CLAUDIO DALL'ANESE

CONCEITO DE DERIVADA: UMA PROPOSTA PARA SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC – SP
São Paulo
2000

CLAUDIO DALL'ANESE

CONCEITO DE DERIVADA: UMA PROPOSTA PARA SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada como exigência parcial
para obtenção do título de **Mestre** em
Educação Matemática à Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo, sob orientação do
Professor Doutor Benedito Antonio da Silva.

PUC – SP
São Paulo
2000

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

AGRADECIMENTOS

A Deus, que durante esta jornada sempre me deu sinais de que vale continuar.

Ao meu orientador, Professor Benedito Antonio da Silva, que sempre me estimulou pela sua própria maneira de ser. Para mim, nossos encontros foram momentos de prazer e aprendizado; nossas conversas sempre estiveram envoltas de gentileza, educação e extrema simpatia. Professor, tu és fantástico!

Às Professoras Sônia Barbosa Camargo Igliori e Rosa Lucia Sverzut Baroni, que com sabedoria e delicadeza, mostraram-me o caminho a ser seguido para que este trabalho tomasse esta forma.

Ao meu saudoso pai, Professor Claudio João Dall'Anese, que com freqüência parece estar ao meu lado, conduzindo meu pensamento ao doce sabor da Matemática. Pai, jamais esquecerei daquelas suas aulas que assistia desde pequenino, nem das incontáveis pipas que empinávamos juntos, desenhando no céu curvas de funções.

Ao meu irmão, Carlo Dall'Anese, que entendeu que minha ausência em nosso projeto seria necessária para a elaboração desta dissertação, e com sabedoria deu continuidade a ele.

À minha esposa Evelise, que foi capaz de suportar minha ausência e estimular-me, de acordo com sua maneira singular de interpretar a vida.

À minha mãe, Maria Cleide e aos meus avós Izidoro, Anna e Adelina, que em incontáveis momentos se fizeram presentes com seus cuidados para, aos seus modos, proporcionarem condições favoráveis para a realização deste trabalho.

Ao Francisco, que aliando sua solicitude ao seu sorriso descontraído e sereno, muitas vezes motivou meu empenho.

Aos meus colegas de mestrado: Eugênio, Ronaldo, Rose, Marco Celestino e Setsuko, que me deram muita força na qualificação. Tenham certeza que a presença de vocês foi algo muito especial para mim.

Ao meu pai,

Prof. Claudio João Dall'Anese

RESUMO

Dado que existem dificuldades, no que se refere ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, este trabalho apresenta uma seqüência didática com atividades apresentadas em fichas, em que os alunos trabalham em duplas, para perceber a essência do conceito de derivada. Após a resolução de cada ficha, estabelece-se uma plenária para discussão das respostas apresentadas. A escolha desta prática metodológica representa uma ruptura do contrato didático habitual. Apresento uma análise a posteriori de cada ficha, confrontando os protocolos dos alunos com uma análise feita a priori. Isto permite levantar conclusões sobre os ganhos desta escolha pedagógica para o ensino e aprendizagem do conceito de derivada.

Palavras – chave: derivada, contrato didático, reta tangente, variação, otimização.

ABSTRACT

Since difficulties exist, in refering to the teaching and lerning of Differential and Integral Calculus, this work presents a didactic sequence with activities allocated in records, in which the students work in couples to perceive the essence of the concept of derivatives. After the resolution of each record, it is settled down a plenary to discuss the presented answers. The choice of this methodological practice represents a rupture of the habitual didactic contract. I present a posteriori analysis of each record, confronting the student's protocols with a priori analysis. This allows to raise conclusions about the gains of this pedagogic choice to the teaching and learning of the concept of the derivative.

Key Words: derivative, didactic contract, tangent, variation, optimize.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

Os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, muitas vezes são introduzidos através de uma aula expositiva, em que o professor apresenta as definições, propriedades e exemplos e por sua vez, os alunos resolvem listas de exercícios. Desta forma, as "obrigações contratuais" tanto do ponto de vista do professor quanto dos alunos parecem ter sido cumpridas. No entanto, observa-se elevado índice de reprovação e de desistência nesta disciplina, sinalizando a existência de problemas no processo de ensino e aprendizagem.

Por outro lado, pesquisas em Didática da Matemática têm sido desenvolvidas na tentativa de diagnosticar tais problemas e novas práticas metodológicas têm sido testadas e analisadas, sob diversas perspectivas e dentro de diversos contextos, como por exemplo, o uso de computadores e de calculadoras gráficas, numa tentativa de contribuir para a melhora do quadro acima observado. Cito alguns destes trabalhos mais adiante, no capítulo III.

Minha pesquisa tem a ambição de contribuir para o desenvolvimento da prática pedagógica ao introduzir-se conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, e refere-se a um domínio em particular: o conceito de derivada, cuja abordagem será feita a partir da noção de variação. A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Cauchy, que a apresentou por volta de 1823 como razão de variação infinitesimal, embora Newton e Leibniz, já no século XVII tenham utilizado os fundamentos desse conceito como um método para relacionar problemas de quadraturas e de tangentes. A prática pedagógica adotada é a do trabalho dos alunos em duplas, utilizando papel, lápis, calculadora e, em alguns momentos, recursos do computador, visando a construção desse conceito.

A opção por esta prática metodológica deve-se, fundamentalmente, ao trabalho realizado por Silva e Igliori [16] descrito no artigo "Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada" que relata uma experimentação "piloto" realizada com 2 duplas de alunos iniciantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Neste artigo, os autores relatam que os alunos desenvolvendo atividades que conduzem à exploração da noção de razão de variação, afirmaram com convicção que "***aprenderam*** *o que é* ***derivada***". Além disso, os autores sugerem que o trabalho pode ser continuado, tentando-se aplicar uma seqüência de atividades para uma classe inteira de alunos, explorando funções além da trabalhada nesse experimento.

Minha escolha pedagógica foi a elaboração de uma seqüência didática composta de atividades apresentadas em 14 fichas, nas quais inicialmente apresento um problema do mundo concreto a fim de que o aluno perceba que ainda não dispõe de um instrumental eficaz para resolvê-lo. Tal ferramenta é a derivada. A partir daí, as fichas conduzem à exploração da noção de variação objetivando a construção do conceito de derivada como taxa de variação instantânea. Após a resolução de cada ficha, proponho uma plenária para a discussão dos resultados obtidos pelos alunos e a institucionalização dos conceitos envolvidos. Retomo o problema inicialmente apresentado para ser resolvido, na última ficha.

De acordo com os autores citados, substituir a aula expositiva pela apresentação de fichas, em que os alunos trabalham e constróem o conceito por si próprios, foi uma escolha acertada, pois os estudantes *"trabalharam com muita disposição e até mesmo entusiasmo"* e mostraram-se satisfeitos ao final, de resolver um problema inicialmente proposto. Procedendo desta maneira, acredito que estou promovendo uma ruptura no Contrato Didático usual.

No capítulo II, apresento a problemática desta pesquisa, que se articula com questões colocadas por Silva e Igliori.

No capítulo III, destaco algumas pesquisas relativas ao ensino e aprendizagem do conceito de derivada, e faço um pequeno levantamento da abordagem deste conceito, proposta por alguns autores de livros didáticos.

No capítulo IV, procurei identificar a origem do conceito de derivada como razão de variação infinitesimal e sua gênese, a partir do levantamento de alguns elementos históricos.

No capítulo V, apresento uma síntese do quadro teórico que fundamenta o trabalho, ressaltando elementos da Didática da Matemática que podem contribuir para o ensino e aprendizagem do conceito de derivada. Tal quadro, compõe-se de elementos da Teoria do Conhecimento e do Contrato Didático. O objetivo, assim como a Metodologia da Pesquisa e o procedimento de aplicação das fichas também estão apresentados neste capítulo.

No capítulo VI, são apresentadas as fichas com as atividades desenvolvidas pelos alunos, seguidas das análises a priori.

No capítulo VII, apresento a análise a posteriori de cada ficha e conclusões do trabalho.

II – PROBLEMÁTICA

Estudos em Educação Matemática que têm como foco o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, sinalizam que esta disciplina apresenta dificuldades para alunos dos cursos de Matemática, Física, Engenharia, Computação, etc. Minha prática docente como professor de Cálculo e também constatações apresentadas naqueles estudos, ofereceram-me um referencial, evidenciando que as dificuldades enfrentadas pelos alunos dessa disciplina não são poucas, o que conduz à reprovação e ao abandono do curso.

Tendo como alvo de pesquisa o ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, escolhi o estudo da derivada, por entender ser este um de seus conceitos fundamentais. Diversas áreas do conhecimento utilizam-se da derivada como ferramenta para resolver problemas sobre fenômenos que envolvem variação. Pode-se citar por exemplo, a Biologia, em que a derivada se aplica na pesquisa da taxa de crescimento de bactérias de uma cultura; na Eletricidade, para descrever a variação da corrente num circuito elétrico; na Economia, para estudar a receita, o custo e o lucro marginais. Na Física, o conceito de derivada está presente para definir a velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva: a primeira, refere-se à medida da taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo; e a segunda, à medida da taxa de variação da velocidade. A tangente à uma curva num determinado ponto indica a direção do movimento da partícula. Problemas de máximos e de mínimos podem ser resolvidos com o uso de derivadas, como por exemplo: que dimensões deve ter uma embalagem para que seja gasta a menor quantidade de material para envolver determinado sólido?, como se pode maximizar o lucro na venda de determinado produto?. Enfim, pode-se perceber que as aplicações de derivada são inúmeras, e que em muitos casos está presente explicitamente a essência do conceito, que é a medida de variação.

Decidi, em minha pesquisa, investigar em que medida o ensino tradicionalmente realizado tem influência no aprendizado dos alunos.

Segundo Villarreal [18], os estudos em Educação Matemática que tratam do ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, abordam o problema sob diversas perspectivas e em diversos contextos, e cada um oferece elementos que permitem ampliar a análise das dificuldades apresentadas na aprendizagem da disciplina. A autora apresenta algumas dessas dificuldades seguindo dois caminhos que não são independentes, mas que estão intimamente relacionados: a problemática da concepção dos estudantes e a problemática do ensino no Cálculo. Destaco abaixo, dificuldades, algumas levantadas nesses estudos e outras, por mim observadas ao longo de minha prática docente.

Primeiramente, o que fica para os alunos é a derivada como um processo mecânico, algoritmo de cálculo ou resultado de uma operação. Villarreal aponta que *“os estudantes tiveram um bom desempenho nas tarefas algorítmicas (por exemplo: cálculo de derivadas*), *... mas surgiram dificuldades quando representações gráficas estavam envolvidas no cálculo de taxas de variação.... Poderosos algoritmos produzem uma algebrização que acaba ocultando as idéias essenciais do Cálculo”*.

Por outro lado, os alunos tendem a decorar regras de derivação e a derivada parece ter pouca significação. Ao resolver questões que envolvem a aplicação desse conceito, eles recorrem a procedimentos-padrão. Exemplo disto é a determinação de pontos de máximo e de mínimo, derivando a função dada e encontrando as raízes da função derivada, sem relacionar a posição da reta tangente ao gráfico com o ponto em análise. Outro exemplo, é : “derivando a velocidade, encontra-se a aceleração” e, às vezes, nessa “técnica” não está incorporada a idéia de que houve variação.

Tais dificuldades, levaram-me à indagação: “que proposta pedagógica poderia estar trabalhando?”, cuja resposta foi sugerida pelo artigo “Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada” de Silva e Igliori (1996), que faz um ensaio com duas duplas de alunos iniciantes de Cálculo, não tratando o conceito de forma algorítmica-algébrica, e sim através da apresentação de uma seqüência de 6 fichas que conduzem o aluno a trabalhar para construir a essência do conceito (medida da variação). Neste artigo, os autores colocam a questão: *“como aplicar esta (ou outra) seqüência em uma classe inteira de* *alunos que nunca ouviram falar em derivada?"*, sugerindo a continuação do estudo. Na conclusão desse artigo lê-se que *"a substituição do tratamento clássico dispensado ao conceito de derivada (apresentação de definições, propriedades, técnicas e algumas aplicações), pela tentativa da construção do conceito, pelo estudante, através de sua participação efetiva, demonstra que o aluno, uma vez motivado, busca com muita perseverança e vontade, o saber construído, para poder aplicá-lo na solução de questões previamente colocadas. Sua satisfação em poder, finalmente, responder aos apelos feitos, usando seguramente um instrumento eficaz, indica que a meta foi alcançada".*

O trabalho descrito pelos autores é resultado de seminários e discussões sobre o ensino e aprendizagem de derivada com a Doutora Michèle Artigue do IUFM de Reims e membro da equipe DIDIREM da Universidade Paris 7.

Silva e Igliori apontam que a prática usual do ensino do Cálculo Diferencial e Integral *"quase nunca foge da apresentação de definições, propriedades, técnicas algumas poucas aplicações"*, o que permite contornar obstáculos enfrentados pelos alunos, sem que *"o preço a ser pago seja muito perceptível aos agentes do sistema (alunos e professores)"*. Assim, a aula expositiva, dentro de um quadro algorítmico-algébrico é um *"refúgio seguro"*, e as mesmas estratégias são usadas ao introduzir-se vários conceitos tratados na disciplina. Os estudantes se adaptam, aprendendo a reconhecer certas palavras chaves que induzem a procedimentos para a resolução de problemas e *"como os professores têm a prudência (ou não) de incluir estas pistas de reconhecimento nos enunciados, os estudantes acabam por atingir uma eficácia razoável"*.

Tais afirmações sinalizam que há uma relação entre a aprendizagem e os métodos adotados em geral. Utilizar uma prática pedagógica diferente das tradicionais traz algum ganho? A escolha feita para a apresentação do conceito de derivada, qual seja, aplicação de fichas em que os alunos trabalham em duplas, com questões que permitam fazer estimativas, indagações, conjecturas, levantar hipóteses, comprovar resultados, ... representa uma ruptura do contrato didático usual, e acredito, ajudará a contornar algumas dificuldades apresentadas pelos mesmos.

O arcabouço do meu trabalho constitui-se de alguns elementos que foram considerados para definir a escolha da abordagem do conceito de derivada e também da prática pedagógica. São eles:

- Os alunos apresentam dificuldades no aprendizado de conceitos abordados pelo Cálculo Diferencial e Integral;
- O ponto de partida para a bordar o conceito: a noção de variação;
- A substituição da aula expositiva pela apresentação de questões investigativas que visam a construção do conceito pelo estudante.

III – O ENSINO DO CONCEITO DE DERIVADA SUGERIDO POR ALGUNS TRABALHOS E LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, faço um levantamento da maneira pela qual o conceito de derivada é abordado por alguns autores de livros didáticos, e também aponto alguns trabalhos publicados relativos à introdução desse conceito, que propõem diferentes abordagens e escolhas pedagógicas, em diversos contextos e perspectivas.

CASSOL, Armindo. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. Rio Claro, 1997.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - IGCE , UNESP.

Em seu estudo, o autor aponta conclusões relativas ao processo de ensino e aprendizagem da derivada, examinando significados que podem a ela ser produzidos neste processo: a derivada como um limite, derivada como declividade de reta tangente, derivada como resultado da aplicação de uma fórmula, derivada como velocidade e derivada como taxa de variação

Segundo o autor, a derivada como resultado de uma operação mostrou-se como um dos significados mais freqüentes entre três grupos de alunos. Dentre estes, dois, após terem cursado a disciplina onde a derivada foi objeto de ensino; no terceiro grupo, foram examinados quais e como se deu a produção dos significados supra citados.

Além disso, o autor examina alguns livros didáticos que tratam de derivada e observa que o significado geométrico da derivada é apresentado na maioria deles, mas as compressões dos estudantes são diversas, chegando a atribuir à derivada seu significado como reta tangente, e a afirmar a existência de derivada em pontos onde não é possível traçar uma reta tangente ou em pontos onde a função não é derivável.

Para Cassol, o significado mais abrangente para derivada é como taxa de variação instantânea, mas observa que na prática, *“foi muito difícil fazer uso deste significado para expressar descrições de fenômenos. Uma vez constatado que a descrição de um problema exigiria uma derivada, o aluno lamenta-se: ‘se eu conseguisse a função...’ ”.* E acrescenta que *“ ...a exigência que se faz para que a derivada represente variações instantâneas não é viável* *ao aluno pela definição mesmo que "vejam" alguma ligação. Seqüências de operações para obter a derivada não parecem indicá-la como uma variação. Toda vez que houve indicações da necessidade da derivada no texto de algum problema o aluno procurou acréscimos, diferenças de acréscimos e limites".*

VILLARREAL, Mónica Ester. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias Informáticas.* Rio Claro, 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE, UNESP.

A autora apresenta suas compreensões sobre processos de pensamento matemático de três duplas de estudantes de graduação em Biologia, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que trabalham em ambiente computacional, abordando questões matemáticas relacionadas ao conceito de derivada. Ela conclui que: *"o pensamento matemático é permeado e reorganizado pelas mídias utilizadas, que constituem, com as estudantes e a pesquisadora, uma ecologia cognitiva particular; as estudantes desenvolvem abordagens tanto visuais quanto algébricas no ambiente computacional, sugerindo a necessidade de coordená-las para superar uma dicotomia visual/algébrico; jogos de conjecturas e refutações caracterizam os processos de pensamento matemático das estudantes que não seguem caminhos lineares, mas em rede"* e acrescenta que *"tais aspectos sugerem a necessidade de repensar o ensino do Cálculo, a partir de uma visão de conhecimento como rede de significados que desafia a vigência da visão cartesiana".*

Apresento a seguir, um levantamento sobre a abordagem feita do conceito de derivada pelos autores de 8 livros didáticos. Foram escolhidos livros considerados "mais teóricos" destinados à cursos que privilegiam um maior aprofundamento em conceitos de Matemática, como por exemplo: Spivak, Moise e Guidorizzi. Também foram examinados livros "mais técnicos", destinados à cursos que privilegiam aplicações do conceito de derivada

SPIVAK, Michael. *Calculus: Cálculo Infinitesimal* . Barcelona, Editorial Reverté S. A., 1978

O autor define reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $P=(a\ ,\ f(a))$ de forma geométrica como "posição limite de retas secantes". Define derivada de f no ponto a (coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* como $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, em que *a+h* é outro ponto do domínio de *f*. Em seguida, é feita a interpretação física da derivada como o cálculo da velocidade instantânea de uma partícula em movimento, com o intuito de estabelecer *"uma conexão íntima entre os conceitos matemáticos e certas idéias físicas"*.

MOISE, Edwin E. *Cálculo: um curso universitário* v.1. Tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe. São Paulo: Edgard Blucher, 1970.

Conforme ressalta o autor, este livro apresenta novidades no tratamento de tópicos de Cálculo, dentre elas o que ele chamou de "processo em espiral", em que os conceitos aparecem de várias formas conforme a teoria se desenvolve. No capítulo 2, define que a tangente ao gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ no ponto (x_0, y_0), é a reta por esse ponto com inclinação $I_{x_0} = \lim_{x \to x_0} m_x$, onde m_x é a inclinação da reta secante pelos pontos (x_0, y_0) e $(x, ax^2 + bx + c)$ $(x \neq x_0)$. Em seguida, calcula essa inclinação, chegando a $m_x = ax + (ax_0 + b)$ e apresenta o teorema: *"Seja* (x, y) *um ponto do gráfico de* $y = ax^2 + bx + c$*. Então a inclinação da tangente ao gráfico em* (x, y) *é* $I_x = 2ax + b$*".*

A apresentação da noção de derivada é feita no capítulo 3, intitulado "Funções, Derivadas e Integrais", retomando os resultados relativos ao problema de tangentes a parábolas: *"Dado o gráfico de* $y = ax^2 + bx + c$*, encontramos que para cada* x_0*, a inclinação da tangente no ponto* (x_0, y_0) *do gráfico era* $I_{x0} = 2ax_0 + b$*"*. Em seguida, estabelece a função $f': \Re \to \Re : x \to I_x = 2ax + b$. Continuando, o autor passa para o caso geral, afirmando que se o gráfico de uma função $f: \Re \to \Re$ tem uma tangente não vertical em cada ponto $(x, f(x))$, $f'(x)$ indicará a inclinação desta tangente. Isto fornece uma nova função $f': \Re \to \Re$, chamada derivada de *f*. Continua argumentando que, como *"a inclinação da tangente é o limite das inclinações das secantes"*, a derivada é um limite. A inclinação da secante por $(x, f(x))$ e

$(x_0, f(x_0))$ é $m_x = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, logo $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, desde que exista. Portanto, para se calcular derivadas é preciso saber calcular limites. Na seqüência, apresenta o estudo de limites e as regras de derivação.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo* ,v.1.Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1985

Inicialmente, o autor analisa o problema de definir reta tangente ao gráfico de uma função *f* no ponto *(p,f(p))*, que ficará determinada se for conhecido o seu coeficiente angular. Para isso, considera a reta S_x pelos pontos *(p, f(p))* e *(x, f(x))*; quando *x* tende a *p*, o coeficiente angular de S_x tende a *f'(p)* = $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ .O autor considera natural definir a reta tangente por *(p,f(p))* como sendo a reta de equação $y - f(p) = f'(p).(x - p)$. Em seguida, define a derivada *f'(p)* de uma função *f* num ponto *p* de seu domínio , pelo $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ quando existe e é finito. Desse modo, retomando a definição de reta tangente, vê-se que a derivada de *f* em *p* é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa *p*.

BOULOS, Paulo. *Introdução ao Cálculo* v. 1-3. São Paulo: Edgard Blucher, 1974

Antes de abordar a derivada, o autor discute a noção de reta tangente, apresentando algumas concepções (inclusive erradas) que os alunos costumam ter sobre esse objeto. Para esclarecer essa noção, considera uma função *y=f(x)* e os pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$, afirmando que o coeficiente angular da secante *PQ* será $a(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e, se existir $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, então *"chama-se reta tangente ao gráfico de f no ponto P à reta que passa por P, cujo coeficiente angular é* $\lim\limits_{x \to x_0} a(x)$ " . Em seguida, chama o quociente $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de razão incremental de f no ponto x_0 relativamente ao acréscimo $x - x_0$ (x_0 é ponto interior do domínio de f) e define a derivada como o número dado pelo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, se existir e for finito e dizendo que, neste caso, f é derivável em x_0. Ressalta que não se deve perder de vista o conceito geométrico de derivada, ou seja, que se f é derivável em x_0, isso significa que seu gráfico admite reta tangente em $(x_0, f(x_0))$. Em seguida, aprofunda o estudo de limite de função e prossegue com o conceito de continuidade e com as regras de derivação.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica* v. 1, 2ª edição. Tradução de Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1982.

Os capítulos 3 e 4 deste livro são dedicados ao estudo da derivada, intitulados respectivamente por: “A Derivada” e “Aplicações da Derivada”. A derivada de uma função f, em um ponto x de seu domínio, é definida no capítulo 3 pelo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, quando existe, depois de definir declividade de reta tangente e velocidade instantânea pelo mesmo limite. Em seguida, estudam-se diferenciabilidade, continuidade e regras de derivação pela apresentação de teoremas.

O capítulo seguinte inicia-se pela exploração e definição da taxa de variação, deixando explícita a noção de variação, com exemplos de aplicação às áreas de exatas e humanas. Estudam-se também valores máximos e mínimos, crescimento e decrescimento e esboço de gráfico de funções, apresentando exemplos e exercícios de aplicação prática à física, engenharia e economia.

FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Míriam Buss. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. 5ª ed. São Paulo: Makron, 1992.

Este é um livro didático relativamente recente (lançado em 1987), que *“tem sido utilizado por estudantes de primeira fase dos cursos de Engenharia, Física, Química, Matemática e Computação”*, como afirmam as autoras no prefácio. São apresentados dois capítulos referentes ao estudo da derivada.

No capítulo 7, “Derivada”, a abordagem do conceito é feita a partir da reta tangente. A inclinação da tangente à uma curva *y=f(x)* num ponto P(x_1,y_1) é definida pelo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. A derivada de uma função num ponto é definida por esse mesmo limite, quando ele existe, e as autoras escrevem que *“geometricamente, a derivada da função y=f(x) no ponto* $(x_1, f(x_1))$*, representa a inclinação da curva neste ponto”*. Em seguida, denota a derivada de uma função *y=f(x)* por *f’(x)*, tal que, seu valor em um ponto *x* do domínio é dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se esse limite existir e escreve: *“dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio”*.

HOFFMANN, Laurence D.. *Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações 1* . 2ª ed. Tradução de Denise Paravato. Rio de janeiro: LTC – Livros técnicos e Científicos Editora S. A., 1996.

Segundo o autor, este livro *“foi escrito para aqueles que estudaram álgebra no segundo grau e se preparam para seguir carreira nas áreas de Negócios, Economia, Psicologia, Sociologia, Arquitetura e Biologia”*.

No capítulo que trata dos conceitos básicos de diferenciação, são examinados inicialmente dois problemas: um sobre maximização de lucro e outro sobre o comportamento da taxa de variação de duas funções, através de seus gráficos. Um dos gráficos, refere-se a uma reta passando pela origem e o outro, a uma curva com concavidade voltada para cima. O autor escreve que *“poderíamos resolver os problemas de otimização e calcular taxa de variação se dispuséssemos de um método capaz de determinar o coeficiente angular da tangente à curva em um ponto dado”*. Para calcular o coeficiente angular da reta tangente , considera os pontos *(x,f(x))* e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ do gráfico de uma função *f*, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, e observa que este não é o coeficiente angular da tangente, mas apenas uma aproximação desse valor. Em seguida, define a derivada de uma função *f* no ponto *x*, como sendo o valor do quociente acima, quando Δx tende a zero; valor esse que exprime o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto *(x, f(x))*.

Quase todos os autores citados, apelam para a intuição geométrica, ao apresentarem como motivação da definição de derivada, a necessidade de tornar precisa a medida de inclinação da reta tangente. Além disso, alguns deles também fazem alusão à velocidade instantânea de uma partícula em movimento, para ilustrar o significado da derivada.

IV – ELEMENTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo, procuro ilustrar meu trabalho, apontando elementos que contribuíram para a definição de derivada como é conhecida hoje: medida de variação.

Tradicionalmente, atribui-se a “invenção” do Cálculo Diferencial e Integral à Newton e Leibniz, na segunda metade do século XVII, através da sistematização de métodos que tornaram possível a solução de problemas referentes à construção de tangentes, cálculo de áreas, volumes, etc. Como o ponto de partida escolhido para abordar o conceito de derivada, foi a noção de variação (e não a reta tangente), iniciarei este relato por uma época bem mais recente que a de Euclides (330 A.C – 275 A.C.), o primeiro matemático que se tem notícia de ter traçado reta tangente (à uma circunferência). Inicialmente, farei referência ao francês Augustin Louis Cauchy (1789 – 1848), visto que foi ele quem definiu derivada em termos de limite e de variação. Sendo esta abordagem o ponto central desse levantamento histórico, procurarei apresentar somente algumas idéias e conceitos próximos a esse enfoque e, além disso, responder a algumas questões, tais como:

1) Quem e como, definiu a derivada em termos de variação e de limite?
2) Qual a concepção de limite que foi suficiente para definir a derivada em termos desse?
3) Qual a concepção de função que foi utilizada para definir a derivada como um limite?
4) Qual o tratamento que se deu para a idéia de infinitesimal ao se definir a derivada em termos de limite e de variação?
5) Como se deu o reconhecimento da relação entre as questões de quadraturas e de tangentes, permitindo o entendimento do significado da derivada como medida de inclinação da reta tangente?

Segundo Boyer [5], o que caracteriza o trabalho de Cauchy, é o fato de ele ter sido capaz de dar ao Cálculo Diferencial o caráter que ele tem hoje, conforme consta em três livros – *Cours d’analyse de l’École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823) e *Leçons sur le* *calcul différentiel* (1829). Reproduzo, a seguir, a definição dada por ele para derivada:

"Se uma função $y = f(x)$ *for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função. Portanto, se dissermos que* $\Delta x = i$ *, os dois termos da razão das diferenças* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ *serão quantidades infinitamente pequenas. Mas quando esses dois termos se aproximarem indefinidamente de zero, sua razão pode convergir para algum outro limite positivo ou negativo. Este limite, quando existe, tem um valor definido para cada valor específico de x, mas varia com x".*

Notemos que Cauchy, para definir derivada, parte de uma função contínua, podendo passar a idéia que toda função contínua tem derivada. Hoje é fato conhecido que isto não ocorre, visto que se conhecem funções que não são deriváveis, embora sejam contínuas (por exemplo: $f(x) = |x|$).

Nos próximos parágrafos, enfocarei alguns conceitos contidos na definição de Cauchy, visando responder a algumas das questões anteriormente levantadas; são eles: função e função contínua, limite, infinitesimal e quantidades (infinitamente pequenas) .

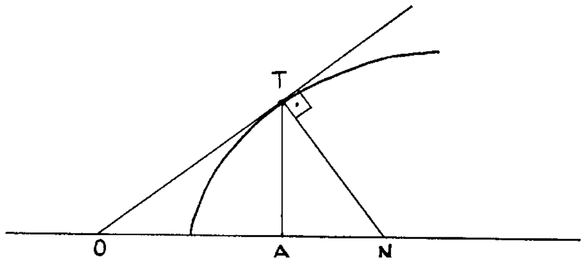
De acordo com Boyer, Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) achava que a "verdadeira metafísica" do Cálculo se encontraria na idéia de limite. No artigo sobre "Limite" que d'Alembert escreveu para a *Encyclopédie* [10], ele chama *"uma quantidade, o limite de uma segunda quantidade (variável) se a segunda pode se aproximar da primeira de mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela)"*. Por outro lado, Cauchy deu à esse conceito um caráter de maior precisão, definindo (conforme consta no Vol. III das *Oeuvres Complètes* [8]) *: "quando valores atribuídos sucessivamente a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo finalmente a diferir deste de tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite de todos os outros"* (resposta à 2ª questão: *Qual a concepção de limite que foi suficiente para definir a derivada em termos desse?*).

A expressão *“uma variável se aproxima indefinidamente de um valor fixo”* , também encontrada na definição de Bolzano, sugere implicitamente o tempo e o movimento. Weierstrass, ao interpretar uma variável como uma letra que representa qualquer valor de um conjunto dado, elimina a idéia de movimento. É dele a primeira definição de limite de uma função em termos de ε e δ.

Os conceitos contidos na definição relativamente precisa de Cauchy para o limite, dão elementos para que ele defina infinitesimal, dizendo que “*uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero”*, enquanto que muitos matemáticos que o precederam, tinham pensado em infinitésimos como um número fixo muito pequeno (resposta à quarta questão: *“Qual o tratamento que se deu para a idéia de infinitesimal ao se definir a derivada em termos de limite e de variação?”*).

Antes de apresentar a definição de Cauchy para função contínua, é conveniente ressaltar que a concepção que se tinha na época de função não é idêntica à que se tem hoje. Na segunda metade do século XIV, Nicole Oresme (1323-1382) desenvolveu teoria das latitudes e longitudes das formas, que pode ser considerada como a precursora da representação gráfica da função. Ele chegou a idealizar uma representação gráfica de velocidade-tempo para um corpo que se move com velocidade constante, o que era novidade para a época. Para um estudo mais detalhado sobre a gênese do conceito de função, ver Ávila [3].

Segundo Ávila [4], nos problemas geométricos tratados pelo Cálculo no século XVII, além da ordenada de um ponto da curva, eram consideradas também outras grandezas, como os comprimentos da tangente *OT*, da sub-tangente *OA*, da normal *TN* e da sub-normal *AN* (figura seguinte). E as investigações giravam em torno de equações envolvendo essas várias grandezas, as quais eram encaradas como diferentes variáveis ligadas à curva, o invés de serem vistas como funções separadas de uma única variável independente.



A palavra "função" foi introduzida por Leibniz (1646-1716) em 1673, para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras.

Em 1753, num trabalho de Daniel Bernoulli (1700-1782), em seu estudo da corda vibrante, surgiu o problema de expressar a função que dava o perfil inicial da corda como série infinita de senos e cosenos. Mais especificamente, dada uma função periódica *f*, de período 2π, determinar os coeficientes a_n e b_n de forma que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$. As vibrações de uma corda esticada foram estudadas pela primeira vez por d'Alembert em 1747, logo em seguida por Euler e depois por Bernoulli. Tratava-se de determinar uma função de duas variáveis satisfazendo uma equação diferencial parcial, conhecida como *equação das ondas*.

A concepção de função vigente na época quase só se restringia à idéia de uma variável (dependente) expressa por alguma fórmula em termos de outra ou outras variáveis (independentes). "Continuidade" significava a função definida por uma única expressão analítica, ao passo que "descontinuidade" significava, não a "ruptura" do gráfico da função, mas da expressão analítica ou lei que definisse a correspondência entre a variável dependente e a variável independente (ou variáveis independentes). Isso excluía a possibilidade de um perfil mais geral, como pretendia Euler que, em 1748 em seu *Introductio in analysis infinitorium,* define função de uma quantidade variável como *"qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou* *quantidades constantes".* Ele pensava em função de maneira menos formal e mais geralmente como a relação entre as coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano (idéia esta parecida com a de Newton, que tinha assumido que curvas são geradas por movimentos lisos e contínuos). Tanto d'Alembert quanto Euler, não concordavam com a possibilidade sugerida por Bernoulli, de expressar uma função em série infinita de senos e cosenos.

A questão posta por Bernoulli permaneceu dormente por cerca de meio século até que fosse retomada por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em seus estudos sobre a propagação do calor. No ano de 1822, em seu *Théorie analytique de la chaleur,* deu a idéia que funções do tipo *y=f(x)* podem ser representadas por uma série (de Fourier), contrastando com os pontos de vista de Euler e d'Alembert. Os trabalhos de Fourier deixavam clara a insuficiência das antigas concepções de função e de continuidade. Ele próprio já tinha uma idéia bem mais ampla desse conceito, escrevendo no Art. 417 de seu livro [12]: *"Em geral a função f(x) representa uma sucessão de valores ou ordenadas arbitrárias. (...) Não supomos essas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas às outras de qualquer maneira, e cada uma é dada como se fosse uma grandeza única".*

Essa idéia está mais próxima da definição que adotamos hoje, segundo a qual uma função *f* refere-se à correspondência entre conjuntos não vazios A e B, associando a cada elemento de um conjunto A, um único elemento de um conjunto B.

Ainda de acordo com Ávila, situações novas como as apresentadas por Fourier evidenciavam a necessidade de uma adequada fundamentação dos métodos usados no trato dos problemas. Era preciso agora aclarar de vez o significado de "derivar" ou "integrar" uma função, fosse ela dada por uma "fórmula" ou não. "Derivar" não podia significar apenas aplicar uma "lei algébrica" a uma "fórmula", assim como "integrar" não podia mais ser apenas "achar uma primitiva". Essas maneiras de encarar as operações do Cálculo eram, a partir de então, insuficientes.

Certamente Cauchy estava a par do trabalho de Fourier, mas provavelmente tinha uma idéia de função mais próxima da de Euler e de

Newton. Cauchy, apesar de ser rigoroso com suas definições, passou quase toda sua vida acreditando que todas as funções contínuas eram deriváveis (curvas formadas por movimentos lisos e contínuos), até que, em 1834, Bolzano imaginou uma função contínua num intervalo que, apesar da intuição física em contrário, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo (tal função pode ser encontrada em Spivak [17]). A definição dada por Cauchy para função contínua é:

"A função $f(x)$ *será contínua em x num intervalo de valores desta variável se, para cada valor de x nesse intervalo, o valor numérico da diferença* $f(x+\alpha)-f(x)$ *decresce infinitamente com* α*. Em outras palavras, f(x) é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno de x produz um acréscimo infinitamente pequeno de f(x)".* (resposta à terceira questão: *Qual a concepção de função que foi utilizada para definir a derivada como um limite?).*

Tendo definido limite, infinitésimo e função contínua, Cauchy define a derivada de uma função *y=f(x)* com relação a *x*, dando à variável x um incremento $\Delta x = i$ e formando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. O limite desse quociente de diferenças quando *i* tende a zero, ele definiu como derivada *f'(x)* de *y* em relação a *x*. Note-se que Cauchy considera a questão da variação e de função contínua na sua definição de derivada. (resposta à primeira questão: *Quem e como, definiu a derivada em termos de variação e de limite?")*

Depois de ter definido a derivada, Cauchy estabelece sua ligação com os diferenciais de Leibniz, relegando à estes um papel subsidiário, embora percebesse sua simplicidade operacional.

Para responder à 5^a questão, é conveniente voltar à época de Newton e Leibniz. Utilizei como referência, Galarda e Rossi [13].

A idéia germinadora do Cálculo Diferencial e Integral já havia sido implantada no mundo matemático bem antes de Newton e Leibniz, mas costumeiramente atribui-se à eles a "invenção" dessa área de conhecimento, isto porque, foi através deles que se processou uma mudança importante na forma de se resolver problemas de tangentes e quadraturas. Os métodos por eles utilizados para resolver tais problemas podiam ser estendidos e aplicados à vários tipos de curvas, mostrando qual o caminho a ser seguido quando surgisse alguma questão nova de construção de tangentes, ou de cálculo de áreas, de volumes, etc.

Newton desenvolveu o “Método das Fluxões” no seu *“De Methodis Serierum et fluxionum”*, que foi publicado em 1736. Neste método, sua intenção parece ter sido determinar a relação entre a variação da quantidade y e da quantidade x, de uma função y=f(x), quando x sofre um acréscimo infinitesimal, considerando as quantidades matemáticas *“como se fossem geradas por um aumento contínuo do espaço no qual um objeto se move descrevendo uma trajetória”.* Aparentemente, esta é a mesma consideração que Cauchy deu às *quantidades* que aparecem na sua definição de derivada. Newton define suas noções de fluentes e fluxões assim:

> *“Eu chamarei de Quantidades Fluentes, ou simplesmente Fluentes estas quantidades que eu considero como aumentadas gradualmente e indefinidamente, eu as representarei pelas últimas letras do alfabeto v, x, y e z para distinguir das outras quantidades que, nas equações, são consideradas como conhecidas e determinadas que nós representaremos pelas letras iniciais a, b, c, etc,; eu representarei pelas mesmas letras sobrepostas de um ponto* $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ *as velocidades cujas fluentes são aumentadas pelo movimento que as produz e, por conseqüência nós poderemos chamar Fluxões”.*

E enuncia o que, segundo suas palavras, constitui a questão fundamental do Cálculo:

> *“Sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões. E inversamente”.*

Newton explica sua solução para esse problema através de diversos exemplos. Para a função $y = x^n$, seu método é o seguinte:

“ Se *o* é “um intervalo de tempo infinitamente pequeno”, $\dot{x}.o$ e $\dot{y}.o$ serão os acréscimos infinitamente pequenos de *x* e de *y*. Para encontrar a relação entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$, Newton substituiu *x* por $x + \dot{x}.o$ e *y* por $y + \dot{y}.o$ *.* Logo, de $y = x^n$, temos

$$y + \dot{y}.o = (x + \dot{x}.o)^n$$

$$y + \dot{y}.o \; = \; x^n + n.o\,\dot{x}\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 \,\dot{x}^2\, x^{n-2} + \ldots + \dot{x}^n \, o^n$$

Como $y = x^n$ e dividindo todos os termos por *o*,

$$\dot{y} \; = \; n\,\dot{x}\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o \;\; \dot{x}^2 \;\; x^{n-2} + \ldots + \dot{x}^n \;\; o^{n-1}$$

Desprezando os termos que contém *o*, chega-se finalmente a ($o \rightarrow 0$)

$\dot{y} \; = \; n\,\dot{x}\,x^{n-1}$ “.

Neste método, não está clara qual a concepção que Newton tinha de infinitesimais, desprezando-os quando considera necessário. A tentativa de eliminação deste traço do infinitamente pequeno é feita por ele em seu “Método das primeiras e últimas razões”, apresentado em seu *“Quadratura Curvatum”*, que foi escrito em 1676 e publicado em 1704.

O procedimento é o mesmo do acima, só que o momento $\dot{x}o$ passa a ser denotado por *o* e, ao invés de desprezar os termos que contém *o*, forma a razão entre a variação de *x* e a variação de *y* e depois deixa o *o* desaparecer nesta razão. Para $y = x^n$ esta razão será igual a $\frac{1}{nx^{n-1}}$, que foi concebida da seguinte maneira:

Se *o* é o acréscimo de *x* , então

$$(x+o)^n \; = \; x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \ldots + o^n$$

assim o acréscimo de *y* será

$$(x+o)^n - x^n \; = nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \ldots o^n$$

logo, $$\frac{\text{acréscimo de x}}{\text{acréscimo de y}} = \frac{o}{nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \ldots + o^n}$$

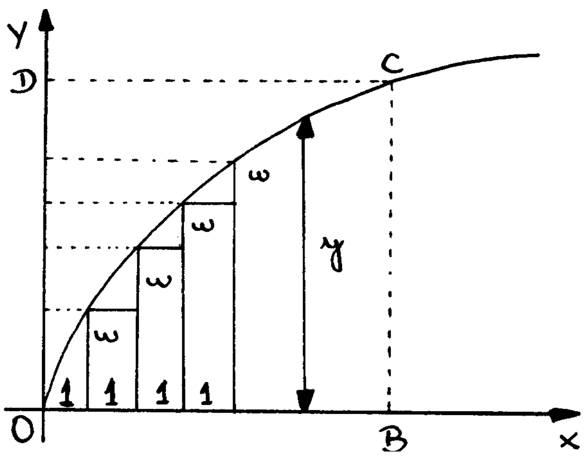
$$= \frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + \ldots + o^{n-1}}$$

desprezando *o*, teremos $\frac{1}{nx^{n-1}}$ ”.

Justifico a importância de citar métodos desenvolvidos por Newton, dentro do contexto histórico da gênese do conceito de derivada, reproduzindo um trecho das autoras citadas: *"a diferença entre Newton e seus predecessores, é que este formulou regras para cobrir soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal, conhecidos no seu tempo. Embora muito dessas regras tivessem sido formuladas anteriormente, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual grande parte dos problemas podiam ser formulados.... A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação "padrão" como ponto para representar a diferenciação e, aparentemente não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração".*

A notação para derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ hoje utilizada deve-se a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), que desenvolveu vários procedimentos para quadraturas de curvas. Reproduzo abaixo, um método (conforme Galarda e Rossi) desenvolvido por Leibniz em 1675 para o cálculo da área sob uma curva, que permite notar que a relação inversa entre derivada e integral também foi percebida por ele. Juntamente com Newton, Leibniz desempenhou papel importante no desenvolvimento do Cálculo, uma vez que seus métodos são mais gerais que de seus predecessores, não dependendo da natureza especial da curva tratada.

"Considere uma seqüência de ordenadas *y*, de uma curva, igualmente espaçadas de uma unidade infinitamente pequena, conforme a figura.



Nota: i) o símbolo 1 usado na figura representa uma unidade infinitamente pequena; ii) inicialmente, Leibniz escrevia $\int y$ para indicar a área sob a curva *y=f(x)*, provavelmente por tomar a distância entre duas ordenadas consecutivas iguais a 1 (uma unidade infinitamente pequena), só mais tarde é que ele passou a escrever $\int ydx$.

Área *OBC* $\cong$ soma dos y_s = $\sum y$

Área *OCD* $\cong$ soma dos retângulos *xw* = $\sum xw$

Mas área *OCD* = área *OBCD* - área *OBC* , isto é,

$\sum xw$ = área *OBCD* - $\sum y$

Leibniz, escreveu isto usando o simbolismo de Cavalieri

$omn.\overline{xw}$, $\neg$ $ult x.$, $omn.w., - \overline{omn.y}$

onde

omn = todos — $\neg$ = igualdade

$\_\_$ = parênteses — ult = último termo da seqüência

Não satisfeito com a notação de Cavalieri, Leibniz escolhe o símbolo $\int$ para substituir omn, onde $\int$ é o S estilizado tomado da palavra soma. Introduziu também o *d* característico para denotar a diferenciação, tomado da palavra diferença que aqui aparece. Desta forma, a equação $\sum xw$=área *OBCD* -$\sum y$ acima pode ser escrita como:

$$\int_0^y xdy = x.y - \int_0^x ydx$$

Onde $\int_0^y xdy$ representa a área *OCD*,

x.y representa a área *OBCD* e

$\int_0^x ydx$ representa a área *OBC*

Como os w_s são as diferenças dos y_s, então os y_s são as somas dos w_s, isto é, $y = \sum w$

então, $\sum xw$ = área *OBCD* - $\sum\sum w$

Prosseguindo com seus estudos, Leibniz demonstrou as regras:

$\int (y+z)dx = \int ydx + \int zdx$

$\int aydx = a\int ydx$, onde *a* é uma constante.

A definição dada por Leibniz para *dy* é a diferencial de uma variável *y*, como a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de *y.* Ele mostrou as regras:

$da = 0$ onde *a* é uma constante

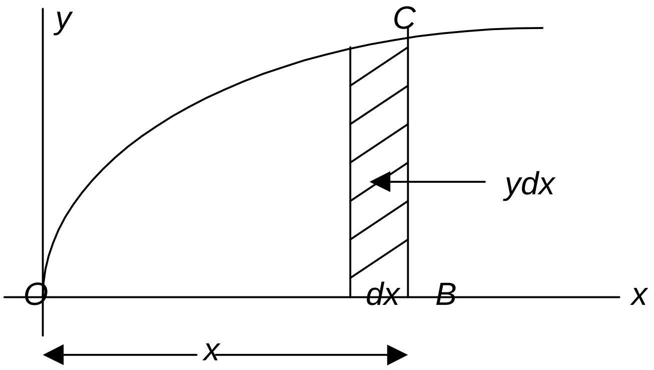
$d(u+v) = du + dv$ onde *u* e *v* são funções

$d(uv) = udv + vdu$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$d(u^n) = nu^{n-1}du$

Como a área sob uma curva *y=f(x)* é a soma da área *ydx* de retângulos infinitamente pequenos, a diferencial da área (diferença entre dois valores consecutivos daquela área) é a área do retângulo *ydx* à extrema direita.



Traduzindo isto para a simbologia de Leibniz: $d\int ydx = ydx$, o que mostra a relação inversa entre d e $\int$; reciprocamente, $\int dy = y$. Mais tarde, (1684) Leibniz publica um artigo que trata de determinação de máximos e mínimos assim como de tangentes, no qual expôs as regras de seu cálculo diferencial com exemplos de sua aplicação".

Com o exposto sobre Newton e Leibniz, percebemos que foi através deles que reconheceu-se a relação inversa entre problemas de quadraturas e de tangentes (resposta à 5ª questão: *Como se deu o reconhecimento da relação entre as questões de quadraturas e de tangentes, permitindo o entendimento do significado da derivada como medida de inclinação da reta tangente?*).

A ligação estabelecida por Cauchy entre a derivada e os diferenciais, foi feita assim:

"Seja y=f(x) novamente uma função da variável independente x. Seja i uma quantidade infinitamente pequena e h uma quantidade finita. Se dissermos que $i = \alpha h$*,* α *será, novamente, uma quantidade infinitamente pequena, e teremos a identidade:*

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$

donde $\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}h$ *(1)*

O limite para o qual converge o lado esquerdo da equação (1) à medida que α *se aproxima indefinidamente de zero e h permanece constante é chamado "diferencial" da função y=f(x). A diferencial é indicada por dy ou df(x). Seu valor pode ser facilmente determinado se soubermos o valor da função derivada y' ou f'(x). De fato, se tomarmos os limites de ambos os lados da equação (1), acharemos um resultado geral:*

df(x) = hf'(x) (2)

No caso especial quando f(x)=x , a equação (2) reduz-se a dx = h. Assim a diferencial da variável independente x é precisamente h. Dado isto, a equação (2) torna-se df(x) = f'(x)dx , ou, equivalentemente,

dy = y'dx

Essas últimas equações mostram que a derivada y'=f'(x) de qualquer função y=f(x) é precisamente igual a $\frac{dy}{dx}$ *, isto é, à razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável ou, se quisermos, ao coeficiente pelo qual devemos multiplicar a segunda diferencial a fim de obtermos a primeira. É por isso que a derivada é chamada às vezes de "coeficiente diferencial"".*

A diferença fundamental entre as definições dadas por Cauchy e Leibniz para o diferencial, é que o primeiro a faz em termos de razão de diferenças de duas quantidades distintas (derivada) e o segundo, em termos de diferenças infinitamente pequenas entre valores consecutivos de uma mesma quantidade.

V – EMBASAMENTO TEÓRICO E METODOLOGIA

Esta pesquisa está embasada em elementos teóricos da Didática da Matemática e também em princípios da Teoria do Conhecimento, em particular na questão da formação dos conceitos “espontâneos” e “científicos”. A noção de Contrato Didático orientou-me com relação à elaboração, aplicação e análise da seqüência didática.

Contrato Didático

A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções, quase nunca explícitas mas que se revelam principalmente quando se dá a transgressão das mesmas, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. O conjunto das cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e alunos mantém com o saber, constitui o chamado contrato didático, cuja definição dada por Brousseau (1986) [6], é:

“Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro”.

De acordo com Silva [15]**,** a prática pedagógica mais comum em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre sua parte do contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos, selecionando partes do conteúdo para que o aluno possa aprender, propondo problemas cujos enunciados contenham apenas dados necessários para sua resolução. O aluno, por seu lado, cumpre sua parte do contrato compreendendo bem ou mal a aula, mas sobretudo conseguindo resolver corretamente ou não os exercícios. Caso o aluno tenha insucesso na resolução dos exercícios, o professor deve ajudá-lo através de indicações do tipo reforço ou pela colocação de questões elementares que conduzam ao resultado esperado. Neste quadro, existem casos em que o professor se refugia na segurança dos algoritmos prontos, fraciona a atividade matemática em etapas pelas quais passa mecanicamente, esvaziando seu significado. Sua atuação resume-se em apresentar uma definição, dar alguns exemplos e solicitar exercícios muito parecidos aos dos exemplos dados, cabendo aos alunos memorizar regras e reproduzi-las quando identificam a sua pertinência, normalmente pelo reconhecimento de “palavras chaves” contidas nos enunciados das questões. Nesta situação de ensino, a construção do saber fica quase que exclusivamente sob a responsabilidade do aluno. Esta prática pedagógica parece ser a mais comum no ensino do Cálculo Diferencial, em que as questões mais freqüentes são do tipo: derive a função..., determine os pontos de máximo e mínimo da função..., etc., conforme constatei no exame de livros didáticos.

Esta relação didática é bem diferente daquela que direciona uma prática pedagógica em que os alunos trabalham, realizando atividades propostas e, no final, o professor, em uma plenária, procura institucionalizar o conceito que se está trabalhando e em seguida propõe exercícios de fixação e/ou verificação do aprendizado. Assim, o aluno trabalhando em duplas ou individualmente, em seqüências didáticas organizadas pelo professor, que se apoia nas produções pessoais ou coletivas dos alunos (resultados de atividades propostas através de um problema), propicia o estabelecimento de um contrato didático totalmente diferente, em que o professor faz progredir o aprendizado de toda a classe. A seqüência didática proposta neste trabalho apoia-se neste tipo de prática pedagógica.

Quando se propõe a introdução de um conceito por meio de atividades em que os alunos, partindo de uma situação-problema, resolvem questões trabalhando individualmente ou em duplas e, no final, o professor faz com toda a classe o fechamento, visando a institucionalização do conceito que se pretende construir, ocorre o fenômeno denominado **ruptura** do contrato didático vigente, o que exige uma **renegociação** de novas cláusulas contratuais. Neste momento, o contrato didático é transgredido pelo professor e as regras implícitas se manifestam fortemente. É o caso deste trabalho, visto que a seqüência didática introduz o conceito de derivada (que é novo para os alunos), através de atividades a serem desenvolvidas em duplas, partindo de um problema do mundo concreto e, ao final de cada atividade, é aberta uma plenária visando institucionalizar conceitos que se pretende construir.

Brousseau, ao destacar a existência do contrato didático, dá indicações que este pode ser, em muitas oportunidades, gerador de sucessos e insucessos por parte dos alunos, mascarando às vezes, dificuldades na aprendizagem. Por outro lado, Chevallard (1988) [9], em sua investigação sobre o que acontece quando o contrato didático, vigente por muito tempo no decorrer da vida escolar dos alunos é transgredido, levanta, dentre outras, as seguintes regras implícitas no contrato que regem os comportamentos do professor e dos alunos em relação ao saber:

- sempre há uma resposta a uma questão matemática e o professor a conhece. Deve-se sempre dar uma resposta que eventualmente será corrigida;
- para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo;
- em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações. A tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente. Certas palavras-chave contidas no enunciado permitem que se adivinhe qual é ela;
- os números são simples e as soluções também devem ser simples, senão, é possível que se engane;
- as questões colocadas não têm, em geral, nenhuma relação com a realidade cotidiana mesmo que pareçam ter, graças a um habilidoso disfarce. Na verdade elas só servem para ver se os alunos compreenderam o assunto que está sendo estudado.

A apresentação de questões abertas, que sugerem a procura de dados pertinentes à questão proposta, assim como a verificação da validade dos resultados obtidos fazem parte do contrato didático que escolhí.

Ainda de acordo com Chevallard, o professor tem a obrigação social de ensinar tudo o que é necessário para que o aluno apreenda um saber, independente das condições que determinam, quase sempre implicitamente, aquilo que cada um dos dois parceiros (professor e aluno) da relação didática tem a responsabilidade de gerenciar. Estas condições (contrato didático) dependem da estratégia de ensino adotada, adaptando-se a diferentes contextos, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto aos alunos, os objetivos de formação, a história do professor, as condições de avaliação, etc. O professor deve gerir sua parte do contrato, de forma que o aluno consiga resolver problemas que lhe são impostos, a fim de que ambos (professor e aluno) constatem que cumpriram sua tarefa. Com o intuito de fazer com que o aluno tenha sucesso na construção do saber, o professor, querendo facilitar-lhe a tarefa, pode fornecer-lhe pistas para a resolução das questões propostas e, às vezes, desviar-se dos objetivos inicialmente presentes na proposta das mesmas. Atitudes como estas, são **efeitos** do Contrato Didático. Dentre eles, citarei alguns:

- O chamado efeito “Topázio”, em que o professor tenta resolver a questão no lugar do aluno, quando este encontra uma dificuldade, fornecendo-lhe abundantes explicações, ensinando pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicando-lhe pequenos passos na resolução do problema proposto;
- Acreditar que os alunos darão naturalmente a resposta esperada. O professor ensina apenas aquelas “partes” do assunto em que se supõe que o aluno tenha mais facilidade de “aprender”, privando-o das condições necessárias à compreensão e aprendizagem da noção visada, colocando como objetos de estudo suas próprias explicações e seus meios heurísticos, ao invés de ter como objeto o verdadeiro saber matemático;
- Substituir uma noção complexa por uma analogia, ou seja, substituir uma problemática real e específica por outra, talvez metafórica, mas que não confere sentido correto à situação. O uso abusivo de analogias acaba produzindo o efeito “Topázio” citado acima, quando o professor passa a fornecer dicas e desenvolver técnicas para a resolução da questão proposta;
- Ao interpretar um comportamento banal do aluno como uma manifestação de um saber culto (chamado efeito “Jourdan”), o professor pode não permitir que o aluno exponha algumas dificuldades ou concepções inadequadas

sobre o conceito que se quer ensinar, e também mascara a existência de algum fracasso;

- Considerar uma técnica, útil para resolver um problema, como objeto do estudo e perder de vista o saber a desenvolver (escorregamento metacognitivo). Por exemplo, trabalhar exaustivamente as regras de derivação ao invés de desenvolver o conceito de derivada.

Conceitos "espontâneos" e conceitos "científicos"

Segundo Fosnot [11], Vygotsky definiu conceito espontâneo como aqueles que o estudante desenvolve naturalmente no processo de construção que emerge de suas próprias reflexões sobre a experiência cotidiana. Definiu conceitos científicos como aqueles que originam-se na atividade estruturada da instrução de sala de aula e impõem sobre o indivíduo abstrações mais formais e conceitos logicamente mais definidos de que os construídos espontaneamente.

Definido estes dois conceitos, sua questão é: "o que facilita aprendizagem levando o indivíduo a passar de conceitos espontâneos para os conceitos científicos?"

Segundo Vygotsky , os conceitos científicos não vêm para o indivíduo de uma forma já pronta. Eles passam por um desenvolvimento substancial, dependendo do nível de desenvolvimento de um conceito espontâneo, para que o aprendiz seja capaz de absorver um conceito científico a ele relacionado. Os conceitos científicos abrem seu caminho "para baixo", impondo sua lógica ao sujeito; os conceitos "espontâneos" abrem caminho "para cima", encontrando o conceito científico e permitindo que o aprendiz aceite sua lógica. Nas palavras de Vygotsky, *"ao trabalhar seu lento caminho ascendente, um conceito cotidiano limpa um caminho para o conceito científico e seu desenvolvimento descendente. Ele cria uma série de estruturas necessárias para a evolução dos aspectos elementares mais primitivos de um conceito que lhe dão corpo e vitalidade. Os conceitos científicos, por sua vez, fornecem estruturas para a elevação do nível de consciência e para seu uso deliberado. Os conceitos científicos crescem descendentemente através de conceitos* *espontâneos; os conceitos espontâneos crescem ascendentemente através de conceitos científicos"..*

O "lugar" onde se dá este desenvolvimento ascendente e descendente, Vygotsky chamou de *"zo-ped"* (zona de desenvolvimento proximal) e viu como inadequados os testes ou tarefas escolares que apenas examinavam a resolução de problemas resolvidos individualmente pelo aprendiz, alegando que a existência de um "mediador", para aquilatar as capacidades destes aprendizes, contribui para o progresso de formação de conceitos. Desta forma, a aprendizagem se dá mais efetivamente quando este "mediador" (professor) leva o estudante, em companhia de seus pares, para um nível "potencial" de desempenho construído conjuntamente.

A seqüência didática proposta neste trabalho, faz uma abordagem do conceito de derivada (conceito científico) tendo como ponto de partida a noção de variação (conceito espontâneo). A Zona de Desenvolvimento Proximal no grupo de alunos, é acionada pelas atividades que compõem a seqüência que são desenvolvidas em duplas, o que permite a negociação, questionamento e conclusão pelo grupo de alunos. A plenária, que é realizada após cada atividade, permite que o "mediador" institucionalize conceitos científicos, contribuindo para a que haja a formação desses conceitos pelo aluno.

Metodologia

O tema desta pesquisa refere-se às dificuldades apresentadas por alunos no aprendizado do conceito de derivada. Na expectativa de contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem dessa noção, o objetivo deste trabalho é

- Elaborar uma seqüência didática que contribua para o ensino e aprendizado do conceito de derivada a partir da noção de variação;
- Aplicar a seqüência utilizando recursos de computador e calculadoras, além de papel e lápis;
- Analisar os resultados obtidos, visando apontar conclusões a respeito do desempenho dos alunos nesta seqüência didática.

Para a consecução desse objetivo, realizei no segundo semestre de 1998, época em que estava previsto o estudo de derivada, uma pré-experimentação, composta de 3 atividades. Os participantes eram meus alunos regulares de Cálculo Diferencial e Integral (3 turmas de Computação do período noturno). Esta pré-experimentação teve funções importantes: ajudou-me a ter uma idéia do tempo que seria necessário para aplicar e discutir em plenária as fichas com os alunos; permitiu identificar ferramentas operatórias dominadas ou disponíveis pelos alunos, tais como habilidades algébricas e manuseio de calculadoras; ajudou na formulação de questões, e possibilitou verificar a receptividade dos alunos em trabalhar em duplas com atividades contendo questões abertas.

Esta pré-experimentação aliada ao levantamento de elementos históricos, exame de 7 livros didáticos, a revisão bibliográfica sobre trabalhos que tratam do ensino e aprendizagem do Cálculo, assim como os que enfocam a derivada (como relatado no capítulo III), além da observação de comportamentos de alunos ao estudarem o conceito em aulas expositivas, forneceram-me, de alguma maneira, subsídios para a elaboração da seqüência didática.

Para a elaboração da seqüência, baseei-me em princípios de Engenharia Didática, caracterizados por Michèle Artigue [2] como *"um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino".*

Pretendo com a seqüência didática proposta, que o aluno construa o conceito de derivada (conceito científico), a partir da a noção de variação (conceito espontâneo).

O ponto de partida das atividades é a apresentação de um problema do mundo concreto, que requer para sua resolução, uma ferramenta ainda não disponível para os alunos. Tal ferramenta é a derivada. Ao tentar resolver o problema, o aluno percebe que ainda não dispõe de todos os elementos necessários.

Tal seqüência foi aplicada a alunos que cursam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, no 1º ano de Ciência da Computação do IMES – Instituto Municipal de Ensino Superior de São Caetano do Sul. Os alunos já haviam estudado o conceito de limite, bem como sabiam manusear o software Derive no que se refere à construção e exploração de gráficos de funções.

A seqüência de ensino foi aplicada a 28 duplas, durante as aulas de Cálculo Diferencial e Integral, em sessões de 3 horas de duração. A decisão de trabalhar em duplas baseia-se no fato que isto contribui para o diálogo entre os participantes, além de ser estimulante e promover um auxílio mútuo entre eles. A dupla pode ser dominada por um dos participantes e, no entanto, as expressões individuais do outro podem sofrer interferências benéficas. Não fiz restrições quanto a formação das duplas, na suposição de que isto garantiria um bom funcionamento de cada uma delas.

Esta seqüência é composta de 14 fichas, que foram aplicadas nas seguintes datas:

08/05/1999 fichas 1 e 2
15/05/1999 fichas 3 e 4
22/05/1999 fichas 5,6 e 7
29/05/1999 fichas 8 e 9
12/06/1999 fichas 10 e 11
19/06/1999 fichas 12 e 13
19/08/1999 ficha 14

Como recursos para o desenvolvimento das fichas, foram utilizados o software Derive, calculadora não gráfica e papel e lápis, conforme orientação em cada uma delas. Dependendo do tipo de recurso exigido, as atividades eram realizadas ora em laboratório de informática, ora em sala de aula.

O procedimento adotado para a aplicação da seqüência foi o seguinte:

Foram distribuídas duas fichas idênticas por vez para cada dupla, que contém a atividade a ser desenvolvida; uma delas é devolvida para análise a posteriori, e a outra fica com a dupla. Depois que todas as duplas devolveram a ficha apresentada, estabeleci uma plenária (todas as plenárias foram audiogravadas), em que provoco discussões com os alunos sobre as atividades propostas e institucionalizo algum conceito. Na plenária, as duplas são orientadas a fazerem anotações na ficha que ficou com elas, além de questionar e corrigir possíveis erros cometidos. Nesta ocasião (plenária), utilizei como recursos, além do quadro negro e computador, projeção da tela da calculadora gráfica TI 92.

Foram realizadas 13 plenárias, uma para cada ficha, exceto para as fichas 2 e 3 que foram discutidas numa só plenária.

Estava previsto aplicar toda a seqüência durante o primeiro semestre de 1999; no entanto, devido a alguns imprevistos, foi preciso estender um encontro para o mês de agosto.

Os resultados dos alunos fornecem os dados que serão analisados a posteriori, tentando relacioná-los com os objetivos definidos a priori.

Apresento no próximo capítulo, cada ficha seguida da correspondente análise a priori preparada.

VI – A SEQÜÊNCIA DE ENSINO: FICHAS E ANÁLISE A PRIORI

A seqüência é composta de 14 fichas, que são apresentadas neste capítulo, seguidas de uma análise a posteriori.

FICHA 1: PROBLEMA DAS BACTÉRIAS

Um laboratório de biologia, na tentativa de controlar a reprodução de certa bactéria causadora de uma infecção, verificou que certo antídoto, quando colocado em contato com esta bactéria, é capaz de controlar o crescimento das mesmas segundo uma determinada lei. A tabela abaixo mostra a contagem feita pelo laboratório nos tempos considerados, onde *y* representa o número de bactérias e *x* representa o tempo em horas, de exposição da bactéria ao antídoto.

x	Y
0	200
1	344
2	392
3	368
4	296
5	200
6	104
7	32
8	8
9	56
10	200

1) Qual o número de bactérias que havia no início da experiência?

2) O que você acha que acontece com o número de bactérias na primeira hora de exposição ao antídoto?

3) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 1 a 2 horas de exposição ao antídoto?

4) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 2 a 3 horas de exposição ao antídoto?

5) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 6 a 7 horas de exposição ao antídoto?

6) Idem entre 7 e 8 horas de exposição ao antídoto.

7) Idem entre 8 e 9 horas de exposição ao antídoto.

8) Idem entre 9 e 10 horas de exposição ao antídoto.

9) Calcule a variação do número de bactérias em todos os intervalos de tempo acima considerados.

De 0 a 1:

De 1 a 2:

De 2 a 3:

De 3 a 4:

De 4 a 5:

De 5 a 6:

De 6 a 7:

De 7 a 8:

De 8 a 9:

De 9 a 10

10) O que você observa com a variação do número de bactérias nos intervalos de tempo de exposição ao antídoto acima considerados?

Análise a priori

O objetivo desta primeira ficha é ambientar os alunos às situações que serão apresentadas adiante e que comecem a perceber que serão tratados problemas relacionados à variação. Espero que os mesmos comecem a observar, mesmo com a ausência do gráfico da função que descreve a situação, que esta apresenta crescimento e decrescimento. Pode ser que alguns alunos esbocem o gráfico dessa função baseados na tabela de valores dada, manifestando herança do contrato didático usual.

Esta ficha será apresentada numa situação de aula, para que os alunos a resolvam em duplas e terão à sua disposição lápis, papel e calculadora não gráfica. Após a resolução farei uma plenária, em que serão discutidas as respostas dos alunos e institucionalizado o cálculo de variação, ou seja, "valor final menos valor inicial".

Na maioria dos livros didáticos analisados, observei que é muito comum o enunciado de um problema como este apresentar a frase "considere que a função que descreve o crescimento das bactérias em função do tempo é dada por y= f(x) , onde y representa o número de bactérias e x representa o tempo"; para evitar cálculos nas primeiras 8 questões, optei por apresentar uma tabela de valores.

Espero que a resposta para a questão 1 seja dada a partir da observação direta dos dados apresentados na tabela, ou seja, que no instante inicial o número de bactérias que se quer controlar é 200.

As questões de 2 a 8, que foram colocadas na forma "o que você acha que..." podem representar algumas dificuldades aos alunos, pois questões que permitem conjecturar e explorar a situação apresentada não são corriqueiras no contrato didático freqüentemente vigente, em que questões fechadas podem induzir os alunos a respondê-las utilizando algum “modelo pronto”.

Espero que as respostas para as questões de 2 a 8 sejam do tipo “aumentou” ou “diminuiu”, embora os dados apresentados no enunciado sejam numéricos. Como conseqüência da cláusula implícita do contrato didático que diz: “já que estou respondendo a uma questão matemática, esta deve ter uma resposta numérica”, podem ser apresentadas respostas numéricas. Estas questões foram colocadas na forma “o que você acha que ...” para permitir aos alunos que conjecturem e explorem a situação apresentada, e não somente efetuarem cálculos.

Na questão 9, espero respostas numéricas e também que os alunos percebam a diferença entre as questões de 2 a 8 e esta, ou seja, que nas primeiras não há necessidade de cálculos.

Espero que os alunos respondam a questão 10 sem dificuldades, ou seja, que a variação não é constante, pois as anteriores podem induzi-los a isto. Pode acontecer de alguns alunos responderem que “a variação do número de bactérias aumenta ou diminui neste ou naquele intervalo de tempo”, “a variação é crescente ou decrescente durante este ou aquele intervalo de tempo”, “o antídoto só começa a fazer efeito a partir de tantas horas de exposição das bactérias ao mesmo”, “o antídoto depois de certo tempo começa a proporcionar o aumento do número de bactérias”.

O aluno que concluir que a variação é constante provavelmente tem problemas de interpretação e/ou erros nos cálculos, hipótese esta que não descarto.

FICHA 2

A lei que descreve o crescimento das bactérias sob ação do antídoto é $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$, onde *y* representa o número de bactérias e *x* o tempo em horas de exposição ao antídoto.

1) Verifique se a expressão algébrica dada está coerente com os dados da tabela da ficha 1.

$x = 0 \Rightarrow y = 4.(0)^3 - 60.(0)^2 + 200.(0) + 200 \Rightarrow y = ...$

$x = ...$

.

.

.

.

.

2) Observando que o número de bactérias varia com o tempo de exposição ao antídoto, faça uma estimativa do número máximo de bactérias que se terá nas primeiras 10 horas de exposição ao antídoto.

3) Faça uma estimativa do tempo que esta bactéria deva estar exposta ao antídoto para que o mesmo comece a fazer efeito, ou seja, quando o número de bactérias começa a diminuir.

4) Você tem elementos para determinar com precisão o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir?

Análise a priori

O objetivo desta ficha é o de fazer os alunos sentirem a real necessidade de um instrumento que possibilite a resolução de um problema do mundo concreto (tal ferramenta é a derivada).

Como a ficha 1, esta será resolvida em duplas, utilizando-se lápis, papel e calculadora não gráfica. A correção dos resultados obtidos nesta ficha será feita pelos próprios alunos com a utilização do software Derive, quando apresentarei a ficha 3, que pede para que eles assim o façam e tirem suas próprias conclusões. Ao final da ficha 3 será feita uma plenária para discutir as respostas apresentadas nestas duas fichas.

Espero que a resposta para a questão 1 seja encontrada pela substituição na expressão dada, dos valores apresentados para *x* na tabela da ficha 1 e comparando os resultados encontrados para *y* com a da contagem feita pelo laboratório. Esta questão foi colocada para que os alunos pudessem relacionar a expressão algébrica da lei que descreve a situação-problema com a tabela de valores, referente ao mesmo fenômeno, trabalhada na ficha 1. Como o enunciado da questão pode gerar múltiplas interpretações por parte dos alunos, fiz uma indicação de qual operação e quais dados deveriam ser utilizados, o que indica, flagrantemente, o efeito Topázio. Essa indicação, à primeira vista, poderia apontar que se está contrariando o objetivo principal desta questão, que era contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico nos alunos; no entanto, os cálculos indicados representam apenas um instrumental para que os alunos comparem os resultados obtidos com os dados da tabela. Não descarto a possibilidade de alguns alunos cometerem erros de cálculo, nem que a verificação seja feita testando apenas alguns valores de *x* da tabela na expressão dada, segundo seus próprios critérios de escolha.

A questão 2 pede uma estimativa do número máximo de bactérias, o que poderá apresentar algumas dificuldades aos alunos, pois é mais usual pedir-se um valor numérico preciso. Alguns poderão reagir baseados nisto, já que estão respondendo a uma questão de matemática. Os alunos que efetivamente responderem à esta questão dando uma estimativa, poderão fazê-lo de diversas formas, tais como: olhando a tabela da ficha 1, atribuindo valores aleatórios à variável *x* e comparando os valores obtidos para *y*, esboçando o gráfico da função e analisando o ponto máximo, etc. É possível que o aluno que tente dar uma resposta “precisa”, o faça através de explorações em torno do valor estimado atribuindo valores próximos a este. Espero como resposta para esta questão algum valor próximo de 392.

Na questão 3, espero como resposta um valor próximo de 2. Eventualmente, algum aluno poderá inverter as respostas para as questões 2 e

3, ou seja, confundir os “papéis” das variáveis x e y. Pode ocorrer também que alguns alunos não saibam o real significado do termo *estimar* aqui utilizado.

A resposta esperada para a questão 4 é: não. Porém, alguns alunos poderão responder que a tentativa e erro é o instrumento adequado. Acredito que os alunos que derem esta resposta, provavelmente sejam aqueles que ao invés de estimar, procuraram dar uma resposta mais “precisa” às questões 2 e 3.

FICHA 3: O PROBLEMA DAS BACTÉRIAS COM O DERIVE

Com o auxílio do software DERIVE, construa o gráfico da função dada por $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ e verifique se as respostas que você deu para as questões da ficha 2 estão coerentes com o gráfico.

Descreva abaixo como você fez esta verificação e a justificativa para a coerência ou não coerência da sua resposta para estas questões.

Análise a priori

O objetivo desta ficha é dar oportunidade para que os alunos verifiquem suas respostas dadas na ficha anterior, sintam mais segurança com relação a elas e ao mesmo tempo reforçar a possibilidade de existência de uma ferramenta que sirva para solucionar a questão de determinar precisamente o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir. Espero que os alunos, baseados no fato que o computador é uma máquina capaz de fornecer dados para a checagem de suas respostas e permitir conclusões, percebam que eles também podem resolver a questão proposta desde que tenham a ferramenta adequada.

Esta ficha será apresentada aos alunos no laboratório de informática para ser resolvida em duplas, usando o software DERIVE. Vale lembrar que o software não é novidade para estes alunos pois, em outras oportunidades, este programa foi utilizado para construir e explorar gráficos, determinar equação de reta, determinar a inclinação da reta por dois pontos, achar o valor da função num determinado ponto, etc.

Como não foi discutida a ficha anterior, antes da apresentação desta, acredito que os alunos já estarão "cobrando" uma plenária com este fim. No contrato didático freqüentemente utilizado, não se observa a correção de uma tarefa pelos próprios alunos, mas espero que eles concordem em "trocar os papéis" neste momento. É por isto que solicitei que façam a descrição de suas verificações e conclusões. Concluída esta ficha, será feita uma plenária para discutir as fichas 2 e 3. Nessa ocasião, na discussão da questão 4 da ficha 2, pretendo apresentar o nome da ferramenta matemática que permite solucionar esta questão, ou seja, a derivada. O estudo desta é o objetivo das próximas fichas.

Acredito que não haverá dificuldades em traçar o gráfico da função dada, utilizando o software. Acredito também que os alunos terão habilidades suficientes para corrigir suas respostas, pois poderão ser respondidas apenas explorando o gráfico, utilizando a função "*trace*", que permite deslocar o cursor do mouse sobre pontos do gráfico e visualizar suas coordenadas, utilizando o *"zoom"* onde é possível visualizar partes específicas do gráfico da função ou comandos que retornam o valor da função num ponto escolhido.

Aos alunos que concluíram que suas respostas não são coerentes, ou seja, que não estão de acordo com os resultados dados pelo computador, será solicitado que refaçam a ficha 2.

FICHA 4: AS BACTÉRIAS SEM A EXPOSIÇÃO AO ANTÍDOTO

Considere que, quando não expostas ao antídoto, o desenvolvimento das bactérias é descrito pela função $y = 30x + 200$, onde *y* representa o número de bactérias e *x* representa o tempo em horas.

1) Com o auxílio do software DERIVE construa o gráfico desta função.

2) Considere o tempo x_1=1.

Qual o número y_1 de bactérias correspondente ao tempo x_1?

y_1=............

Localize no gráfico o ponto A que corresponde a estes valores.

A (........;........)

3) Considere o tempo x_2=1,3

Qual o número y_2 de bactérias correspondente ao tempo x_2?

y_2=............

Localize no gráfico o ponto B que corresponde a estes valores.

B (........;........)

4) Considere o tempo x_3=2

Qual o número y_3 de bactérias correspondente ao tempo x_3?

y_3=............

Localize no gráfico o ponto C que corresponde a estes valores.

C (........;........)

5) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx, entre os tempos x_1 e x_2.

Δy =...........

6) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx, entre os tempos x_2 e x_3.

Δy =...........

7) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx , entre os tempos x_1 e x_3.

Δy =..........

8) Calcule a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos casos:

$x_1 \rightarrow x_2$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =............

$x_2 \rightarrow x_3$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =............

$x_1 \rightarrow x_3$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =............

9) O que você observa com os resultados obtidos na questão 8? Qual a explicação que você pode dar tendo observado estes resultados ?

Análise a priori

O objetivo desta ficha é o de fazer o aluno perceber que a razão de variação entre dois pontos de uma função afim é constante.

Esta ficha será apresentada aos alunos no laboratório de informática para ser resolvida em duplas utilizando o software DERIVE, papel, lápis e calculadora. Nela e nas 4 seguintes, proponho o trabalho com função afim e a quadrática. Acredito que estas sejam familiares aos alunos e, por isto, não apresentarei tabelas de valores. Na plenária, serão discutidos os resultados protocolados e institucionalizado que a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre os pontos considerados, corresponde ao coeficiente angular da reta que representa a função afim ou da reta secante à parábola.

Pelos mesmos motivos citados nas fichas anteriores, espero não haver dificuldades para construir o gráfico solicitado na questão 1. Acredito que não haja dificuldades em realizar os cálculos necessários para responder às questões de 2 a 8, mas não descarto a possibilidade da ocorrência de alguns erros ao se efetuarem os mesmos. Quanto à localização dos pontos no gráfico solicitada nas questões 2,3 e 4, espero não apresentar problemas pois o software Derive tem um comando que permite isto (*“edit/create annotation”*). Além disto, a representação de um ponto como par ordenado também é dada pelo programa. A notação Δy e Δx utilizada para representar variação é familiar aos alunos (tendo em vista que já trabalharam com ela em outras oportunidades) e acredito que não haverá dificuldades para estes cálculos pois, em outras ocasiões, foi discutido o cálculo da variação do valor de funções entre dois pontos (ficha 1).

Se os cálculos efetuados nas questões anteriores estiverem corretos, acredito que os alunos responderão que a razão de variação entre diferentes pares de pontos de uma função afim, é constante. Não descarto a hipótese de alguns alunos, mesmo tendo efetuado os cálculos corretamente, não observarem que os resultados encontrados na questão 8 correspondem ao coeficiente angular da reta que representa a função afim dada. Em geral os alunos não estão acostumados a responder questões deste tipo. A inclusão da questão 9 representa uma ruptura do contrato didático em vigor.

FICHA 5

O laboratório verificou que se as bactérias forem expostas a um outro "antídoto", tem seu desenvolvimento descrito pela lei $y = x^2 + 200$, onde *y* representa o número de bactérias e *x* representa o tempo de exposição a este "antídoto" em horas.

1) Com o auxílio do software DERIVE construa o gráfico desta função.

2) Considere o tempo x_1=1.

Qual o número y_1 de bactérias correspondente ao tempo x_1?

y_1=...........

Localize no gráfico o ponto A que corresponde a estes valores.

A (........;........)

3) Considere o tempo x_2=1,3

Qual o número y_2 de bactérias correspondente ao tempo x_2?

y_2=...........

Localize no gráfico o ponto B que corresponde a estes valores.

B (........;........)

4) Considere o tempo x_3=2

Qual o número y_3 de bactérias correspondente ao tempo x_3?

y_3=...........

Localize no gráfico o ponto C que corresponde a estes valores.

C (........;........)

5) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx, entre os tempos x_1 e x_2.

Δy =..........

6) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx, entre os tempos x_2 e x_3. Δy =..........

7) Calcule a variação Δy do número de bactérias correspondente à variação de tempo Δx, entre os tempos x_1 e x_3.

Δy =..........

8) Calcule a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no seguintes casos:

$x_1 \rightarrow x_2$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =...........

$x_2 \rightarrow x_3$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =...........

$x_1 \rightarrow x_3$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =...........

9) O que você observa com os resultados obtidos na questão 8? Qual a explicação que você pode dar tendo observado estes resultados?

Análise a priori

O objetivo desta ficha é o de fazer os alunos perceberem que na função quadrática, cujo gráfico não é uma reta, a taxa de variação entre dois pontos, depende dos pontos considerados.

Como a ficha 4, esta será apresentada no laboratório de informática para ser resolvida em duplas utilizando-se do o software DERIVE , papel, lápis e calculadora.

Considerando que as questões aqui apresentadas são as mesmas que as da ficha anterior, abreviarei esta análise, pois as observações são idênticas às feitas para aquela, à exceção do seguinte:

Se os cálculos efetuados nas questões 2 a 8 estiverem corretos, espero que os alunos respondam que a razão de variação entre dois pontos da imagem e do domínio da função quadrática, não é constante. Pode ocorrer que alguns alunos observem que a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entre dois pontos considerados é igual ao coeficiente angular da reta secante à parábola por esses pontos. Na plenária este resultado será institucionalizado.

FICHA 6: O CRESCIMENTO DAS BACTÉRIAS EM INTERVALOS DE TEMPO "PEQUENOS".

Voltemos à função considerada na ficha anterior, ou seja, $y = x^2 + 200$.

1) Considere os pontos:

A (2 , 204)

P_1 (2.3 , 205.29)

P_2 (2.2 , 204.84)

P_3 (2.1 , 204.41)

Calcule a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos seguintes casos: (dê o resultado com duas casas decimais)

$P_1 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

$P_2 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

$P_3 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

2) Considere os pontos:

A (2 , 204)

P_4 (1.7 , 202.89)

P_5 (1.8 , 203.24)

P_6 (1.9 , 203.61)

Calcule a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos seguintes casos: (dê o resultado com duas casas decimais)

$P_4 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

$P_5 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

$P_6 \rightarrow A$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.........

3) O que você observou nos resultados obtidos nas questões 1 e 2? Qual a explicação que você pode dar tendo observado estes resultados?

Análise a priori

Continuando a exploração da ficha anterior, o objetivo agora é que os alunos percebam que, quando se calcula a média de variação para pontos cada vez mais próximos de um ponto fixado, os resultados encontrados para estes cálculos tendem a um determinado valor. Ao mesmo tempo, reforçar a institucionalização feita na plenária da ficha 5.

Esta ficha será apresentada em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando-se de papel, lápis e calculadora.

Na plenária, procurarei encaminhar as discussões para que os alunos percebam que as razões de variação tem valores próximos pois estes cálculos estão sendo efetuados considerando-se pontos que estão "perto" uns dos outros e informarei que, nesse caso, emprega-se o termo *infinitesimal*, que é utilizado com freqüência nos livros didáticos.

Espero que os cálculos solicitados nas questões 1 e 2 não apresentem problemas, mas não descarto a possibilidade da ocorrência de erros nos mesmos. Se eles estiverem corretos, a resposta esperada para a questão 3 é que quanto mais próximo um ponto está do fixo (2, 204), o resultado do cálculo solicitado mais se aproxima de 4. Pode ocorrer que alguns alunos percebam que, caso se queira calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto, pode-se considerar outro ponto "infinitamente" próximo deste e calcular o coeficiente angular da secante, uma vez que na plenária da ficha 5 foi discutido que a média de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa o coeficiente angular de reta secante ao gráfico da parábola.

FICHA 7

1) Considere os pontos A (2 , 204) e P_1 (2.3 , 205.29) da ficha anterior. Qual o acréscimo que a abscissa de P1 sofreu em relação à abscissa de A?

$\Delta x = x_{P1} - x_A$ = ...

Calcule: o dobro da abscissa de A adicionado ao valor do acréscimo Δx calculado acima.

$2x_A + \Delta x$ = ...

Compare este resultado com a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ encontrada para o caso P1$\rightarrow$A da ficha 6.

$P_1 \rightarrow A$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

O que você observa comparando estes dois resultados?

2) Considere os pontos A=(2 , 204) e P_4=(1.7 , 202.89) da ficha anterior. Qual o acréscimo que a abscissa de P_4 sofreu em relação à abscissa de A?

$\Delta x = x_{P4} - x_A$ = ...

Calcule: o dobro da abscissa de A adicionado ao valor do acréscimo Δx calculado acima.

$2x_A + \Delta x$ = ...

Compare este resultado com a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ encontrada para o caso $P_4 \rightarrow$A da ficha 6.

$P_4 \rightarrow A$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

O que você observa comparando estes dois resultados?

3) Repita o mesmo procedimento considerando agora os pontos:

- A e P_2

  $\Delta x =$ $x_{P2} - x_A$ = ...

  $P_2 \rightarrow A$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

  $2x_A + \Delta x$ = ...

O que você observa comparando os dois últimos resultados?

- A e P_3

  $\Delta x =$ $x_{P3} - x_A$ = ...

  $P_3 \rightarrow A$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

  $2x_A + \Delta x$ = ...

O que você observa comparando os dois últimos resultados?

- A e P_5

  $\Delta x =$ $x_{P5} - x_A$ = ...

  $P_5 \rightarrow A$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

  $2x_A + \Delta x$ = ...

O que você observa comparando os dois últimos resultados?

- A e P_6

  $\Delta x =$ $x_{P6} - x_A$ = ...

  $P_6 \rightarrow A$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = ...

  $2x_A + \Delta x$ = ...

O que você observa comparando os dois últimos resultados?

4) O que você observa comparando os resultados obtidos nas questões 1,2 e 3 acima?

Análise a priori

O objetivo desta ficha, é que os alunos observem que, quando consideramos dois pontos da imagem e do domínio da função $y = x^2 + 200$, a razão de variação entre os mesmos também pode ser obtida calculando-se: "o dobro da abscissa do primeiro adicionado ao acréscimo sofrido por ela". Além disso, preparar para a determinação da regra da derivada da função $y = x^2 + 200$.

Esta ficha será apresentada em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando-se de papel, lápis e calculadora.

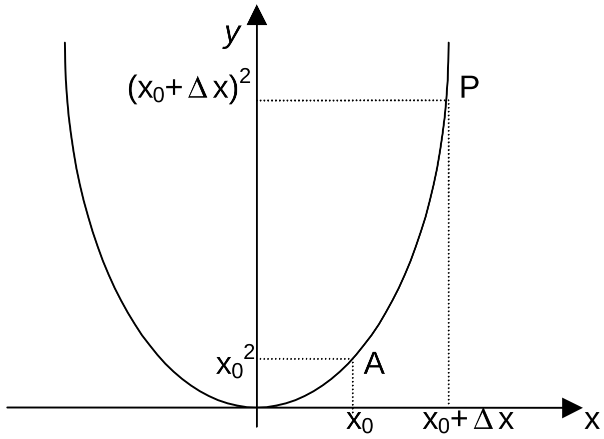
Espero que os cálculos necessários para responder às questões 1,2 e 3 não apresentem problemas pois parte deles já foi discutida em plenárias de fichas anteriores a esta, mas não descarto a possibilidade de ocorrência de erros nos mesmos. A resposta esperada para a observação solicitada em cada caso, é que o resultado é o mesmo.

Na questão 4, acredito que o aluno responda que quando se considera a função $y = x^2 + 200$, também pode-se determinar a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ calculando-se: "o dobro da abscissa de um ponto do domínio adicionado ao acréscimo Δx sofrido pela mesma", ou uma resposta que tenha o mesmo sentido que esta.

Na plenária, procurarei destacar que este resultado é válido sempre que se considera quaisquer dois pontos da função $y = x^2 + 200$.

FICHA 8

Para a função $y = x^2$, considere os pontos A (x_0 , x_0^2) e P ($x_0+\Delta x$, $(x_0+\Delta x)^2$).



1) Calcule no caso P$\rightarrow$A :

   $\Delta y =$ ....

   O dobro da abscissa x_0 de A adicionado ao valor do acréscimo Δx . ...

   A razão de variação $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ =...........

2) Compare "o dobro da abscissa x_0 de A adicionado ao valor do acréscimo Δx no caso P$\rightarrow$A" com o resultado obtido para $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

   $2x_0 + \Delta x$ .... $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

3) Você já observou, na ficha 7, que $2x_A + \Delta x$ .... $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando consideramos dois pontos particulares de uma parábola. Aqui estamos considerando dois pontos genéricos e você obteve $2x_0 + \Delta x$ .... $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. O que você pode concluir?

4) Se o acréscimo Δx da abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, no caso P$\rightarrow$A ? (imagine que o acréscimo Δx seja muito menor que aqueles considerados na ficha 6). $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$..................

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$............., cujo resultado se chama derivada da função $y = f(x) = x^2$ no ponto x_0 e é indicada por f'(x_0) ou y'(x_0) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Análise a priori

O objetivo desta ficha é que os alunos observem que, quando se consideram dois pontos genéricos pertencentes ao gráfico da função quadrática $y = x^2 + c$, o cálculo da razão de variação pode ser obtido pelos mesmos procedimentos adotados para dois pontos particulares. Além disso, institucionalizar que a razão de variação entre dois pontos pertencentes ao gráfico da função $y = x^2$, "infinitesimalmente próximos", é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e que cujo resultado, se existir e for finito, se chama derivada dessa função no ponto x_0 e é indicado por f'(x_0) ou y'(x_0) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Esta ficha será apresentada em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando-se de papel e lápis.

Na plenária, procurarei fazer com que os alunos constatem que as atividades desta ficha são análogas as da anterior, sendo que naquela foram considerados pontos particulares e nesta consideram-se pontos genéricos. Direi também que não foi considerada a mesma função da ficha anterior apenas para facilitar os cálculos. Será institucionalizado o conceito de derivada de função (mais particularmente da função dada por $y = f(x) = x^2$) como razão de variação infinitesimal, assim como as diversas formas de notação para a mesma.

A resposta esperada para a questão 1 é: $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, $2x_0 + \Delta x$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$, respectivamente. Pode ser que alguns alunos tenham dificuldades algébricas e/ou não se lembrem da expansão do quadrado da soma e de regras de fatoração.

Para a questão 2, espero que os alunos completem o pontilhado com o sinal “=”. Qualquer outra resposta diferente desta significa que foram cometidos erros de cálculos, na questão 1.

Para a questão 3, espero que os alunos completem os pontilhados com o sinal “=” e concluam que quando se consideram dois pontos particulares ou genéricos do gráfico de $y = x^2 + c$ $(c \in \Re)$, o resultado da razão de variação é o mesmo quando efetuado o cálculo: “variação das ordenadas dividido pela variação das abscissas” ou pelo “dobro da abscissa de um ponto adicionado ao acréscimo Δx”. Novamente, acredito que se houver alguma conclusão que tenha um sentido diferente desta, foram cometidos erros de cálculo ou que os alunos não tenham percebido isto, o que provavelmente significa que eles não saibam a diferença entre pontos particulares e pontos genéricos.

Como na plenária da ficha 6 já foi utilizado o termo *infinitesimal* , e se está novamente supondo, na questão 4, que o acréscimo Δx pode ser “desprezado”, acredito que os alunos não terão dificuldades em responder à esta questão corretamente, ou seja, que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x_0$. Não descarto a possibilidade de alguns alunos não interpretarem corretamente o significado da frase “Δx pode ser desprezado”, o que pode induzir a erros ao completar o pontilhado desta questão e da definição apresentada em seguida ($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$).

A definição dada após a questão 4, tem a intenção institucionalizar o conceito que os alunos provavelmente elaboraram após a resolução desta ficha.

FICHA 9

1) Com o auxílio do software Derive, construa e imprima o gráfico da função $x \mapsto y = x^3$.

2) Marque sobre o gráfico dois pontos genéricos A(x_0 , x_0^3) e P($x_0+\Delta x$, $(x_0+\Delta x)^3$).

3) Calcule no caso $P \to A$:

$$\Delta y = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots$$

4) Se o acréscimo Δx da abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso $P \to A$?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, cujo resultado se chama derivada da função $y = f(x) = x^3$ no ponto x_0 e é indicada por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Análise a priori

O objetivo desta ficha é que o aluno encontre a função derivada da função $y = x^3$.

Ela será apresentada aos alunos em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando o gráfico construído pelo software Derive, papel e lápis.

Espero que os alunos não apresentem dificuldades para responder a questão 1, pois já trabalharam, em outras oportunidades, questões análogas referentes a outras funções.

Na questão 2, embora se trate de pontos genéricos, acredito que a maioria dos alunos escolherá dois pontos pertencentes ao primeiro quadrante, pois nas fichas anteriores foi indicado dessa forma.

A resposta esperada para a questão 3 é: $\Delta y = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$. Assim como na ficha 8, pode ser que alguns alunos tenham dificuldades algébricas e/ou não se lembrem da expansão do cubo da soma e regras de fatoração e, neste caso, fornecerei subsídios necessários para os cálculos, durante a resolução da ficha.

A resposta esperada para a questão 4 é $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x_0^2$. Como na ficha anterior, não descarto a possibilidade de alguns alunos não interpretarem corretamente o significado da frase "Δx pode ser desprezado".

Analogamente à ficha 8, a definição dada após a questão 4, visa institucionalizar o conceito que os alunos provavelmente elaboraram após a resolução desta.

FICHA 10

1) Com o auxílio do software Derive, construa e imprima o gráfico da função $x \mapsto y$ dada por $y = 200x$.

2) Marque sobre o gráfico dois pontos genéricos A(x_0 , $200x_0$) e P($x_0 + \Delta x$, $200(x_0 + \Delta x)$).

3) Calcule no caso P $\rightarrow$ A:

$\Delta y =$.......

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.......

4) Se o acréscimo Δx da abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, no caso P $\rightarrow$ A?

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$ ....

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$............., cujo resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200x$ no ponto x_0 e é indicada por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Análise a priori

O objetivo desta ficha é que o aluno encontre a função derivada de uma função linear.

Ela será apresentada aos alunos em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando o gráfico da função $y = 200x$ construído com o auxílio do software Derive, papel e lápis.

Na plenária, serão discutidos os resultados encontrados pelos alunos, reforçando o conceito de derivada como razão de variação infinitesimal, assim como suas formas de notação. Além disso, destacarei que a derivada de função afim é igual ao coeficiente angular da reta que representa a mesma, conforme já observado na plenária da ficha 4.

Espero não haver dificuldades para responder à questão 1, pois os alunos já construíram vários gráficos em fichas anteriores.

Conforme observado anteriormente, a marcação dos pontos solicitados na questão 2, embora eles sejam genéricos, acredito que a maioria dos alunos a farão escolhendo pontos pertencentes ao primeiro quadrante.

A resposta esperada para a questão 3 é $\Delta y = 200.\Delta x$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 200$. Ao contrário das fichas anteriores, acredito que não haverá dificuldades nos cálculos, tendo em vista que aqui eles são bastante simples.

A resposta esperada para a questão 4 é $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 200$. Pode ser que alguns alunos tenham dificuldades em dar esta resposta pois neste caso a variação que está sendo “desprezada” (Δx) não aparece no quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A definição dada após a questão 4, tem a intenção de institucionalizar o conceito, analogamente ao que foi feito nas duas fichas anteriores.

FICHA 11

1) Com o auxílio do software Derive, construa e imprima o gráfico da função x$\mapsto y$ dada por $y = 200$.

2) Marque sobre o gráfico dois pontos genéricos A(x_0 , ...) e P(x_0+ Δx ,......)

3) Calcule no caso P$\rightarrow$A:

$\Delta y =$ ....

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =.......

4) Se o acréscimo Δx da abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso P$\rightarrow$A?

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =..................

O resultado obtido já era esperado? Justifique.

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ...., cujo resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200$ no ponto x_0 e é indicada por f'(x_0) ou y'(x_0) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Análise a priori

O objetivo desta ficha é que o aluno encontre a função derivada de uma função constante e justifique esse resultado.

Esta ficha será apresentada aos alunos em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando-se do gráfico da função $y = 200$, construído com o auxílio do software Derive, papel e lápis.

Espero não haver dificuldades para responder à questão 1, pois os alunos já construíram vários gráficos em fichas anteriores.

Conforme observado anteriormente, a marcação dos pontos solicitados na questão 2, embora eles sejam genéricos, acredito que a maioria dos alunos o farão escolhendo pontos pertencentes ao primeiro quadrante. Pode ser que alguns alunos não completem os pontilhados por não observarem que as ordenadas dos pontos não está dada e, se alguns completarem com qualquer valor diferente de 200, provavelmente estes não tenham bem formado o conceito de ponto como par ordenado ou de função constante.

A resposta esperada para a questão 3 é: $\Delta y = 0$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Como na ficha anterior, acredito que não haverá dificuldades nos cálculos, tendo em vista que aqui eles são bem simples.

A resposta esperada para a primeira parte da questão 4 é $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Pode ser que alguns alunos tenham dificuldades, pois também neste caso a variação que está sendo "desprezada" (Δx) não aparece no quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Espero que os alunos respondam na segunda parte desta questão que este resultado já era esperado pois aqui trata-se de uma função constante, cuja "variação" Δy é igual a zero, ou dêem uma justificativa que tenha o mesmo sentido que este. Os alunos que não justificarem corretamente, provavelmente não saibam ou não atentaram para o fato que o coeficiente angular da reta que representa a função $y = 200$ é igual a zero.

Novamente, a definição dada após a questão 4 tem a intenção institucionalizar o conceito que os alunos provavelmente elaboraram após a resolução desta ficha.

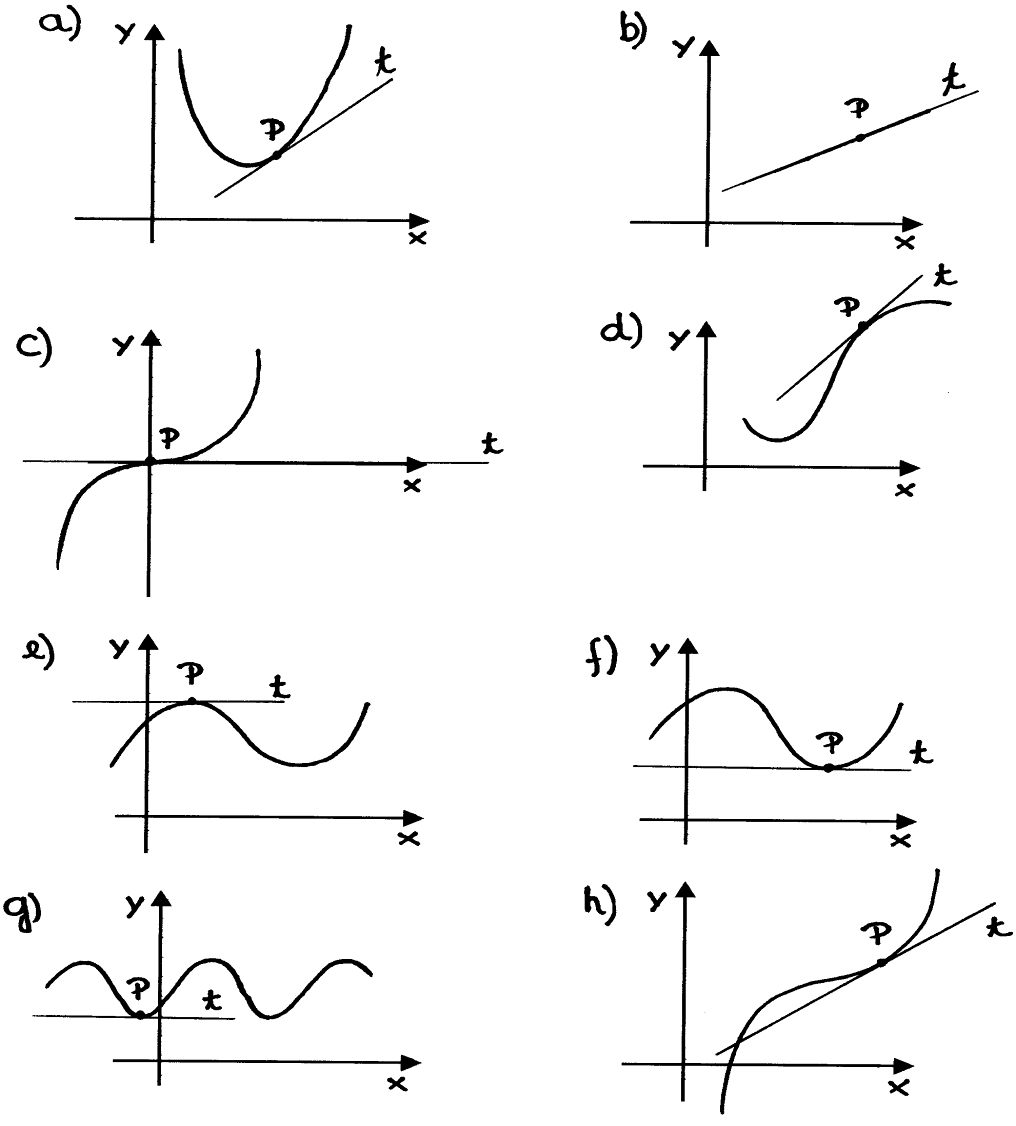
Na plenária, além de discutir os resultados dados pelos alunos, tentarei identificar possíveis casos de dificuldades relativas ao conceito de ponto como par ordenado e discutir eventuais dúvidas. Será ressaltado que a derivada de uma função constante é igual ao coeficiente angular da reta que a representa, ou seja, zero, valor este que corresponde à "variação" Δy entre pontos desse tipo de função.

FICHA 12

1) Desenhe uma circunferência, escolha um ponto pertencente a ela e trace a reta tangente à circunferência por este ponto.

2) Como você define reta tangente à uma circunferência num ponto?

3) Quais das retas abaixo são tangentes no ponto P aos gráficos representativos de uma função?



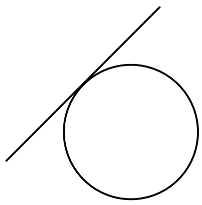
4) Como você define reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado?

Análise a priori

O objetivo desta ficha é que o aluno verifique que reta tangente ao gráfico de uma função num ponto dado, não necessariamente é aquela que tem em comum ao gráfico apenas o ponto, como ocorre na circunferência, que ela pode cortar o gráfico por pontos diferentes desse e, ao mesmo tempo, perceba que para a definição da reta tangente é necessário um elemento novo, que é a derivada.

Esta ficha será apresentada aos alunos em sala de aula para ser resolvida em duplas utilizando papel e lápis.

Espero que a resolução para a questão 1 não apresente dificuldades e seja algo do tipo:



A definição esperada para a questão 2 é: “reta tangente a uma circunferência é aquela que tem em comum apenas um ponto com a circunferência”, ou alguma outra que tenha o mesmo sentido desta. Não acredito haver dificuldades para responder esta questão pois parece que os alunos têm esta concepção de reta tangente.

Espero que a maioria dos alunos concorde que todas as retas representadas na questão 3 são retas tangentes; entretanto, acredito que alguns respondam que é tangente no ponto P ao gráfico, apenas a reta indicada no item *a)* .

Para a questão 4, espero uma resposta conforme descrita no objetivo desta ficha, ou outra que tenha o mesmo sentido.

Na plenária, procurarei encaminhar a discussão com o objetivo de os alunos perceberem que a reta tangente ao gráfico de uma função é aquela que “confunde-se” localmente com o gráfico no ponto de “contato”, conforme se observa em todos os itens da questão 3. Além disto, será institucionalizado que o coeficiente angular da reta tangente à uma curva, num ponto dado, é obtido pela razão de variação entre ele e um outro muito próximo, ou seja, que a reta tangente num ponto do gráfico é aquela cujo coeficiente angular é igual à derivada da função na abscissa desse ponto.

FICHA 13

1) Com o auxílio do Derive, construa o gráfico da função dada por $y = x^2 + 1$.

   O mínimo desta função é y= ....

2) Defina a variável INC, que dá o coeficiente angular da reta que passa por dois pontos A(a , f(a)) e B(b , f(b)) pertencentes ao gráfico da função acima.

$$INC(a,b) := \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

   Defina a variável SECA, que dá a equação da reta que passa pelos dois pontos acima.

$$SECA(a,b) := INC(a,b).(x - a) + F(a)$$

3) Com o auxílio do Derive, encontre o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(0,1) e B(1,2) da função dada por $y = x^2 + 1$.

   INC(0,1)=............

4) Com o auxílio do Derive, encontre a equação da reta que passa pelos pontos acima.

   y=............

5) Com o auxílio do derive construa o gráfico da reta acima no mesmo sistema de eixos da parábola.

6) Repita as questões 3, 4 e 5 considerando agora os pontos A(0,1) e B(0.5 , 1.25).

   INC(0 , 0.5)=............

   y=............

7) Repita as questões 3,4 e 5 considerando os pontos A(0,1) e B(0.1 , 1.01).

   INC(0 , 0.1)=..........

   y=...........

8) Observando os resultados encontrados nos três casos acima considerados, qual é a posição da reta que tangencia a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1)? Qual é seu coeficiente angular?

9) Calcule a derivada da função dada por $y = x^2 + 1$.

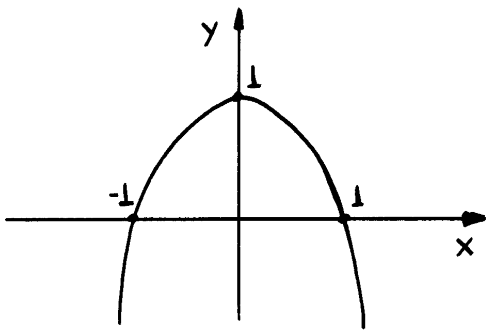
y'=...........

10) Calcule a derivada da função acima no ponto x=0.

$y'_{(0)} =$ ....

11) Qual é a derivada da função dada por $y = x^2 + 1$ no ponto de mínimo?

12) Se considerarmos a função dada por $y = -x^2 + 1$ cujo gráfico está dado abaixo, qual é o coeficiente angular da reta tangente à curva pelo seu ponto máximo? Qual é a derivada desta função no ponto de máximo?



13) O que você conclui sobre o valor da Derivada do ponto de máximo e de mínimo de uma função?

Análise a priori

O Objetivo desta ficha é retomar a institucionalização feita na plenária da ficha anterior (derivada como coeficiente angular de reta tangente) e que os alunos percebam que a derivada no ponto de máximo e/ou de mínimo de uma função vale zero.

Esta ficha será apresentada aos alunos no laboratório de informática, utilizando-se do software Derive, papel e lápis.

Como os alunos já construíram vários gráficos com o auxílio do Derive e, além disto, o ponto de mínimo é o vértice da parábola, acredito que a questão 1 não apresentará dificuldades.

A definição das variáveis da questão 2 provavelmente não seja problemática pois os participantes desta seqüência são alunos que já têm certa intimidade em definir comandos deste tipo no computador, utilizando-se deste software.

Para as questões 3,4,6, e 7 espero as respostas: INC(0,1)=1 ; y=x+1; INC(0 , 0.5)=0.5 e y=0.5x+1 ; INC(0 , 0.1)=0.1 e y= 0.1x+1, e que não haja dificuldades para a resolução das mesmas.

Como na tela do computador estará presente o gráfico da parábola e de três retas secantes à curva, espero que os alunos respondam que a reta que tangencia a parábola no ponto A(0,1) é paralela ao eixo x e que seu coeficiente angular é zero, pois, conforme o enunciado da questão 8, basta verificar os resultados encontrados. Pode ser que alguns alunos não observem que a ordenada do ponto A(0,1) é o mínimo da função.

A resposta esperada para a questão 9 é: y'=2x. Pode ser que alguns alunos hesitem em calcular esta derivada pois em fichas anteriores, determinaram isoladamente a derivada de $y = x^2$ e de *y*=*k* (*k* constante real) e não de $y = x^2 + 1$.

Para a questão 10, espero a resposta: $y'_{(0)} = 0$, e que esta seja encontrada pela substituição de x=0 na função derivada obtida na questão 9. Se houver alguma resposta diferente desta, provavelmente foram cometidos erros de cálculo na questão 9.

A resposta esperada para a questão 11 é zero.

Para a questão 12, espero as mesmas respostas dadas nas questões 8 e 11, ou seja, que o coeficiente angular da reta tangente à curva pelo seu ponto máximo é zero , igual a derivada desta função na abscissa desse ponto. Se houver alguma resposta diferente desta, provavelmente o aluno não tenha relacionado o conceito de derivada com a inclinação de reta tangente e/ou não tenha respondido corretamente as questões anteriores desta ficha.

Espero que os alunos respondam à questão 13 concluindo algo que tenha o mesmo sentido que: “o valor da derivada do ponto de máximo e de mínimo vale zero pois a reta tangente ao gráfico da função nestes pontos é sempre paralela ao eixo x, ou seja, seu coeficiente angular vale zero”. Pode ser que alguns alunos respondam apenas algo como: “a derivada vale zero” ou “a derivada é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva nos pontos considerados”. Se isto ocorrer, provavelmente o aluno não tenha estabelecido a ligação entre as duas últimas conclusões. Se aparecer alguma resposta diferente destas, provavelmente foram cometidos erros de cálculo e/ou faltou atenção ao observar o resultado solicitado na questão 8.

Na plenária, será reforçada a institucionalização feita na da ficha anterior, ou seja, a tangente num ponto do gráfico como a reta cujo coeficiente angular é igual à derivada da função na abscissa do ponto considerado. Utilizarei uma transparência com o gráfico obtido ao terminar a seqüência proposta por esta ficha e discutir que, fixado o ponto de mínimo de uma parábola, se forem escolhidos pontos pertencentes à mesma cada vez mais próximos do fixo, e traçando retas secantes à curva por estes pontos, observa-se que o coeficiente angular destas se aproxima de zero e que esta reta secante tende a ficar paralela ao eixo x. Encerrarei esta plenária ressaltando que até agora, tentou-se construir o conceito da derivada como a razão de variação entre dois pontos infinitesimalmente próximos de uma função e, ao mesmo tempo, que a derivada de uma função num ponto *x* de seu domínio é o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico desta função, num ponto de abscissa *x*.

FICHA 14

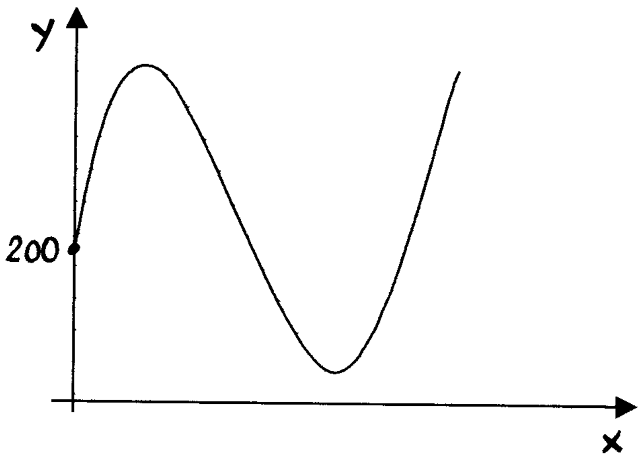
Retornemos ao nosso problema inicial:

Temos uma colônia de bactérias expostas à um antídoto, cujo crescimento é descrito pela lei $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$, onde y representa o número de bactérias e x representa o tempo de exposição ao antídoto.

Inicialmente, foi feita uma estimativa do tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir.

Esta estimativa foi baseada na tabela de valores e no esboço do gráfico da função dados abaixo.

x	Y
0	200
1	344
2	392
3	368
4	296
5	200
6	104
7	32
8	8
9	56
10	200



Naquele momento você não dispunha de um instrumental para dar o valor exato desse tempo. Agora que você adquiriu novos conhecimentos, responda as questões a seguir:

1) Qual é, precisamente, o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir? (utilize para os cálculos 4 casas decimais). Marque na figura acima este valor.

2) Qual é, precisamente, o número máximo de bactérias que se terá nas primeiras 10 horas de exposição ao antídoto? Marque na figura este valor.

3) Compare estes resultados com as estimativas feitas na ficha 2.

4) Qual é, precisamente, o número mínimo de bactérias que se terá nas primeiras 10 horas de exposição ao antídoto? Marque na figura este valor.

5) Qual é a variação instantânea do número de bactérias em x=2?

Análise a priori

O objetivo desta ficha é utilizar o conceito e o significado geométrico de derivada, institucionalizado nas fichas anteriores, como ferramenta para a resolução de um problema do mundo concreto.

A ficha será apresentada aos alunos em sala de aula para ser resolvida em duplas, utilizando papel, lápis e calculadora. Será permitido que os alunos consultem as fichas anteriores.

Espero que a resposta para a questão 1 seja 2,1132 horas e que seja encontrada pela determinação das raízes da função derivada, que são 7,8867 e 2,1132 e observando que 2,1132 corresponde ao ponto de máximo da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$. Acredito que não haja dificuldades na marcação deste ponto no gráfico. Pode ser que alguns tenham dificuldades em calcular a derivada da função polinomial dada. Se ela for calculada corretamente e a resposta for diferente da esperada, provavelmente foram cometidos erros de cálculo das raízes.

A resposta esperada para a questão 2 é 392,4501 bactérias, encontrada pela substituição do valor x=2,1132 na função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$. Quanto à marcação deste valor no gráfico, acredito que os alunos não encontrem dificuldades. Pode ser que alguns alunos substituam o valor x=2,1132 na função derivada. Se isto for observado em plenária, será discutida a interpretação do enunciado da questão. Respostas diferentes da esperada provavelmente se devam a erros de cálculo e/ou determinação da derivada erroneamente.

Quanto à questão 3, espero que os alunos percebam que os resultados aqui encontrados, embora possam estar próximos das estimativas feitas na ficha 2, correspondem a valores bem mais próximos ao do exato (4 casas decimais).

Espero que os alunos respondam a questão 4 substituindo o valor x=7,8867 na função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$. As observações para esta questão são as mesmas feitas para a questão 2.

Na plenária, apresentarei uma transparência com o gráfico da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$, destacando os pontos de máximo e de mínimo, e salientarei que agora já se tem a ferramenta adequada para a determinação dos mesmos.

A questão 5 foi colocada para reafirmar a essência do conceito de derivada, e espero que os alunos encontrem a variação instantânea do número de bactérias em x=2, calculando a derivada da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ neste ponto, cujo resultado é 8. Acredito que os alunos não encontrarão dificuldades para resolver esta questão, visto que tal conceito foi institucionalizado em fichas anteriores e discutido em plenárias.

VII – ANÁLISE A POSTERIORI E CONCLUSÕES

A seqüência didática foi resolvida em duplas por alunos de um curso de Ciência da Computação, em 7 sessões de 3 horas de duração cada uma, no período de 08/05 a 19/08/1999.

Neste capítulo, apresento uma análise dos protocolos dos alunos, assim como das discussões feitas em plenária. Isto será feito ficha a ficha, e apresento de modo sucinto algumas respostas, e dentre elas, as que considerei “mais originais” e/ou que mereciam “mais destaque”, estão apresentadas nos anexos.

Análise a posteriori – ficha 1

O objetivo desta ficha era, a partir de uma situação do mundo concreto, trabalhar a noção de *variação* através dos dados apresentados numa tabela de valores. Estes dados possibilitam um esboço do gráfico da função (que descreve a situação colocada) que, em alguns intervalos, é crescente e em outros, é decrescente. Estes intervalos podem ser identificados com razoável precisão pela observação da tabela dada.

As questões 1 e 9 são fechadas e as demais possibilitam conjecturas dos alunos, o que não é muito freqüente no contrato didático usual.

Esta ficha foi respondida por 26 duplas. Todas elas responderam à questão 1 conforme o previsto, ou seja, que no início da experiência havia 200 bactérias. Na plenária questionei como foi encontrado este valor, e os alunos responderam que foi pela observação dos dados da tabela.

Nas questões de 2 a 8 (abertas), esperava como resposta apenas as expressões “aumentou” ou “diminuiu”. Constatei que 8 duplas responderam desta forma; outras respostas estão elencadas abaixo:

- 12 duplas complementaram a resposta esperada com o valor numérico do aumento ou da diminuição das bactérias nos intervalos de tempo considerados.
- 3 duplas deram uma resposta do tipo: “neste intervalo, o número de bactérias aumentou/diminuiu em relação ao intervalo de tempo anterior a este”.

- 2 duplas responderam que "no intervalo considerado, o número de bactérias aumentou/diminuiu de 'tanto' em relação ao intervalo de tempo anterior e em relação ao começo da experiência".
- 1 dupla fez comparação percentual do aumento/diminuição do número de bactérias em relação ao intervalo anterior.

A maioria dos alunos complementou sua resposta "aumentou/diminuiu" com algum tipo de dado numérico. Isto evidencia que a cláusula implícita do contrato didático que diz "já que estou respondendo a uma questão matemática, esta deve ter uma resposta numérica", está bastante arraigada nos alunos. Na plenária, discutiu-se que com este tipo de pergunta, não está se questionando a variação numérica de bactérias num intervalo, e sim *"o que você acha que acontece com o número de bactérias..."*. Isto feito, pude perceber que questões abertas são recebidas com entusiasmo pelos alunos, que testemunharam favoravelmente dizendo *"ah!... então em questões deste tipo eu tenho liberdade para pensar ..."* ou então *"em matemática não existem apenas respostas numéricas, eu posso responder explicando* (de forma dissertativa) *meu raciocínio ...".*

Quando se discutiam estas questões, indaguei se algum aluno se utilizou de interpretação gráfica, e constatei que 14 duplas construíram o gráfico correspondente à tabela de valores e deram suas respostas a partir dele, o que pode representar outra herança do contrato didático usual, em que os alunos estão acostumados a construir um gráfico para cada tabela de valores dada. Aproveitei a oportunidade para discutir a questão da *variação,* e verifiquei que os alunos perceberam que ela está presente tanto na tabela dada quanto no gráfico construídos por alguns.

Quanto à questão 9, que pede a variação do número de bactérias em todos os intervalos de tempo apresentados na tabela, os resultados foram os seguintes:

- 17 duplas deram apenas respostas numéricas;
- 2 duplas responderam sempre com números positivos, utilizando nos cálculos, o registro de módulo e efetuando a operação "número de bactérias do tempo inicial menos o número de bactérias do tempo final"; por exemplo: $|200-344|=144$;

- 4 duplas deram como resposta apenas números positivos, possivelmente operando como as 2 duplas anteriores, porém, sem o registro de módulo;
- 2 duplas utilizaram o termo “aumentou tanto” ou “diminuiu tanto” no lugar dos sinais qualificativos “+ “ ou “ - “, como fizeram as 17 duplas anteriormente citadas;
- 1 dupla utilizou o termo “sobe” ou “desce” para descrever a variação.

Na plenária, durante a discussão de como se faz o cálculo de variação, percebi que foram dadas respostas em que, de alguma forma, estavam ausentes os sinais “+” e “-“. Institucionalizou-se que “a variação é obtida pelo cálculo: número de bactérias do tempo final menos número de bactérias do tempo inicial, em cada intervalo”.

A questão 10 foi formulada prevendo a ocorrência de diversas maneiras de expressão dos alunos na sua resposta. Todas as duplas observaram, conforme previsto, que a variação do número de bactérias não é o mesmo em intervalos de tempo distintos. Na maioria dos protocolos, constam observações relativas ao efeito e duração do antídoto. Além disso, 7 duplas observaram que existe uma “simetria” da variação em questão, o que não estava previsto na análise a priori. Algumas respostas deste tipo estão reproduzidas abaixo:

“O intervalo de tempo de 6 a 10 é inversamente proporcional ao intervalo de tempo de 0 a 5, com ponto de simetria no intervalo entre 5 e 6”;

“Existe uma relação na variação do número de bactérias entre a 1ª e a última hora, entre a 2ª e a penúltima hora e assim sucessivamente”;

“Os aumentos e diminuições foram proporcionais”.

Com estes resultados dessa ficha, pude perceber que, neste primeiro momento, os alunos não se sentiram totalmente seguros em dar respostas não numéricas à questões matemáticas. As discussões feitas em plenária, permitiram observar que a concepção de variação está presente nos alunos, embora fosse preciso discutir seu cálculo. Notei também que várias duplas deram respostas que iam além do esperado. Procurei saber o porquê disto, e constatei que se deu ou pela “liberdade” percebida por alguns alunos em poder conjecturar (permitido pelo novo contrato) sem a interferência do professor, ou então pela necessidade que a maioria sente em justificar suas respostas (efeito do contrato antigo).

Os resultados apresentados e as discussões levantadas em plenária, que permitiram fazer uso constante da palavra *variação*, me levam a crer que o objetivo desta ficha foi atingido.

Análise a posteriori – ficha 2

O objetivo desta ficha era que os alunos percebessem que ainda não têm disponível uma ferramenta que resolva a questão matemática colocada, referente a uma situação do mundo concreto, envolvendo a noção de variação.

Foi realizada uma plenária para discutir os resultados desta e também os da ficha 3. Analisarei, neste momento, apenas os resultados obtidos, sem me referir à plenária, deixando isto para a análise a posteriori da ficha 3.

Das 26 duplas que resolveram esta ficha, 24 substituíram todos os valores da tabela para responder à questão 1 e não observei erros de cálculo, o que era esperado, face a indicação feita na própria questão. Embora já tenha sido discutido na plenária anterior que respostas a questões matemáticas podem não ser necessariamente numéricas, parece que os alunos ainda não se convenceram disto, pois somente 7 duplas registraram que *"a expressão está coerente"*; as demais apresentaram somente os cálculos. Isto evidencia duas regras implícitas do contrato didático antigo: uma é que, em matemática, resolve-se um problema efetuando-se operações: a tarefa é encontrar a boa operação para efetuá-la corretamente; outra regra é que para resolver um problema, devem-se encontrar os dados no enunciado do mesmo.

23 duplas responderam à questão 2 conforme o esperado, ou seja, que o número máximo de bactérias nas primeiras 10 horas de exposição ao antídoto é 392. Algumas duplas complementaram esta resposta escrevendo que *"o número máximo é igual a 392, verificado na 2ª hora".* Outra dupla respondeu: *"nas primeiras 10 horas de exposição ao antídoto, a estimativa é de no máximo 400 bactérias"*. Como estas duplas não registraram nenhum cálculo nesta questão, parece que a resposta foi dada observando a tabela de valores ou os cálculos feitos na questão 1.

Duas duplas responderam 200, encontrando este valor substituindo x=10 (maior tempo da tabela) na expressão dada, tomando o máximo de tempo pelo máximo de bactérias, ou imaginando que o máximo destas ocorre no tempo máximo. Várias alunos, durante a resolução desta ficha, indagaram o significado da palavra *estimativa*. Pela maneira como colocaram a questão, pude perceber que esta terminologia era nova para alguns alunos, ao passo que outros queriam certificar-se de que estavam respondendo corretamente uma questão matemática sem "fazer contas". Para este grupo, nota-se que a regra internalizada por eles: "em matemática, resolve-se um problema efetuando-se operações" está enfraquecendo. Isto evidencia que este grupo está aos poucos, percebendo que houve uma ruptura do contrato didático antigo.

Para a questão 3, 12 duplas responderam que o antídoto começa a fazer efeito depois de 2 horas, conforme esperado. 7 duplas responderam que é após 3 horas, justificando que é neste tempo que o número de bactérias começa a diminuir, conforme apontado na tabela. 5 duplas, responderam: *"começa a diminuir no intervalo de 2 a 3 horas"*, deixando implícito que não sabem precisar este tempo. Em contrapartida, 1 dupla respondeu 2,3 horas e outra, duas horas e meia, fazendo cálculos para tentar *precisar* o tempo, e não estimá-lo (regra implícita: necessidade de realização de cálculos). Não foi observada inversão das respostas para as questões 2 e 3, ou seja, confusão dos papéis das variáveis x e y, conforme havia apontado na análise a priori.

De modo geral, o objetivo desta questão, que era conduzir o aluno à exploração e interpretação de dados, foi atingido, visto que a maioria assim o fez.

Somente 8 duplas responderam que não tinham elementos para determinar com precisão o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir (questão 4). Metade destas justificaram suas respostas escrevendo: *"só sabemos os valores de 1 em 1 hora e não sabemos o que ocorre entre este intervalo".*

As demais duplas responderam esta questão, afirmando que têm elementos, justificando: *"temos a fórmula* $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ *e com isso podemos achar o tempo com precisão"*. No entanto, nenhuma destas duplas explicou *como* encontrar o resultado preciso. A regra implícita que parece estar internalizada para estas duplas é que “sempre há uma resposta para uma questão e o professor a conhece”.

Com base nos resultados, pode-se concluir que o objetivo principal desta ficha foi apenas parcialmente atingido, uma vez que muitos alunos efetuaram cálculos para obter respostas às questões que solicitavam uma estimativa, baseada em dados apresentados. Mesmo os cálculos feitos por alguns, significavam um valor aproximado, o que talvez possa representar para eles uma estimativa. A grande maioria, não percebeu que ainda não têm disponível um ferramental para a resolução do problema e, por isso, tentaram encontrar meios operacionais, não percebendo que o que se estava pedindo era apenas uma estimativa.

Outro objetivo era contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico nos alunos, possibilitando concordarem ou não com uma afirmação. Este também parece não ter sido totalmente atingido, visto os resultados da questão 1. Isto parece ser decorrente do fato de os alunos estarem acostumados a aceitar sem discutir a validade dos enunciados de questões, não percebendo de imediato, que estou provocando uma ruptura dessa cláusula do contrato didático, o que já era previsto.

Análise a posteriori – ficha 3

Como esta ficha foi apresentada na segunda sessão da seqüência de ensino, iniciei o encontro relembrando o conteúdo da ficha 2. Os alunos, conforme previsto, solicitaram a correção de seus protocolos. Disse que não faria isto naquele momento, pois seria apresentada uma nova ficha, para ser resolvida no laboratório de informática, cujo objetivo era dar a eles a oportunidade de corrigirem suas próprias respostas. A reação do grupo foi positiva e notei que eles concordaram em “trocar os papéis”, sinalizando aceitação na renegociação que estou propondo para o contrato didático.

Não houve problemas na construção do gráfico com a utilização do software Derive e todas as duplas verificaram que seus cálculos na questão 1, da ficha 2 estavam corretos. O procedimento para essa verificação foi feita pela atribuição de valores à variável x da função, ou pela utilização do comando *“trace”* , que permite o deslocamento do cursor sobre o gráfico da função, indicando as coordenadas dos pontos. Neste caso, tive que fazer algumas interferências no sentido de esclarecer que dependendo da escala que se utiliza no software, este tem sua “precisão” alterada. Uma dupla respondeu a esta questão utilizando o comando *“limit”*, disponível no programa.

Todas as duplas (à exceção de uma) fizeram a verificação de seus protocolos referentes à questão 2, concluindo que suas estimativas estavam próximas do resultado dado pelo computador, utilizando o comando *“trace”* . A dupla que havia dado uma estimativa errada (200 bactérias), registrou que percebeu o erro cometido, qual seja, substituir x por 10, que era o maior tempo dado na tabela.

Notei, durante a realização das fichas, que os alunos têm a tendência de confiar em excesso na precisão dos dados fornecidos pelo software (que em geral, são aproximações). Na plenária, foi provocada discussão sobre isso, e os alunos aceitaram bem que tais aproximações são suficientes para a checagem das estimativas anteriormente feitas. Essa questão de que os dados fornecidos pelo computador são quase sempre valores aproximados causou impacto mais adiante, quando foi discutida a questão 4.

A opção escolhida pelo grupo para checar as respostas dadas para a questão 3 foi o comando *“trace”* e verificou-se que elas estavam de acordo com o resultado fornecido pelo computador. Algumas duplas responderam que a estimativa dada na ficha 2 (2 horas) pode ser melhorada com a exploração do gráfico, evidenciando o interesse em encontrar um valor preciso. Na plenária, de posse do gráfico, foi discutido que as questões 2 e 3 referem-se ao ponto máximo da função, e nesta oportunidade foram examinados os intervalos de crescimento e decrescimento da mesma, observando que a variação do número de bactérias, em cada intervalo de tempo, não é constante.

Os resultados obtidos referentes à checagem da questão 4 foram os seguintes:

- Das 8 duplas que na ficha 2 haviam protocolado que não tinham elementos para determinar com precisão o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir, 2 continuaram com esta opinião, não confiando na precisão do software; as outras mudaram de idéia, visto que seus protocolos apontam que os recursos do programa (tais como *"trace"* e *"zoom"*) são suficientes para determinar este tempo;

- Uma das duplas que havia respondido que tinha elementos para determinar com precisão o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir, agora escreve: *"a questão 4 da ficha 2 era a única não coerente, pois analisando o gráfico com o software, o tempo dá exato e, com os resultados que tínhamos, dava para chegar apenas a uma estimativa",* evidenciando confiança em resultados (que podem ser aproximados) fornecidos pelo computador;
- As demais duplas, que afirmaram que a expressão algébrica $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ seria suficiente (sem explicar como) para determinar o tempo com precisão, continuaram com a mesma opinião, parecendo confiar na "precisão" do software.

Como durante a plenária percebi que a maioria das duplas havia checado suas respostas utilizando o comando *"trace",* coloquei novamente em discussão a "precisão" do software. A maioria do grupo disse que esse comando em conjunto com o *"zoom"* permite determinar com exatidão o ponto de máximo da função. Levantei a questão: "qual a garantia que temos em estar o cursor posicionado exatamente sobre esse ponto?". Imediatamente veio a questão: *"então não é possível determinar o ponto máximo?"*, o que provocou certo alvoroço na turma. Respondi que é possível sim, e que o conceito para responder questões como as que foram colocadas na ficha 2, seria nosso objeto de estudo nas fichas seguintes e que tal conceito é a derivada.

O objetivo desta ficha foi totalmente atingido somente depois da realização da plenária, pois os protocolos evidenciam que os alunos estão acostumados a confiar em resultados fornecidos por um computador.

Análise a posteriori – ficha 4

O objetivo desta ficha era que os alunos percebessem que a razão de variação entre dois pontos de uma função afim é constante.

Na plenária, os alunos constataram que, como agora as bactérias não estão mais expostas ao antídoto, o desenvolvimento das mesmas está descrito por outra função, cujo gráfico, no caso, é uma reta. Isto evidencia que não houve problemas com o manuseio do programa para responder a questão 1, conforme previsto.

Pelos protocolos, todas as duplas responderam corretamente às questões fechadas, ou seja, de 2 a 8. Em plenária, algumas duplas disseram que calcularam o número de bactérias (y_1, y_2, y_3) correspondente a cada tempo x_1, x_2 e x_3 , utilizando a calculadora; mas a maioria disse que o fez aproveitando recursos do software (comando *"author/expression/="*), o que evidencia entusiasmo dos alunos em utilizar uma ferramenta relativamente nova para eles. Este comportamento parece revelar aceitação pelo grupo dessa prática de ensino (uso do computador como ferramenta), o que pode contribuir para o sucesso e manutenção do empenho dos alunos na seqüência didática que estou propondo.

A localização dos pontos A, B e C foi feita com o comando *"edit/ create annotation"* ou com o *"trace"* . Foi discutido que a localização exata desses pontos pode ser comprometida devido as limitações do software

O cálculo da razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para cada par de pontos considerado, poderia ter sido feito com o software, mas, por serem simples, a maioria dos alunos disse em plenária, que optou pela utilização da calculadora ou mesmo o fizeram "de cabeça".

Conforme previsto, todas as duplas responderam na questão 9, que a razão de variação para os três pares de pontos considerados é constante. O fato de que menos da metade do grupo deu alguma explicação para este resultado, evidencia que a ruptura do contrato didático antigo, proposta com esta questão, não foi percebida por esses alunos. Reproduzo a seguir algumas respostas dadas:

i) *"a razão de variação será sempre a mesma pois a função que descreve o desenvolvimento das bactérias é uma reta, portanto sua razão de variação é sempre constante"* (5 duplas);

ii) *“a razão obtida é constante. O crescimento do número de bactérias é uniforme em relação ao tempo, formando assim uma reta no gráfico”* (1 dupla);

iii) *“o crescimento das bactérias é proporcional”* (5 duplas);

iv) *“a razão de variação é constante pois esta função é do primeiro grau e o coeficiente angular da reta não muda”* (1 dupla).

Com estes resultados, concluo que o objetivo desta ficha foi atingido plenamente para apenas uma dupla (resposta iv).

Para 5 duplas, o fato da razão de variação ser constante está relacionada à uma reta, mas parece não ter sido percebido que é igual ao seu coeficiente angular (resposta i). Para 1 dupla, esse fato está relacionado à idéia de uniformidade (resposta ii) e para 5 duplas, relaciona-se à idéia de proporcionalidade (resposta iii).

Na plenária, quando discutia-se a atribuição de um significado físico e de um geométrico para a razão de variação, somente uma dupla (aquela que deu a resposta iv) manifestou-se de imediato. Aos poucos, outros significados tais como velocidade e aceleração, foram surgindo. Aproveitei a oportunidade para institucionalizar o cálculo da razão de variação entre dois pontos de uma função afim, e que seu resultado é sempre igual ao coeficiente angular da reta que a representa. Isto foi feito através de explorações do gráfico com o uso do computador e projeção da tela da calculadora gráfica TI 92.

Somente depois da realização da plenária tive a sensação que o objetivo fora cumprido nesta ficha. A tentativa de provocar uma ruptura no contrato didático usual, tal como levar o aluno a cojecturar a respeito de resultados prévios, teve sucesso restrito, visto que poucos alunos registraram conjecturas na questão 9.

Análise a posteriori – ficha 5

O objetivo desta ficha era que os alunos percebessem que a razão de variação entre dois pontos pertencentes ao gráfico de uma função quadrática não é constante, ou seja, depende dos pontos considerados.

A construção do gráfico da função $y = x^2 + 200$ se deu sem problemas, e na plenária, constatei que os estudantes já sabiam que o resultado seria uma parábola, visto que este tipo de função parece ser familiar a eles, havendo necessidade apenas de ajustar a escala para uma boa visualização deste gráfico na tela do computador.

Quanto às questões de 2 a 8 (fechadas), das 27 duplas que participaram desta ficha, somente uma cometeu erros de cálculo e três delas calcularam as variações pelo "valor inicial menos o final", o que mostra que não haviam participado efetivamente da plenária anterior, em que foi institucionalizado este cálculo.

Durante a plenária, constatei que a maioria das duplas efetuou os cálculos utilizando a calculadora ao invés do Derive, por ser mais fácil e prático dessa forma.

Os resultados dados para a questão 9 foram os seguintes, em que pude observar aumento de conjecturas realizadas pelos alunos, em contraposição ao número reduzido (de conjecturas) protocolados na ficha anterior:

- 10 duplas responderam que a razão de variação não é constante, sem dar nenhuma explicação;
- 10 duplas "explicaram" que a razão de variação não é constante, por se tratar de uma função quadrática;
- 2 duplas "explicaram" que a razão de variação não é constante pois *"o 'antídoto' está fazendo o número de bactérias aumentar";*
- 4 duplas "explicaram" que "o 'antídoto' funciona melhor neste ou naquele intervalo de tempo considerado";
- 1 dupla deu uma explicação que havia sido prevista na análise a priori, observando que *"o coeficiente angular em cada caso varia, isso se deve ao gráfico ser uma parábola"*.

O fato de algumas duplas terem conjecturado a respeito do crescimento de bactérias sem mencionar valores numéricos, na tentativa de dar uma explicação/resposta para uma questão matemática, pode evidenciar que estes alunos estejam percebendo a ruptura que estou propondo do contrato didático usual.

Reproduzo a resposta dada por uma dupla para a questão 9: *"observamos que a razão de variação não é constante, como no exercício da aula anterior que se tratava de uma reta; pois trata-se de uma função do 2º* *grau”,* que retrata e evidencia a “ligação” do conceito de variação constante à função afim e o de variação não constante à funções cujo gráfico apresenta concavidade.

Na plenária, depois de ter discutido e percebido que os alunos responderam corretamente às questões que envolviam cálculos, coloquei em discussão as respostas que deram na última questão. Algumas duplas disseram que não haviam dado explicação nenhuma por achar que responder que “a razão de variação não é constante” seria suficiente (visto os cálculos da questão 8) e, após a discussão parece que compreenderam a falta de interpretação dada ao enunciado. Institucionalizei que a razão de variação entre dois pontos de uma função quadrática depende da escolha dos mesmos e, além disso, corresponde ao coeficiente angular da reta secante à curva por estes pontos, valorizando a fala de um aluno, que ressaltou isto (e observado em sua ficha).

O objetivo desta ficha foi atingido, e a plenária foi importante para institucionalizar o que eu pretendia, observado inicialmente por uma dupla apenas. Isto evidencia que poucos alunos conjecturam a respeito de conhecimentos matemáticos adquiridos recentemente (coeficiente angular de reta).

Análise a posteriori - ficha 6

O objetivo desta ficha era que os alunos percebessem que o cálculo da razão de variação para pontos próximos de um fixado, “tende” a um determinado valor. Além disso, reforçar a institucionalização feita anteriormente, ou seja, que a razão de variação corresponde, numericamente, ao coeficiente angular da reta que passa pelo par de pontos considerados.

Os resultados dados pelos alunos nas questões 1 e 2, que eram fechadas, foram todos corretos, evidenciando que o grupo tem estado atento às discussões realizadas em plenárias (provavelmente anotando as correções e institucionalizações feitas). Na análise a priori, não havia descartado a ocorrência de erros de cálculo nestas questões.

Os resultados apontam a ocorrência de três tipos de resposta para a questão 3.

<u>Tipo 1</u>

17 duplas (das 27 que resolveram esta ficha) observaram que fixado o ponto A, o cálculo da razão de variação é decrescente nos casos P1 $\rightarrow$ A, P2 $\rightarrow$ A e P3 $\rightarrow$ A, e crescente nos casos P4 $\rightarrow$ A, P5 $\rightarrow$ A e P6 $\rightarrow$ A. Exemplificando este tipo de resposta, reproduzo abaixo o protocolo de uma destas duplas:

"no exercício 1, a razão de variação diminuía, pois o tempo estava decrescendo, e no exercício 2, razão de variação aumentava pois o tempo estava crescendo".

Quanto às explicações dadas por este grupo (17 duplas), constatei que:

- 8 duplas não deram nenhuma explicação para o fato que observaram, ou seja, que os resultados ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$) são diferentes;
- 2 duplas explicaram que a razão de variação não é constante *"porque se trata de uma parábola" ;*
- 5 explicaram que os diferentes valores obtidos para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se relacionam a coeficientes angulares de retas. Uma dupla escreveu: "*levando-se em conta que a razão de variação é o coeficiente angular de uma reta e que o ponto A está relacionado a todos os outros pontos, o que temos, é uma reta girando em torno do ponto A, variando sua posição de acordo com o outro ponto".*
- 2 duplas explicaram os diferentes valores encontrados para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, relacionando-o à coeficiente angular e tipo de função estudada: *"isto acontece porque temos uma função do 2º grau (parábola), e o coeficiente angular entre coordenadas diferentes não será o mesmo".*

Estes resultados evidenciam que este grupo de alunos procurou "transportar" conhecimentos adquiridos recentemente para questões novas, pois as duplas que apresentaram alguma explicação, relacionaram os diferentes valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ com parábola e/ou coeficiente angular. Certas respostas, entretanto, mostram que para alguns alunos, a noção de coeficiente angular ainda não está relacionada à reta, parecendo que são duas concepções diferentes, conforme o protocolo reproduzido acima: *“o coeficiente angular entre coordenadas ...”*.

<u>Tipo 2</u>

Outro tipo de resposta refere-se a 8 duplas que, embora tenham efetuado corretamente os cálculos nas questões 1 e 2, registraram que *“a variação é constante”*. Esta variação a que se referem é a diferença dos resultados obtidos para cada razão de variação, ou seja, para cada par de pontos considerados, o valor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aumenta ou diminui em 0,1 unidade. Isto evidencia que para estas duplas, o enunciado da questão não estava claro. Os protocolos destas duplas contém explicações confusas, como por exemplo: *“nesses pontos apresentados, a variação foi constante. Percebe-se que quanto mais houver bactérias, a variação vai ser maior”,* ou então: *“a variação é constante, pois devido a proximidade dos pontos, forma-se uma reta passando sobre eles, cujo coeficiente angular é o mesmo para todos”.* Neste caso, houve a tentativa de dar uma explicação relacionando razão de variação com coeficiente angular de reta. A idéia de valores constantes parece estar “ligada” à noção de linearidade.

Parece estar internalizada, neste grupo de alunos, a regra: “sempre há uma resposta para uma questão matemática e o professor a conhece, deve-se sempre dar uma resposta para ser corrigida”. Além disso, houve pouca “transferência” de conhecimentos adquiridos recentemente. O objetivo desta ficha também não foi totalmente atingido para este grupo de alunos.

<u>Tipo 3</u>

Além desses dois tipos respostas que foram predominantes, reproduzo abaixo outros dois protocolos:

“quanto menor for o intervalo de tempo, a razão de variação mais se aproxima do ponto mínimo da parábola”.

“quanto mais próximo de zero a variação de tempo, a razão de variação mais se aproxima do ponto mínimo da parábola que é 4”.

Provavelmente, estes alunos, numa tentativa de mostrar erudição em conhecimentos matemáticos, relacionaram valor mínimo de função com variação infinitesimal. Novamente o aparecimento da regra vigente “sempre há uma resposta para uma questão matemática...”.

A plenária foi bastante produtiva, visto que em comparação com as anteriores, o número de alunos que participou com sugestões e propondo discussões, aumentou. Isto não ocorria em aulas expositivas, evidenciando que os estudantes estão aos poucos, percebendo a ruptura que estou propondo no contrato didático usual (substituição da aula expositiva).

Por outro lado, notei que as observações feitas pelos alunos em plenária não são exatamente aquelas registradas nas fichas. Por exemplo, quando discutia-se o que foi observado na questão 3, um aluno disse que *“a variação de tempo é sempre igual a 0,1, o que também ocorre com a variação de valores observados para* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$*, evidenciando que variação de tempo e de* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *estão na mesma proporção e, além disso, quanto maior o intervalo de tempo, maior o valor da razão de variação”.* Perguntei quantos alunos haviam observado o mesmo e 15 duplas se manifestaram positivamente. Os protocolos sinalizam que os alunos têm dificuldade em expressar-se por escrito. Um outro aluno questionou que *“a variação dos valores de* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tende a ser constante, embora estamos numa parábola, e isto não pode, pois neste tipo de função a razão de variação deve ser diferente”.* Depois que se discutiu a interpretação errada que ele fez, três duplas disseram ter observado o mesmo, mas consta o registro de 8 respostas similares a esta.

Em seguida, coloquei a questão: “se estivéssemos considerando um ponto bem mais próximo do fixado, qual seria o valor da razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?”. Somente um aluno respondeu de imediato: *“quatro !”*. Disse que era isto que se pretendia com esta atividade, ou seja, que fixado um ponto, quanto mais próximo deste outro estiver (empregando e explicando o significado do termo *infinitesimalmente próximo*), a razão de variação entre os mesmos “tende” a um determinado valor. Foram apresentados outros exemplos fixando pontos diferentes do ponto A dado na ficha. Um aluno colocou: *“então, a razão de variação pode ser obtida pelo cálculo: abscissa de um ponto próximo ao fixado somada à abscissa do ponto fixado?”.* Disse que para a função em estudo ($y = x^2 + 200$) isto é válido e que conjecturas deste tipo seriam discutidas em fichas posteriores.

Foi lembrado que as razões de variação calculadas correspondem, numericamente, conforme discutido na plenária anterior, ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função $y = x^2 + 200$ pelos pontos considerados.

Considero que, durante a plenária, em que foram apresentados vários exemplos, o objetivo desta ficha foi atingido. Os protocolos das fichas sinalizam que análise a priori previa conjecturas que estavam além dos conhecimentos assimilados pelos alunos. Por outro lado, possibilitar a efetiva participação dos alunos em discussões, permite "especular" o tipo de raciocínio desenvolvido por eles e identificar as dificuldades que encontram, direcionando a aula numa tentativa da melhoria do aprendizado, o que nem sempre é possível no contrato didático usual.

Análise a posteriori – ficha 7

O objetivo desta ficha era que os alunos percebessem que a razão de variação entre dois pontos da função $y = x^2 + 200$, pode ser determinado pelo cálculo: "o dobro da abscissa de um ponto adicionado do acréscimo sofrido pela mesma".

Todas as duplas efetuaram corretamente os cálculos relativos às questões 1,2 e 3, e observaram que a razão de variação pode ser calculada conforme descrito acima. Abaixo reproduzo algumas respostas dadas para a questão 4:

"observamos que ambas as fórmulas nos dão o mesmo resultado, ou seja, $2x_A + \Delta x$ *é outra maneira de calcular a razão de variação entre dois pontos";*

"que $2x_A + \Delta x$ *é a fórmula da razão de variação";*

"observamos que utilizando dois métodos diferentes, os resultados são iguais aos da ficha anterior".

O objetivo da ficha foi alcançado, embora nenhuma dupla tenha questionado a validade do cálculo "o dobro da abscissa de um ponto adicionado ao acréscimo" para outras funções quadráticas. Em plenária, direcionei a discussão para esse fim e o grupo concluiu que esse resultado é válido para funções quadráticas da forma $y = x^2 + c$ $(c \in \Re)$. Porém, o grupo constatou, através de exemplos, que não se pode cometer erros em estender uma conjectura válida para um caso particular de função quadrática a outra diferente desta, como é o caso de $y = x^2 + bx$.

Análise a posteriori – ficha 8

O objetivo desta ficha era que os alunos observassem que, quando se consideram dois pontos genéricos pertencentes ao gráfico de uma função quadrática $y = x^2$, o cálculo da razão de variação entre eles pode ser obtido pelos mesmos procedimentos adotados para dois pontos particulares. Além disso, institucionalizar que se os pontos $\mathrm{A}(x_0, x_o{}^2)$ e $\mathrm{P}(x_0 + \Delta x, (x_0 + \Delta x)^2)$, pertencentes ao gráfico da função $y = x^2$, estiverem "infinitesimalmente próximos" um do outro, a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre eles é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e cujo resultado se existir e for finito, se chama derivada da função $y = x^2$ no ponto x_0 e é indicado por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$, ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Logo após a distribuição das fichas, percebi que os alunos manifestaram dificuldades no entendimento da representação utilizada para os pontos A e P, ou seja, $\mathrm{A}(x_0, x_0{}^2)$ e $\mathrm{P}(x_0 + \Delta x\ ,\ (x_0 + \Delta x)^2)$. Neste momento, discutimos a notação usual para pontos genéricos da função em estudo, e também que a função apresentada nesta ficha é diferente da anterior para simplificar os cálculos.

Durante a resolução da ficha, várias duplas indagaram sobre o desenvolvimento do quadrado da soma, e coloquei no quadro a fórmula: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Das 27 duplas que resolveram esta ficha, foram registrados 19 acertos para o cálculo de Δy, ou seja, $\Delta y = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$. Reproduzo a seguir, aqueles que sinalizam erros e/ou falhas na resposta para esta questão:

1 dupla: $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$

4 duplas: $\Delta y = x_0^{\ 2} - (x_0 + \Delta x)^2 = \Delta x(-2x_0 - \Delta x)$

1 dupla: $(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^{\ 2} = x_0^{\ 2} + 2(x_0 + \Delta x) + \Delta x^2 - x_0^{\ 2}$

1 dupla: $\Delta y = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 = 2x_0 \Delta x$

1 dupla: não desenvolveu a expressão $(x_0^{\ 2} + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2) - (x_0 + \Delta x)$

Estes protocolos indicam que parte dos alunos apresentam dificuldades na manipulação algébrica.

Na segunda parte da questão 1, que pedia o cálculo: “o dobro da abscissa x_0 de A adicionado ao acréscimo Δx”, 9 duplas deram, sem apresentar cálculos, a resposta esperada, ou seja, $2x_0 + \Delta x$; 11 duplas chegaram ao resultado correto, porém desenvolvendo o cálculo: $2x_0 + [(x_0 + \Delta x) - x_0] = 2x_0 + \Delta x$; outras 3 duplas deram a indicação da resposta esperada, mas não simplificaram-na, escrevendo $2x_0 + [(x_0 + \Delta x) - x_0]$. Foram constatados erros nas demais duplas, cujos protocolos reproduzo abaixo:

- $\Delta x = (x_0 + \Delta x) - x_0 \Rightarrow \Delta x = \Delta x$
  $2x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = \Delta x + 2x_0$
- $2x_0 + (-\Delta x) - 2x_0 - \Delta x$
  $\Delta x = x_0 - (x_0 + \Delta x) = -\Delta x$
- $\Delta x = 2x_0^{\ 2}(x_0 - (x_0 + \Delta x))$
- $2x_0 + (x_0 - (x_0 + \Delta x)) = 2x_0 + x_0 - x_0 - \Delta x = -2x_0 - \Delta x$

Estes protocolos indicam que 3 dessas duplas preocuparam-se em encontrar um valor para Δx resolvendo equações, evidenciando não entendimento do enunciado da questão; 1 das duplas aponta que não aprendeu a calcular a variação. Além disso, apresentam dificuldades em manipular símbolos algébricos.

Foram constatados 8 acertos para a última parte da questão 1, ou seja, que a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$. Os outros protocolos estão reproduzidos a seguir:

- 6 duplas protocolaram corretamente: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$ mas não desenvolveram a simplificação, evidenciando falta de intimidade com manipulações algébricas.
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0 + \Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x}{2x_0}$
- 2 duplas : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x_0{}^2 - (x_0 + \Delta x)^2}{x_0 - (x_0 + \Delta x)}$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(-2x_0 - \Delta x)}{-\Delta x} = \dfrac{2x_0}{x}$
- 2 duplas : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{x_0 - (x_0 + \Delta x)}$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{2x_0 + \Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x - \Delta x}{2x_0}$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0 + \Delta x + \Delta x^2}{2x_0 + \Delta x} = \Delta x^2$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x}{\Delta x} = \Delta x$
- 1dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \dfrac{(x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2)}{-x_0} =$

  $= -x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$
- 1 dupla : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = x_0 + \Delta x$

Para a questão 2, cuja resposta esperada era $2x_0 + \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, 19 duplas assim o fizeram. Os demais protocolos foram os seguintes:

- 3 duplas registraram que $2x_0 + \Delta x \neq \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- 2 duplas registraram que $2x_0 + \Delta x > \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (obtido na questão anterior)
- 2 duplas registraram que $2x_0 + \Delta x < \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (obtido na questão anterior)
- 1 dupla deixou em branco

É de se estranhar que 19 duplas tenham protocolado que $2x_0 + \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, visto que foi constatado apenas 8 acertos para o cálculo da razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ na questão 1. Provavelmente, parte destes alunos estendeu a conjectura e/ou conclusão da ficha anterior para esta, numa tentativa de induzir o acerto da questão. As duplas que completaram o pontilhado com um sinal que não seja o "=", evidenciam terem feito comparações com os resultados (errados) previamente obtidos, decorrentes de dificuldades em manipular, simplificar e fatorar expressões algébricas.

A maioria das duplas acertou a questão 3, completando os pontilhados com o sinal "=". Os erros constatados nas duas partes da questão foram os seguintes: 8 duplas, na segunda parte responderam que: $2x_0 + \Delta x \neq \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3 duplas) ; $2x_0 + \Delta x > \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (2 duplas) ; $2x_0 + \Delta x < \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3 duplas). Destas, 3 não responderam a primeira parte, 2 responderam que $2x_0 + \Delta x < \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e 1 respondeu que $2x_A + \Delta x > \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para esta questão, esperava que os alunos levantassem uma conclusão do tipo: "a razão de variação entre dois pontos genéricos ou particulares, pertencentes ao gráfico de uma função $y = x^2 + c$ ($c \in \Re$) pode ser encontrada pelo "dobro da abscissa de um ponto adicionado ao acréscimo Δx". Entretanto, 10 duplas não complementaram a questão com nenhuma conclusão; 15 duplas deram uma resposta com o mesmo sentido da esperada, mas sem observar que o resultado é válido para o tipo de função que está-se estudando. As outras 2 duplas responderam que *"quando temos pontos genéricos, não obtemos a mesma igualdade que quando os pontos são particulares".*

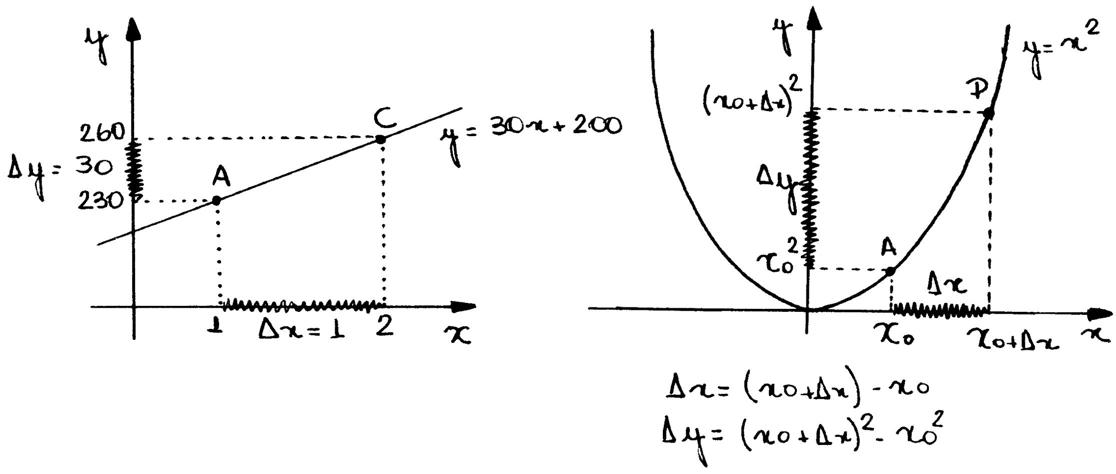
Para a questão 4, os resultados foram os seguintes:

- 5 duplas responderam corretamente que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x_0$
- 4 duplas protocolaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$
- 1 dupla registrou que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x_0 \Delta x + \Delta x^2$
- 1 dupla respondeu que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to A$
- 16 duplas deixaram esta parte da questão em branco

Para completar o pontilhado $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = \ldots\ldots$, observei que:

- 19 duplas deixaram em branco
- 5 duplas completaram corretamente, ou seja, que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = 2x_0$
- 1 dupla protocolou que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = A$
- 2 duplas protocolaram que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = 0$

Na discussão dos resultados, em plenária, observei que a maioria dos alunos apresentam sérias dificuldades em manipular dados algébricos, e percebi que em seus protocolos, iria constatar erros como os acima apontados. Notei também que os alunos apresentam dificuldades em visualizar as variações Δy e Δx geometricamente, parecendo que eles relacionam-nas apenas à quantidades numéricas. Já previa que essas e outras dificuldades surgiriam, visto que essas questões envolvem muitos conceitos delicados e que apenas uma atividade não seria suficiente para construi-los, mas que daria oportunidade para o início de uma elaboração do conhecimento de tais objetos. Embora tenham sido feito explorações geométricas em plenária (ficha 4, ao institucionalizar-se razão de variação entre dois pontos como o coeficiente angular da reta que passa pelos mesmos) dessas variações, achei conveniente ressaltá-las novamente, fazendo indicações no quadro negro, conforme reproduzo a seguir:



Após a discussão dos resultados e dos cálculos algébricos, institucionalizei que para funções quadráticas, cuja expressão algébrica é do tipo $y = x^2 + c \ (c \in \Re)$, a razão de variação entre dois pontos quaisquer, pode ser obtida calculando-se o "dobro da abscissa de um ponto adicionado do acréscimo". Após discutir o significado do termo *infinitesimal* e de *"pudéssemos desprezá-lo"* (vários alunos manifestaram incompreensão em relação a isto), o grupo concluiu que *"a razão de variação entre dois pontos 'muito próximos', da função* $y = x^2$ *tende a* $2x_0$*"*, e depois de retomar a notação de limite, que *"podemos denotar este fato pelo* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$*"*. Em seguida, foi institucionalizado que tal resultado se chama derivada da função $y = x^2$ no ponto x_0.

Depois da plenária, acredito que o objetivo desta ficha foi atingido. Entretanto, a maioria dos alunos, por apresentar dificuldades em visualizar conceitos geometricamente e trabalhar com álgebra elementar, dentre outras coisas, dificilmente teria atingido o objetivo sozinhos, apenas elaborando as atividades da ficha.

Análise a posteriori – ficha 9

O objetivo desta ficha era que os alunos encontrassem a função derivada de $y = x^3$.

Durante a realização desta ficha, várias duplas indagaram sobre o desenvolvimento do cubo da soma, e escrevi no quadro negro a fórmula: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Conforme previsto a priori, a quase totalidade das 27 duplas marcou sobre gráfico (solicitado na questão 2) os dois pontos genéricos A(x_0 , x_0^3) e P($x_0+\Delta x$, $(x_0+\Delta x)^3$) no primeiro quadrante. Apenas uma dupla fez a marcação do ponto A no terceiro quadrante e do ponto P no primeiro quadrante. Os protocolos indicam que 4 duplas não interpretaram corretamente o enunciado da questão ou não entenderam a notação algébrica de pontos genéricos (o que foi discutido na plenária da ficha anterior), pois escolheram pontos particulares (por exemplo: A(1 ,1) e P(2 , 8)) ao invés de usar a notação apresentada nesta ficha. Outras 2 duplas marcaram sobre o gráfico apenas a abscissa e ordenada dos pontos, sem indicação dos mesmos sobre a curva.

Para a questão 3, os protocolos foram os seguintes:

- 23 duplas calcularam corretamente a variação Δy, ou seja, $\Delta y = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;
- 4 duplas apresentaram dificuldades em manipular expressões algébricas e/ou produto notável e fatoração;
- 18 duplas calcularam corretamente a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou seja, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, as demais não tiveram sucesso em função dos erros cometidos anteriormente no cálculo de Δy e/ou dificuldades com simplificações.

Foram constatados 16 acertos para a questão 4, ou seja, que para um acréscimo Δx infinitesimal, a razão de variação "tende" a $3x_0^{\ 2}$ (a maioria das respostas diferentes desta decorrem de erros cometidos na questão 3). Por outro lado, 5 duplas protocolaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x_0^{\ 2} + 3x_0$, evidenciando interpretação incorreta termo *infinitesimal* (para Δx) ou do significado matemático da expressão *"que pudéssemos desprezá-lo"*. Para estas duplas, parece que desprezar um termo significa ignorá-lo, ao invés de considera-lo como um valor que tende a zero. Uma dupla protocolou que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$, provavelmente entendendo que a razão de variação pudesse ser desprezada. 2 duplas responderam que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6x_0 + 2\Delta x + 3$, sem indicar como chegaram a este resultado.

Todas as duplas copiaram o resultado que haviam dado para a questão 4, no pontilhado a ser completado na definição apresentada ao final da ficha; portanto, constatei 16 acertos.

Em plenária, enquanto se discutiam os resultados, notei que os alunos estiveram mais atentos nas manipulações algébricas exigidas nesta ficha, visto que manifestaram maior índice de acertos (o que efetivamente se deu, conforme apontam os protocolos). Por outro lado, a impressão que tive é que iria encontrar quase unanimidade de acertos das questões nos protocolos, pois não houve nenhum questionamento quanto aos conceitos envolvidos. Parece que os alunos, percebendo que são minoria em errar uma questão, sentem-se acanhados em colocar sua dúvida para discussão.

Ao institucionalizar a função derivada da função $y = x^3$, foi discutida a interpretação da notação $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^{\ 2}$, e perguntei: *"o que significa calcular a derivada da função $y = x^3$ no ponto x_0?"*. Em coro o grupo respondeu: *"significa encontrar a razão de variação entre ele e um ponto bem próximo"*. Lembrei que esta ficha é parecida com a anterior, em que calculamos a derivada de $y = x^2$ e prossegui com a pergunta: *"o que significa calcular a derivada de uma função?"*. Novamente, a maioria observou que *"significa encontrar uma fórmula para calcular a razão de variação entre dois pontos próximos da função"*, e enfatizei o conceito de derivada como razão de variação.

Pelos protocolos, constatei que para a maioria dos alunos o objetivo desta ficha foi atingido, e acredito que após a plenária, as duplas que haviam fracassado (devido à dificuldades algébricas e interpretação de enunciados), melhorem seu desempenho na próxima ficha.

Análise a posteriori – ficha 10

O objetivo desta ficha era que os alunos encontrassem a função derivada da função $y = 200x$.

Para a questão 2, que pedia a marcação de dois pontos genéricos $A(x_0, 200x_0)$ e $P(x_0+\Delta x,\ 200(x_0+\Delta x))$, conforme previsto a priori, apenas 2 duplas marcaram os pontos em quadrantes diferentes, as demais o fizeram no primeiro quadrante. Das 28 duplas que resolveram esta ficha, 23 marcaram os pontos A e P corretamente; entretanto, 3 duplas escolheram pontos segundo seus próprios critérios, como por exemplo A(1 , 200) e P(2 , 400) ou A(-1 , -200) e P(1 , 200), evidenciando preferência em trabalhar com valores numéricos ou dificuldades em interpretar a representação algébrica de pontos genéricos. Na ficha anterior, foram constatados 4 protocolos como estes, o que indica que a discussão realizada anteriormente sobre isto, não surtiu efeito positivo para estas 3 duplas. Constatei também 2 erros: uma dupla marcou o ponto A coincidindo com o ponto $P(x_0 , 200x_0)$ e outra, indicou as abscissas de A e P por x e y, respectivamente, embora tenham marcado pontos diferentes.

Todas as duplas calcularam corretamente o valor de Δy e de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, pedidos na questão 3, ou seja, $\Delta y = 200.\Delta x$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 200$. O fato de todas as duplas terem acertado esta questão provavelmente se deve à simplicidade dos cálculos aqui exigidos e/ou às discussões sobre manipulações algébricas que foram feitas anteriormente.

Os protocolos da questão 4 indicam persistência de alguns alunos em interpretarem incorretamente o significado do termo *infinitesimal* (para Δx) e/ou da frase *“que pudéssemos desprezá-lo”*, além de dificuldades algébricas. Isto foi discutido várias vezes em plenárias anteriores, o que pode significar obstáculo para alguns alunos. Duas duplas protocolaram que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ (sem indicar como chegaram a este resultado), e uma outra que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong 200$.

Reproduzo a seguir alguns protocolos:

- 1 dupla : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200x_0 - 200x_0}{x_0 - x_0} \Rightarrow 0$
- 1 dupla : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200\Delta x}{\Delta x} = \frac{200.0}{0} = 200$
- 3 duplas : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200\Delta x}{\Delta x} = \frac{200.0}{0} = 0$
- 1 dupla : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200\Delta x}{\Delta x} = \frac{200.0}{0} = 200$

Não foi constatada melhoras significativas no grupo quanto à este tipo de questão, visto que na ficha 9, 11 duplas erraram e nesta, 9 erraram.

Todas as duplas copiaram o resultado encontrado na questão 4 para o pontilhado a ser completado: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$.................., o que indica 19 acertos.

Em plenária, percebi que os protocolos dos alunos iriam sinalizar elevado índice de acertos (o que efetivamente se deu), nas questões 2 e 3. Na discussão, perguntei ao grupo: *"vocês acham que teriam condições de dar o resultado da razão de variação para esta função (y=200x) sem efetuar cálculos?"*. 1 dupla disse que *"a razão de variação é a derivada da função"*, outra que *"é 200 vezes o valor de x..."*. Como a maioria não respondeu ao meu questionamento, observei que "a razão de variação é sempre 200, independente do valor de Δx..." e de imediato, um aluno disse que *"é o valor do coeficiente angular da reta!"*.

Provavelmente, devido à essa constatação (a razão de variação entre dois pontos de uma função afim independe da variação entre sua abscissas) , de pronto, a turma respondeu corretamente à questão 4 e manifestou entendimento na institucionalização da derivada da função y = f(x) = 200x.

Prossegui com a plenária, relembrando as derivadas calculadas até aqui, e perguntei se era possível intuir alguma regra para o cálculo das mesmas. A discussão foi produtiva e através de exemplos, seguidos de conjecturas, chegou-se à regra: "se a lei algébrica de uma função é $y = f(x) = k.x^n$ $(\mathrm{k} \in \Re, \mathrm{n} \in \mathrm{Q})$, então sua função derivada é $y' = k.n.x^{n-1}$.

Esta plenária foi produtiva e acredito que o objetivo da ficha foi atingido.

Análise a posteriori – ficha 11

O objetivo desta ficha era que os alunos encontrassem a função derivada de uma função constante e que dessem uma justificativa para o resultado obtido.

Havia previsto a priori, que alguns alunos poderiam não completar os pontilhados dos pontos genéricos A(x_0 , ...) e P($x_0+\Delta x$,......). Entretanto, todas as duplas completaram com o valor correto, isto é, 200.

Os protocolos apontam 17 acertos para a marcação desses pontos no gráfico (questão 2) e 2 duplas deixaram esta questão em branco. 5 duplas insistiram na escolha de pontos particulares, por exemplo A(1 , 200) e P(2 , 200). Em discussão com estas duplas, que vêm cometendo este tipo de erro seguidamente, percebi que interpretam pontos genéricos como pontos particulares quaisquer, e procurei esclarecer o significado. Pode ser que a indicação de escala no gráfico, tenha induzido estas duplas a escolherem tais pontos. Uma dupla marcou os pontos A e P sobre a reta y=200 sem indicar as abscissas; 2 duplas marcaram esses pontos no eixo 0x; outra dupla apresentou erro ao indicar geometricamente a variação Δy (conforme apresentado nos anexos).

Os resultados sinalizam que, pelo menos 4 duplas, apresentam dificuldades em representar pontos geometricamente.

Todas as duplas apresentaram resultados corretos para os cálculos das questões 3 e 4, ou seja, que $\Delta y = 0$ e que a razão de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Em plenária, quando se discutia se o resultado encontrado para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ já era esperado, o grupo demonstrou tranqüilidade em afirmar que sim, e justificaram conforme previsto a priori. Os protocolos dessa justificativa foram os seguintes:

- 2 duplas : *"porque a derivada de uma constante vale zero"*;
- 6 duplas : *"porque o valor de y é constante";*
- 10 duplas: *"porque o coeficiente angular dessa reta vale zero"*;
- 4 duplas: *"porque o Δy vale zero"*;

- 2 duplas deram respostas confusas, tais como:

"Sim, porque a razão de variação de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *é o número 0";*

"Sim. Como a função é constante, a razão de variação não existe".

Outras 3 duplas deixaram em branco.

Durante a discussão das justificativas dadas, em plenária, lembrei que chamamos funções como a que estamos trabalhando de *função constante*, já que "para qualquer valor de x, o correspondente y será sempre o mesmo"; também foram feitas explorações geométricas das variações das coordenadas de pontos do gráfico da função, ressaltando que a variação em y é sempre zero e igual ao coeficiente angular da reta que a representa, que é sempre paralela ao eixo x.

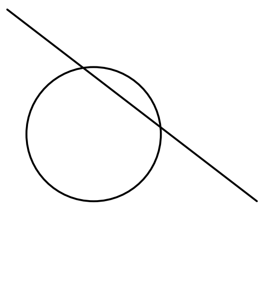
Feita a institucionalização da derivada da função y = f(x) = 200 num ponto genérico, também institucionalizei a regra elaborada pelos alunos: " a derivada de uma função constante, em qualquer ponto da mesma vale zero, cuja notação pode ser assim: $\mathrm{y} = f(x) = \mathrm{k}\ \ (\mathrm{k} \in \Re)\ \rightarrow \mathrm{f}\,'(\mathrm{x}_0) = 0$".

Os protocolos e a plenária indicam que o objetivo desta ficha foi plenamente atingido.

Análise a posteriori – ficha 12

O objetivo desta ficha era que os alunos verificassem que, reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, não necessariamente tem em comum ao gráfico apenas o ponto de "tangência". Além disso, disso definir reta tangente, por um ponto, ao gráfico de uma função.

Das 28 duplas que resolveram esta ficha, apenas uma respondeu a questão 1 incorretamente, as demais deram resposta conforme a esperada. Reproduzo abaixo o erro cometido nesta questão:



Os resultados relativos à questão 2 foram os seguintes:

- 25 duplas deram resposta que tem o mesmo sentido da esperada, ou seja, que "reta tangente à uma circunferência é aquela que tem em comum, apenas um ponto, com a circunferência". Abaixo, estão reproduzidos alguns protocolos:

  i) *"Reta que encosta na circunferência"*;

  ii*) "É a reta que passa por um único ponto na circunferência"*;

  iii) *"É a reta que passa por um dos pontos da circunferência, somente um ponto, sem cortar a circunferência"*;

  iv) *"É quando a reta compartilha de um mesmo ponto da circunferência, mas somente um único ponto"*;

  v) *"É uma reta que passa por um ponto X de uma circunferência e que forma um ângulo de 90^o com a reta traçada do centro (raio) até esta reta tangente"*;

  vi) "É aquela que passa por apenas um ponto da circunferência ou parábola";

  vii) "É uma reta que passa pela circunferência apenas em um ponto, mas que não pertence ao "lado interno" dela";

Respostas do tipo i) e ii) foram as mais freqüentes. Parece que alguns alunos, na tentativa de explicitar suas concepções sobre um conceito matemático, dão respostas redundantes, como os protocolos iii) e iv). Pode ser que as duplas que deram respostas como as do tipo v), vi) e vii) , preocuparam-se em registrar eventuais conjecturas sobre representações geométricas.

- A dupla que errou a questão 1, confirmou a concepção errada que tem sobre reta tangente, escrevendo: *"é uma reta que passa por dois pontos pertencentes à circunferência" ,* provavelmente confundindo com secante.
- Constatei 2 respostas confusas, cujos protocolos reproduzo:

  ""Corta" um ponto na diagonal exterior de uma circunferência usando uma reta";

  "A reta tangente à circunferência num ponto é a derivada da curva naquele ponto (secante da circunferência no ponto)". Entretanto, a resposta dada por esta dupla* na questão 4 (que pede para definir a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto), foi: *"é a derivada da*

função no ponto”; este fato indica que estes alunos têm uma concepção de reta tangente que está próximo do que se quer institucionalizar.

Quanto a questão 3, esperava que a maioria dos alunos concordasse que, em cada gráfico, a reta indicada é tangente à curva no ponto P. Entretanto, apenas a dupla referida acima assim o fez. 9 duplas, conforme previsto a priori, responderam que é tangente, somente a reta indicada no item *a)*. Os resultados das outras 18 duplas foram os seguintes:

- 2 duplas responderam que a reta do item a) não é tangente, as demais duplas, responderam que a reta é tangente;
- 16 duplas afirmaram que a reta do item b) não é tangente, as demais que a reta é tangente;
- Todas estas 18 duplas registraram que a reta do item c) não é tangente;
- 4 duplas escreveram que a reta do item d) não é tangente, as demais que a reta é tangente;
- 5 duplas responderam que a reta do item e) não é tangente, as demais que a reta é tangente;
- 2 duplas escreveram que a reta do item f) não é tangente, as demais que a reta é tangente;
- 4 duplas registraram que a reta do item g) não é tangente, as demais que a reta é tangente;
- 4 duplas afirmaram que a reta do item h) não é tangente, as demais que a reta é tangente;

Estes protocolos sinalizam que a concepção de tangência, para a maioria dos alunos, está ligada à reta que tem em comum à curva um único ponto, e além disso, que esta reta não pode cruzar a curva pelo ponto de tangência, numa clara generalização do conceito de reta tangente a uma circunferência.

Para a questão 4, esperava que a maioria dos alunos desse uma resposta que tenha o mesmo sentido que: “aquela que no ponto de tangência, “confunde-se” localmente com o gráfico”, e que ela pode “cortar”, ou até mesmo coincidir com a curva em infinitos pontos”. Entretanto, exceto a dupla* e a que errou a questão 1 (que escreveu: *“é uma reta que passa por dois pontos pertencentes à função”*), todas as demais apresentaram uma definição com o mesmo sentido do protocolo: *“reta tangente é aquela que passa somente por um ponto do gráfico, sem cruzá-lo”.*

Iniciei a plenária desta ficha lendo a questão 1, e o grupo não manifestou dificuldades em responder conforme esperava.

Quando coloquei em discussão a questão 2, uma aluna disse que reta tangente à uma circunferência num ponto *“é uma reta que passa por dois pontos pertencentes à circunferência”*. A turma reagiu de imediato, alertando-a: *“esta é uma reta secante!”*. Confirmando a exclamação do grupo, solicitei que a aluna mostrasse seus protocolos, em que pude constatar o erro cometido na questão 1. Parece que a aluna, alertada, percebeu o erro cometido, ao dizer: *“está certo, fiz confusão com os termos secante e tangente ... acho que errei a ficha inteira!*”. As manifestações do grupo sobre a definição pedida nesta questão, conferem com os protocolos reproduzidos anteriormente.

Para discutir a questão 3, reproduzi no quadro negro, o gráfico do item a), e os alunos observaram que a reta indicada é tangente pois tem em comum à parábola, apenas o ponto P. Reproduzido o gráfico do item c), houve controvérsias, visto que parte dos alunos dizia que a reta é tangente e outra parte dizia que não, pois a mesma *“está cortando a curva”*. Como uma parte não convencia a outra, interferi e disse: *“a reta indicada é tangente à curva no ponto P ...”*. Parte dos alunos insistia: *“mas está cortando...”*. Antecipei a discussão da questão 4, e os alunos afirmaram : *“reta tangente é aquela que tem em comum só um ponto com o gráfico!”*. Neste momento, questionei: *“mas esta reta não tem em comum ao gráfico só o ponto P?”*. Responderam: *“tem ...”*. Disse então: *“de acordo com a concepção de vocês, esta reta deve ser tangente ao gráfico pelo ponto P, já que ela tem em comum ao gráfico só o ponto P ...”*. Embora alguns alunos tenham ficado ressabiados quanto à minha fala, prossegui, reproduzindo o item e). Novamente, controvérsias: de um lado, alunos afirmando que a reta é tangente, já que ela *“tem em comum ao gráfico somente o ponto P”*, e de outro lado, que a reta não é tangente pois *“se for prolongada, irá cruzar a curva em outro ponto”*. Como não havia entendimento entre as partes, interferi outra vez, observando que no ponto de contato, a reta confunde-se localmente com a curva e que, conforme os alunos podiam observar, havia necessidade de se precisar com algum outro elemento, o conceito de reta tangente. Esse elemento é a derivada.

Neste momento, institucionalizei que a reta tangente num ponto do gráfico de uma função, é aquela cujo coeficiente angular é igual à derivada dessa função, na abscissa do ponto de tangência. Esta institucionalização, desenvolveu-se através da discussão do cálculo do coeficiente angular de reta tangente, como a razão de variação entre o ponto de tangência e outro infinitesimalmente próximo à ele. Foi preciso ilustrar esta discussão com vários exemplos, tais como $f(x)=x^2$, $f(x)=x^2+25$, $f(x)=2x+1$, etc. para que os alunos constatassem que a reta indicada no item b) é tangente à função afim.

O objetivo da ficha era exatamente o de conduzir a uma discussão para definição de reta tangente, e era esperado que a maioria dos alunos não percebesse que uma reta tangente pode cruzar o gráfico de uma função até mesmo no ponto de tangência, como é o caso do item c). Por outro lado, acredito que a discussão que visava institucionalizar a definição de reta tangente, permitiu atribuir à derivada outro significado: como coeficiente angular de reta tangente.

Análise a posteriori – ficha 13

O objetivo desta ficha era que os alunos retomassem a institucionalização feita na plenária anterior, qual seja, a derivada de uma função, num ponto, como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico dessa função por esse ponto, e percebessem que a derivada de uma função, no ponto de máximo e/ou de mínimo, vale zero.

Percebi que os alunos apresentaram dificuldades em trabalhar com os comandos do Derive, necessários para resolver as questões de 2 a 7 (contrariando o que havia previsto a priori). Como o objetivo desta ficha não era avaliar o desempenho dos alunos na manipulação do software, interferi na resolução de parte da ficha, orientando e acompanhando a resolução dessas questões (uma cópia do que é visualizado na tela do computador, está apresentada nos anexos). Dessa forma, os protocolos das 25 duplas que resolveram esta ficha, correspondem à acertos nas questões de 2 a 7.

Ao analisar os protocolos da questão 8, que pede a posição e o coeficiente angular da reta que tangencia a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1), constatei 4 tipos de "resposta padrão" para esta questão, o que permitiu classificar os alunos em 4 grupos. A seguir, reproduzo 1 protocolo de cada grupo, que permite apresentar uma análise relativa à classificação feita.

Tipo 1 (5 duplas)*: "As três posições encontradas são diferentes, pelo fato do ponto B ser diferente nos três casos, o que faz variar o coeficiente angular destes".*

Para estes alunos, as três retas apresentadas na tela do computador são tangentes à parábola $y = x^2 + 1$ pelo ponto A(0,1), o que evidencia não reconhecimento geométrico de reta tangente.

Acredito que este grupo relevou parte da plenária anterior, quando foi discutido que "uma reta tangente pode, além do ponto de tangência, ter em comum à curva vários outros pontos, e cruzar a curva", cometendo falhas sobre esta conjectura.

Tipo 2 (3 duplas): Respostas corretas: *"é paralela ao eixo x, com coeficiente angular 0".*

Tipo 3 (6 duplas): *"É igual a posição dada pela função* $y = \frac{x}{10} + 1$ *e o coeficiente angular é* $\frac{1}{10}$*".*

Em plenária anterior, enquanto se discutia a interpretação geométrica da derivada, foi institucionalizado que o coeficiente angular da reta tangente à uma curva, num ponto, pode ser calculado pela razão de variação entre o ponto de tangência e um outro "muito próximo". A reta de equação $y = \frac{x}{10} + 1$ é a secante à parábola $y = x^2 + 1$ pelos pontos A(0,1) e B(0,1 ; 1,01). Provavelmente, os alunos que deram este tipo de resposta, conjecturaram sobre a institucionalização citada, e entenderam que a "proximidade" entre estes pontos A e B é suficiente para definir a reta que tangencia a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1), evidenciando quão delicada é a utilização de expressões pouco precisas como "muito próximos", "infinitesimalmente próximos", "a reta tangente se confunde localmente com o gráfico", etc. e que, portanto, para se definir reta tangente há necessidade de um dado numérico preciso que é o valor da derivada na abscissa do ponto de tangência.

Parece que as discussões foram suficientes para convencer este grupo que a representação geométrica não é um caminho seguro para identificar a reta tangente num ponto do gráfico de uma função e que essa segurança é dada a partir da constatação, na expressão algébrica, que o seu coeficiente angular é igual à derivada da função na abscissa desse ponto.

Tipo 4 (11 duplas): *"A posição é 1, onde considerando apenas no ponto 1, todas as retas tangenciam. O coeficiente angular, também é igual a 1";*

"Corta a parábola no ponto y=1. O coeficiente angular é 1".

Provavelmente, este grupo respondeu que o coeficiente angular da reta vale 1, por ser esta a ordenada do ponto de tangência, evidenciando que não sabem o que é coeficiente angular de reta. Também desconhecem a unicidade da tangência em um ponto, além de não fazerem uso de uma linguagem correta, como quando registram "o ponto y = 1".

Tendo feito essa classificação dos alunos, prosseguirei com o levantamento dos protocolos das questões 9 a 13, segundo os 4 tipos de respostas dadas para a questão 8. Registro que 1 dupla (do tipo 4) respondeu somente às questões de 1 a 8 desta ficha.

À exceção de 1 dupla (do tipo 1), que respondeu $y'_{(0)} = 1$, na questão 10, sem indicar como chegou a este resultado, todas as outras acertaram as questões 9 e 10.

Todas as duplas agrupadas no tipo 1 erraram a questão 11 (que pede a derivada da função $y = x^2 + 1$ no ponto de mínimo), respondendo que vale 2, segundo o cálculo: y'=2x → $y'_{(1)}$=2.1=2. Parece que para este grupo de alunos, ponto de mínimo é o menor valor da função, e não atentaram que a derivada é dada em função de x.

2 duplas do tipo 4 acertaram a questão 11, as demais cometeram o mesmo erro que as duplas do tipo 1. Por outro lado, todas as duplas do tipo 2 e tipo 3, acertaram esta questão, totalizando 11 acertos desta questão .

Os resultados apresentados pelos alunos na questão 12 foram os seguintes:

Nenhuma das 10 duplas do tipo 4 acertou, protocolando que:

Coeficiente angular =1 : 3 duplas

Coeficiente angular = -2 : 2 duplas

Coeficiente angular = 1 : 4 duplas

Derivada = -2x = -2 : 7 duplas

Derivada = 2x : 2 duplas

1 dupla não respondeu a esta questão.

As duplas do tipo 3 apresentaram os resultados:

Coeficiente angular = -1 : 4 duplas

Coeficiente angular= 1 : 2 duplas

Derivada = -2x : 3 duplas

Derivada = 0 (resposta correta) : 3 duplas

As 3 duplas do tipo 2 acertaram a questão.

As duplas do tipo 1 apresentaram os resultados:

Coeficiente angular = 0 : 1 dupla (sem dar indicações de como chegou a este resultado)

Coeficiente angular = 1 : 1 dupla

Pelo cálculo y'= -2x + 1→ y'(1)= -2.1+1 = -1 , 1 dupla respondeu que o coeficiente angular da reta e a derivada da função no ponto máximo valem –1.

2 duplas não registraram o valor do coeficiente angular.

Derivada = -2x : 2 duplas

Derivada = 2x : 1 dupla

Derivada = -2 : 2 duplas

Quanto à questão 13, todas as duplas do tipo 1, e as não apontadas neste parágrafo, apresentaram conclusões (sobre o valor da derivada no ponto de máximo e de mínimo de uma função) sem sentido. 2 duplas do tipo 2 e 2 do tipo 3 concluíram que *"é igual ao coeficiente angular da reta que tangencia a função neste ponto"* ; embora tenham dado respostas erradas nas questões anteriores, 4 duplas do tipo 4 responderam que *"o valor da derivada tanto no ponto de máximo quanto no ponto de mínimo está diretamente ligada ao valor do coeficiente angular".*

Os protocolos sinalizam que os alunos:

- Apresentaram dificuldades em identificar geometricamente uma reta tangente. Tais dificuldades podem estar relacionadas à plenária anterior, onde discutiu-se que:

  - uma reta tangente à uma curva por um ponto, pode cruzar a curva no ponto de tangência e/ou em outros pontos diferentes daquele,

  - o coeficiente angular da reta tangente pode ser determinado pelo cálculo da razão de variação entre o ponto de tangência e outro "muito próximo".

- Apresentaram dificuldades no cálculo da derivada no ponto de máximo e no ponto de mínimo, não atentando que a função derivada é calculada em função de x. Todas as duplas acertaram a questão 10: "calcule a derivada da função $y = x^2 + 1$ no ponto x", mas houve elevado índice de erro na questão 11: "calcule a derivada dessa função no ponto de mínimo". Pelos resultados protocolados, parece que estes alunos associaram o ponto de máximo e ponto de mínimo ao valor da função nesses pontos.
- Relacionaram coeficiente angular de reta tangente com derivada de função na abscissa do ponto de tangência, mas, por outro lado, seus protocolos evidenciam falha na interpretação geométrica de coeficiente angular de reta, não associando-o à sua inclinação (o que foi previsto a priori).

Na plenária, solicitei aos alunos que deixassem os computadores ligados (com o gráfico na tela) para discutirmos os resultados a partir da questão 8, visto que acompanhei a resolução das questões anteriores.

Tendo efetuado a leitura do enunciado da questão 8, questionei sobre a posição da reta que tangencia a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1). Alguns alunos responderam que: *"é reta que passa pelo ponto A e o ponto B mais próximo"*, e apenas um respondeu que *"é aquela paralela ao eixo x"*. Indaguei sobre o primeira resposta, e o aluno disse: *"reta tangente não é aquela que tem o coeficiente angular calculado com dois pontos bem próximos?..."*. Novamente, ficou patente que quando se utilizam termos imprecisos como “pontos próximos”, “reta se confunde localmente com o gráfico”, etc. , pode-se induzir os alunos a erros. Tendo discutido novamente, reta tangente como posição limite das secantes e aquela cujo coeficiente angular é o valor da derivada na abscissa do ponto de tangência, os alunos observaram que a reta tangente à parábola pelo ponto A (discutimos que este é o ponto mínimo) é paralela ao eixo x, e que seu coeficiente angular (que representa sua inclinação) vale zero.

Na discussão do cálculo da função derivada da função $y = x^2 + 1$, notei que os alunos, automaticamente deram o resultado esperado, oportunidade em que foi institucionalizada a derivada de soma de funções. Também não constatei ocorrência de erros na questão 10.

Ao discutir a questão 11 (“qual é a derivada da função dada por $y = x^2 + 1$ no ponto de mínimo?”), alguns poucos alunos responderam que vale zero. Nenhum aluno manifestou, depois da discussão, dificuldades (conforme as apontadas anteriormente) sobre o correto entendimento de ponto de mínimo.

Na discussão da questão 12, todos responderam que a tangente pelo ponto máximo é paralela ao eixo x, *“tocando”* a parábola nesse ponto. Não houve problemas em responderem que o seu coeficiente angular vale zero, associando-o à sua inclinação, e também à derivada da função $y = x^2 + 1$ na abscissa do ponto de máximo.

Ao indagar pela conclusão (questão 13) sobre o valor da derivada na abscissa do ponto máximo e do ponto mínimo de uma função, a maioria dos alunos disse que *“corresponde ao coeficiente angular da reta que tangencia a curva nestes pontos”* e de imediato, responderam que, nesse caso, ele vale zero. Um aluno indagou: *“então, sempre que a abscissa de um ponto for zero, a derivada vale zero?”*. Apresentei outros tipos de curva, com máximo e mínimo, cujas abscissas são diferentes de zero; discutimos sobre a derivada neste pontos, evidenciando que sua conjectura era falsa. Na discussão, observei que alguns alunos não relacionavam vértice de parábolas à ponto máximo ou ponto mínimo. Aproveitei a oportunidade, propondo discussões sobre o sinal da derivada e coeficiente angular/inclinação de reta tangente em pontos pertencentes à intervalos de crescimento e decrescimento de funções.

Havia previsto a priori, a utilização de uma transparência para conjecturar sobre reta tangente como posição limite das secantes; entretanto, devido às discussões realizadas em plenária, não houve necessidade de se utilizar tal transparência.

Acredito que após a realização da plenária, o objetivo desta ficha foi atingido, embora muitos alunos, ao perceberem que cometeram erros na resolução das questões, preferem participar das discussões como ouvintes, o que dificulta confrontar o que havia previsto a priori com o que efetivamente se deu.

Análise a posteriori – ficha 14

Como a aplicação desta ficha só foi possível 2 meses após a anterior, pois neste intervalo de tempo os alunos estiveram em época de provas e também em férias escolares, estabeleci (o que não estava previsto a priori) antes de apresentá-la aos alunos, uma plenária, em que foram retomadas as fichas anteriores e discutidos os conceitos já institucionalizados.

O objetivo desta ficha era que os alunos retomassem os conceitos institucionalizados em fichas anteriores e utilizassem a derivada como ferramenta de resolução do problema inicialmente proposto.

Os resultados dados pelas 23 duplas que resolveram esta ficha foram os seguintes:

Todas as duplas iniciaram a resolução da questão 1 determinando corretamente a função derivada da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ (em que y representa o número de bactérias e x o tempo de exposição ao antídoto); além disso, não constatei a ocorrência de erros no cálculo das raízes dessa função derivada. 20 duplas responderam com clareza à questão: “qual é, precisamente, o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir?”, ressaltando, que este tempo corresponde a uma das raízes calculadas, qual seja: x=2,1132, as demais deixaram essas raízes indicadas, sem destacar a resposta esperada.

Todas as duplas acertaram a questão 2, substituindo x=2,1132 na função $y = 4x^3 + 60x^2 + 200x + 200$.

Quanto à marcação dos pontos solicitados nas questões da ficha, foi constatado a ocorrência dos seguintes erros: 1 dupla atribuiu os valores 2,1132 e 7,8867 aos pontos máximo e mínimo, respectivamente; 1 dupla atribuiu os valores 2,1132 e 7,8867 aos pontos mínimo e máximo, respectivamente; 1 dupla atribuiu o valor 392,4508 ao ponto máximo e 7,5499 ao ponto mínimo (esses valores correspondem, respectivamente, ao valor da função nesses pontos). Além disso, 1 dupla traçou a retas tangentes pelo ponto máximo e pelo ponto mínimo com inclinações diferentes de zero.

Todas as duplas, ao comparar os resultados das questões 1 e 2 desta ficha com as estimativas da ficha 2 (conforme solicitado na questão 3), perceberam que os valores estão próximos, e a maioria observou que os resultados encontrados nesta ficha correspondem a valores “mais precisos”.

Todas as duplas acertaram a questão 4, substituindo o valor x=7,8867 na função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$.

Quanto à questão 5, que pede a variação instantânea do número de bactérias em x=2, as respostas foram as seguintes:

- 17 duplas acertaram, efetuando cálculos conforme previsto a priori;
- 1 dupla deixou em branco;
- 3 duplas registraram : $x = 2 \Rightarrow y = 392$

$$x = 2{,}1132 \Rightarrow y = 392{,}4501$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{392{,}4502 - 392}{2{,}1132 - 2} = 3{,}9761$$

- 2 duplas: $x = 2 \Rightarrow y' = 8$

$$x = 2{,}05 \Rightarrow y' = 4{,}43$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 4{,}43}{2{,}05 - 2} = +71{,}40$$

Os protocolos evidenciam que o objetivo desta ficha foi atingido para a maioria dos alunos, embora a maior incidência de erros/dificuldades tenha ocorrido na questão 5, provavelmente porque os alunos que a erraram não tenham atentado à essência do conceito de derivada, institucionalizado em fichas anteriores.

Em plenária, reproduzi no quadro o gráfico apresentado na ficha, e discutimos que o tempo pedido na questão 1 refere-se à abscissa do ponto máximo da função. Identificar este ponto pareceu tarefa fácil para a turma. Perguntei como poderíamos encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir e, de imediato, responderam que basta derivar a função dada. A discussão sobre a questão da derivada me levou a crer que os alunos apreenderam que a reta tangente à uma curva pelo seu ponto máximo e mínimo, tem coeficiente angular igual a zero, o qual corresponde à derivada da função na abscissa desses pontos, e além disso, que tais abscissas são as raízes da função derivada.

Nessa discussão também foram abordadas as questões 2 e 4, em que nenhum aluno apresentou dificuldades em respondê-las corretamente.

Na discussão da questão 3, que pede para se comparar os resultados obtidos com a estimativas feitas anteriormente, percebi que os alunos reagiram com entusiasmo, ao constatarem que a utilização da derivada como um ferramenta de resolução de um problema, é um mecanismo eficaz, visto que esses resultados estão bem próximos daqueles obtidos nas explorações (do gráfico) feitas com o computador. Perguntei se alguma dupla, nestas explorações, tinha encontrado exatamente os valores obtidos nesta ficha, e todos negaram. Ressaltei que os resultados aqui obtidos estão bem próximos aos dos exatos, pois trabalharam com 4 casas decimais.

Foi discutido, ao abordar-se a questão 5, que a variação instantânea do número de bactérias em x=2, é dada pela derivada da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ neste ponto. Pareceu evidente aos alunos que é este o cálculo necessário para responder à questão; não foram detectados, em plenária, a ocorrência de erros como os apontados anteriormente. Ressaltei a essência do conceito de derivada (taxa de variação instantânea), e o coeficiente angular de reta tangente é um dos significados que pode à ela (derivada) ser atribuído.

As discussões em plenária evidenciaram que o objetivo da ficha foi atingido, e a finalizei, projetando com a calculadora TI92, o gráfico da função $y = 4x^3 - 60x^2 + 200x + 200$ e de sua função derivada, no mesmo sistema de eixos, oportunidade em que foram feitas explorações sobre crescimento, decrescimento, pontos de máximo e de mínimo e o valor da derivada nestes pontos e intervalos.

Conclusões

Os protocolos dos alunos, assim como as plenárias realizadas, permitem levantar as conclusões que se seguem.

Conforme apontado anteriormente, Chevallard, em sua investigação sobre o que acontece quando o contrato didático, vigente por muito tempo no decorrer da vida escolar dos alunos é transgredido, expõe regras implícitas que regem os comportamentos dos alunos e do professor em relação ao saber. Dentre essas regras, a que manifestou-se com maior intensidade, neste trabalho, foi: “em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações; a tarefa do aluno é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente”. Como exemplo, cito que a maioria dos alunos não aceitava, inicialmente, que não tinha a ferramenta disponível para resolver o problema colocado. Foi preciso que eu interferisse nas discussões, de modo a leva-los a perceber que especulações em torno de dados apresentados numa tabela de valores, e também que seus conhecimentos disponíveis, mesmo tendo um programa de computador à disposição, não seria suficiente para resolver o problema inicialmente proposto.

Num primeiro momento, a ruptura do contrato didático que estava propondo, não foi percebida , visto a insegurança dos alunos frente a questões abertas. No entanto, ao discutir que questões matemáticas não necessariamente devem ter apenas respostas numéricas (o que causou surpresa para a maioria dos alunos), e também a aceitação dos alunos em “trocar os papéis” para corrigir seus resultados, deu indícios que tal ruptura, aos poucos, foi percebida.

Os alunos também trazem consigo certas “heranças” firmemente arraigadas; uma delas é a tendência de estender uma conjectura/conclusão válida para um caso particular a outros em que ela pode não funcionar. Em plenária, foi possível alertá-los quanto aos prejuízos que isto pode causar; este fato foi benéfico ao aprendizado, visto que em outras oportunidades, os alunos questionaram sobre a possibilidade de validação de conjecturas/conclusões por eles desenvolvidas. Outra herança é apresentarem facilidade na aceitação de regras, mas sem atribuir um significado para elas; mais uma vez, a plenária foi o meio para que eu constatasse este tipo de ocorrência, e interferisse no sentido de discutir a elaboração de tais regras, atribuindo-lhes o significado de razão de variação infinitesimal.

As plenárias realizadas após a resolução das questões das fichas, permitiram identificar certos comportamentos adotados pelos alunos em sala de aula. Por exemplo, notei que aqueles que percebem que são minoria em errar uma questão, sentem-se acanhados em expor suas dificuldades para o grupo e "participam" das discussões como ouvintes. Além disso, as discussões permitem reconduzir o processo de ensino e aprendizagem, constituindo-se de um mecanismo eficaz para, observadas dificuldades dos alunos, apresentar exemplos e propor explorações, com a intenção fazer progredir o aprendizado de toda a classe.

Aponto a seguir, algumas dificuldades apresentadas pelos alunos nesta seqüência didática.

- Ao comparar os protocolos com o quê os alunos expõem em plenária, pude constatar que eles apresentam dificuldades em expressar-se por escrito. Esta dificuldade parece mascarar a manifestação de sucesso do aluno ante algum saber culto, podendo o professor interpretar seu protocolo como manifestação de fracasso (efeito Jourdan "ao contrário").
- Os alunos interpretam enunciados de questões matemáticas de modo incorreto, o que conduz à conjecturas sem sentido.
- Visualizar e interpretar geometricamente a *variação*, pareceu novidade para a maioria do grupo. Para os alunos, este conceito espontâneo estava relacionado apenas à um resultado numérico, obtido de uma operação matemática.
- Dificuldades em manipular simbolismos algébricos, fatoração e simplificação.
- Localizar pontos no gráfico de uma função foi uma dificuldade que persistiu até a última ficha, para alguns alunos. A causa disto parece provir de falhas na interpretação da notação algébrica de pontos. Além disso, embora tenha sido discutido em plenária o significado do termo *ponto genérico*, alguns

alunos entendem-no como “um ponto particular a ser escolhido aleatoriamente”.

- Alguns alunos interpretaram infinitésimos como quantidades desprezíveis, eliminando-as em todas as expressões em que comparecem.
- Os alunos estendem a concepção de reta tangente à uma circunferência para reta tangente à uma curva por um ponto, o que acarreta erros no reconhecimento geométrico de reta tangente
- Não relacionam o coeficiente angular de reta com a inclinação da mesma .
- Quando se pede alguma explicação para os resultados obtidos, os alunos acham que os resultados numéricos bastam por si só, evidenciando falhas em fazer conjecturas.

Observei que alguns objetivos não foram atingidos, porque, conforme apontado acima, os alunos apresentaram dificuldades em conjecturar e/ou dar explicações para resultados que encontraram previamente. É fato que estes alunos não estavam acostumados a responder questões deste tipo; entretanto, minha expectativa era que eles dessem naturalmente a resposta esperada. Isto sinaliza que a ruptura do contrato didático habitual que proponho com esta prática pedagógica, aparenta ser um processo que se dá aos poucos, exigindo do professor atenção em prosseguir com as atividades e promover em plenária, exercícios para fixação de conceitos institucionalizados. Exemplo disto é que, mesmo após ter sido discutido que reta tangente à uma curva, por um ponto da mesma, pode cruzar esta curva no ponto de tangência e em outros pontos, e também depois de institucionalizado que ela (reta tangente) é entendida como posição limite de retas secantes, alguns alunos afirmaram que uma reta que passa por dois pontos muito próximos de uma curva, caracteriza uma reta tangente. Este erro pode ter sido resultado da utilização de termos pouco precisos, como “muito próximos” e a pouca ênfase dada à definição de reta tangente como sendo aquela cujo coeficiente angular é a derivada da função num ponto x, abscissa do ponto de tangência.

O ponto central desta pesquisa é verificar se utilizar esta prática pedagógica traz algum ganho para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de derivada. Aponto a seguir, aspectos que efetivamente contribuíram para a evolução desse processo.

Apresentar um problema e levar os alunos a concluírem que não podem resolvê-lo, pois não têm a ferramenta disponível, e também explicitar que as atividades propostas visam a construção de um conceito que permite solucionar o problema, foi um estímulo para que eles desenvolvessem as atividades.

Propor inicialmente aos alunos que estimassem a solução do problema apresentado, favoreceu a apreensão da essência do conceito de derivada como uma ferramenta útil para problemas que envolvem variação, visto que concluíram que os resultados precisos obtidos, estiveram bem próximos dos estimados.

Embora os alunos tenham apresentado algumas dificuldades que não estavam previstas a priori, as plenárias foram um mecanismo eficiente para que boa parte dessas dificuldades fossem discutidas no sentido de saná-las. Além disso, os elementos que propiciaram as discussões foram as questões abertas, aliadas às interferências que fiz no sentido de reconduzir a aula, quando fosse o caso, e também o aumento gradativo do número de alunos participantes em plenária. No início da seqüência didática, estes alunos deram indícios que a noção de variação é um conceito espontâneo. Utilizar esta noção como "ponto de partida" para abordar o conceito de derivada, apontou ser uma escolha acertada.

A essência do conceito de derivada, e também sua "ligação" com o coeficiente angular de reta tangente parecem ter sido assimiladas pelo grupo, visto que as plenárias mostraram-se bastante produtivas, pois a maioria dos alunos manifestou entusiasmo em discutir e construir estes significados para o conceito. Além disso, parece que a maioria convenceu-se que a derivada é uma ferramenta eficiente para resolver o problema sobre máximo e mínimo inicialmente apresentado, visto os resultados obtidos na última ficha.

Por outro lado, pouca atenção foi dada à interpretação física da derivada, o que pode sugerir continuidade deste trabalho abordando o conceito através de experimentações referentes à esta área de conhecimento.

Aparentemente, o tempo gasto na seqüência é longo (aproximadamente 20 horas); entretanto, leve-se em conta que foram abordados diversos conceitos, e não apenas a derivada como razão de variação infinitesimal, e a análise do desempenho dos alunos com um todo, sinaliza que este tipo de prática pedagógica mostrou-se eficiente. Exemplo disso, foi o resultado apresentado pelos alunos na prova de final de semestre, cujo índice de acertos nas questões em que o conceito de derivada era utilizado como ferramenta de resolução, foi bem superior ao observado em anos anteriores.

BIBLIOGRAFIA

1. ANTOINE, T., BEAUMONT, A., MATHIAUD, M. Introduction du Nombre Dérivé (en $1^{ére}$) a partir de Graphique et Tangente. IREM Paris VII.

2. ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, n^o 3, pp. 281-308. Grenoble, 1988.

3. ÁVILA, G. Evolução dos Conceitos de Função e de Integral. Matemática Universitária N^o 1 (junho de 1985) , pp. 14-46.

4. ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda., 1993.

5. BOYER, C. B. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo. Editora Edgard Blücher, 1974.

6. BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7, nº 2, pp. 33 – 115, Grenoble, 1986.

7. CASSOL, A. Produção de significados para a derivada: taxa de variação. Rio Claro, 1998. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

8. CAUCHY, A. L. Oeuvres Complètes. (Paris, 1882 – 1932 , 25 vols.)

9. CHEVALLARD, Y. Sur l’analyse didactique: deux études sur les notions de contract et de situation. Publication de l’IREM d’Aix Marseilee, 14, 1988.

10. D’ALEMBERT, J. Encyclopédie. (Paris, 1751 – 1765)

11. FOSNOT, C. T. Construtivismo. Teoria, Perspectivas e Prática Pedagógica. Porto Alegre. Artmed, 1998.

12. FOURIER, J. The Analytical Theory of Heat, Dover.

13. GALARDA, L. F., ROSSI, S. M. M. A Evolução do conceito de derivada. Centro de Ciências Exatas. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória – ES, 1992.

14. NOUAZÉ, Y. Cours de Mathématiques. U. F. R. Sciences Fondamentales et Appliquées. Mathématiques Institut de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques: Universite des Sciences et Techniques du Languedoc Montpellier 2.

15. SILVA, B. A. Contrato Didático. i*n* Educação Matemática: uma introdução. São Paulo. EDUC, 1999.

16. SILVA, B. A. e IGLIORI, S. B. C. Um estudo exploratório sobre o conceito de Derivada. Anais IV Encontro Paulista de Educação Matemática. PUC-SP, janeiro de 1996.

17. SPIVAK, M. Calculus: Cálculo Infinitesimal. Barcelona, Editorial Reverté S. A., 1978.

18. VILLARREAL, M. E. O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Rio Claro, 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

ANEXOS

Apresento a seguir, algumas respostas dos alunos que considerei “mais originais” e/ou que mereciam “destaque”.

Ficha 1, questões de 2 a 9: Evidência da cláusula implícita do contrato didático que diz: “já que estou respondendo a uma questão matemática, esta deve ter uma resposta numérica” e respostas que vão além do esperado.

2) O que você acha que acontece com o número de bactérias na primeira hora de exposição ao antídoto?

aumenta em 144

3) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 1 a 2 horas de exposição ao antídoto?

aumenta 48 em relação ao ultimo intervalo

4) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 2 a 3 horas de exposição ao antídoto?

Diminui em 24 bacterias em relação ao ultimo intervalo mas ainda tem 168 bacterias a mais que no inicio da experiencia

5) O que você acha que acontece com o número de bactérias no intervalo de tempo de 6 a 7 horas de exposição ao antídoto?

As bacterias reduziram seu numero em 168 em relação ao comeco da experiencia e 72 em relação ao inicio do intervalo

6) Idem entre 7 e 8 horas de exposição ao antídoto.

Redução de 192 em relação ao inicio da experiencia e 24 em relação ao numero resultante do ultimo intervalo

7) Idem entre 8 e 9 horas de exposição ao antídoto.

Reduz em 144 em relação ao inicio da experiencia e 48 é o aumento em relação ao inicio do intervalo

8) Idem entre 9 e 10 horas de exposição ao antídoto.

O numero de bacterias se iguala ao do inicio da experiencia e aumenta em 144 em relação ao inicio do intervalo

Ficha 1, questão 9 : Cálculo da variação utilizando módulo e pelo “valor inicial menos o valor final”.

9) Calcule a variação do número de bactérias em todos os intervalos de tempo acima considerados.

De 0 a 1: v = |200 - 344| = 144

De 1 a 2: v = |344 - 392| = 48

De 2 a 3: v = |392 - 368| = 24

De 3 a 4: v = |368 - 296| = 72

De 4 a 5: v = |296 - 200| = 96

De 5 a 6: v = |200 - 104| = 96

De 6 a 7: v = |104 - 32| = 72

De 7 a 8: v = |32 - 8| = 24

De 8 a 9: v = |8 - 56| = 48

De 9 a 10 v = |56 - 200| = 144

Ficha 1, questão 8: Cálculo da variação utilizando módulo e pelo “valor final menos valor inicial”.

9) Calcule a variação do número de bactérias em todos os intervalos de tempo acima considerados. V = x2 - x1 = |V|

De 0 a 1: |344 - 200| = |144| = 144

De 1 a 2: |392 - 344| = |48| = 48

De 2 a 3: |368 - 392 = |-24| = 24

De 3 a 4: 296 - 368 = |-72| = 72

De 4 a 5: 200 - 296 = |-96| = 96

De 5 a 6: 104 - 200 = |-96| = 96

De 6 a 7: 32 - 104 = |-72| = 72

De 7 a 8: 8 - 32 = |-24| = 24

De 8 a 9: 56 - 8 = |48| = 48

De 9 a 10 200 - 56 = |144| = 144

Ficha 1, questões 9 e 10 : Respostas não previstas a priori: observação de simetria.

9) Calcule a variação do número de bactérias em todos os intervalos de tempo acima considerados.

De 0 a 1:	aumentou	144
De 1 a 2:	"	48
De 2 a 3:	diminuiu	24
De 3 a 4:	"	72
De 4 a 5:	"	96
De 5 a 6:	"	96
De 6 a 7:	"	72
De 7 a 8:	"	24
De 8 a 9:	aumentou	48
De 9 a 10	"	144

10) O que você observa com a variação do número de bactérias nos intervalos de tempo de exposição ao antídoto acima considerados?

Existe uma relação na variação no nº de bactérias entre a 1ª e a última hora; entre a 2ª e a penúltima hora e assim sucessivamente até a 5ª hora quando o nº de bactérias volta ao valor inicial.

Nos 2 primeiros horas o antídoto não agiu, começou a agir após a 3ª hora chegando a maior variação entre a a 4ª e 5ª hora e 5ª e 6ª hora. Após isto continuou caindo até a 8ª hora, chegando ao menor nível de bactérias.

Após a 8ª hora o antídoto começou a perder o efeito até que na 10ª hora retornou ao número inicial de bactérias.

Ficha 2, questão 4: Evidência da regra implícita internalizada em alguns alunos que “sempre há uma resposta para uma questão e o professor a conhece”.

4) Você tem elementos para determinar com precisão o tempo necessário para que o número de bactérias comece a diminuir?

Sim, pois podemos tomar como base p/ tal cálculo a lei que descreve o crescimento das bactérias sob a ação do antidoto, ou seja, atribuindo valores de tempos na função em determinado intervalo que esteja próximo do tempo de queda.

Ficha 2, questão 4: Resposta dada de acordo com a esperada.

NÃO. pois o Nº de bacterias pode Alterar em fração de segundo porem a medição somente é feita de hora em hora.

Ficha 3: Descrição de correção da ficha anterior e evidência de confiança em dados fornecidos pelo computador.

Construímos o gráfico no Derive e observamos que os dados da ficha 2 estão arredondados, e no gráfico estão mais exatos.

1.) A questão 1 foi verificada pela Função Trace Mode no software Derive.
Verificamos que alguns valores encontrados utilizando a expressão, são valores arredondados.
2.) A questão 2 foi verificada pela Função Trace Mode no software Derive.
Verificamos que o nº preciso encontrado é 392,86. Por isso a estimativa que fizemos de 392 bactérias está correta.
3.) A questão 3 foi verificada pela Função Trace Mode no software Derive.
Verificamos que o nº de bactérias começa a diminuir com o tempo de 2,2325 e que o tempo que colocamos estimado de 2 horas está correto.
4.) A questão 4 foi verificada pela Função Trace Mode no software Derive.
Verificamos que sim, porque dá p/ ver nºs exatos.

Ficha 8, questões 3 e 4 : Evidência de dificuldades com manipulações algébricas e falta de entendimento de acréscimo desprezível.

1) Você já observou, na ficha 7, que $2x_A + \Delta x$ ...=... $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando consideramos dois pontos particulares de uma parábola. Aqui estamos considerando dois pontos genéricos e você obteve $2x_0 + \Delta x$ ...<... $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. O que você pode concluir?

Que não são para todos os casos que o dobro da abscissa de um ponto adicionado ao valor do acrésc Δx é igual.

2) Se o acréscimo Δx que a abscissa de P sofreu em relação à abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso $P \to A$ (imagine que o acréscimo Δx seja muito menor que aqueles considerados na ficha 6) ? $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to$ ...$\cong$ ϕ.......

Este fato é denotado por $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ......ϕ.......... cujo resultado se chama derivada da função $y = f(x) = x^2$ no ponto x_0 , indicada por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Ficha 9, questão 3: Evidências de dificuldades em manipular expressões algébricas, fatoração e simplificação.

3) Calcule no caso $P \to A$:

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \cancel{x_0^3} + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x_0^3} =$
$3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x(3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2)$

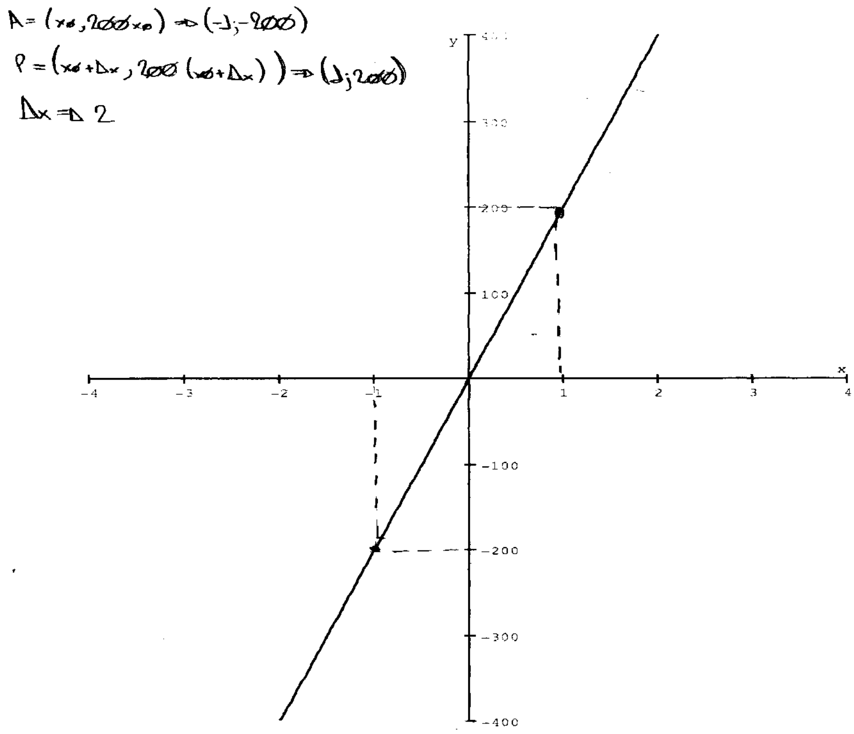
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \boxed{3x_0^2 + 3x_0 + \Delta x}$

3) Calcule no caso $P \to A$:

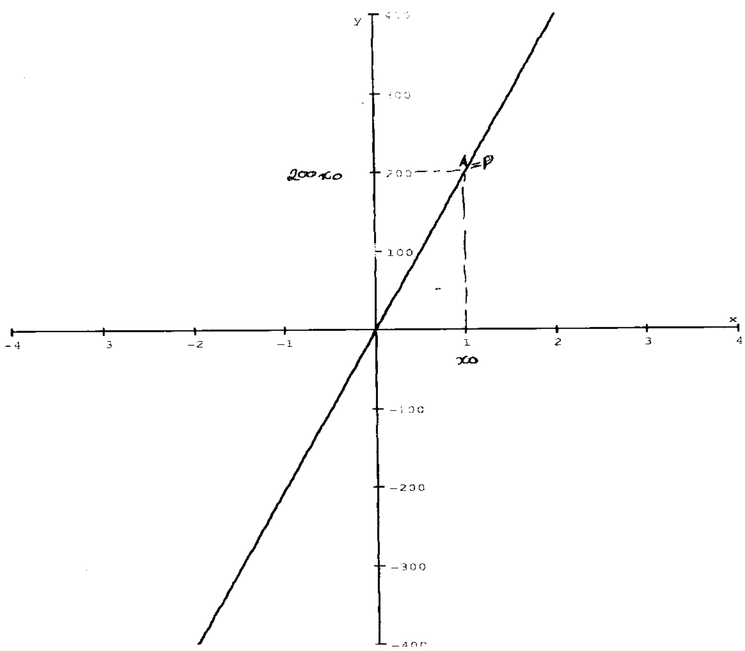
$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \cancel{x_0^3} + 3x_0^3 \Delta x + \Delta x^3 - \cancel{x_0^3} = 3x_0^3 \Delta x + \Delta x^3$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^3 \cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{3}}}{\cancel{\Delta x}} = 3x_0^3 + \Delta x^2$

Ficha 10, questão 2: Escolha de pontos genéricos segundo critérios da dupla.



Ficha 10, questão 2: Erro na marcação de pontos genéricos distintos.



Ficha 10, questão 4: Erros com manipulações algébricas, simplificação e fatoração, entendimento incorreto de infinitésimos.

4) Se o acréscimo Δx que a abscissa de P sofreu em relação à abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso P$\rightarrow$A?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200\,\Delta x}{\Delta x} \quad \frac{200.\cancel{\emptyset}}{\cancel{\emptyset}} = 200$$

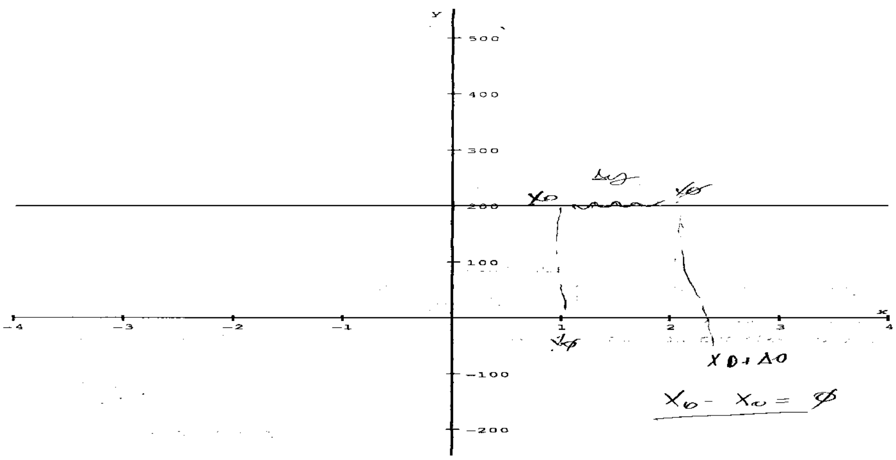
Este fato é denotado por $\underset{\Delta x \to 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = 200 Este resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200x$ no ponto x_0, indicada por f'(x_0) ou y'(x_0) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

4) Se o acréscimo Δx que a abscissa de P sofreu em relação à abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso P$\rightarrow$A?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200x_0 - 200x_0}{x_0 - x_0} \Rightarrow 0$$

Este fato é denotado por $\underset{\Delta x \to 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200x_0 - 200x_0}{\Delta x}$ Este resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200x$ no ponto x_0, indicada por f'(x_0) ou y'(x_0) ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Ficha 11, questão 2: Erro ao indicar a variação Δy (página 112).



Ficha 11, questão 4: Justificativas evidenciando conjecturas válidas para função constante.

4) Se o acréscimo Δx que a abscissa de P sofreu em relação à abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso $P \to A$?

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ....0....

O resultado obtido já era esperado? Justifique.

Sim pois, se trata de uma constante portanto não contém variação

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ....0.... Este resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200$ no ponto x_0, indicada por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

4) Se o acréscimo Δx que a abscissa de P sofreu em relação à abscissa de A fosse tão pequeno (infinitesimal), que pudéssemos desprezá-lo, qual seria o valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no caso $P \to A$?

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ....0....

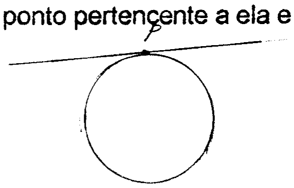
O resultado obtido já era esperado? Justifique.

Sim, pois pela observação do gráfico, nota-se que o coeficiente angular é 0, pois o gráfico é uma reta paralela ao eixo do X.

Este fato é denotado por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ....0.... Este resultado se chama derivada da função $y = f(x) = 200$ no ponto x_0, indicada por $f'(x_0)$ ou $y'(x_0)$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.

Ficha 12: Generalização do conceito de reta tangente a uma circunferência para tangente ao gráfico de uma função.

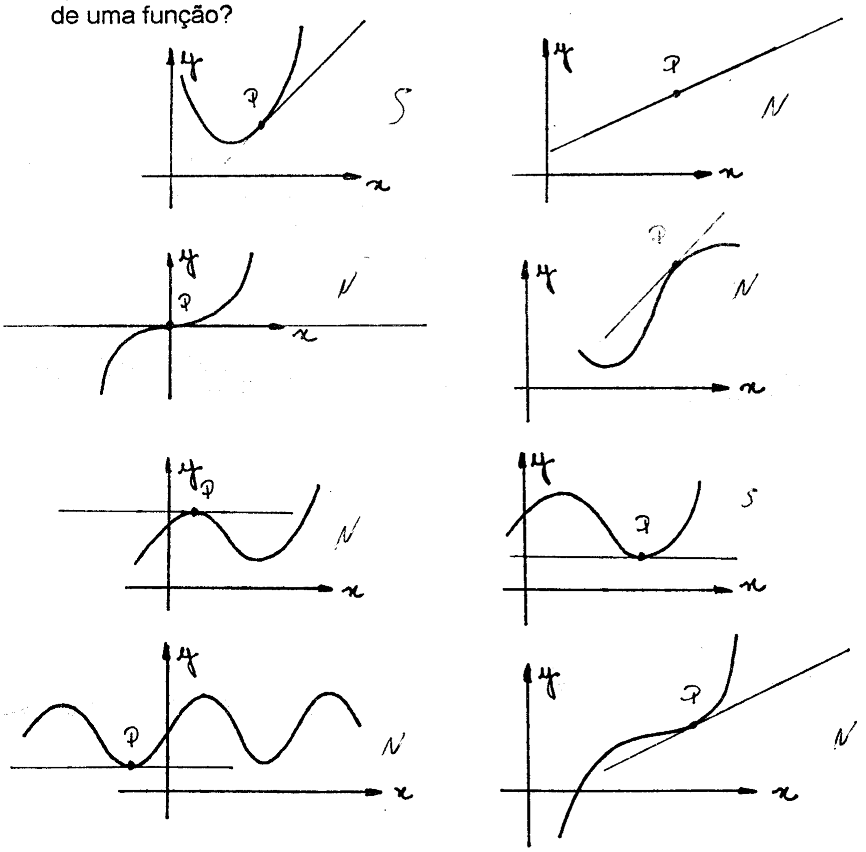
1) Desenhe uma circunferência, escolha um ponto pertencente a ela e trace a reta tangente à circunferência por este ponto.



2) Como você define reta tangente à uma circunferência num ponto?

É uma reta que passa por um único ponto comum com uma circunferência, mas jamais atravessa a mesma

3) Quais das retas abaixo são tangentes no ponto P aos gráficos representativos de uma função?



4) Como você define a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto?

É uma reta que passa por um único ponto comum com um gráfico, sem atravessá-lo nunca.

Ficha 13: Cópia do que é visualizado na tela do computador para resolução das questões de 2 a 7 (página 108).

```
#1:  F(x) := x^2 + 1

                 F(b) - F(a)
#2:  INC(a, b) := ───────────
                    b - a

#3:  SECA(a, b) := INC(a, b)·(x - a) + F(a)
#4:  INC(0, 1)
#5:  1
#6:  SECA(0, 1)
#7:  x + 1
#8:  INC(0, 0.5)
#9:  0.5
#10: SECA(0, 0.5)
#11: 0.5·x + 1
#12: INC(0, 0.1)
#13: 0.1
#14: SECA(0, 0.1)
#15: 0.1·x + 1
```

Ficha 13, questão 8: Diferentes conjecturas sobre posição e coeficiente angular da reta tangente a uma parábola pelo ponto mínimo.

8) Observando os resultados encontrados nos três casos acima considerados, qual é a posição da reta que tangencia a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1)? Qual é seu coeficiente angular?

Qualquer uma destas 3 retas tangenciam a parábola $y = x^2 + 1$ no ponto A(0,1), e qualquer uma delas representa a posição da reta em relação à parábola, e o coeficiente angular de cada reta é diferente devido o fato de que para cada ponto A em cada reta existe um ponto B diferente

A posição da reta que tangência a parábola é $y = 1$

O coeficiente angular é 0

Continuação ficha 13, questão 8.

Ela esta cortando a parabola no ponto y=1.
Seu coeficiente angular é 1.

→ inclinado para a direita, seus pontos
são (-1,1)

Ficha 14, questão 3: Evidências de entendimento da derivada como ferramenta eficiente na resolução de um problema sobre máximo e mínimo.

3) Compare estes resultados com as estimativas feitas na ficha 2.

Os resultados são basicamente iguais, só que na ficha 2 não tinhamos tanta precisão.

Utilizando a derivada desta função conseguimos o tempo exato em que o nº de bactérias começa a diminuir, assim temos precisamente o numero máx de bactérias, já na ficha 2 temos apenas o nº aproximado de bactérias.