/s$

Atividade V

Um projétil é lançado verticalmente para cima e seu movimento segue aproximadamente a equação $h = 40t - 5t^2$, onde a altura h em relação ao solo, num instante t, é medida em metros e t em segundos.

1) Calcule a velocidade média desse projétil, nos seguintes intervalos de tempo:

a) 2 a 3s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 80 - 20 = 60$

$t_2 = 3 \Rightarrow h_2 = 120 - 45 = 75$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{15}{1} = 15m/s$

b) 2 a 2,5s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}5 \Rightarrow h_2 = 68{,}75$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h2 - h1}{t2 - t1} = \dfrac{8{,}75}{0{,}50} = 17{,}5 \text{ m/s}$

c) 2 a 2,2 s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}2 \Rightarrow h_2 = 40(2{,}2) - 5(2{,}2)^2 = 88 - 24{,}2 = 63{,}8$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$

$Vm = \dfrac{63{,}8 - 60}{0{,}2} = 19 \text{ m/s}$

d) 2 a 2,1 s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}1 \Rightarrow h_2 =$ $40t - 5t^2$

$40(2{,}1) - 5(2{,}1)^2$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{1{,}50}{0{,}10} = 15 m/s$ $84 - 22{,}05 = 61{,}5$

e) 2 a 2,01 s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}01 \Rightarrow h_2 = 6{,}1995$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ $\dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{1{,}995}{0{,}01} = 199{,}5$

2) Calcule sua velocidade média, nos seguintes intervalos:

a) 1 a 2s

$t_1 = 1 \Rightarrow h_1 = 40 - 5 = 35$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{25}{1} = 25 m/s.$

b) 1,5 a 2s

$t_1 = 1{,}5 \Rightarrow h_1 =$ $40t - 5t^2 = 40(1{,}5) - 5(1{,}5)^2$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$60 - 11{,}25 = \boxed{48{,}75}$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} =$ $\dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{11{,}25}{0{,}5} = 22{,}5$

c) 1,8 a 2s

$t_1 = 1{,}8 \Rightarrow h_1 = 55{,}8$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{4{,}2}{0{,}2} = 21\ m/s$

d) 1,9 a 2s

$t_1 = 1{,}9 \Rightarrow h_1 =$ $40t - t^2 = 40(1{,}9) - 5(1{,}9)^2$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$ $\quad 76 - 18{,}05 = 57{,}95$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \rightarrow \dfrac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{2{,}05}{0{,}10} = 20{,}5\ m/s$

e) 1,99 a 2s

$t_1 = 1{,}99 \Rightarrow h_1 = 59{,}7995$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{0{,}2005}{0{,}01} =$ $20{,}05\ m/s$

3) Analisando os resultados obtidos nas duas questões anteriores, o que você observa?

Nos dois casos a velocidade média se aproxima de 20m/s

Atividade V

Um projétil é lançado verticalmente para cima e seu movimento segue aproximadamente a equação $h = 40t - 5t^2$, onde a altura h em relação ao solo, num instante t, é medida em metros e t em segundos.

1) Calcule a velocidade média desse projétil, nos seguintes intervalos de tempo:

a) 2 a 3s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 80 - 20 = 60$$
$$t_2 = 3 \Rightarrow h_2 = 120 - 45 = 75$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{15}{1} = 15m/s$$

b) 2 a 2,5s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$$
$$t_2 = 2{,}5 \Rightarrow h_2 = 68{,}75$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{8{,}75}{0{,}50} = 17{,}5\ m/s$$

c) 2 a 2,2 s

$$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$$
$$t_2 = 2{,}2 \Rightarrow h_2 = 40t - 5t^2 = 40.2{,}2 - 5(2{,}2)^2 = 88 - 24 = \boxed{64}$$
$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4}{2} = 2\ m/s$$

d) 2 a 2,1 s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}1 \Rightarrow h_2 =$ $40t - 5t^2 = 40 \cdot 2{,}1 - 5 \cdot (2{,}1)^2 = 84 - 22{,}05 = 61{,}95$

$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1{,}50}{0{,}10} = 15 \, m/s$

e) 2 a 2,01 s

$t_1 = 2 \Rightarrow h_1 = 60$

$t_2 = 2{,}01 \Rightarrow h_2 = 61{,}995$

$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1{,}995}{0{,}01} = 199{,}5 \, m/s$

2) Calcule sua velocidade média, nos seguintes intervalos:

a) 1 a 2s

$t_1 = 1 \Rightarrow h_1 = 40 - 5 = 35$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{25}{1} = 25m/s$$

b) 1,5 a 2s

$t_1 = 1{,}5 \Rightarrow h_1 =$ $40 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot (1{,}5)^2 = 60 - 11{,}25 = 48{,}75$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{11{,}25}{0{,}5} = 22{,}5 \, m/s$

c) 1,8 a 2s

$t_1 = 1{,}8 \Rightarrow h_1 = 55{,}8$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{4{,}2}{0{,}2} = 21\ m/s$ ✓

d) 1,9 a 2s

$t_1 = 1{,}9 \Rightarrow h_1 = 40 \cdot 1{,}9 - 5 \cdot (1{,}9)^2 = 76 - 18{,}05 = 57{,}95$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{2{,}05}{0{,}10} = 20{,}5\ m/s$ ✓

e) 1,99 a 2s

$t_1 = 1{,}99 \Rightarrow h_1 = 59{,}7995$

$t_2 = 2 \Rightarrow h_2 = 60$

$v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{0{,}2005}{0{,}01} = 20{,}05\ m/s$ ✓

3) Analizando os resultados obtidos nas duas questões anteriores, o que você observa?

Conforme aumenta o tempo, a veloc diminui.

Atividade VI

Considere o movimento do projétil da atividade anterior de equação $h = 40t - 5t^2$.

Sabemos que a altura alcançada pelo projétil após 2 segundos do lançamento é 60m.

Suponhamos que o tempo t sofra uma variação Δt, passando de $t_1 = 2$ para $t_2 = 2 + \Delta t$. Em consequência, a altura h sofrerá uma variação Δh, passando de $h_1 = 60$ para $h_2 = 60 + \Delta h$.

1) Calcule a variação Δh.

2) Calcule a velocidade média $v_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$, no intervalo de $t_1 = 2$ a $t_1 = 2 + \Delta t$.

3) Se a variação Δt fosse tão pequena (infinitesinal) a ponto de poder ser desprezada (anulada), qual seria o valor da velocidade média?

O valor obtido é chamado de velocidade instantânea, no instante t = 2s e é indicada por $v_2 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$

1) $t_1 = 2 \rightarrow h_1 = 60$
$t_2 = 2 + \Delta t \Rightarrow h_2 = 40(2+\Delta t) - 5(2+\Delta t)^2$
$= 80 + 40\Delta t - 5(4 + 4\Delta t + \Delta t^2) = 80 + 40\Delta t - 20 - 20\Delta t - 5\Delta t^2$
$= 60 + 20\Delta t - 5\Delta t^2$
$\Delta h = h_2 - h_1 = 20\Delta t - 5\Delta t^2$

2) $V_m = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{20\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = 20 - 5\Delta t$

3) $V_m = 20 - 5.0 = 20$ m/s

Atividade VI

Considere o movimento do projétil da atividade anterior de equação $h = 40t - 5t^2$.

Sabemos que a altura alcançada pelo projétil após 2 segundos do lançamento é 60m.

Suponhamos que o tempo t sofra uma variação Δt, passando de $t_1 = 2$ para $t_2 = 2 + \Delta t$. Em consequência, a altura h sofrerá uma variação Δh, passando de $h_1 = 60$ para $h_2 = 60 + \Delta h$.

1) Calcule a variação Δh.

2) Calcule a velocidade média $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, no intervalo de $t_1 = 2$ a $t_1 = 2 + \Delta t$.

3) Se a variação Δt fosse tão pequena (infinitesinal) a ponto de poder ser desprezada (anulada), qual seria o valor da velocidade média?

O valor obtido é chamado de velocidade instantânea, no instante t = 2s e é indicada por $v_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t}$

1) $60 + \Delta h = 40(2 + \Delta t) - 5(2 + \Delta t)^2 = 80 + 40\Delta t -$
$(20 + 20\Delta t + \Delta t^2) = 80 + 40\Delta t - 20 - 20\Delta t - 5\Delta t^2$
$= + 20\Delta t - 5\Delta t^2$

2) $V_m = 20 - 5\Delta t$

3) $V_m = 20 - 5 = 15$

Atividade VII

Na atividade anterior, você viu que para obter-se a velocidade do projetil no instante t = 2s, basta calcular sua velocidade média entre os instantes 2 e $2+\Delta t$ e fazer Δt tender a zero.

Imagine agora, que a equação da atividade anterior, $y = 40x - 5x^2$, defina uma função f qualquer, onde as variáveis x e y não representem obrigatoriamente tempo e espaço.

Assim sendo, refaça os cálculos anteriores, ou seja:

1) Calcule f(2). $= 80 - 54 = 60$
2) Calcule f(2+ Δx) onde Δx representa uma variação da variável independente x.
3) Quando x varia de 2 a $2+\Delta x$, calcule a variação Δy, sofrida pela variável dependente y, isto é, calcule $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2)$.
4) Calcule a razão entre as variações $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.
5) Como na atividade anterior, faça Δx tender a zero, ou seja, calcule $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

O valor obtido é chamado de função f, no ponto DERIVADA da x=2, e costuma ser indicado por f'(2) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$

Então: $f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

2) $f(2+\Delta x) = 40(2+\Delta x) - 5(2+\Delta x)^2 = 80 + 40\Delta x$
$-5(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) = 80 + 40\Delta x - 20 - 20\Delta x - 5\Delta x^2 =$
$= 60 + 20\Delta x - 5\Delta x^2$

3) $\Delta y = 60 + 20\Delta x - 5\Delta x^2 - 60 = 20\Delta x - 5\Delta x^2$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20 - 5\Delta x$ 5) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$