Revista História & Educação Matemática, v.1, n.1, pp. 23-37, jan. / jun. 2001.

Ângulos: uma "História" escolar

Carlos Roberto Vianna*
Helena Noronha Cury**

Resumo: Este artigo apresenta uma abordagem de um tema de matemática sob uma perspectiva histórica. Consideramos que a definição de um conceito, o de ângulo, está condicionada pelos interesses daquele que fornece a definição. Uma das possibilidades para que os professores percebam isso e tratem disso com seus alunos, consiste em recorrer a um certo aspecto da história, tal como o fizemos neste texto.
Palavras-chave: ângulo – definições – educação matemática – história

Abstract: This paper approaches a mathematical theme from a historical perspective. We believe that the definition of a subject like angle is conditioned by the interests of those who propose the definition. One way of helping teachers to understand this and to discuss it with their students is to appeal to a certain aspect of history the way we do in this text.

Keywords: angle – definitions – mathematical education – history

De acordo com uma versão preliminar das Diretrizes Curriculares para Cursos de Licenciatura em Matemática, a compreensão, crítica e utilização de novas idéias estão citadas entre as competências a serem desenvolvidas pelo futuro professor de Matemática. Acreditamos que a versão final do referido documento, quanto vier a se tornar disponível para consulta, continuará mantendo a relevância dessas competências.

Consideramos, efetivamente, que os professores de Matemática devem ser capazes de ler livros didáticos e fazer críticas circunstanciadas das respectivas propostas pedagógicas, tendo argumentos para dialogar com os pais de alunos e com as Direções de escolas, justificando suas escolhas. Dessa forma, é importante que, em aulas de cursos de Licenciatura em Matemática, sejam analisados os livros didáticos disponíveis no mercado, para avaliação da apresentação dos conceitos matemáticos sob vários pontos de vista: correção, adequação metodológica à serie para a qual estão sendo propostos e pertinência do enfoque adotado quanto aos interesses e motivações da faixa etária a que o livro se destina.

Um trabalho preliminar neste sentido foi realizado, durante o ano de 1999, por alunos da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPR, que buscaram conceitos de "ângulo" em vários livros didáticos. É a partir do resultado dessas buscas que são feitas as considerações que se seguem.

As "definições" de ângulo

Colocamos a palavra 'definições' entre aspas porque, na maioria dos livros, não é explicitado que se trata de uma definição. Muitas vezes o autor nos diz: "vamos trabalhar agora com o conceito de ângulo", mas o que vem em seguida não é um "trabalho" e sim uma frase, geralmente curta, seguida de observações quanto à notação. Entenderemos tal procedimento como sendo a apresentação implícita de uma definição.

* Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná - UFPR.
** Professora Titular da Faculdade de Matemática da Pontificia Universidade Católica do Rio Grande Sul - PUCRS

As definições em questão foram transcritas das fontes citadas, omitidas as figuras, as setas sobre os pares de letras e as ênfases (negritos ou itálicos). Para facilitar a análise, foram agrupadas em três categorias: a primeira recorre às semi-retas, a segunda, à região do plano e a terceira categoria contém as definições que não se enquadram nas duas primeiras.

Em cada categoria, as definições estão organizadas em ordem cronológica e é possível observar, em alguns casos, várias definições apresentadas por um mesmo autor, quer em épocas diferentes, quer na mesma época, para séries diferentes. Este estudo não é exaustivo, mas serve como uma indicação razoável daquilo que se pode encontrar nos livros didáticos de Matemática publicados no Brasil.

a) Definições que recorrem a semi-retas

a.1) Aceitam os ângulos nulo e raso:

1. Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum (Quintella, 1950, p. 139, 3º ginasial).

2. O ponto A é origem comum das semi-retas AB e AC. O conjunto que contém todos os pontos de AB e todos os pontos de AC chama-se ângulo (Quintella, 1967, p. 51, 3º ginasial).

3. Ângulo é a figura formada pela reunião de duas semi-retas tendo a mesma origem (Sangiorgi, 1966, p. 154, 3º ginasial).

4. A figura geométrica formada por duas semi-retas que têm a mesma origem denomina-se ângulo (Giovanni e Giovanni Jr., 1990, p. 172 , 5ª série).

5. Da Geometria Plana sabemos que um ângulo é caracterizado por um par de semi-retas de origem no mesmo ponto (Machado, 1994, p. 218, v.1).

a.2) Não aceitam os ângulos nulo e raso:

6. Um ângulo é a reunião de dois raios que têm o mesmo ponto extremo, mas não estão situados na mesma reta (SMSG, 1964, p. 43, v.1).

7. Sejam duas semi-retas OA e OB de mesma origem O, não colineares, isto é, com retas suportes distintas. A figura constituída por duas semi-retas, de mesma origem e não colineares chama-se ângulo (Castrucci e Bóscolo, 1968, p. 161, 3º ginasial).

8. Considere três pontos não colineares: A, O e B. Ângulo geométrico AÔB é a figura formada pelas semi-retas OA e OB (Bongiovanni e outros, 1990, p. 212, 5ª série).

9. A união de duas semi-retas de mesma origem, mas não contidas numa mesma reta, é um ângulo (Guelli e Lima, s/d, p. 151, 6ª série).

10. Ângulo é a reunião de duas semi-retas não-colineares e de mesma origem (Pompeu e outros, s/d, p. 85, 7ª série).

a.3) Aceitam o ângulo nulo, mas não aceitam o ângulo raso.

11. A reunião de duas semi-retas distintas, de mesma origem e não opostas é um ângulo (Iezzi, Dolce e Machado, 1982, p. 198, 6ª série).

12. Ângulo é uma figura geométrica plana, formada por duas semi-retas, não opostas e de mesma origem (Mori e Onaga, 1998, p. 229, 6ª série).

a.4) Aceitam o ângulo raso, mas não aceitam o ângulo nulo.

13. A figura formada por duas semi-retas de mesma origem e não-coincidentes chama-se ângulo (Bianchini, 1986, p.84, 7ª série).

14. Ângulo é a figura geométrica formada por duas semi-retas de mesma origem e não coincidentes (Malveira, 1987, p.123, 7ª série).

b) Definições que recorrem à região do plano

1. Duas retas AB, CD que se cortão, dividem a extensão indefinida do plano que ellas determinão em quatro porções distinctas, ás quaes se dá o nome de *angulos*. Assim chama-se angulo a *porção de um plano limitada em parte por duas linhas que se encontrão* (...) (Ottoni, 1870, p. 12-3, *grafia original*).

2. Duas retas r e s que se cortam em um ponto A, dividem um plano em quatro regiões. Cada uma dessas regiões recebe o nome de ângulo (Pierro Neto, s/d, p.258, 1ª série ginasial).

3. Consideremos duas retas distintas r e s que se cortam em O, isto é, $r \cap s = \{O\}$.
Essas duas retas dividem o plano em quatro regiões. (...) Chama-se ângulo a uma qualquer dessas regiões (Pierro Neto, s/d, p. 242 (2ª série) e p. 188 (3ª série)).

4. Consideremos duas semi-retas Oa e Ob de mesma origem, distintas e não-opostas.

A reta a divide o plano ab em dois semi-planos opostos

$\alpha | \alpha \supset Ob$ e $\alpha' | \alpha' \not\supset Ob$

A reta b divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$\beta | \beta \supset Oa$ e $\beta' | \beta' \not\supset Oa$

Ângulo convexo aOb é a intersecção dos semi-planos α e β.

$aOb = \alpha \cap \beta$

Ângulo côncavo aOb é a reunião dos semi-planos α' e β'.

$aOb = \alpha' \cup \beta'$

(Iezzi, s/d, p. 5-6)

5. Sejam OA e OB, duas semi-retas distintas de mesma origem O. A região do plano determinada pelas duas semi-retas é chamada ângulo (Domênico, Lago e Ens, s/d, p. 93, 7ª série).

6. Ângulo é o nome de cada uma das regiões em que o plano fica dividido por duas de suas retas, que tenham um só ponto comum (Pierro Neto, 1991, p.168, 6ª série).

7. Duas semi-retas com a mesma origem, e que não estejam contidas na mesma reta, separam o plano em duas regiões: uma convexa e outra não-convexa. Cada uma dessas regiões, junto com as semi-retas, forma um ângulo. Então, as duas semi-retas determinam dois ângulos. Agora, considere duas semi-retas de mesma origem A que estejam contidas na mesma reta. Também nesse caso formam-se ângulos (Jakubovic e Lellis, 1991, p. 166, 6ª série).

8. Denominamos ângulo a região convexa formada por duas semi-retas não-opostas que têm a mesma origem (Giovanni e Giovanni Jr., 2000, p.30).

c) Definições que recorrem a outras idéias

1. Angulo é a abertura formada por duas rectas que partem do mesmo ponto (Collecção FTD, 1925, p. 8).

2. Com as peças do Tangram é possível (...) formar triângulos retângulos isósceles de vários tamanhos. O que há de comum nesses triângulos? (...) Veremos que há elementos desses triângulos que não dependem do tamanho dos triângulos. São os ângulos (...) (Lopes, 1994, p. 95, 6ª série).

3. Antônio sai de casa às 11 horas e chega no serviço às 11h e 30 min. Às 11h, o ângulo entre os ponteiros do relógio é 30^o (...) São 11h 30 min. Qual é o ângulo entre os ponteiros? (Imenes e Lellis, 1997, p. 61, 6ª série).

A "correção" das definições

A tentativa de decidir quais das definições anteriores são corretas, leva-nos a outra questão: o que significa, exatamente, definição "correta"? Quais os critérios para aceitar uma definição e não aceitar outra?

Em uma análise inicial, vemos que, nas definições citadas, há uma clara variação de linguagem ao longo do tempo, além da persistência de dois grupos, um que considera o ângulo constituído pelas semi-retas e outro que considera o ângulo constituído por uma região do plano, havendo predominância do primeiro. Além disso, é possível encontrar diferenças significativas que vão além dos termos utilizados. Por exemplo, entre as definições que recorrem a semi-retas, encontramos todos os casos possíveis quanto à aceitação ou não dos ângulos nulo e raso.

Para dirimir dúvidas, antes de discutir o conceito de definição propriamente dito, vamos nos munir de alguns recursos para entender o que é ângulo.

O que nos dizem as autoridades

Recorrer às autoridades é a forma mais antiga de decidir disputas. Não vamos entrar aqui no mérito da questão, discutindo se, em Matemática, essa forma de decidir disputas é ou deveria ser válida... De qualquer maneira, ainda ficaríamos sujeitos às seguintes dúvidas: *Quem* é aceito como 'autoridade'? Qual é o critério para ser considerado autoridade? etc...

Então vejamos a primeira forma de abordagem, não muito aceita pelos matemáticos, que consiste em recorrer a um dicionário. A não aceitação desta modalidade está ligada ao fato de que os dicionários costumam registrar o significado corriqueiro das palavras, raramente indicando seu uso técnico e especificamente matemático.

Vamos recorrer a um dicionário "popular", de uso estudantil, o *Larousse Cultural* (1992, p. 60). Ali vemos:

> **Ângulo**: s. m. (lat. *Angulus*) 1. Figura geométrica formada por duas retas que se cruzam ou duas semi-retas que partem da mesma origem. 2. Saliência ou reentrância formada por duas linhas ou superfícies que se cortam; canto, esquina. 3. Ponto afastado, confins, extremidade. 4. *Fig.* Aspecto, ponto de vista. 5. *Ângulo sólido*,

sólido delimitado por todas as semi-retas de mesma origem que se apoiam sobre um dado contorno.

Um outro dicionário (O *Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa,* da Enciclopédia Mirador, 1979, p. 137-8) apresenta:

Ângulo: s. m. (l. *angulu*) 1. *Mat*. Figura formada por duas semi-retas que partem do mesmo ponto. 2. Aresta, canto, esquina, parte saliente ou reentrante. 3. Sinal de revisão tipográfica, para indicar onde se devem colocar as entrelinhas. 4. Ponto de vista: considerado por esse *ângulo*, o caso parece outro. (...) [Segue-se um grande número de definições e propriedades específicas, tais como: ângulo côncavo, ângulo facial, ângulo mistilíneo, ângulo poliédrico, ângulo reentrante, etc...]

A consulta a estes dicionários parece confirmar o ponto de vista dos que definem ângulo utilizando semi-retas. Podemos recorrer também aos dicionários etimológicos. Vejamos o *Dicionário Etimológico Nova Fronteira*, de 1982, p.49:

Ângulo: *sm*. '(Geom.) figura formada por duas retas que têm um ponto comum' 'esquina, canto, aresta' XV. Do lat. *angulus* –i ||**angul**AR *adj*. 'relativo a ângulo(s)' XVI. Do lat. *angularis* –e ||**angul**AR *vb*. 'andar, formando ângulo' 'enviesar' XX. Do lat. tard. *angulare* (...)

Do *Dictionnaire Étymologique et Historique de Langue Française*, 1996, p.33, temos:
ângulo (XII séc.), do latim angulus, "canto, ângulo", inicialmente com o sentido de "canto", depois como termo de geometria.[1]

Em seguida, por que não olhar em alguns dicionários de matemática? Nossa primeira escolha será o *The Words of Mathematics,* de Steven Schwartzman (1994, p. 24):
Ângulo (substantivo), **angular** (adjetivo): do latim *angulus*, "canto, ângulo". Em latim, *-ulus* é uma terminação diminutiva, de modo que *ângulo* significa, literalmente, "uma pequena dobra". Em matemática, um ângulo mede quanto uma reta (que é um lado do ângulo) "dobra" ou se volta para a posição de outra reta (o outro lado do ângulo). A raiz indo-européia é *ang-* ou *ank*- "dobrar" e é encontrada na palavra *ankle*, originária do inglês arcaico, significando a dobra entre a perna e o pé. É vista também na palavra *inglês*, já que os ancestrais dos ingleses viviam na Europa em uma região em forma de ângulo conhecida por Angul. Um termo relacionado é a palavra âncora, derivada do grego.[2]

Passemos, então, ao *Lexicon*, de Francisco Vera (1960, p. 32-3):
Ângulo. Este conceito, tão importante em geometria plana, pode ser introduzido de vários modos:
1º Segundo Euclides, é a mútua inclinição de duas retas;
2º Segundo Sannia, é o resultado da rotação de uma semi-reta em torno de sua origem, com relação a outra semi-reta fixa;

[1] Angle: (XIIe s.), du lat. Angulus «coin, angle», d'abord au sens concret de «coin», puis comme terme de géométrie.

[2] **Angle** (noum), **angular** (adjective): from Latin angulus "corner, angle." Latin –ulus is a diminutive ending, so angulus meant literally "a little bending." In mathematics an angle measures how much "bending" or turning one line (= one side of the angle) does to get into the position of another line (= the other side of the angle). The Indo-European root is ang- or ank- "to bend" it is seen in the related native English word ankle, the bend between the leg and the foot, It is also seen in the word English, since the ancestors of the English lived in the angular-shaped region in Europe known as Angul. A related borrowing from Greek is anchor.

3º Segundo Enriques, é a interferência de dois semi-planos, isto é: nesta acepção, se adota estritamente o conceito de ângulo convexo;
4º Segundo Hilbert, é um par de semi-retas com origem comum;
5º Segundo Veronese, o conceito de ângulo está condicionado ao de *setor angular*, que ele define assim: sistema unidimensional cujo elemento é o raio, isto é, uma parte limitada de um feixe de raios. Sua magnitude intensiva é o ângulo.
Em geometria elementar costuma ser caracterizado do seguinte modo:
Cada uma das quatro partes ou regiões que determinam duas retas coplanares AB e CD que se cortam. *Lados* do ângulo são as bordas retilíneas que o limitam e que são semi-retas de mesma origem. O ponto O, comum às duas retas, é o *vértice* do ângulo.
Esta definição implica o conceito de ângulo como parte do plano compreendida entre duas semi-retas OB e OC, ou seja, aquela situada do mesmo lado de CD que contém a semi-reta OB e do mesmo lado de AB que contém a semi-reta OC, de modo que *ângulo é o conjunto dos pontos comuns a dois semi-planos de um mesmo plano cujos contornos se cortam em um ponto.* (...) [3]

Vemos que os defensores da definição de ângulo como sendo uma região do plano não ficaram órfãos. Vera buscou e encontrou definições de ângulo as mais variadas, de autores que eram, para ele e no momento em que escrevia seu dicionário, “autoridades”. Afirmamos que qualquer pessoa pode fazer o mesmo: um professor de Ensino Fundamental pode recorrer à autoridade dos livros didáticos do mesmo modo que um professor da Universidade poderá recorrer às autoridades da sua época para decidir qualquer questão conceitual que lhe seja proposta. Queremos salientar que o recurso às autoridades, vistas em perspectiva histórica, provavelmente forneceria subsídios para toda e qualquer definição “razoável” que alguém ouse propor e, assim, aqueles que tiverem suas definições consideradas “erradas” terão um tribunal de apelação que poderia prosseguir em nossa aventura pelos dicionários de várias línguas. Todavia, como decidir se uma definição está certa ou errada? Será que estamos condenados a “nada saber” e a “tudo aceitar”?

O que é “definição” ?

Vimos que uma análise feita exclusivamente sobre a própria definição dificilmente poderá fornecer elementos para que possamos decidir sobre sua correção ou não, pois há muitas delas que são contraditórias entre si. Antes de tomar uma decisão, julgamos conveniente tentar compreender um pouco melhor o que é uma definição e o que ela faz.

Na conversação ou na leitura, às vezes encontramos palavras que não nos são familiares e, para compreendê-las, é necessário pedir ajuda a alguma “autoridade” que, conforme já comentamos, pode ser representada pelo dicionário ou por um especialista.

---

[3] **Ángulo**. Este concepto, tan importante en geometría plana, puede introducirse de varios modos:
1º Según Euclides, es la mutua inclinación de dos rectas;
2º Según Sannia, es el resultado de la rotación de una semirrecta en torno a su origen, respecto de otra semirrecta fija;
3º Según Enriques, es la interferencia de dos semiplanos, es decir: que en esta acepción se emplea estrictamente el concepto de ángulo convexo;
4º Según Hilbert, es un par de semirretas com origen común;
5º Según Veronese, el concepto de ángulo se condiciona al de sector angular, que él define así: sistema unidimensional cuyo elemento es el rayo, esto es: una parte limitada de un haz de rayos. Su magnitud intensiva es el ángulo.
En geometría elemental suele caracterizarse del seguiente modo:
Cada una de las cuatro partes o regiones que determinan dos rectas coplanarias AB y CD que se cortan. Lados del ángulo son los bordes rectilíneos que lo limitan y que resultan ser semirrectas del mismo origen. El punto O común a las dos rectas AB y CD es el vértice del ángulo.
Esta definición implica el concepto de ángulo como parte del plano compreendida entre las dos semirrectas OB y OC, o sea: la situada simultáneamente del mismo lado de CD que contiene la semirrecta OB y del mismo lado de AB que contiene la semirrecta OC, de modo que: ángulo es el conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos de un mismo plano cuyos contornos se cortan en un punto.

Em outras ocasiões, encontramos palavras que têm dois ou mais significados e queremos escolher, entre eles, qual iremos utilizar, ou seja, queremos as *definições* para eliminar as ambigüidades. Por exemplo, Raffaella Borasi (1989) nos mostra várias "definições" de círculo apresentadas por universitários americanos. Quando um aluno se refere a círculo como "uma linha redonda, contínua e fechada", a definição é ambígüa, porque não se sabe o que significa "redonda", ou seja, a palavra pode ter muitos significados e o contexto não esclarece qual deles foi usado.

Há, ainda, outros momentos em que não estamos seguros dos limites de aplicação de um determinado termo, pois, apesar de conhecermos seu significado, ele necessita de um esclarecimento, está "vago". É o caso da definição de círculo como "pontos consecutivos em um ângulo de 360 graus". Nesse caso, apesar de conhecer, em certo sentido, o significado de 'ângulo de 360 graus', não estamos totalmente seguros da sua aplicabilidade ao círculo, precisamos de um esclarecimento sobre o que significam 'pontos consecutivos de um ângulo'.

Podemos citar, também, a necessidade de formular uma caracterização teórica adequada de um objeto ao qual ela deverá se aplicar. Ao definir círculo como "uma linha reta que muda de direção constantemente", um aluno de Borasi pode estar tentando caracterizar teoricamente, utilizando termos provavelmente já trabalhados, a figura plana que, em princípio, parece ter esse "comportamento".

Pode-se ter, ainda, definições "retóricas" ou "persuasivas", em que o objetivo daquele que as cria é influenciar a opinião de seus ouvintes, para que aprovem sua formulação. Por exemplo, quando um outro aluno de Borasi diz que o círculo é o que tem a forma de uma moeda, está procurando "persuadir" seus colegas a aceitarem sem discussões sua formulação, pois está usando uma imagem que todos entendem.

Outro autor, Copi (1973), diz que há duas maneiras de formular uma definição: fala-se sobre o símbolo definido ou sobre aquilo que ele designa. Por exemplo, a primeira definição de ângulo que transcrevemos nos diz que "ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum", ela se refere diretamente ao "objeto" ângulo. Entretanto, a mesma definição poderia ser escrita assim: a palavra 'ângulo' designa a figura formada por duas semi-retas que têm a origem comum. O símbolo que se define (no caso, a palavra 'ângulo') é o *definiendum* e o conjunto de símbolos usados para explicar o seu significado (no caso, "figura formada por semi-retas que têm a origem comum") é o *definiens.* Ou seja: aquilo que tentamos definir é o *definiendum*, as palavras que usamos para fazê-lo, os símbolos que usamos, constituem o *definiens*. Para Copi, o *definiens* não é o significado do *definiendum*, é apenas um conjunto de símbolos que, de acordo com a definição, têm o mesmo significado que o *definiendum*. Daí, julgamos importante sublinhar que essa distinção entre o que tentamos definir e as palavras que usamos para fazê-lo não é consensual e, se enveredássemos pela filosofia, ela nos remeteria a um emaranhado de problemas que são muito antigos e que não encontraram solução no sentido de que uma única resposta satisfaça a todas os pontos de vista (Ogden & Richards, 1976, p.123-149).

Baseando-nos em Copi veremos alguns dos tipos de definição que ele considera relevantes. O primeiro tipo é chamado de "definição estipulativa", ou seja, é aquela que *estipula* o significado de um novo termo que vai ser introduzido. Por exemplo, em Álgebra, introduz-se a expressão 'relação de um conjunto A em um conjunto B' dizendo que "é todo subconjunto do produto cartesiano de A por B". É um termo novo na teoria, que foi introduzido na esteira de termos como 'subconjunto' e 'produto cartesiano' e que teve, então, seu significado estipulado. Sendo assim, uma definição estipulativa não é verdadeira nem falsa, uma vez que é apenas uma proposta de usar o *definiendum* da forma como o *definiens* explica. É claro que uma definição estipulativa pode não servir aos propósitos para os quais foi criada (por exemplo, poderia acontecer que a definição de relação, acima indicada, não "servisse" para os próximos conceitos a serem definidos a partir dela). Todavia, deve-se sempre ter em mente que os critérios de verdade ou falsidade não se aplicam a ela.

Se a definição procura eliminar a ambigüidade de um termo cujo uso já está estabelecido, então ela é uma "definição lexicográfica". Por exemplo, se dizemos que "a palavra ‘lago’ designa uma grande quantidade de água cercada de terra por todos os lados”, esta definição pode ser valorada como verdadeira, pois é a forma como se usa a palavra ‘lago’, de uma maneira geral. Se, no entanto, dizemos que “a palavra ‘lago’ indica uma figura plana, redonda e fechada”, isto é falso, pois não é a forma como as pessoas se referem a um lago. De certa forma, podemos dizer que uma definição lexicográfica é aquela que está no dicionário, é aquela que normatiza um uso.

A diferença importante entre as definições estipulativas e lexicográficas é que, nas primeiras, o *definiendum* não tem nenhum significado à parte, anterior à definição que o introduz na linguagem, enquanto que, nas lexicográficas, o *definiendum* já tem um significado anterior e independente, sendo sua definição verdadeira ou falsa conforme a correção ou não da informação que transmite. As definições estipulativas parecem mais apropriadas aos matemáticos pois elas se “descolam” de um significado “concreto”, entretanto parece claro que ao estipular algo, aquele que estipula sabe o que pretende, portanto tal estipulação atende a uma intenção.

Copi (1973), de forma muito interessante, diz ser o uso das palavras uma questão estatística: não podemos aceitar uma definição lexicográfica se ela não estiver descrevendo os significados que a maior parte das pessoas aceita. No entanto, se uma determinada palavra é “imposta” por um grupo de pessoas — um grupo de matemáticos, por exemplo — isso não significa que outros grupos vão aceitá-la. Aliás, este é um dos problemas que encontramos com algumas palavras que, em Matemática, têm um determinado significado e na linguagem corrente têm outro, pois os alunos, com muita propriedade, tendem a aceitar aquele a que estão acostumados, cometendo “erros”, na avaliação de seus professores , que estão aceitando apenas o significado matemático do termo. Um exemplo simples: quando um professor pede a seus alunos que desenhem dois retângulos *diferentes* com o mesmo perímetro, ele tem em mente que a *forma* do retângulo deve variar, aceitando que um retângulo com medidas 3 x 4 cm é diferente de um retângulo com medidas 2 x 5 cm. Ora, uma criança pode entender que *diferentes* seriam dois retângulos medindo exatamente 3 x 4 cm, um pintado em vermelho e outro em azul. A questão é: o que se entende por “diferente”?

Podemos, ainda, apresentar outros exemplos. A palavra ‘potência’, na linguagem corrente, é associada a vigor, força. Por este motivo, alguns alunos tendem a considerar que, ao calcular a potência de um número, será obtido outro maior, o que, evidentemente, não é correto se trabalharmos com um real entre 0 e 1 e um expoente natural. A palavra ‘tangente’ tem o significado usual de algo que roça, sendo usada em alguns textos literários com o sentido de “passar muito perto”. Também é definida por muitos alunos (e mesmo por professores) como *a reta que toca a curva em um único ponto*, quando sabemos que, matematicamente, esta idéia não se sustenta.

Porém, nem as definições estipulativas nem as lexicográficas garantem a eliminação da “vaguidade” de um termo. Por isso, às vezes é necessário ir mais além do uso comum e estabelecer uma “definição aclaratória”, que é diferente da estipulativa porque seu *definiendum* não é um novo termo, mas tem um uso já estabelecido, porém vago. É o caso de muitas expressões usadas em leis e que precisam ser reformuladas pelos juristas para decidir disputas legais. Finalmente, há muitos casos em que os estudiosos não estão interessados na informação estatística sobre o uso de um determinado termo, na estipulação de uma determinada definição para um termo novo ou no esclarecimento de uma definição vaga. Sua preocupação é com a construção de uma teoria e, desta forma, ao definir um termo teoricamente, estão inserindo-o em uma determinada teoria.

Em filosofia, seguindo uma linha que pode passar por Boecio e Wittgenstein, poderíamos dizer que uma definição é qualquer tentativa de resposta à pergunta: *o que é isso?* Ou, se preferirmos, poderíamos indagar ao próprio conceito: *o que você é?* E desse modo uma definição dependerá do uso que se pode fazer daquilo que se pretende definir. Assim, para encaminhar nossas discussões, vamos aceitar que “definir” é equivalente a *restringir ou limitar o uso de um termo a um contexto determinado.* Há precedentes para este uso da palavra ‘definição’? Como nosso público leitor é formado, em princípio, por pessoas que possuem uma formação matemática, recorremos a um uso que foi feito por alguém que possui certa respeitabilidade na área: trata-se de Max Black, em *Problems of Analysis* (1954) (citado por Abbagnano, 1997, p. 289). Efetivamente, acaba sendo um recurso à autoridade: não somos “nós” quem dizemos, mas é o “outro” a quem vocês – ou, pelo menos, alguns dentre vocês - reconhecem e respeitam.

Assim, adotado o nosso critério para dar definições, não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo. Todavia, é muito antiga a idéia de que dar uma definição é dizer qual é a essência daquilo que se define; podemos dizer que essa concepção remonta a Aristóteles. Mas, como em toda definição, essa nos remete à questão: o que é ‘essência’? Na definição que adotamos, seria válido indagar: “o que é um contexto?” ou ainda, “o que é um uso?”

De qualquer modo, embora não estejamos em busca da essência perdida, o método aristotélico de fornecer definições nominais, ou seja, de *batizar* os conceitos, pode nos ser útil. A idéia é que busquemos coisas em comum (gêneros próximos) para que nosso conceito se exprima em relação às coisas que lhe são próximas (Por exemplo, ao falarmos de ângulos, recorremos a semi-retas, a retas, ou a planos... Assim como ao falar de homens, podemos recorrer a mortais, bípedes ou racionais) e, em seguida, recorremos às diferenças específicas que irão separar o conceito que queremos definir daquele que usamos anteriormente. (Por exemplo, no caso de ângulo, se escolhemos falar de semi-retas, é claro que o conceito de ângulo não se confunde com o de semi-reta. Então, quais são as diferenças? Em que condições as semi-retas determinam o ângulo?).

As definições por gênero e diferença são também chamadas de “definições analíticas” ou “conotativas” e são consideradas por alguns autores como as mais importantes. Portanto, “definimos um termo por gênero e diferença se designamos um gênero do qual seja uma subclasse a espécie designada pelo *definiendum* e logo indicamos a diferença que a distingue de outras espécies do gênero” (Copi, 1973, p.118). Dessa forma, seguindo esse método, como afirmamos anteriormente, qualquer coisa que queiramos definir já deverá ser nossa conhecida! Se não, como poderíamos escolher gêneros “próximos” e em seguida apontar “diferenças”? Essa observação reforça a tese de que didaticamente não se deveria começar a trabalhar um conceito mediante a sua definição.

Do que vimos até aqui é importante esclarecer que antes de decidirmos se uma definição é “correta”, podemos observar se ela está bem construída, se o método utilizado para elaborá-la foi adequado ou não. Vamos adotar algumas regras referentes às definições por gênero e diferença, que podem ser usadas na análise das definições de ângulo a que nos reportamos anteriormente. Basear-nos-emos em Malba Tahan (1965), um autor conhecido por muitos professores de matemática, que por sua vez adaptou-as de Aristóteles, Pascal e outros autores.

I) Uma definição deve estar em relação apenas com o objeto que define, servindo como elemento de simplificação da linguagem.

Por exemplo, ao invés de nos referirmos à figura geométrica formada por duas semi-retas com uma origem comum, dizemos apenas: o ângulo. Por outro lado, se alguém definisse “reta” como sendo “a linha que pode girar em torno de si mesma enquanto seus pontos permanecem imóveis”, tal definição também seria válida para semi-retas e para segmentos desde que fossem entendidos como “linhas”, pois eles poderiam girar em torno de si mesmos mantendo-se imóveis os seus pontos. Assim, a definição não seria aplicável apenas àquilo que se pretendia definir e haveria confusão entre reta, semi-retas e segmentos.

Esse erro de definição é muito comum quando professores se referem ao quadrado como sendo a “figura que possui os quatro lados iguais”. Ora, um losango tem os quatro lados iguais e evidentemente não é um quadrado. Portanto, essa definição não convém *apenas* ao objeto que se pretende definir.

II) Uma definição deve ser clara e concisa

A definição não deve ser mais obscura do que o conceito que pretende definir. É preciso ter cuidado para não incluir na definição mais do que o necessário para dar a idéia do conceito. Um exemplo comum é a definição de quadrado como sendo a figura geométrica com quatro lados e quatro ângulos iguais cujas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios. Adotada a idéia de *"ângulos e lados iguais"*, a menção às diagonais torna-se desnecessária e deveria aparecer como propriedade. Todavia, convém destacar que o medo de exagerar incluindo elementos não necessários à definição pode levar ao erro contrário que é o de omitir características fundamentais: se você definisse quadrado como sendo *"o paralelogramo que tem os ângulos iguais"* estaria recaindo nesse caso, pois a sua definição inclui também o retângulo. É importante observar que o *"ser claro e conciso"* não é uma característica consensual. De qualquer modo, uma definição não deve denotar mais ou menos coisas do que as denotadas pelo *definiendum*. Por exemplo, o aluno de Borasi (1989) que define círculo como "qualquer coisa que tem área igual a πr^2", obviamente está usando uma definição demasiado ampla. Por outro lado, se alguém define triângulo como "a figura plana que tem três lados iguais", está violando a regra no sentido de estreitar a definição, pois há triângulos que não têm os três lados iguais!

Em didática, a clareza e a concisão estão diretamente relacionadas com as características cognitivas dos alunos e o contexto geral da disciplina. É por isso que definições de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral em livros destinados a cursos de Bacharelado em Matemática não "servem" para os alunos de Licenciatura ou das Engenharias. Esta afirmativa, feita perante matemáticos, em geral é interpretada como uma tentativa de "baratear" o ensino para as Licenciaturas e Engenharias, mas isso, em nossa opinião, apenas evidencia a postura absolutista de alguns professores, sobre a qual vamos tecer considerações posteriormente.

III) Uma definição não pode recorrer àquilo que pretende definir e as coisas às quais recorrer devem já ser conhecidas ou aceitas sem definição

Imagine que alguém defina que *"quadrado é o quadrilátero que é quadrado"*. Essa afirmação não contém erro, porém nada esclarece; com base nela, como distinguir o que é quadrado do que não é? Se o *definiendum* aparece no *definiens*, é evidente que a definição será circular, fracassando no seu propósito de explicar o significado do *definiendum*.

Quanto a recorrer às coisas conhecidas, vejamos: Um ângulo é definido a partir de semi-retas, mas o que são semi-retas? Elas são definidas a partir de retas. O que são retas? Suponha que definíssemos as retas a partir de pontos, o que são pontos? Bem se vê que caímos em um processo chamado de regressão infinita. É para evitar isso que se introduziu em Matemática a idéia dos postulados ou axiomas, que seriam fatos ou coisas aceitas sem definição, seriam os elementos básicos sobre os quais elaboram-se todas as definições posteriores.

IV) A definição não deve ser negativa quando pode ser afirmativa

Deve-se explicar o que um termo significa e não o que ele **não** significa. Por exemplo, se definimos quadrilátero como "o polígono que não é um triângulo, nem um pentágono, nem um hexágono, etc" (Copi, 1973, p.124), evidentemente não explicamos o que é um quadrilátero, porque há inúmeros outros polígonos que seria necessário incluir na definição. Só devemos aceitar a definição "negativa" em casos excepcionais, em que o número de espécies do gênero dado é muito pequeno. É o caso de definir triângulo escaleno como "aquele que não é isósceles nem equilátero".

Enfim, professores e matemáticos conscientes de como operam as definições nunca as tomariam como definitivas. Essa não é uma idéia original nossa, nem se trata de uma novidade, pois podemos encontrar afirmação semelhante em um livro antigo, *As Idéias Fundamentais da Matemática*, escrito pelo matemático brasileiro Amoroso Costa (1971), que nos diz:

Uma noção é definível em relação a um dado sistema de outras noções; indefinível em relação a um outro sistema ... Uma proposição é demonstrável relativamente a um certo sistema de outras proposições, indemonstrável relativamente a um outro sistema. ... A escolha das noções primitivas e dos postulados permanece arbitrária; o que para um autor é postulado passa a ser teorema para outro; o que era noção não-definida passa a noção construída por definição (Amoroso Costa, 1971, p. 189 e 192).

Possíveis decisões dos professores

Dissemos no início que este trabalho teve origem nas definições coletadas por alunos de Licenciatura em Matemática. A estes futuros professores foi dada a tarefa de procurar "erros" nas definições que encontrassem e, assim, logo afirmaram estarem erradas aquelas que não contemplavam os ângulos raso ou nulo. Surgiu então uma desconfiança quando dissemos que este não é um "erro" e precisamos recorrer às "autoridades" para justificar nossa afirmativa. Há autores que apresentam argumentos que tentam convencer o leitor da "necessidade" de não incluir os ângulos raso e nulo na definição usualmente recorrendo à regra I que estipulamos acima: um ângulo nulo não se diferenciaria de uma semi-reta ou um ângulo raso iria coincidir com a reta. Em cada caso é necessário levar em conta "os fins" para os quais se estabelece – ou não – tal diferenciação.

Raros são os autores que colocam ênfase sobre suas escolhas. Vejamos como procede (Martin, 1975, p.95):

> *Nossa idéia é que ângulo é simplesmente um conjunto de pontos que é a união de duas semi-retas não-colineares com o mesmo vértice. Note que isto não é o mesmo que dizer que ele é a união de quaisquer duas semi-retas VA e VB. Se V-A-B [A está entre V e B], a união é apenas uma semi-reta; se A-V-B, a união é a reta. Nós escolhemos ter ângulos distintos de semi-retas e retas. Caso contrário, ao fazer afirmativas, nós teríamos sempre que ficar fazendo exceções para esses casos. Elas seriam mais inconvenientes do que válidas. Talvez você fique chocado com o fato de que isso elimina os assim chamados ângulos nulo e raso da classe dos ângulos. Bem, o que são eles afinal? Se coincidem com uma reta, quem precisa deles? ... Talvez um deles possa ser um ângulo de 180 ou 540 graus ou, quem sabe, um tipo especial de rotação ou uma classe de equivalência especial de rotações. Felizmente, porque a vida é simples para nós, essas idéias não estão disponíveis no momento e nós não temos coisas como graus ou rotações. Nós admitimos que talvez fosse mais simpático usar "ângulo elementar" onde usaremos "ângulo", para reservar o termo mais sofisticado para mais tarde. Nós nos abstemos de fazer isso principalmente porque dá uma certa preguiça pensar em ficar usando o termo mais longo.* [Embora essa tradução tenha sido adaptada livremente, tentamos manter a linguagem insinuante e irônica, como no original].

Depois dessas considerações podemos dizer que a decisão sobre a correção das definições passa pela compreensão das dificuldades que procuramos evidenciar. Em qualquer das definições citadas, pode-se perguntar se os termos utilizados já são conhecidos ou aceitos *a priori*; é o caso de "semi-reta", "semi-retas opostas", "região convexa", etc. Mas isso levaria a uma regressão ao infinito, se fôssemos seguir ao pé da letra.

Portanto, começamos a ver que a decisão sobre a correção de uma definição não é tão simples. Se aceitarmos apenas as regras apontadas no item anterior como critério de correção, então quase todas terão um ou outro problema. Teremos que pensar, então, nos *objetivos* do autor da definição, na sua *intenção* ao utilizar tais palavras, na série para a qual o livro foi escrito, nas necessidades dos alunos que vão trabalhar com aquela definição. Mas isso significa que a correção depende das condições *a priori*.

E essa observação é suficiente para decidirmos pela correção ou não de uma determinada definição? Talvez não, pois podemos ter definições adequadas ao contexto mas que, por sua "vaguidade" ou por sua extensão, venham a dificultar o entendimento e produzir obstáculos à aprendizagem. Um dos pontos fundamentais que devemos ter em vista é a coerência metodológica, um dos critérios de exclusão de livros didáticos na avaliação promovida pelo MEC.

Acreditamos, então, que cabe ao professor, responsável pela sua prática e refletindo sobre ela, a escolha do livro a ser utilizado e da definição a ser trabalhada em sala de aula. Ele não deverá esperar que regras gerais possam substituir suas decisões, ele terá que criar regras de acordo com suas necessidades e de suas turmas. Pois ele sabe das condições de seus alunos e deve ter claros os objetivos que se propõe a atingir com o estudo da Geometria Plana.

A discussão sobre as definições, o apontar de "falhas" nas formulações, o debate sobre a maturidade necessária para compreender uma ou outra apresentação, todos estes elementos devem fazer parte da formação do professor de Matemática, habilitando-o a criticar novas idéias, a analisar e selecionar material didático que será por ele utilizado.

Deixamos, portanto, neste trabalho, algumas idéias para serem discutidas em Cursos de Licenciatura em Matemática e, também, por professores já em exercício.

Das considerações feitas anteriormente, vimos que as decisões sobre a correção de uma determinada definição constituem um assunto delicado, que envolve apelo às autoridades, cuidado com regras e, finalmente, avaliação do contexto em que as definições vão ser utilizadas. As escolhas, entretanto, não são neutras, elas não são feitas em "abstrato"; podemos nos perguntar: quais são e como operam as concepções prévias dos professores de Matemática, no momento em que se propõem a fazer a escolha de uma definição? Esse é um ponto fundamental!

Ernest (1991, p. 250) comenta que as mudanças na prática do professor estão associadas ao aumento de autonomia e reflexão. E a prática, por sua vez, está ligada às concepções sobre a Matemática e seu ensino, bem como ao contexto social da situação de ensino. O mesmo autor aponta três possíveis *filosofias* da matemática influenciando a prática: a visão instrumental, a platônica e a de resolução de problemas. No primeiro caso, a Matemática é vista como "uma acumulação de fatos, regras e habilidades para serem usados na busca de algum objetivo externo" .

A concepção platônica considera a Matemática como um corpo estático e unificado de conhecimento absoluto. A visão de resolução de problemas é dinâmica, aceitando que a Matemática está em contínua expansão e evolução.

Dessa forma, se um professor vislumbra a Matemática como um conjunto de regras, tenderá a escolher as definições que dizem como fazer determinada operação, ou seja, as que apresentam passo a passo os itens de que necessita para a sua construção. Além disso, escolhida uma definição, essa será tomada como "certa", como uma regra a ser seguida.

Do mesmo modo, se um professor aceita que o conhecimento matemático é estático, que as coisas *são* ou *não são*, ele terá a tendência a aceitar as *verdades* enunciadas nos livros como absolutas; dessa forma, terá dificuldade em adaptar uma definição ao contexto em que atua, pois sua postura "engessa" tal conhecimento.

Finalmente, se o professor crê que a Matemática pode ser expandida e modificada, que é uma ciência falível e corrigível como todas as outras, então ele poderá dispor de uma definição e remodelá-la de acordo com as necessidades de sua turma.

Esperamos que nossas considerações abram possibilidades ao leitor para discutir, debater com seus colegas, pensar um pouco sobre tudo o que significa escolher uma definição, aceitá-la, verificar sua correção, etc. E esperamos, ainda, que as discussões lhe possibilitem encontrar outros exemplos de definições, em outras áreas da Matemática, não só para analisá-las segundo as regras aqui citadas, mas também para adequá-las aos seus objetivos e ao nível de ensino em que atua.

E a história?

Neste artigo não contamos a história dos "ângulos", não dissemos quem foi o primeiro a usar essa palavra nem como teria surgido a idéia de falar em ângulo. Aqui a história foi "usada" como elemento de composição. Tentamos mostrar como um professor pode recorrer a ela comparando textos de livros didáticos, textos de dicionários e de livros de História da Matemática. Assim como nos referimos às concepções dos professores sobre a Matemática, também existem as concepções das pessoas sobre a História; há os que defendem, por exemplo, que só podemos fazer a história de gente que já morreu ou de fatos ocorridos em um passado distante... Nossa concepção revela, entretanto, que os professores atuando hoje, em sala de aula, podem, mediante o questionamento sistemático daqueles conceitos que ensinam e de suas próprias concepções de matemática, dar uma contribuição para fazer essa história de hoje, a do tempo em que vivemos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. *Diccionario de filosofía*. Bogotá : Fondo de Cultura Económica, 1997

AMOROSO COSTA, M. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo : Grijalbo, 1971.

BAUMGARTNER, Emmanuèle et MÉNARD, Philippe. *Dictionnaire étymologique et historique de langue française*. Paris : La Pochothèque, 1996.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1986. 7ª série.

BORASI, Raffaella. Definizioni incorrette di cerchio: una minera d'oro per gli insegnanti di matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, v.12, n.6, p.773-795, giugno 1989.

BONGIOVANNI, V., VISSOTO LEITE, O. R. e LAUREANO, J. L. T. *Matemática e vida*. São Paulo : Ática. 1990. 5ª série.

CASTRUCCI, B.; BÓSCOLO, A. *Matemática para o ciclo ginasial.* São Paulo : FTD, 1968. v.3.

COLLECÇÃO FTD. *Geometria elementar com noções de agrimensura e de nivelamento.* Rio de Janeiro: Livraria Paulo de Azevedo. 1925.

COPI, Irving M. *Introducción a la logica*. 13. ed. Buenos Aires : Eudeba, 1973.

CUNHA, Antônio Geraldo da. *Dicionário etimológico Nova Fronteira da língua portuguesa.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.

DICIONÁRIO Brasileiro de Língua Portuguesa, *Enciclopédia Mirador*, 3. ed. São Paulo : Cia Melhoramentos, 1979.

DOMENICO, L.C.; LAGO, S.R.; ENS, W. *Matemática moderna*. São Paulo: IBEP, s/d. 7ª série.

ERNEST, Paul. The impact of beliefs in the teaching of mathematics. In: ERNEST, Paul. *Mathematics teaching*: the state of the art. London : Falmer Press, 1991. p. 249-254.

GIOVANNI e GIOVANNI Jr. *Aprendizagem e educação matemática*. São Paulo: FTD, 1990. 5ª série.

_____. *Matemática*: pensar e descobrir. São Paulo: FTD, 2000.

GUELLI, Oscar e LIMA, Luciano. *Construindo a matemática*. São Paulo : Companhia Editora Nacional, s/d. 6ª série.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, MACHADO, Antonio. *Matemática*. São Paulo : Atual, 1982. 6ª série.

IEZZI, Gelson. *Trigonometria*: Fundamentos da Matemática Elementar. 6 ed. São Paulo : Atual, s/d. v. 9.

IMENES, Luiz Marcio e LELLIS, Marcelo. *Matemática*. São Paulo : Scipione, 1997. 6ª série.

JAKUBOVIC, José e LELLIS, Marcelo. *Matemática na medida certa.* 3. ed. São Paulo : Scipione, 1991. 6ª série.

LAROUSSE CULTURAL. São Paulo : Nova Cultural, 1992.

LOPES, Antonio José. *Matemática atual.*. São Paulo : Atual, 1994. 6ª série.

MACHADO, Antonio dos Santos. *Matemática na escola do 2º grau*. São Paulo : Atual, 1994. v. 1.

MALVEIRA, Linaldo. *Matemática fácil*. São Paulo : Ática, 1987. 7ª série.

MARTIN, George. *The foundations of geometry and the non-euclidean plane.* New York : Springer-Verlag, 1975.

MORI, Iracema e ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática:* idéias e desafios. São Paulo : Saraiva. 1998. 6ª série.

OGDEN, C. K. e RICHARDS, I. A. *O significado de significado*. Rio de Janeiro : Zahar. 1976

OTTONI, C. B. *Elementos de geometria e trigonometria rectilinea*. 3. ed. Rio de Janeiro : Typographia Perseverança, 1870

PIERRO NETO, Scipione di. *Matemática para a escola moderna*. São Paulo : IBEP, s/d. 3 v. .1ª, 2ª, e 3ª séries do ginásio.

_____. *Matemática:* conceitos e histórias. São Paulo : Scipione, 1991. 6ª série.

POMPEU, J. N., MURAKAMI, C., HAZZAN, S., SETANI, V. *Matemática*. São Paulo : IBEP, s/d. 7ª série.

QUINTELLA, Ary. *Matemática*: terceiro ano ginasial. São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1950.

_____. *Matemática para a terceira série ginasial*. São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1967.

SANGIORGI, Osvaldo. *Matemática*: curso moderno. São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1966. 3º ginasial.

SCHWARTZMAN, Steven. *The words of mathematics*: an etymological dictionary of mathematical terms used in english. Washington : The Mathematical Association of America, 1994.

SMSG (School Mathematics Study Group). *Matemática:* curso colegial. Brasília: Ed. da Universidade de Brasília, 1964. vol. 1.

TAHAN, Malba. *O problema das definições em matemática:* erros, dúvidas e curiosidades. São Paulo : Saraiva, 1965

VERA, Francisco. *Lexicon*: Matemática. Buenos Aires : Kapelusz, 1960.