A MATEMÁTICA E A FILOSOFIA DE RENÉ DESCARTES

Duelci Aparecido de Freitas Vaz[1]
Universidade Católica de Goiás
duelci@ucg.br
duelci.vaz@ig.com.br

Abstract: *Neste artigo procuro resgatar uma obra que é um marco na história da Matemática e da Filosofia: O Discurso do Método e um de seus apêndices A Geometria, de René Descartes. Primeiro estabeleço as idéias centrais da Filosofia de Descartes contidas em O Discurso do método. Depois dedico mais atenção ao conteúdo da Geometria, pois, para nós, Matemáticos e Educadores Matemáticos é a parte mais importante. A Geometria de Descartes é ainda hoje motivo de debates e interpretações surpreendentes. Uma passagem importante da Geometria é quando Descartes resolve o famoso problema de Pappus. Ele inova ao reduzi-lo para duas variáveis e atribuindo-se valores a uma delas pode-se encontrar a outra. Esta passagem é considerada a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica e eu dedico atenção especial a ela. Apresento também as outras inovações de Descartes: a sua moderna notação que permitiu a superar o obstáculo da dimensionalidade que impediu os gregos de avançarem em muitos problemas. A Geometria de Descartes nos dá uma idéia precisa de como era a Matemática do inicio do século XVII.*

Palavras-Chaves: *Geometria, Filosofia, Descartes, Matemática.*

1. René Descartes - Vida e Obra

René Descartes nasceu na França, em La Haye, no dia 31 de março de 1596. Filho de um conselheiro de Rennes, freqüentou uma das mais célebres escolas da Europa: a escola jesuíta de La Flèche. Ali, estudou por durante oito anos. Mais tarde, com dezesseis anos, ingressou na Universidade de Pointiers, onde estudou Medicina e Direito. Segundo consta, Descartes se interessou por quase todos os ramos do saber: Medicina, Astronomia, Matemática e Física.

As obras de Descartes: Em 1637 é publicado Discours de la Méthod (O Discurso do Método), La Geometrie (A Geometria), La Dióptrique (A Dióptrica), Lés Météores (Os Meteoros), em um único volume, os três últimos como apêndice do primeiro e Compendium Musicae. Em 1641 publica Méditations Métaphysiques. Em 1644 Les Príncipes de la Philosophie. Em 1649, De La Formacion du Foetus, Traité de l´Home. Ainda em 1649, ano em que parte pra Suécia a convite da rainha Cristina publica sua última obra Lês Passions de L´âme. Em 1664 é publicado postumamente Le monde ou Traité de la Lumiére. 1701 publicado postumamente a obra não terminada Regulae ad Directionem Ingenii " (Regras para a direção do Espírito).

Descartes nunca gozou de boa saúde não suportando o rigoroso inverno escandinavo morreu com 53 anos, em 11 de fevereiro de 1650, em Estocolmo, vítima de pneumonia, em conseqüência do frio seco que assolava a cidade. Segundo consta suas últimas palavras foram: "Vamos alma, à que partir ". Os seus restos mortais encontram-se em Paris, na Igreja de Saint-Germains-de-Prés.

1.1. A Filosofia de Descartes

A filosofia teve inicio no final do século VI a . C. com os gregos e dois séculos depois mergulhou num período áureo com o advento de Sócrates (469-399),, seguido por Platão (427-347) e Aristóteles (384-322). Depois disso nada de original aconteceu, pelo menos até o século XVI. Na idade média estabeleceu-se a Escolástica que era a filosofia da Igreja Católica. No século XV estava enterrado quase todos os campos de atividade intelectual. Mas, esse estágio começava a ruir quando grande parte da cultura perdida começava a vir a luz com O Renascimento. Depois do Renascimento seguiu-se a Reforma e a Contra- Reforma. Em 1637, Descartes escreve O Discurso do Método, com três apêndices: A Dióptrica[2], Os Meteoros e A Geometria. Nesta obra ele estabelece as regras para se obter o conhecimento universal. A frase mais famosa da filosofia é certamente "Cogito, ergo sum" (" penso, logo existo"), de Descartes. De certa forma esta frase serve para resumir a sua filosofia. Descartes derruba a filosofia estabelecida e se impõe como o pai da moderna filosofia. Estabelece o princípio da dúvida dizendo que só temos certeza da nossa existência e tudo que

---

[1] Professor adjunto da Universidade Católica de Goiás. Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Doutorando em História da Matemática pelo Programa de Pós graduação da Unesp, Rio Claro-SP.

2 Parte da Física que estuda a refração da luz.

estava sendo aceito como verdade, até então, poderia ser questionado, pois não era um conhecimento consistente devido a ausência de uma sustentação científica sólida.

1.2. O Discurso do Método

Para falar da Matemática e da Filosofia de Descartes, antes de tudo, é necessário falar de sua principal obra: O Discurso do Método.

Em O Discurso do Método Descartes estabelece os princípios de sua filosofia. Na parte 2 de seu livro, Descartes diz ter estudado: lógica, geometria e álgebra e que deveria olhar para outros métodos que devem combinar as vantagens dessas três disciplina, e ainda ser isento de seus defeitos. Propõe as quatro regras a seguir, em conjunto elas podem ser consideradas "o coração de sua filosofia".

> *O primeiro consistia em nunca aceitar como verdadeira nenhuma coisa que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, em evitar, com todo o cuidado, a precipitação e a prevenção, só incluindo nos meus juízos o que não se apresentasse de modo tão claro e distinto a meu espírito, que eu não tivesse ocasião alguma para dele duvidar.*
>
> *O segundo, em dividir cada uma das dificuldades que devesse examinar em tantas partes quanto possível e necessário para resolvê-las.*
>
> *O terceiro, em conduzir por ordem meus pensamentos, iniciando pelos objetos mais fáceis de conhecer, para subir, aos poucos, gradativamente, ao conhecimento dos mais compostos, e supondo também, naturalmente, uma ordem de precedência de uns em relação aos outros.*
>
> *E o quarto, em fazer, para cada caso, enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de não ter omitido nada. (DESCARTES, 2002, p.31-32)*

Descartes procurava estabelecer regras universais para resolver problemas de toda natureza. Isto é notado claramente em A Geometria quando estabelece um método que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria. Esse método é aplicado na resolução do problema de Pappus pela primeira vez. A resolução desse problema é considerada a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

Em um tratado de 1619, De Solidorum Elementis, de Descartes, aparece a fórmula $V + F = A + 2$, erradamente e freqüentemente atribuída a Euler (1707 – 1783), que relaciona as arestas (A), os vértices (V) e as faces (F) de um poliedro regular. Para muitos, veja por exemplo (FORBES, 1977), isso foi uma tentativa de algebrizar a geometria sólida.

A classificação de curvas dada na parte dois da Geometria é para muitos (MANCUSO, 1996) uma tentativa de estabelecer os limites epistemológicos e ontológicos da Geometria, determinando assim o início e o fim da Geometria.

O método da tangente também é considerado um marco de seu trabalho. Descartes não usa a idéia de limites que só foi introduzido um pouco mais tarde por Pierre de Fermat **(1601?-1665).**

2. A Geometria de Descartes

Como disse, A Geometria de Descartes foi publicado inicialmente como um apêndice de O Discurso do Método, em 1637. Essa obra é considerada um marco na história da Matemática. Talvez, por isso muitos, sem aprofundar na questão, consideram Descartes como o pai da Geometria Analítica e há aqueles que consideram Fermat (1601?-1665) como o realizador dessa façanha, veja por exemplo *(SIMON, 1987)*. Existem diversos artigos que falam sobre a origem da Geometria Analítica, como por exemplo o artigo The Birth of the Analytic Geometry *(FORBES, 1977)*.

O conteúdo da Geometria pode ser dividido em três livros. Livro primeiro: Dos problemas que podem ser construído sem usar mais do que círculos e linhas retas. Livro segundo: Da natureza das linhas curvas. Livro terceiro: Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos. Na seqüência abordo a Matemática de Descartes nas partes que considero mais importante de cada livro. O leitor interessado em aprofundar os seus conhecimentos nesses assuntos poderá procurar na bibliografia sugerida as leituras adequadas. Não há muita coisa em comum entre a sua A Geometria de Descartes e a Geometria Analítica dos dias atuais. Não encontramos, por exemplo, nenhum sistema de coordenadas entre as diversas figuras que aparecem na Geometria.

2.1. Livro I

No livro I Descartes nos fala como as operações aritméticas se relacionam com operações geométricas. Ilustra como realizar a multiplicação, a divisão e a extração da raiz quadrada geometricamente, isto é, com o uso de régua e compasso apenas, para tanto, introduz o segmento unitário. Como empregar-se letras em Geometria. Como resolver problemas geométricos ou o método de Descartes em Geometria. Quais são os problemas planos e como resolvê-los. Descartes resolve o problema de Pappus[3] (III d. C.) para quatro linhas[4] aplicando o seu método pela primeira vez. A seguir aprofundo um pouco mais no conteúdo do livro I.

Para os geômetras, dos gregos até Viète (1540 – 1603), a variável representava um comprimento, o produto de duas variáveis a área, o produto de três variáveis o volume. Já o produto de quatro ou mais variáveis não tinha significado específico. Em sua Geometria Descartes introduz o segmento unitário tornando possível e dando significado a muitos problemas que eram intransponíveis para os gregos, como é o caso da dimensionalidade[5]. Introduz uma nova simbologia que permite um avanço no campo da notação, escrevia *aa* ou a^2, a^3 ou *aaa* e assim sucessivamente. Enxergava o símbolo a^2 como o comprimento de um segmento e não como área e assim era com as outras potências a^4, a^5, ... Ele usava o símbolo $\propto$ no lugar do atual = . Escrevia $a+b$ para a soma de dois segmentos de comprimento *a e b*, a-b para a diferença, *ab* para o produto, *a/b* para o quociente, $\sqrt{a^2+b^2}$ para a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e $\sqrt{C.a^3-b^3+ab^2}$ para a raiz cúbica de $a^3-b^3+ab^2$, onde o *C* significa cúbica. Justifica que a^3 tem tantas dimensões quanto *abb* e para se extrair a raiz cúbica de *aabb* – *b* deve se considerar que a expressão *aabb* está dividida uma vez pela unidade e b multiplicada duas vezes pela unidade.

Descartes constrói todas as operações elementares usando régua e compasso. Para fazer o produto de *a* por *b* tomamos duas semi retas com mesma origem B e marcamos em uma delas o segmento unitário AB, veja Fig. (1). Em seguida, marcamos nessa mesma semi reta um segmento *BD* de medida *a* e na outra semi reta marcamos o segmento *BC* de medida *b*. Traçamos um segmento de A até C e, em seguida, partindo de D, traçamos um outro segmento paralelo a AC que encontra a outra semi reta em E determinando o segmento DE. Usando a semelhança ou o Teorema de Tales concluímos que BE vale *ab*.

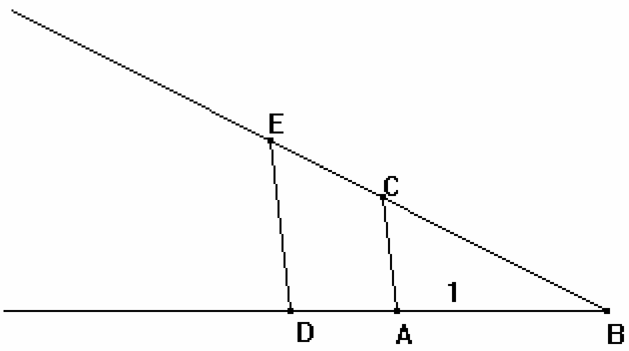

Figura 1

Embora Descartes não construa a divisão propriamente ela é feita da seguinte maneira: tomamos as duas semi retas, como anteriormente, e marcamos o segmento unitário AB, ver Fig. (1). Na outra semi reta marcamos os segmentos BC e BE, medindo respectivamente *a e b*, $a < b$. Ligando C a A por um segmento e depois traçando um segmento paralelo a este segmento partindo de *E* até *D* determinamos *b/a*.

Para extrair a raiz quadrada construímos um segmento unitário *FG* acrescentando na sua extremidade o segmento de medida *K, GH.* Determinamos a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento determinado pela unidade e por *K,* veja Fig. (2). Em seguida construímos o triângulo retângulo levantando uma altura a partir do ponto *G* até *I*, ponto que está sobre a circunferência do círculo construído, e usando a relação $GI^2 = GH \times FG = GH$, obtemos a raiz quadrada.

[3] Pappus de Alexandria foi um grande geômetra grego. Autor de uma obra muito importante: A Coleção de Pappus, em oito volumes.
[4] Linhas aqui significam retas.
[5] Os gregos interpretavam os problemas geométricos até a terceira dimensão. Para eles não tinha significado geométrico, por exemplo, o produto de quatro variáveis. Isso é considerado o problema da dimensionalidade.

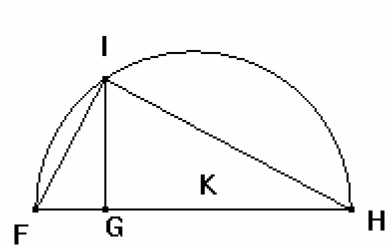

Figura 2

2.2. Problemas planos

Para Descartes problemas planos são aqueles que podem ser resolvidos sem utilizar mais que linhas retas[6] e segmentos circulares, traçadas sobre uma superfície plana. Equivalentemente são os problemas que se reduzem a uma expressão da forma $z^2 - az = \pm b^2$. Descartes não considerava as raízes negativas dessas equações, as quais chamava de falsas. A construção dessas raízes é realizada como segue.

Equação $z^2 = az + b^2$, sendo z o termo ou segmento desconhecido. Primeiro, ele constrói o triângulo retângulo *NLM,* com $LM = b$ e $LN = a/2$, depois constrói o círculo de centro N e raio NL veja Fig. (3). Prolongando a base[7] do triângulo *LMN* até *O*, de modo que *NO* seja igual a *NL*, então a linha *MO* é o segmento *z*.

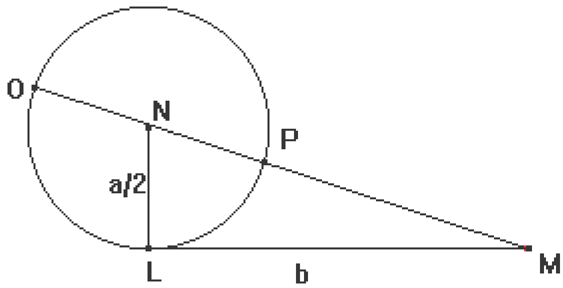

Figura 3

Equação $z^2 = az - b^2$. Seja $NL = a/2$, $LM = b$. Descartes constrói o círculo de centro *N* e raio *NL,* veja Fig. (4). Constrói em seguida *LM* perpendicular a *NL*. Traça a partir de *M* uma paralela a *NL* que corta o círculo em *Q e R*. O segmento *z* será *MQ* ou *QR*. Se a paralela não corta o círculo o problema não tem solução.

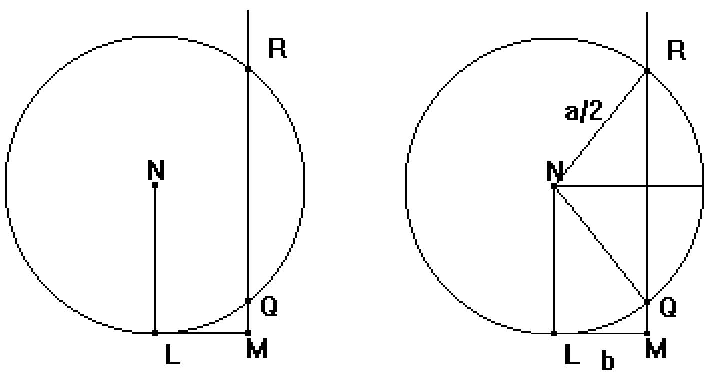

Figura 4

[6] Linhas retas: segmento de retas

[7] Base: seguindo a tradição grega Descartes chama de base a hipotenusa do triângulo, pois os gregos construíam o triângulo retângulo apoiado sobre a hipotenusa.

Descartes enfatiza que essas construções podem ser obtidas por diversos outros meios e que os antigos não possuíam esse método, caso contrário, argumenta, não teriam escritos livros tão volumosos que compilaram aqueles métodos já resolvidos.

2.3. O Método de Descartes e o Problema de Pappus

Descartes estabelece um método que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria. O método pode ser resumidamente dividido em três etapas: nomear, equacionar, construir.

Nomear: consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema.

Equacionar: estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis.

Construir: construir as soluções geometricamente, fazendo uso de régua e compasso. Descartes aplica o seu método pela primeira vez para resolver o problema de Pappus, como veremos a seguir.

O problema de Pappus já era conhecido pelos gregos. Euclides (322-285 a . C.) o resolveu para três e quatro retas. Pappus de Alexandria o generalizou para um número arbitrário de retas.

O Problema: Sejam dadas as quatro linhas *AB, AD, EF, GH*, encontrar um ponto C tal que, dados ângulos x, y, z, t linhas podem ser traçadas de *C* até *AB, AD, EF, GH* fazendo ângulos *z, y, z, t* respectivamente, tal que *CB.CF = CD.CH,* , *veja* Fig. (5). Mais ainda, traçar e conhecer a curva contendo tais pontos. Descartes inova no tratamento desse problema reduzindo-o a duas variáveis, o que permite, atribuindo-se valores a uma delas, determinar os valores correspondentes da outra variável e, a partir daí, conhecer o lugar geométrico dos pontos.

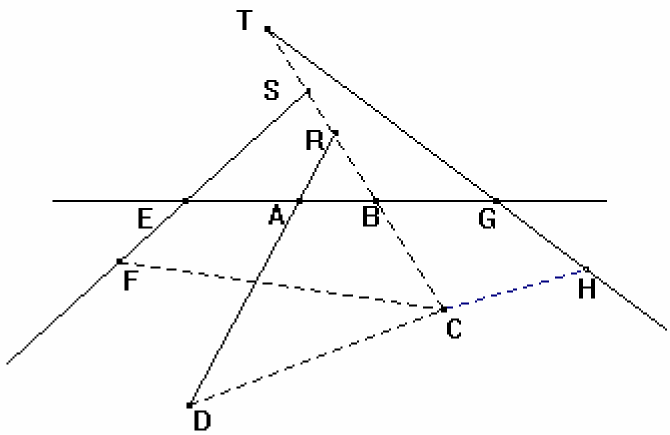

Figura 5

A Resolução: Descartes aplica seu método, pela primeira vez, na resolução desse problema.

> *Primeiro supondo o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe por x o segmento de linha AB compreendido entre os pontos A e B; e seja CB designado por y; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhe são paralelas; como se vê elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção dos lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será bx/z e a linha total CR será y+bx/z, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria CR = y-bx/z e se caísse entre B e R, seria CR= -y+bx/z. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CDF, indico como z para c, de modo que sendo CR= y + bx/z , será CD=cy/z+bcx/z*^{2}*. Após isto, como as linhas AB, AD, e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-as por k, ter-se-á EB igual a x + k; que seria k – x se o ponto B caísse entre E e A; e –k+x se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim*

> *como z está para d, tem-se: BS=(dk+dx)/z e a linha CS é (zy+dk+dx)/z. Se o ponto S caísse entre B e C seria CS=(zy-dk-dx): e quando C cai entre B e S teremos CS=(-zy+dk+dx)/z. Além disso os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e portanto é dada a proporção de CS para CF, que z para e, e será* $CF=(ezy+dek+dex)/z^2$*. Analogamente, AG ou l é dada e BG é l-x, pois no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG:BT=z/t, teremos: BT=(f l - fx)/z, sendo CT=(zy+fl-fx)/z. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem – se* $CH= (gzy+fgl-fgx)/z^2$*". (DESCARTES, 2001, p. 21, 22)*

Substituindo em *CB.CF=CD.CH*, obtemos uma equação do segundo grau em *x* e *y*. Atribuindo um valor a uma das variáveis encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente encontraremos uma infinidade de pontos e a partir deles poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico. A resolução do problema de Pappus dada por Descartes é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e ao graduá-las constrói-se o sistema de coordenadas, base da Geometria Analítica.

3. Livro II

O segundo livro pode ser dividido em quatro partes. A primeira apresenta a classificação de curvas de Descartes. A segunda parte contém uma análise completa das curvas necessárias para resolver o problema de Pappus para quatro linhas e para o caso especial de cinco linhas. A terceira seção apresenta o método da normal ou da tangente. A quarta seção mostra como aplicar a Geometria para resolver problemas em Dióptrica, especificamente problemas relacionados as ovais.

3.1. Curvas Geométricas e Curvas Mecânicas

Descartes apresenta uma classificação de curvas em duas categorias. Segundo ele as curvas podem ser geométricas ou mecânicas.

Curvas geométricas: Descartes entende que:

> *[...] por geométrico é o que preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não devem excluir-se as linhas por composta que sejam, enquanto possam imaginar–se descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se sucedem, e em que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato da sua medida. (* DESCARTES, *2001, p. 29)*

No decorrer do texto ele admite como curvas geométricas aquelas geradas por um movimento contínuo e regulado, como aquele gerado por uma espécie de máquina[8] onde as engrenagens estão interligadas, veja Fig. (6), ao mover o eixo XY todos os pontos B, D, F, ... movem-se formando as curvas geométricas. As geradas por construções ponto a ponto e as dadas por uma equação algébrica também são consideradas geométricas, entretanto nem toda curva construída ponto a ponto pode ser chamada geométrica, como é o caso da quadratriz.

[8] Na engrenagem acima, considere que ao mover o eixo Y os pontos B, D, F, ... são móveis e descrevem as curvas geométricas. Os pontos A, C, E, G também são móveis.

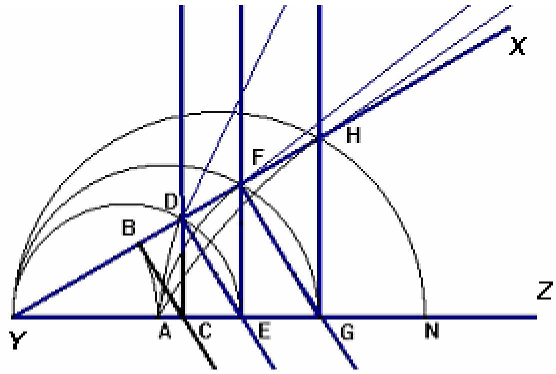

Figura 6

Curvas Mecânicas: curvas que não podem ser descritas por uma equação algébrica, mais tarde Leibniz as chamou de transcendentes, curvas descritas por dois movimentos separados, somente pontos especiais podem ser construídos, curvas que algumas vezes são retas e algumas vezes são linhas curvas, pois a proporção entre linhas retas e linhas curvas não é conhecida. Exemplos de curvas mecânicas: a quadratriz, a espiral, a hélice. Mancosu acredita que um dos critérios usados para excluir as curvas mecânicas de sua Geometria, como é o caso da quadratriz, é o fato de ela ser usada para quadrar o círculo, impossível com régua e compasso, e portanto não pode trazer nada de novo à Geometria (MANCOSU, P.78). Para Gillies a grande visão de Descartes consistia em classificar todos os problemas geométricos por meio de curvas simples que podem ser usadas para resolvê-los, veja *(GILLIES, p.101).*

3.2. Uma análise completa das curvas necessárias para resolver o problema de Pappus para quatro linhas e para o caso especial de cinco linhas

Nesta parte Descartes explora todas as possibilidades do problema de Pappus quando está proposto para quatro e três retas mostrando que não se obterá mais que as seções cônicas. O caso para três retas é realizado considerando a terceira e quarta retas coincidindo. Neste caso a proporção fica *CB.CF = CD.CD*. O caso especial para cinco retas é quando tomamos quatro delas paralelas e a quinta perpendicular as essas quatro. A estratégia básica é a mesma usada anteriormente. A generalização do problema de Pappus consiste em notar, como fez Descartes, que a distância de *C* a cada reta é uma expressão de duas variáveis do tipo $ax + by + c$ e ao substituir na condição dada teremos um produto, em cada membro, com *n* fatores para o caso de *2n* ou *2n –1* retas*.*

3.3. O método da normal (ou tangente) de Descartes.

Inicialmente Descartes aplica o método da normal à elipse*,* veja Fig. (7), e mais uma vez usa o seu método para resolver problemas em Geometria. Seja CP a reta perpendicular a elipse CE em C. CE é a elipse, MA o segmento de seu diâmetro (eixo) ao qual corresponde a ordenada CM. Seja r o latus rectum[9] e q seu eixo transverso, obtemos a eq. (1). Por outro lado usando o teorema de Pitágoras obteremos a eq. (2) . Substituindo a eq. (1) na eq. (2) obteremos a eq. (3). Como CP deve ser normal à elipse, então o círculo com raio CP deve tocar a elipse em um único ponto C, logo a eq (3) tem raiz dupla e pode ser reescrita na forma da eq. (4), onde *e* é a raiz; desenvolvendo a eq. (4), obteremos a eq. (5), comparando a eq. (3) com a eq. (5) teremos a eq. (6), resolvendo em v , obtemos a eq. (7) e como *e = y,* chegamos finalmente na eq. (8). Finalmente resta construir a equação que é a parte mais fácil. Note que o método da normal de Descartes, não utiliza a idéia de limite, idéia que surgiria um pouco mais tarde com Fermat.

$$x^2 = ry – (r/q)\, y^2 \qquad (1)$$

$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2 \qquad (2)$$

$$y^2 + (qry – 2qvy + qvy + qv^2 – qs^2) / (q-r) = 0 \qquad (3)$$

[9] Segmento com extremos sobre a elipse que passa pelo foco e perpendicular a seu eixo.

$(y-e)^2=0$ (4)

$y^2 = 2ye - e^2$ (5)

$2e = (2qv - qr)/(q-r)$ (6)

$v = (2e(q-r)+qr)/2q$ (7)

$v = (y(q-r)/q)+r/2$ (8)

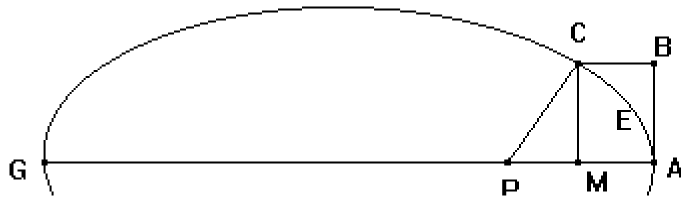

Figura 7

4. Livro III

O terceiro livro apresenta uma análise completa das raízes de equações, a regra de sinal de Descartes, a construção de todos os problemas de terceiro e quarto grau através da intersecção de um círculo e uma parábola e a redução de todos esses problemas ao da trissecção de um ângulo ou da construção dos meios proporcionais.

4.1. Considerações iniciais

O livro três começa esclarecendo quais são as curvas geométricas que devemos escolher para resolver os problemas em Geometria. Assim, diz Descartes: "não pode dizer que seja lícito servir–se da primeira que se encontra para a construção de cada problema, pois é necessário ter o cuidado de escolher sempre o mais simples que permita resolvê-lo. E é ainda necessário observar que devem entender-se por mais simples as que possam ser mais facilmente traçadas, nem as que tornam a construção ou a demonstração do problema mais fácil, mas principalmente as que, sendo da classe mais simples, possam servir para determinar a grandeza que se busca".

Apresenta, em seguida, o processo de determinar os meios proporcionais em uma construção, uma vez que isto é bastante importante na sua teoria de resolver problemas sólidos. Para ele o meio mais fácil de determinar meios proporcionais é utilizando-se da engrenagem abaixo, veja Fig. (6). Nela temos YA = YB, considerando os segmentos de origem em Y e extremidade A,C,E,G,N, etc e usando a semelhança de triângulos obtemos as proporções: $\frac{YA}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH} = \frac{YG}{YH} = \ldots$. Desse modo, YC, YD são dois meios proporcionais entre YA e YC, YD,YE são três meios proporcionais entre YA e YF, e assim sucessivamente.

4.2. Análise completa das raízes de equações

Na seqüência, Descartes coloca as propriedades das equações polinomiais com coeficiente reais e suas raízes. As raízes reais e positivas ele chama de verdadeiras e as negativas de falsas. A variável é chamada de quantidade desconhecida. O coeficiente da variável, quantidade conhecida. A ausência de um termo na equação é indicada por um sinal asterisco (*). O grau da equação é, para Descartes, a dimensão. As propriedades apresentadas na Geometria são, em muitos casos, parecidas com aquelas que encontramos nos livros de Matemática do terceiro ano do ensino médio, destaca-se entre essas propriedades a regra de sinal de Descartes. A importância dada a essas propriedades é que elas são usadas por ele para a resolver problemas em Geometria que recaem em equações algébricas. Vamos as propriedades.

A quantidade de raízes de uma equação, para Descartes, é igual a dimensão. Isto sugere que ele já conhecia o teorema fundamental da Álgebra, embora em A Geometria não apareça nenhum comentário sobre isto.

Para diminuir a dimensão de uma equação conhecendo-se uma de suas raízes, basta dividi-la pelo binômio $x - \boldsymbol{a}$, onde x é a quantidade desconhecida e ***a*** é a raiz.

Para saber se valor ***a*** é a raiz de uma equação ele procede dividindo o polinômio pelo binômio $x - \boldsymbol{a}$. Se a divisão for exata, então o valor **a** é uma raiz.

A Regra de Sinal de Descartes: para entender a regra de sinal de Descartes tomemos o exemplo dado na Geometria quando ele fala das raízes da eq. (9).

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0 \qquad (9)$$

Diz Descartes:

> *A saber: podem existir tantas verdadeiras como de vezes os sinais + e - se encontrem trocados; e tantas falsas como de vezes se encontrem dois sinais + ou dois sinais - seguidos. Assim, na última, depois de $+x^4$ segue $-4x^3$, há uma variação de sinal de + para - ; e depois de $-19x^2$ segue-se $+10x$ e depois de $+106x$ vem -120, o que corresponde a outros dois câmbios, donde se conclui que há três raízes verdadeiras; e uma falsa, em virtude dos dois sinais seguidos que antecedem $4x^3$ e $19x^2$.* (DESCARTES, 2004, p. 105 - 106)

Para transformar as raízes falsas em verdadeiras e as verdadeiras em falsas basta trocar os sinais + e - que estão nas posições pares sem trocar os das posições impares. Tomemos como exemplo a eq. 9. As suas raízes são: *2 ,3 ,4 e –5*. Depois de aplicar a técnica mencionada obtemos a eq. (10) que possui raízes *-2, -3, -4 e 5.*

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0 \qquad (10)$$

Para aumentar o valor das raízes basta fazer a substituição da variável x por outra do tipo *y-a* ou *y+a* para diminuir. Na equação eq. (10) querendo aumentar o valor das raízes de 3 unidades, basta fazer a substituição $y = x+3$ e obteremos a eq. (11) , cujas raízes são *1,0,-1 e 8.*

$$y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0 \qquad (11)$$

Aumentando as raízes verdadeiras diminuem–se as falsas, e inversamente, o que é óbvio a partir do exemplo anterior.

Para anular o segundo termo de uma equação basta diminuir as raízes verdadeiras da quantidade conhecida deste segundo termo dividida pelo número de dimensões do primeiro se estes dois termos tiverem sinais opostos; ou, tendo o mesmo sinal, aumentando as raízes da mesma quantidade. Assim, para anular o segundo termo da eq. (12) tendo dividido 16 por 4, em virtude das 4 dimensões do termo y^4, obtêm-se, fazendo $z - 4 = y$, a eq. (13) .

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0 \qquad (12)$$

$$z^4 * -25z^2 - 60z - 36 = 0 \qquad (13)$$

Para transformar as raízes falsas em verdadeiras sem que as verdadeiras se transformem em falsas basta aumentar o valor das verdadeiras de um valor que seja superior ao de qualquer as falsas.

Para transformar todos os termos de uma equação em termos significativos, por exemplo a eq. (14), multiplicando-a por x e substituindo y-a = x, obteremos a eq. (15).

$$x^5 **** - b = 0 \qquad (14)$$

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - (6a^5 + b)y + a^6 + ab = 0 \qquad (15)$$

Para multiplicar (ou dividir) as raízes sem conhecê-las por um número k basta multiplicar (ou dividir) o segundo termo por k, o terceiro por k^2, o quarto por k^3, e assim sucessivamente.

Para reduzir os coeficientes quebrados de uma equação em números inteiros, por exemplo, fazendo $y = x\sqrt{3}$, e substituindo na eq. (16), obteremos a eq. (17), finalmente fazendo z = 3y, e substituindo na eq. (17), obtemos a eq. (18), cujas raízes são 2, 3 e 4, as anteriores $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$ e as primeiras $\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

$$x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0 \qquad (16)$$

$$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}x - \frac{8}{9} = 0 \qquad (17)$$

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0 \qquad (18)$$

Para transformar uma quantidade conhecida de qualquer termo em outra quantidade qualquer dada, por exemplo, na eq. (19) , para trocar b^2 por $3a^2$ substituímos nela a eq. (20), obtemos a eq. (21) .

$$y = x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}} \qquad (19)$$

$$x^3 * -b^2x + c^2 = 0 \qquad (20)$$

$$y^3 - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0 \qquad (21)$$

Para Descartes podem existir raízes imaginárias positivas e negativas como na eq. (22), *2* é uma raiz real, as outras são imaginárias, ele diz, podem ser imaginárias falsas ou verdadeiras.

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0 \qquad (22)$$

Para dividir uma equação por um binômio que contêm a sua raiz, ele aplica, basicamente, o mesmo critério de divisão de polinômios que usamos hoje, apenas inverte, começando do último termo.

Descartes define que para um problema ser sólido, a cúbica, não pode ser divisível por nenhum binômio, ou seja, deve envolver uma cônica ou uma curva mais elevada.

A redução das equações que têm quatro dimensões quando o problema é plano. E quais são sólidos. Nesta parte ele transforma equações do tipo da eq. (23) em equações do tipo da eq. (24) usando a identidade dada pela eq. (25). A partir daí pode-se tentar encontrar y^2 e não sendo possível o problema é sólido. Descartes usa essas propriedades para resolver o problema da convergência ou da inclinação apresentado e também resolvido por Pappus.

$$x^4 * + p\,x^2 + q\,x + r = 0 \qquad (23)$$

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 + 4r)\,y^2 - q^2 = 0 \qquad (24)$$

$$x^4 * + p\,x^2 + q\,x + r = (x^2 - yx + s)\,(x^2 + yx + t) \qquad (25)$$

Em seguida apresenta a regra geral para reduzir as equações de grau superior ao quadrado do quadrado. Diz que não sendo possível obtê-las por multiplicação de outras duas de grau inferior, se a quantidade desconhecida tem 3 ou 4 dimensões o problema é sólido, se tem 5 ou 6 o problema é de grau mais elevado, e assim sucessivamente.

Forma geral de construir todas os problemas sólidos reduzidos a uma equação de três ou quatro dimensões. Se o problema é sólido podemos sempre encontrar a raiz por qualquer das secções cônicas, mas Descartes demonstra que é possível encontrar todos por meio de uma parábola.

Na seqüência explica como a invenção dos meios proporcionais é realizada através de construções envolvendo parábolas e círculos. Explica como trisseccionar um ângulo. Demonstra que todos os problemas propostos podem ser reduzidos ao problema da trissecção do ângulo e da construção dos meios proporcionais.

Finalizando Descartes explica como expressar todas as raízes das equações cúbicas e todas as que não chegam mais que o quadrado do quadrado. Por que razão os problemas sólidos não podem ser construídos sem as secções cônicas, nem os que são mais compostos sem algumas linhas mais compostas. Forma geral de construir todos os problemas reduzidos a uma equação que não tem mais de seis dimensões.

5. Bibliografia

Descartes, R A Geometria. Trad. Emídio César de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

_________________. O Discurso do Método. Trad. Pietro Nasseti. São Paulo: Martin Claret, 2002.

Forbes, E. G. . Descartes and the Birth of Analytic Geometry. London 4. p.141-151. 1977.

Gillies, D. Revolutions in Mathematics. N. York: Nova York Oxford University Press, 1992

Mancosu, P. Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century. N. York: New York Oxford University Press, 1996

Simons, G. F. Cálculo com Geometria Analítica. Trad. Seijin Hariki. São Paulo: Mac Graw Books, 1987.

6. Direitos autorais

DESCARTES' S THE MATHEMATICAL AND THE PHILOSOPHY

Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Universidade Católica de Goiás
duelci@ucg.br
duelci.vaz@ig.com.br

Abstract: *In this article I try to rescue a work that is a mark in the history of the Mathematics and of the Philosophy: Discours de la Méthod and one of their appendixes the Geometry, of René Descartes. First I establish the central ideas of the Philosophy of Descartes contained in The Discours de la Method. Then I dedicate more attention to the content of the Geometry, because, for us, Mathematical and Mathematical Educators is the most important part. The Geometry of Descartes is still today reason of debates and surprising interpretations. An important passage of the Geometry is when Descartes solves the famous problem of Pappus. He innovates when reducing it for two variables and attributing values to one of them to find the other. This passage is considered the base for the development of the Analytical Geometry and I dedicate special attention the this part. I also present the other innovations of Discards: his modern notation and the overcoming of the obstacle of the dimensionality that they impeded the Greeks of move forward of many problems. The Geometry of Descartes gives us a exact idea of as was the Mathematics of the I begin of the century XVII.*

Keywords: *Geometry, Philosophy, Descartes, Mathematics.*