UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e *adjacências*) no Ensino Fundamental

Vanderlei Rodrigues Gregolin

Orientadora:

Profª. Drª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação, área de concentração em Metodologia de Ensino.

São Carlos - SP

Março/2002

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

G819cm

Gregolin, Vanderlei Rodrigues.
O Conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no ensino fundamental / Vanderlei Rodrigues Gregolin. -- São Carlos : UFSCar, 2002.
168 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2002.

1. Educação matemática. 2. Matemática no ensino fundamental. 3. Transmigrações didáticas. I. Título.

CDD: 372.7 (20ª)

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi

Profª Drª Maria da Graça Nicoletti Mizukami

Profª Drª Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali

Prof. Dr. Mauro Carlos Romanatto

Profª Drª Vera Teresa Valdemarin

DEDICATÓRIA

aos que
participaram,
me incentivaram,
me substituíram:

meu pai, em espírito
minha mãe, Dinorah
minha tia, Dulce
minha esposa, Rosa
meus filhos, Bruno, Danilo e Marina
minha amiga, Regina

AGRADECIMENTOS

À Profª Drª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi pela orientação e paciência recebidas no desenvolvimento deste trabalho. Graças a ela a penumbra se desdobrou em luz.

À Profª Drª Maria da Graça Nicoletti Mizukami e ao Prof. Dr. Mauro Carlos Romanatto pelas sugestões dadas no exame de qualificação, que muito contribuíram para a reorganização do relatório.

A todos os professores da banca examinadora pelas contribuições na defesa da tese, especialmente nos destaques de possíveis contribuições do trabalho para a educação. Muito contribuíram, além dos professores que participaram da qualificação, as professoras Drª Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali e Drª Vera Teresa Valdemarin.

Às professoras, seus alunos e à Escola que, além de permitirem a realização deste trabalho, colaboraram, sempre, para o seu pleno desenvolvimento.

Aos professores, colegas e funcionários do PPGE pela amizade e contribuições durante todo o doutorado.

Aos colegas do Departamento de Ciências da Educação da UNESP, Campus de Araraquara, pela amizade e companheirismo.

Resumo

Este trabalho apresenta uma pesquisa de natureza qualitativa, desenvolvida em uma escola pública de São Carlos, SP.

Constituiu-se em um estudo de caso, o estudo das operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – com números naturais, nas séries finais do primeiro ciclo do ensino fundamental.

A partir da discussão do desenvolvimento dessas operações nas classes observadas e na literatura, buscando maior compreensibilidade, objetivou-se a proposição de *ajustes* nos algoritmos usuais ou algoritmos alternativos para as quatro operações.

Como meio de suporte e em decorrência do estudo dos algoritmos, outros elementos do conhecimento matemático escolar foram investigados: Sistemas de Numeração, expressões numéricas, sentenças matemáticas e a tabuada.

Durante um ano letivo foram observados blocos de aulas em seis classes, cadernos de alunos e provas. As observações de aulas se concentraram em duas classes: terceira série E e quarta série E, consideradas pelo conjunto de professoras das duas séries como classes de alunos fracos. As professoras de matemática das duas séries lecionaram somente essa disciplina, uma delas nas terceiras séries e a outra, nas quartas séries.

São propostos, a partir da pesquisa, a transmigração didática para a (re)significação de conhecimentos matemáticos escolares e, como elementos possíveis de iniciar transmigrações didáticas, o uso do algoritmo da subtração por invariância da diferença, adaptações ao algoritmo usual da multiplicação e um algoritmo alternativo para a divisão, além de sugestões quanto aos Sistemas de Numeração, expressões numéricas, sentença matemáticas, tabuada e alguns outros elementos do conhecimento matemático escolar.

Abstract

The present work concerns a research of qualitative nature developed in a public school in São Carlos, SP.

It consists of a case study of the study of the basic operations of addition, subtraction, multiplication, and division, with natural numbers, in the final grades of the first cycle of fundamental teaching.

From the discussion of the development of these operations in the observed grades as well as in literature, aiming easier comprehension, the proposition of adjustments on natural algorithms or alternative algorithms was sought for the four operations.

As means of support, and also in consequence of the study of the algorithms, other elements of mathematical knowledge were investigated: number systems, numerical expressions, mathematical sentences, and the multiplication tables.

During a single school year, the teaching in six classrooms, student notes, and tests were observed. The observations regarding the examined classes were focused in two rooms of the third and fourth grades, considered by the faculty as rooms of low achievement students. The math teachers of both rooms only taught this discipline, one at all of the third grade rooms, the other at all of the fourth grade rooms.

Based on this research, the didactical transmigration for the (re)signification of mathematical school knowledge was proposed, and, as elements able to trigger didactical transmigrations: the use of the subtraction algorithm by difference invariance; adaptations to the usual multiplication algorithm; an alternative algorithm for division. Suggestions regarding the number systems, numerical expressions, mathematical sentences, multiplication tables, and other elements of mathematical school knowledge, were also made.

Sumário

I. Introdução 1

II. O problema da pesquisa: contexto e justificativa 4

III. Metodologia 9

- Sobre a professora das terceiras séries 20
- Sobre a professora das quartas séries 21
- Sobre a Escola 22

IV. O Conhecimento Matemático Escolar investigado 25

- IV.1. Sistemas de Numeração 40
  - Sistemas de Numeração Egípcio e Maia 40
  - Sistema de Numeração Romano 42
  - Sistema de Numeração Decimal 45
- IV.2. Operações com Números Naturais 54
  - Adição 54
  - Subtração 65
  - Multiplicação 71
  - Divisão 96
- IV.3. Complementos sobre as Operações 120
  - Expressões com Números Naturais 120
  - Sentenças Matemáticas 129
- IV.4. Algumas Sementes 136
  - Compreender o entendimento 143
  - Democracia sem caos 144
  - A *invariância* que se fortalece no retorno 144
  - Propagação de abrangências 144
  - Estimativas tabeladas 145
  - Decifra-me, devora-me 145
  - Lupa conceitual 145
  - Pingos nos “is” 145
  - Muito além do nada 145
  - Sintaxe do objeto indireto 145
  - Complementos 146
    - Raios e trovões 146
    - Dimensionar o enquadramento 146
    - Endereço para corresponder 146
    - Meias palavras 146
    - Levantar o véu 146

V. Considerações Finais 147

Referências bibliográficas 157

Anexo I - Atividades desenvolvidas 162

Anexo II – Conteúdos desenvolvidos 167

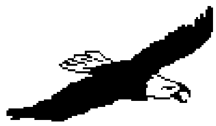
23/10/2001[1]

Hoje eu apaguei 99% do meu passado digital. 90% por livre e espontânea vontade. 9% por acidente **:-)**. Resultado: esterilização total **:-P**. Falta ainda a parte física, que vai sumir aos poucos.

Por isso, se você deseja saber algo sobre mim, concentre-se no que eu sou, não no que eu fui ou poderia ter sido.

O texto abaixo e o sonho que tive nessa noite foram as gotas d'água que me levaram a adotar essas medidas.

Renovação



A águia é a ave que possui a maior longevidade da espécie. Chega a viver 70 anos. Mas, para chegar a essa idade, aos 40 anos ela tem que tomar uma séria e difícil decisão.

Aos 40 anos está com as unhas compridas e flexíveis, não consegue mais agarrar as suas presas das quais se alimenta. O bico alongado e pontiagudo se curva. Apontando contra o peito estão as asas, envelhecidas e pesadas em função da grossura das penas, e voar já é difícil.

Para a águia há apenas duas alternativas: morrer... ou enfrentar um dolorido processo de renovação que irá durar 150 dias. Esse processo consiste em voar para o alto de uma montanha e se recolher em um ninho próximo a um paredão de onde ela não necessite voar.

Então, após encontrar esse lugar, a águia começa a bater com o bico em uma parede até conseguir arrancá-lo, ignorando a dor que terá de suportar. Após arrancá-lo, espera nascer o novo bico, com o qual vai depois arrancar as velhas unhas. Quando as unhas novas começam a nascer, ela passa a arrancar as velhas penas. E só após cinco meses, sai para o famoso vôo de renovação, para viver, então, mais 30 anos.

Em nossa vida, muitas vezes temos de nos resguardar por algum tempo e começar um processo de renovação. Para que continuemos a voar um vôo de vitória, devemos nos desprender de lembranças, costumes e outras tradições que nos puxam para trás.

Somente livres do peso do passado, poderemos aproveitar o resultado valioso que uma renovação sempre traz.

[1] De um internauta. Acessado em 27/01/2002: <http://www.ceat.net/~arkanon>; gire 90 graus (você, no sentido anti-horário, ou o texto, no sentido horário) para observar os *emoticons* → **:-)** e **:-P**

I. Introdução

Marin (1996, p.155) apresenta considerações a partir de pesquisas sobre o ensino fundamental que contaram com sua participação, realizadas de 1983 a 1990:

- Professores das séries iniciais têm carências no domínio dos conteúdos representativos das várias áreas do conhecimento.
- Quando têm melhor domínio de tais conteúdos, seus saberes assentam-se em concepções mecanicistas, míticas, utilitaristas.
- Professores de todas as séries escolares têm dificuldades em relação a aspectos pedagógicos: avaliação, disciplina, seleção de conteúdos a serem ensinados, seleção de atividades variadas e compatíveis com as noções a serem trabalhadas, adequação do trabalho para as classes que assumem.
- Professores não percebem com clareza a diferença entre as várias séries do primeiro grau, não compreendendo bem o significado das mesmas no percurso escolar das crianças.
- Professores não percebem a presença das profecias auto-relizadoras em suas ações.

A partir dessas constatações, objetivando verificar se é recente a referência a essa temática, a autora levantou na bibliografia brasileira informações sobre dificuldades enfrentadas por professores em seu trabalho e em cursos de formação básica. Verificou que essas dificuldades não são novidades, sendo relatadas, entre outros, por Caldeira (1956), Lima (1966), Pires (1969), Teixeira (1969), Pinheiro & Pinheiro (1969), Mello (1971), INEP (1971; 1976), Barreto (1975), Bernardes (1976), Noronha (1982), Souza (1970).

A permanência das dificuldades dos professores pode ser, de certa forma, explicada pelo *buraco negro* entre dois mundos: aquele em que o conhecimento científico é produzido e o mundo em que vive o professor (Moysés & Collares, 1996).

> O buraco negro, visto a uma distância suficiente, revela-se como a boca de um enorme bicho-papão. Um bicho papão que come todos nós, todas as idéias, todas as teorias que surgem são engolidas pelo bicho-papão. Que come, que digere e assimila o que quer. Um bicho-papão que tem se fortalecido, se alimentado das teorias, do pensamento científico, até mesmo do que pretende enfrentá-lo (p.112).

Mello (2001) discute a formação inicial dos professores no Brasil:

> a divisão entre o professor polivalente e o especialista por disciplinas teve na educação brasileira um sentido burocrático-corporativo. Pedagogicamente não há nenhuma sustentação consistente para uma divisão que em parte foi causada pela separação histórica entre os dois caminhos de formação docente: o normal de nível médio e o superior (p.150).

Mesmo quando a formação do professor das séries iniciais do ensino fundamental passou a ser feita também em nível superior, nos cursos de Pedagogia (meados da década de 1970), a segmentação tradicional foi mantida:

> o «lócus» dessa formação não foi o mesmo das licenciaturas e sim os cursos de pedagogia nas faculdades de educação. ... A distância entre o curso de formação do professor polivalente situado nos cursos de Pedagogia e Faculdades de Educação, e os cursos de licenciatura nos departamentos ou institutos dedicados à «filosofia», às «ciências», e às «letras», imprimiu àquele profissional uma identidade pedagógica esvaziada de conteúdos (Mello, 2001, p.150).

A autora ressalva, em nota de rodapé, que há exceções, mas na direção mais geral, encontramos cursos de Pedagogia com quatro anos de duração, voltados para a formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental, que destinam uma carga horária mínima para o estudo de cada uma das disciplinas que serão ensinadas pelos futuros professores.

Monteiro (2001) aponta uma possível causa para essa desconsideração para com os saberes ensinados:

> seja no chamado modelo diretivo “tradicional”, que privilegia a relação professor-saber, fundamentado na racionalidade técnica, como naquele não-diretivo, que privilegia a relação aluno-saber, o saber não é questionado. É, geralmente, um conhecimento universal que está posto, nos currículos ou livros didáticos, para ser ensinado. Discute-se muito os aspectos relacionais, importantes no processo, a forma de se incorporar os saberes e interesses dos alunos, mas em relação aos saberes ensinados, as preocupações são apenas de ordem de organização e didatização (p.122).

Em relação ao conhecimento matemático nas séries iniciais do Ensino Fundamental, a formação inicial do professor deixa a desejar e pode-se pensar em alguns complicadores.

Os conteúdos a serem apropriados pelos alunos requerem, por parte dos professores, o conhecimento de outros conteúdos relacionados, que não constam dos currículos das séries iniciais, mas são necessários (ao professor) para o conhecimento aprofundado, na perspectiva do ensino competente. Por exemplo, números inteiros negativos geralmente não são ensinados e não constam dos livros didáticos das séries iniciais, mas o próprio aluno pode *tropeçar* no conceito e o professor deve dar conta de discutir, esclarecer e incentivar novos *achados* do aluno. Números inteiros, equações, probabilidade, análise combinatória são exemplos de conteúdos matemáticos que não são, na maioria das vezes, ensinados nas séries iniciais, mas deveriam ser aprendidos pelos professores, na perspectiva do ensino da matemática.

A matemática moderna é um outro complicador. Introduziu a teoria dos conjuntos "a partir do jardim da infância como se os estudantes morressem de fome, pelo menos mentalmente, se não tivessem esta dieta" (Kline, 1976, p.108).

Kline situou a teoria dos conjuntos na matemática elementar como "um formalismo oco que dificulta idéias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente" (p.120), o que resultou em uma desvalorização da compreensão e da intuição no ensino da matemática elementar. Influências negativas desse enfoque *moderno* podem estar presentes no ensino da matemática nas séries iniciais, inclusive explicitamente em livros usados. Por exemplo, um dos capítulos de um livro usado por uma das professoras que participou deste trabalho tem como título "Conjuntos e Relações" (Meirelles & Miranda, 1993, v4).

Os problemas que ocorrem no ensino de matemática nas séries iniciais não são de responsabilidade exclusiva dos professores dessas séries – talvez uma parcela muito pequena ou nenhuma caiba a eles –, mas tais problemas vêm se perpetuando e devem ser investigados na escola e seu cotidiano. É nessa perspectiva que esta pesquisa foi proposta, buscando alternativas para minimizar os efeitos do *bicho-papão* que interfere na relação conhecimento x prática do professor.

II. O problema da pesquisa: contexto e justificativa

A relação dos professores com os saberes que ensinam, fundamental para a atividade docente, tem merecido pouca atenção dos pesquisadores em educação (Tardif et al., 1991; Lelis, 2001; Monteiro, 2001; Nunes, 2001), que estão "mais voltados para outros aspectos igualmente importantes da atividade educativa, tais como as questões relacionadas à aprendizagem, aos aspectos sociais e políticos envolvidos" (Monteiro, 2001).

Nunes (2001) discute o texto apresentado por Fiorentini et al. (1998), mostrando a tendência atual das pesquisas, em nossa realidade, de valorizar o estudo dos saberes docentes na formação de professores. Comenta como evoluiu, segundo Fiorentini, a valorização dos saberes docentes:

> de uma valorização quase exclusiva do conhecimento (isto é, dos saberes específicos) que o professor tinha sobre a sua disciplina, característica da década de 1960, passa-se, na década de 1970, à valorização dos aspectos didáticos-metodológicos relacionados às tecnologias de ensino, passando para um segundo plano o domínio dos conteúdos. Nos anos de 1980, o discurso educacional é dominado pela dimensão sócio-política e ideológica da prática pedagógica. A idealização de um modelo teórico para orientar a formação do professor conduzia a uma análise negativa da prática pedagógica e dos saberes docentes. ... Já os anos 1990 foram marcados pela busca de novos enfoques e paradigmas para a compreensão da prática docente e dos saberes dos professores, embora tais temáticas ainda sejam pouco valorizadas nas investigações e programas de formação de professores (p.29-30).

Monteiro (2001) destaca os autores Tardif (et al., 1991; 1999), Perrenoud (1993; 1999a), Therrien (1996), Moreira (et al., 1998) que usaram a categoria "saber docente" para focalizar as relações de professores com os saberes

> que dominam para poder ensinar e aqueles que ensinam, sob uma nova ótica, ou seja, mediadas por e criadoras de saberes práticos, que passam a ser considerados fundamentais para a configuração da identidade e competência profissionais (p.123).

Além da importância desses trabalhos, a autora destaca a necessidade da concentração de esforços apoiada por especialistas das diferentes áreas de conhecimento específico:

> mesmo esses trabalhos, que representam um avanço significativo para a compreensão da especificidade da ação docente, ainda se ressentem da ausência de pesquisas que direcionem o foco de análise mais diretamente sobre a relação dos professores com os saberes que ensinam, tarefa esta que, certamente, demanda um esforço de especialistas das diferente áreas de conhecimento específico (Monteiro, 2001, p.123).

Reportando-se mais especificamente ao ensino de matemática, Tancredi identifica um círculo vicioso:

> quando não dominam com profundidade aquilo que ensinam, os professores ensinam da forma como aprenderam, ou seja, ensinam por meio de regras. Estabelece-se assim um círculo vicioso: quem não sabe ensina; quem precisa aprender decora; quem decora se torna professor e ensina. E melhores condições de aprendizagem dependem, muito diretamente, da atuação desses professores (Tancredi, Regina M.S.P., não publicado).

O professor das séries iniciais e o professor desse professor – no curso de formação de nível médio ou no curso de Pedagogia – podem não ter consciência da complexidade que envolve conceitos e procedimentos matemáticos aparentemente simples como, por exemplo, a divisão de números naturais.[2] O professor do professor não tem, geralmente, contato direto com o aluno das séries iniciais.

Além desses *desencontros de conhecimentos*, interpretações equivocadas de trabalhos importantes para a educação também podem manter o círculo vicioso. Por exemplo, em relação a Schön (1992) – trouxe à luz o recurso à reflexão –, Lüdke (2001) comenta que “o componente da reflexão passou a ser considerado imprescindível para o trabalho e para a formação do bom professor, correndo o risco de ser tomado como garantia suficiente para tanto” (p.77).

Como romper o círculo vicioso que envolve o conhecimento matemático nas séries iniciais do ensino fundamental?

---

[2] Principalmente aqueles sem formação específica em matemática.

Pais (1999) se apóia em Brousseau (1988) para diferenciar conhecimento e saber, no contexto do ensino da matemática. Na sua análise, "o saber aparece associado ao problema da validação do conhecimento, que, no caso da matemática, é a questão do raciocínio lógico-dedutivo" e o conhecimento "aparece vinculado mais ao aspecto experimental, envolvendo algum tipo de ação com a qual o sujeito tenha um contato pessoal" (p.15).

O conhecimento escolar tem como fonte original o saber científico. A partir de sua origem, o saber a ser ensinado sofre transformações adaptativas tornando-se um objeto de ensino. O processo que, de um objeto de "saber a ensinar" resulta num "objeto de ensino" é chamado de transposição didática (Chevallard, 1991).

Além do saber científico, cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação influenciam na trajetória percorrida pelo saber até se consubstanciar no conhecimento escolar (Pais, 1999).

Portanto, o conhecimento escolar é situado e historicamente determinado, mas se muitos alunos – ensinados por muitos professores e em muitas circunstâncias – não conseguem aprendê-lo bem, esse conhecimento deve ser investigado.

Estendendo a noção de transposição didática, visualizo uma *transposição didática de segunda ordem* a qual chamarei *transmigração*[3] *didática.*

O conhecimento escolar abrange conteúdos e procedimentos que estão postos – pela tradição, reformas, livros didáticos –, muitos deles não são questionados e se estabeleceram, também e principalmente, através da transposição didática, na perspectiva de "objetos de ensino", *filtrados* por professores e políticas educacionais.

Esses conteúdos e procedimentos podem ser investigados na perspectiva de "objetos a serem apreendidos", *filtrados* pelo *olhar* de quem procura enxergar através do olhar do aluno.

[3] Transmigrar: mudar-se de um lugar para outro; passar de um corpo para outro (a alma) [Ferreira, 1993 – dicionário].

A *transmigração didática* desabrocha quando um conhecimento escolar que está posto, na perspectiva de ensino é adaptado na perspectiva de aprendizagem, havendo uma ruptura ou *transformação* significativa na forma de apreensão ou compreensão desse conhecimento, aumentando a probabilidade de sua aprendizagem ou da aprendizagem de outros conhecimentos a partir desse.

A *transmigração didática* se estabelece se a nova forma de apreensão ou compreensão do conhecimento é aceita e socializada, aumentando a probabilidade de aprendizagem do – ou através do – conhecimento.

O conhecimento em si se modifica? Não necessariamente, mas a probabilidade de sua aprendizagem ou de sua influência positiva na aprendizagem de outros conhecimentos, sim.

Como medir essa probabilidade? O processo é fundamental e o produto é conseqüência. Havendo uma transmigração didática (já foi socializada), o professor e o aluno sentirão seus efeitos e, em decorrência, devem aumentar as probabilidades de ocorrência do interesse por novas transmigrações de ambos e, por parte do professor, o interesse por essa idéia. O crescimento da ocorrência de transmigrações didáticas garante as probabilidades internas.

A quem compete a busca por transmigrações didáticas? Ao sistema educacional como um todo, mas iniciada – neste momento da história dos conhecimentos escolares – pelo especialista em duas especialidades: na área específica do conhecimento escolar e em educação. O envolvimento do ambiente escolar se faz necessário para que o investigador possa focar seu olhar pelo olhar do aluno.

Em decorrência de uma maior significação dos conhecimentos escolares ou do próprio conhecimento, o professor, o professor do professor e o próprio aluno podem iniciar uma transmigração didática.

Na contramão dessa idéia está a inércia a que tende o sistema educacional. Pode não ser fácil, para o professor, aceitar uma nova *abordagem* de um conhecimento escolar, tida e proposta por outro como mais eficiente na perspectiva da aprendizagem.

O professor pode estar certo. Certamente muitas vezes estará. Seu crivo é necessário e acrescenta uma nova dimensão à transmigração didática.

Olhar através do olhar do aluno é fundamental para a *garimpagem* de conhecimentos passíveis de transmigrações didáticas. Colocar-se na perspectiva do professor é necessário para lançar a semente ou esta não vingará. Essa e outras *dimensões* ou contribuições decorrentes de sucessos na busca de (re)significações de conhecimentos devem ser incorporadas à idéia, aumentando sua probabilidade de ocorrência.

Em relação ao conhecimento matemático, a garimpagem deve procurar identificar elementos de *uma matemática* que escraviza ao invés de libertar, enerva ao invés de gratificar, limita ao invés de romper.

A proposta deste trabalho é investigar o conhecimento matemático escolar nas séries iniciais do ensino fundamental, na perspectiva de iniciar a germinação de sementes que poderão se consolidar em transmigrações didáticas.

Para a garimpagem inicial, as quatro operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – com números naturais serão focadas.

Outros elementos do conhecimento matemático escolar, envolvidos nas – ou decorrentes das – quatro operações serão, também, investigados.

Quanto ao círculo vicioso anteriormente referido – quem não sabe ensina; quem precisa aprender decora; quem decora se torna professor e ensina –, vislumbro uma luz na transmigração didática, cuja origem se deve, também, à busca do rompimento desse círculo. Essa luz ainda é difusa e é necessário melhor compreender sua natureza para, adiante, procurar derramá-la sobre o círculo.

III. Metodologia

Os dados deste trabalho foram levantados em uma escola pública estadual de São Carlos - SP, que mantém as séries inicias do ensino fundamental – 1ª a 4ª séries.

Duas professoras participaram da pesquisa. Uma delas ministrou as aulas de matemática em todas as três terceiras séries do período da tarde e a outra, todas as aulas de matemática das três quartas séries do mesmo período.

Nessa escola, no ano em que foram levantados os dados, todas as aulas de uma classe de primeira ou segunda série foram ministradas por uma única professora.

Nas terceiras de cada período, uma professora lecionou Matemática, outra, Língua Portuguesa e uma terceira, Estudos Sociais e Ciências. O mesmo ocorreu nas quartas séries.

A disciplina Educação Física coube à professora coordenadora da classe e cada uma das professoras participante da pesquisa coordenou uma. Dessa forma, a terceira e a quarta séries coordenadas por essas professoras teriam menos aulas de matemática que as demais terceiras e quartas do período da tarde. Este fato não se concretizou, pois as aulas de Educação Física não foram ministradas.

"Matemática, Tartaruga Logo e Formação de Professores: Investigando Inter-Relações" foi o nome inicial do projeto de pesquisa. Explorações de conceitos matemáticos com a Tartaruga Logo,[4] realizadas por alunos das sextas séries do ensino fundamental (Gregolin, 1994), embasavam a proposta de investigação que eu pretendia desenvolver na escola. Estavam previstas observações de aulas e atividades no computador através da linguagem computacional Logo.

[4] Animalzinho cibernético observável nas telas dos computadores quando se usa a linguagem computacional Logo.

Essas atividades deveriam ocorrer nos horários de HTP, horário de trabalho pedagógico, em que as professoras se reuniam com a coordenadora pedagógica e com a direção da escola. Em contatos anteriores ao início da pesquisa, com a direção da escola e as professoras, combinou-se que parte desses horários seria disponibilizada para os trabalhos no computador. Mas, iniciado o trabalho através de observação de aulas, verificou-se que não seria possível o uso de horários de HTP para o que se pretendia, pois o HTP foi organizado de forma que a presença das professoras seria sempre obrigatória.

As professoras que participaram da pesquisa não mostraram interesse em participar de encontros usando o computador em horário diferente do HTP.

As atividades previstas inicialmente com o computador visavam, principalmente, explorações – da geometria, do cálculo mental e de idéias de programação – e resolução de problemas; as observações de aulas nas duas séries mostravam que muitos alunos apresentavam dificuldade para efetuar operações matemáticas simples, como por exemplo, subtrações.

A dificuldade para conseguir uma forma de viabilizar, nessa escola, o uso do computador e os problemas detectados em relação às operações matemáticas resultaram em um novo objeto de estudo: o conhecimento matemático nas séries iniciais do ensino fundamental.

As salas usadas para as aulas de matemática das terceiras e quartas séries foram salas-ambiente: uma sala para cada série. Estavam disponíveis nessas salas, livros de matemática de vários autores – cada livro em número suficiente para atender uma classe – e outros materiais: AM (São Paulo, 1988), Material Dourado, cartolina etc.

As carteiras individuais estavam agrupadas duas a duas. No ano anterior, algumas professoras quiseram e puderam usar as carteiras separadas, mas no período da pesquisa o agrupamento foi obrigatório.

Foram observados trinta e cinco blocos de duas ou três aulas no ano de 1999. As classes 3ª E e 4ª E foram observadas onze e dez vezes cada uma, respectivamente. Essas classes foram priorizadas por apresentarem, segundo as professoras das séries, um número maior de alunos com dificuldade de aprendizagem em relação às outras da mesma série, o que viabilizou um contato maior com as dificuldades dos alunos.

As observações nas outras classes deveriam ser aproximadamente três – apenas na 4ª D foram duas, por mudança de horário nos dias previstos. As observações nessas classes ocorreram buscando uma visão geral do desenvolvimento do conteúdo curricular nas diversas classes.

No quadro abaixo estão especificados os dias em que ocorreram as observações:

Mês			03	04				05	09				10							11		
Dia			30	6	13	20	27	11	22	23	29	30	6	7	13	14	20	21	28	19	24	26
Classe	**3ª**	**D**	X																		X	X
		E		X	X	X	X			X		X		X		X		X		X		X
		F										X			X		X		X	X		
	4ª	**D**									X							X				
		E		X	X		X	X	X		X		X		X		X			X		
		F	X										X			X			X			

As observações de aulas iam se sucedendo e me convencendo da importância de aprofundamento na investigação do conteúdo específico da matemática estudada nas terceiras e quartas séries. O estudo estava se configurando em um estudo de caso, mas o próprio caso ainda não estava bem delineado. Segundo Lüdke & André (1986) e Bogdan & Biklen (1994), o estudo de caso pode ter seu foco determinado no decorrer do trabalho.

Minha intenção não foi analisar a prática de cada uma das professoras. Para isso entendo que seriam necessárias – no meu caso, como investigador – observações de um número bem maior de aulas e, também, que essas aulas fossem em seqüência.

Mesmo para a investigação da matemática estudada, as observações precisaram ser complementadas, o que se deu através dos registros nos cadernos e provas de um aluno de cada série.

As duas professoras indicaram os materiais de uma aluna da terceira série “D” e de um aluno da quarta série “D”, argumentando que a variação de uma classe para outra seria mínima. De fato, não constatei diferenças significativas nos registros desses cadernos e nos registros das observações de aulas de todas as classes.

Cada aula foi registrada em um caderno da classe: “caderno piloto” ou “caderno volante”, geralmente por um aluno e eventualmente pela professora. O aluno designado para usar esse caderno, nele copiava a matéria e resolvia os exercícios propostos. A cada dia um novo aluno fazia esse registro e emprestava o material de um colega para, em casa, atualizar o seu.

Através desse caderno a coordenadora pedagógica da escola verificava, mensalmente, o desenvolvimento do programa de cada uma das classes.

Geralmente, após o intervalo, o conteúdo estudado por uma classe estava na lousa e era usado pela outra.

O caderno piloto e a sala ambiente – aproveitamento da lousa – contribuíram para o desenvolvimento do programa de forma muito próxima nas diversas classes de uma mesma série.

Eram três horas-aula no início do período e duas após o intervalo, correspondendo, geralmente, a blocos contínuos de aulas. Em algumas classes constou do horário uma aula isolada de uma hora-aula.

Analisando os cadernos dos dois alunos, concluí que era necessário restringir o conteúdo a ser discutido. Fui professor de quinta a oitava séries do ensino fundamental (na época, primeiro grau) e quando as professoras das quartas séries perguntavam aos professores das quintas séries o que os alunos deveriam saber, respondíamos: as quatro operações e resolver problemas. Poucas palavras. De pouco, só palavras.

Não é impossível, mas é difícil que um aluno consiga resolver muitos problemas sem saber as quatro operações, mesmo porque resolver as operações através de cálculo mental é saber resolver.

Colocando melhor, é impossível resolver problemas que envolvam as quatro operações sem saber – qualquer que seja o processo – resolvê-las.

Essas questões determinaram um afunilamento no meu "caso" e meu foco se restringiu ao estudo das quatro operações fundamentais: adição, subtração multiplicação e divisão de números naturais, nas terceiras e quartas séries do ensino fundamental.

Com esse novo foco retomei as observações de aulas, os cadernos, as provas. Novas questões surgiram. Algumas vieram da qualificação.

Minha atenção esteve sempre mais voltada para o conteúdo da matemática escolar em si mesmo. Não era o ensino das quatro operações que me instigava, mas elas próprias. Qual seria minha possível contribuição?

A disciplina matemática é amada por alguns e odiada por muitos, necessária para todos e desprezada por tantos. Pensando nesses *quase paradoxos* e nas quatro operações presentes nos meus dados coletados, uma nova restrição se apresentou.

Os algoritmos!

Na história da matemática encontramos diferentes algoritmos para cada operação e nesse sentido cada algoritmo "é resultado de uma formação social e, portanto, está relacionado aos valores e à produção de uma dada cultura" (Nazareth & Sanchez, 1994, p.52).

Os algoritmos informais que os alunos usam (ou deveriam usar) devem ser incentivados, discutidos e usados na (re)construção de um algoritmo formal.

Para que isso ocorra, o algoritmo tomado como meta deve ser compreensível e favorecer novas compreensões, como por exemplo, a da própria operação.

A compreensibilidade do algoritmo supõe o conhecimento das propriedades matemáticas envolvidas e a clareza de sua representação. A síntese cultural que o algoritmo encerra em relação à história da matemática deve se consubstanciar na síntese da operação pelo aluno.

Supondo razoável essa compreensão de um algoritmo para uma operação, os algoritmos nos meus dados coletados vão nessa direção? Ou ainda, os algoritmos formais, entendidos como metas e sínteses culturais e pessoais, são compreensíveis e favorecem novas compreensões? Certamente não, em relação a muitos alunos que contribuíram com suas dúvidas neste trabalho. Provavelmente também não, em relação a muitos outros alunos. E professores.

Restrição de segunda ordem: restrição na restrição. Novo afunilamento para o foco deste estudo: o estudo dos algoritmos das quatro operações.

Mesmo antes dessa nova restrição, uma ampliação se fez necessária. Envolvendo e antecedendo as operações está o Sistema de Numeração Decimal que usamos, o Sistema de Numeração Indo-arábico, que tem sua compreensibilidade ampliada se apoiada em outros Sistemas de Numeração.

Portanto, para o estudo dos algoritmos das quatro operações nas séries iniciais do ensino fundamental – operações com números naturais –, os Sistemas de Numeração também foram investigados e, por sua precedência, os primeiros discutidos.

Propriedades das operações, números racionais, problemas, geometria e muitos outros elementos do conhecimento matemático escolar poderiam ter sido analisados.

Não foram por duas razões: para que o relatório desta pesquisa não se estendesse demais e, também, para que a questão dos algoritmos não ficasse por demais diluída.

Retomando meus dados tendo como meta a discussão de algoritmos mais compreensíveis e registrando essas discussões, outros elementos do conhecimento matemático escolar foram se incorporando, como, por exemplo, as tabuadas.

Pensando novamente, decidi não especificar "os algoritmos" no título deste trabalho e na colocação da questão da pesquisa. Retorno, então, para o estudo das quatro operações com números naturais que, como no processo de decisão do que pesquisar, foi incorporando *adjacências* do conhecimento matemático escolar à medida que foi sendo discutido.

Nessas adjacências decidi acrescentar outras duas que foram exploradas nas classes participantes da pesquisa: expressões com números naturais e sentenças matemáticas. As expressões, por serem aplicações diretas das operações e as sentenças matemáticas – equações – por envolverem, nas suas resoluções, expressões.

Uma idéia antecedeu e permeou este trabalho. A princípio de forma etérea, se solidificando no seu desenvolvimento: a valorização da compreensibilidade do conhecimento matemático escolar.

Essa compreensibilidade envolve a formação do professor e os conhecimentos matemáticos em si e é, também, uma questão central neste trabalho.

Uma simples vírgula pode mudar completamente o sentido de uma frase. Uma incompreensão pode estraçalhar uma idéia interessante.

Para especificar o que se pretendeu, na busca da compreensibilidade do conhecimento matemático escolar, propus a identificação de sementes de possíveis transmigrações didáticas: (re)significações desse conhecimento na perspectiva de maior probabilidade de aprendizagem.

Com as características apresentadas, este trabalho configurou-se em um estudo de caso: o estudo do conhecimento matemático escolar nas séries finais do primeiro ciclo do ensino fundamental, tendo como ponto de partida as quatro operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – com números naturais, objetivando sementes de transmigrações didáticas.

De acordo com Marli André, “quando queremos estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo, devemos escolher o estudo de caso” (Lüdke & André, 1986, p.17). Além da consideração do valor do conhecimento matemático escolar estar na base, no princípio deste trabalho, espero que seu desenvolvimento possa contribuir para uma valorização mais ampla desse conhecimento, por exemplo, nos cursos de formação.

Também estão presentes neste trabalho outras características de um estudo de caso, destacadas por Lüdke & André (1986):

- A busca de elementos passíveis de aumento na compreensibilidade do conhecimento matemático escolar;
- A “interpretação em contexto” desse conhecimento;
- A apresentação da inter-relação professor-aluno-conhecimento matemático;
- As diversas fontes de dados utilizadas: aulas, cadernos, provas, entrevistas;
- Permite “generalizações naturalísticas”. O leitor pode adaptar ou confirmar elementos do trabalho no seu próprio;
- Várias conclusões ou decisões cabem ao leitor;
- Linguagem acessível.

A natureza de um estudo de caso pode ser qualitativa. É o caso desta pesquisa, que apresenta as características de uma investigação qualitativa destacadas por Bogdan & Biklen (1994):

- Coletei meus dados na – e a partir da – sala de aula, o *ambiente natural* da pesquisa;
- A apresentação dos dados se deu de forma descritiva, com destaque para a interação professor–alunos;
- O estudo foi se configurando enquanto os dados foram coletados ou analisados. Várias hipóteses e proposições foram construídas a partir dos dados;
- A significação do conhecimento matemático no contexto escolar foi um dos elementos norteadores do trabalho.

Além de sua natureza qualitativa, este estudo é também um estudo de caso de observação participativa, embora muita participação tenha sido casual. Procurei interferir o mínimo possível no andamento das aulas.

Eventualmente um aluno pedia para que eu sentasse em uma carteira próxima. Sempre sentei na última carteira em um dos cantos da sala. Se necessário, deslocava uma carteira vazia.

Mantive alguns diálogos muito rápidos, iniciados por alunos. Não chegamos a levar “pito” da professora por isso. Por exemplo: “Tio, o tio entende sua letra?”. Respondi: “Com esforço”.

Minha letra já é complicada e, nas anotações rápidas, torna-se quase ilegível para outros. A pedido das professoras não usei gravador, mas certamente elas tiveram dificuldade para entender alguma coisa quando se aproximaram.

Em uma ocasião a professora conseguiu ler uma anotação sobre uma mãe que mandou um bilhete e, provavelmente em decorrência dessa leitura, mudou de lugar uma menina.

A mãe dessa aluna solicitara a mudança de lugar, pois um menino sentava na carteira ao lado da menina. A princípio a professora ignorou o bilhete.

Os alunos perceberam minha intenção de não interferir e não se acanharam. Por exemplo, cutucões escondidos da professora ocorreram ao meu lado.

Aceitei alguns presentes de alunos: umas três balas que guardei, leque e porta retrato de papel.

Quanto ao conteúdo matemático ensinado, quase nunca discuti com as professoras. Em algumas oportunidades não pude deixar de participar.

Resolvi, a pedido das professoras, uma relação de dez problemas propostos pela Diretoria de Ensino para ser resolvida pelos alunos que fariam recuperação paralela. Entreguei a resolução com alguns esquemas e comentários.

Em outra oportunidade, a professora das quartas séries comentou que não usava a subtração por invariância da diferença porque não dava para justificar. Mostrei como poderia ser feita a justificação, no meu caderno de anotações, na *minha* carteira.

Esses dois momentos serão discutidos oportunamente.

Em uma aula, a professora ensinava geometria. Perguntou se retas perpendiculares são, também, concorrentes. Concordei. Na mesma aula perguntou se todas as retas que não se cruzam são paralelas. Mostrei com dois lápis que as retas reversas não se cruzam e não são paralelas. Ative-me às duas questões colocadas pela professora, o que praticamente não alterou o curso da aula.

Retas reversas não são coplanares e essa condição não foi esclarecida. Sua dúvida deve ter surgido a partir dos movimentos que um aluno fazia com dois lápis. Para que a professora pudesse discutir com esse aluno, precisaria conhecer elementos de geometria espacial, não ensinada no primeiro ciclo do ensino fundamental, mas necessária ao professor para lidar com as possíveis colocações dos alunos.

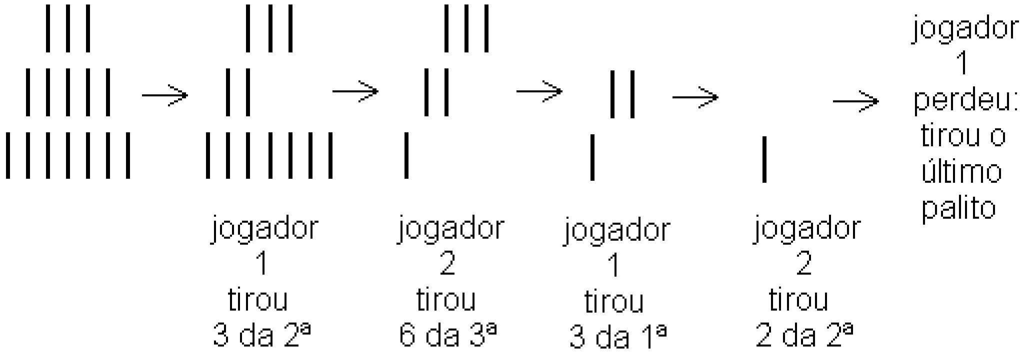
Nessa mesma aula, a professora não pediu minha opinião sobre outras dúvidas suas que se propagaram para os alunos: confusão nos conceitos e representações de retas e segmentos; entendimento de retas perpendiculares em uma única posição: uma vertical e outra horizontal; entendimento, por parte dos alunos, de que dois segmentos não paralelos são retas paralelas, por não se cruzarem.

Em uma única ocasião *assumi* a 4ª série E. A professora saiu da sala e a conversa se avolumou de tal forma que achei prudente contornar a situação. Alguém poderia surgir e achar que eu deveria ter tomado uma providência e não era intenção me indispor com os alunos, com a professora ou com a direção.

Fui até a lousa e mostrei o jogo do “nim”, que deve ser jogado com palitos. Substituí os palitos por traços na lousa e convidei dois voluntários para jogarem. Prontamente se apresentaram e a classe se acalmou.

Regras do jogo:

- São três *fileiras* horizontais de palitos, com três, cinco e sete palitos cada uma;
- Alternam-se os jogadores tirando, a cada vez, um número não nulo de palitos de uma mesma fileira;
- Perde quem tirar o último palito. Exemplo de uma *jogada*:



Após algumas jogadas entre colegas, na lousa, os alunos *exigiram* que eu jogasse. Tentei não jogar, argumentando que o jogo ficaria sem graça, pois se eu começasse, ganharia sempre e se um deles começasse, ainda assim eu ganharia quase sempre. Lenha na fogueira! Tomaram minha argumentação como um desafio que precisava ser comprovado.

Joguei com vários alunos e ganhei todas. Seus olhinhos brilhavam. Queriam saber o *truque* e como tive acesso a ele. Como não discutiríamos mais esse jogo, mostrei como foi feito o *desmonte* do jogo e as *regras* obtidas. Comentei que, quando soubessem bem essas regras, poderiam, além de ganhar dos que não conheciam, acrescentar mais palitos em uma ou mais fileiras ou, mais fileiras. Dessa forma o jogo poderia, mesmo conhecidas essas *regras,* propiciar momentos de *ginástica mental*.

O evento “jogo do Nim” foi isolado e não previsto, mas atividades como essa, que envolvem ludicamente o raciocínio sobre quantidades, podem ser duplamente motivadoras: do envolvimento do pensamento matemático, lógico ou que tais, na própria atividade e, também, do estudo da matemática como meio para o desenvolvimento de competências relacionadas à atividade.

Sobre a professora das terceiras séries

Cursou Escola Normal Estadual em Limeira. Declarou que não houve nenhuma contribuição do curso para sua formação em matemática.

Fez estágio na pré-escola, tendo como principal atividade encapar caixas. Comentou que o aproveitamento do estágio depende do professor. Alguns deixam trabalho externo à classe, ou seja, atividades não previstas no estágio. Na regência, o supervisor assiste e o professor da classe pode assistir ou não. Geralmente o professor da classe não assiste a regência e não participa de discussões com o supervisor.

Como professora, no primeiro ano teve receio de assumir uma classe e foi substituta. No segundo ano, assumiu uma classe multiseriada de 1ª a 4ª séries, no sítio. No terceiro ano, uma segunda série e nos oito anos seguintes ministrou aulas na terceira série (incluído o ano em que participou desta pesquisa).

Tem intenção de continuar lecionando matemática e pretende, no futuro, fazer licenciatura em matemática.

Declarou não ter dificuldade em nenhum conteúdo de matemática e que, para os alunos, números racionais, frações e divisão por dois algarismos são os conteúdos mais difíceis: “alunos fracos não pegam”.

Quanto à condição de prosseguimento de estudos dos alunos, disse que todos os alunos têm e que as professoras das quartas séries revisam: “é necessário retomar os conteúdos das séries anteriores”.

Usou um caderno de anotações e vários livros, dos quais preferiu o do professor Dante (1997, v3). Sobre os outros autores, Guelli (1996, v3), Pires et al. (1996, v3) e Imenes et al. (1997, v3), usou principalmente para atividades que os alunos copiavam e resolviam em classe. A escola não adotou um livro.

Participou de várias Orientações Técnicas e declarou como importantes as que apresentaram a divisão através da *tabuada* do divisor, geometria e o procedimento de “não dar conta isolada”: preferencialmente, solicitar operações em aplicações, por exemplo, em problemas.

Sobre a professora das quartas séries

Cursou Escola Normal Estadual em São Paulo. Também declarou que o curso não contribuiu para sua formação em matemática, que “aprendeu na prática”. Assumiu classe a partir do terceiro ano do Curso Normal.

Sobre o estágio nesta escola em que estava lecionando, comentou que “a maioria das alunas cumpre horário: assistem às aulas e anotam”.

É professora há quinze anos em todas as séries e nos últimos seis anos tem ministrado matemática, que é a disciplina que prefere. Acha melhor lecionar uma única disciplina.

Contou com um caderno de anotações, que atualizava a cada ano. Usou os livros “para tirar exercícios”: Guelli (1996, v4), Meireles & Miranda (1993, v4), Dante (1997, v4), Imenes et al. (1997, v4; 1995, v4).

Declarou não ter dificuldade em nenhum conteúdo de matemática e que a multiplicação é o conteúdo mais difícil de ensinar e a divisão, o mais difícil de ser aprendido pelos alunos.

Quanto à condição de prosseguimento de estudos, acha que a grande maioria dos alunos tem, mesmo porque os mais fracos fazem recuperação no outro período. No ano de 1999, quatro alunos foram retidos nas quartas séries do período da tarde, todos alunos da 4ª série E.

Participou de várias Orientações Técnicas na Diretoria de Ensino. Comentou que aproveitou mais a que discutiu resolução de problemas.

Sobre a Escola

É uma escola pública estadual de São Carlos - SP, que mantém as séries inicias do ensino fundamental – 1ª a 4ª séries. No período da pesquisa funcionou nos períodos da manhã e tarde, atendendo a cerca de oitocentos alunos.

A escola contou com coordenadora pedagógica, biblioteca e uma sala de multimeios: televisão, vídeo e quatro computadores com acesso à Internet.

Em uma das avaliações do SARESP, foi classificada entre as cem melhores escolas do Estado de São Paulo, conforme um recorte de jornal publicado na Internet, acessado em 14/02/2002:

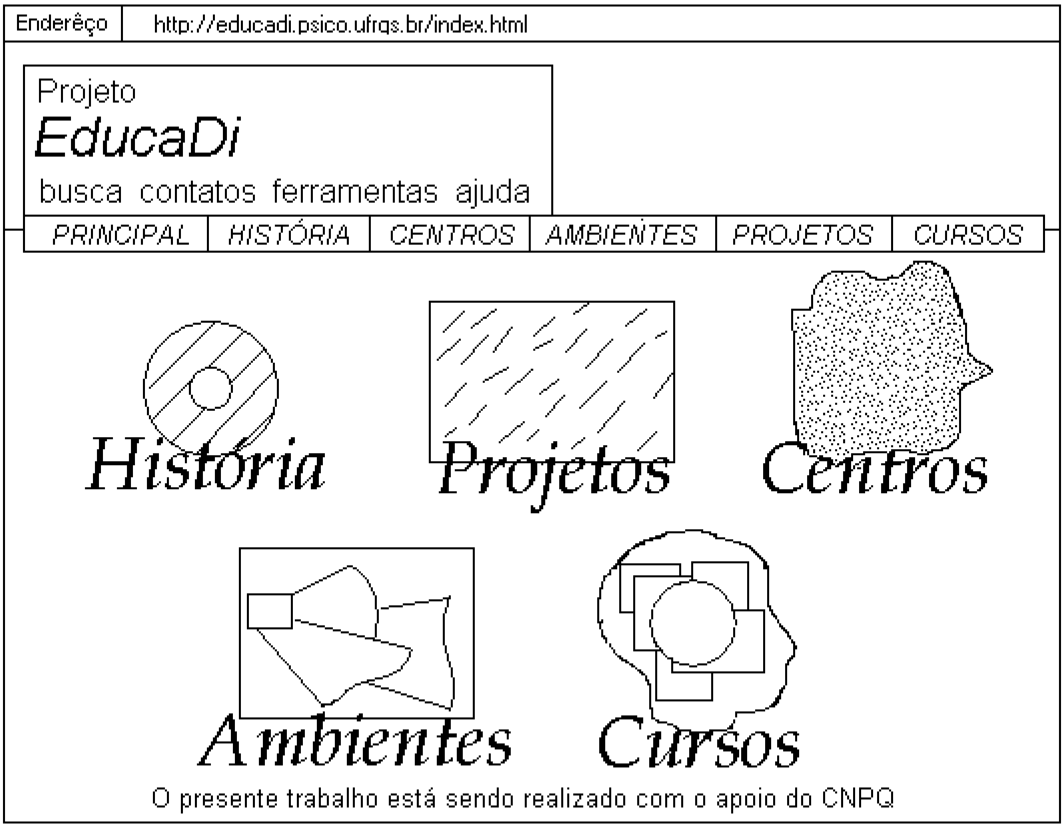
> A Escola Estadual "Nome da Escola", que atende alunos de 1ª a 4ª séries do Primeiro Grau, está entre as cem melhores escolas no Estado de São Paulo. O resultado foi atingido através das provas do Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo).

A escola integrava o projeto EducaDi – Educação à Distância. Seguem elementos do projeto, conforme páginas da Internet, acessadas em 15/02/2002:

> Quatro unidades da federação, em um projeto coordenado, participam de uma proposta conjunta de aplicações de recursos tecnológicos avançados da Informática à educação pública. Com as devidas adaptações locais, serão envolvidos, num processo de Educação à Distância, alunos de escolas públicas em São Paulo, Rio Grande do Sul, Ceará e em Brasília. A finalidade deste programa é realizar um estudo piloto para elaborar modelos pedagógicos que sirvam como subsídios para aplicações das conexões e da interoperabilidade entre redes de computadores na Educação à Distância (disponível em <http://educadi.psico.ufrgs.br/historia/integra/apresent.htm>).

O projeto teve como coordenadora geral e regional Lea da Cruz Fagundes (RS) e os coordenadores regionais Dietrich Shiel (SP), Mauro Pequeno (CE) e Luana Le Roy (DF).

Página principal do projeto EducaDi (estilizada):



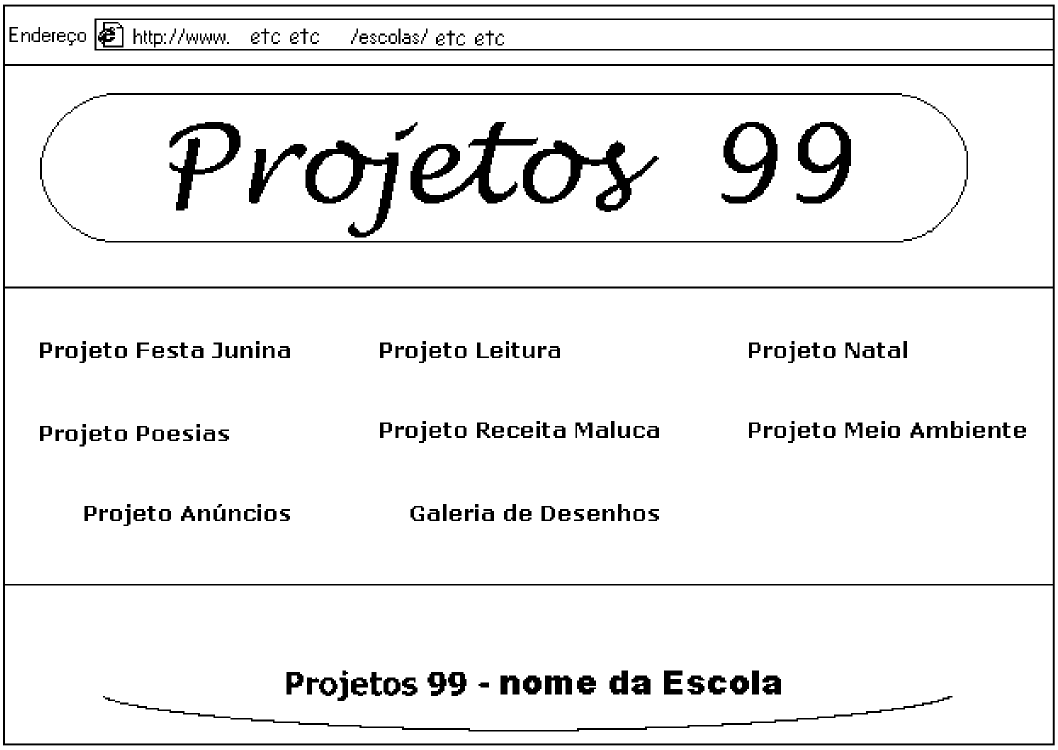
Trabalhos – desenhos e textos – de alunos de seis classes foram publicados na página da escola na Internet.

Os alunos da 4ª série F participaram no projeto EducaDi em 1999. Alunos das outras quartas e terceiras séries do período da tarde não.

Uma vez por semana e por duas semanas consecutivas, durante o período de aulas, oito alunos deixavam de fazer as atividades normais para usarem os quatro computadores da escola. Alunos da USP de São Carlos, vinculados ao projeto EducaDi, orientavam os alunos.

Após as duas semanas, outro grupo de oito alunos substituía o anterior.

Os trabalhos publicados na Internet foram desenhos e textos, provavelmente feitos no editor de textos Microsoft Word e no programa para desenhos Microsoft Paint.[5] Seguem a página da escola na Internet, de onde foram obtidos o desenho e a poesia feitos pelos alunos.



As Borboletas

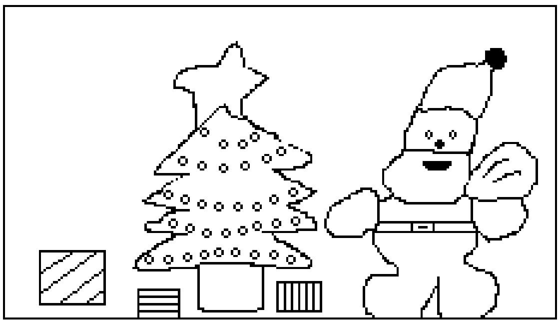
Amarelas, azuis
Várias cores,
Uns amores.

Borboletas brancas,
São muito francas.

Borboletas azuis,
Adoram a luz.

As amarelinhas,
São umas gracinhas.

E as pretas, então,
Se confundem na
escuridão!



[5] Esses programas estavam instalados nos quatro computadores da sala de multimeios.

IV. O Conhecimento Matemático Escolar investigado

Na primeira seção deste capítulo são apresentados e discutidos os Sistemas de Numeração que foram ou poderiam ser estudados nas classes envolvidas na pesquisa.

Essa discussão possibilita e contextualiza as que a seguem, sobre as operações e expressões com números naturais e sentenças matemáticas.

O conhecimento matemático escolar investigado é retomado na última seção deste capítulo, onde são apresentadas *sementes* de possíveis transmigrações didáticas decorrentes deste trabalho.

O conhecimento matemático escolar foi o objeto essencial desta investigação, mas a prática das professoras esteve sempre presente: permeou e contextualizou o conjunto de dados coletado.

Na apresentação e discussão dos dados, nas demais seções deste capítulo, elementos dessa prática são comentados. Uma visão geral do desenvolvimento das aulas nas terceiras e quartas séries e, também, alguns elementos do conhecimento matemático que não serão analisados no restante deste trabalho são apresentados a seguir.

No início do período, as professoras abriam as salas e as meninas entravam antes dos meninos. Durante o recreio os materiais dos alunos permaneciam trancados na sala. A troca de materiais para a sala ambiente de outra disciplina ocorria antes do intervalo nas quartas séries e após o intervalo nas terceiras séries.

A professora das quartas séries fazia a chamada pelos números dos alunos e a das terceiras, geralmente solicitava os nomes dos alunos que haviam faltado. Se haviam muitas faltas nas terceiras séries, a professora fazia a chamada pelos números.

Os conteúdos e exercícios registrados nos cadernos dos alunos podem ser observados, em sua maioria, nos livros que estavam disponíveis nas salas-ambiente, mas raramente foram copiados diretamente dos livros pelos alunos.

O Material Dourado parece não ter sido usado e o AM (São Paulo, 1988) em poucas ocasiões.

As três classes de cada uma das duas séries tinham uma letra de identificação: D, E e F. As duas classes "E" eram consideradas pelas suas professoras como sendo "as classes dos fracos", classes constituídas, principalmente, por alunos com dificuldade de aprendizagem. Apesar dessa caracterização, outras classes tinham alunos que poderiam estar nas classes "E" e vice-versa. Por exemplo, com avaliações semelhantes – mesmas provas –, ficaram "sem média" nas quartas séries, no terceiro bimestre, dois alunos da 4ª série D, oito da 4ª série E e três da 4ª série F.

A 4ª série E foi discriminada por seus professores quanto à aprendizagem e à disciplina:

- P: "Eu não vou mais explicar. Além de ser a pior classe da escola, não tem disciplina. Por que tem aluno que conseguiu fazer? Porque prestou atenção na minha aula".
- P: "Vocês percebem porque nunca vão a lugar nenhum com a escola? Depois do recreio ninguém agüenta vocês. Dia vinte e oito vou levar uma sala. Por que vocês nunca vão? Eu não levo esta sala nunca. Eu levar isto aqui?".
- Em uma aula de matemática em outra classe, a professora de português entrou na sala para perguntar à professora de matemática sobre uma aluna, afirmando que ela deveria estar na classe "E", por ser muito fraca.

Não observei comparações em relação à 3ª série E. Em uma única ocasião a professora mencionou a dificuldade da classe como um todo:

- P: "Eu sei que essa classe pra entender é duro. Mas eu estou explicando devagar".

Quanto à disciplina, se havia conversa enquanto os alunos estavam resolvendo exercícios, um ou dois alunos pediam ou eram indicados para marcar quem estava conversando, registrando na lousa os nomes dos colegas. Com esse esquema a conversa diminuía, mas os alunos que estavam marcando não faziam os exercícios.

Apesar das ameaças de punições para os alunos com os nomes registrados na lousa, como por exemplo, o envio dos nomes para a Direção da Escola, as punições que verifiquei não passaram do registro na lousa.

Nas terceiras séries o controle da disciplina foi maior que nas quartas séries, onde havia um pouco mais de conversa. Na terceiras séries o controle se deu, às vezes, por ironia e exigência de silêncio quase absoluto, o que pode ter inibido algumas participações de alunos. Nas quartas séries, em certas ocasiões, a conversa atrapalhou o desenvolvimento da aula.

As provas e outros exercícios usados nas avaliações foram mimeografados. Geralmente acompanhou cada uma dessas avaliações um desenho que foi pintado. As cores foram determinadas através de operações simples, como por exemplo, a expressão “3x2” colocada em uma região do desenho e, fora do desenho, a indicação “usar vermelho para resultado 6”. As pinturas dos desenhos não foram computadas nas avaliações, mas ajudaram na disciplina da classe durante a prova, ocupando os alunos que iam terminando as questões propostas.

A professora das terceiras séries geralmente organizava o conteúdo diretamente dos livros, escrevendo na lousa. Nas quartas séries, a professora escrevia na lousa a partir de anotações organizadas previamente.

O conteúdo colocado na lousa era copiado pelos alunos e explicado pelas professoras. Seguiam-se exercícios, correção de exercícios, novos exercícios. Tarefas foram propostas em maior número nas quartas séries.

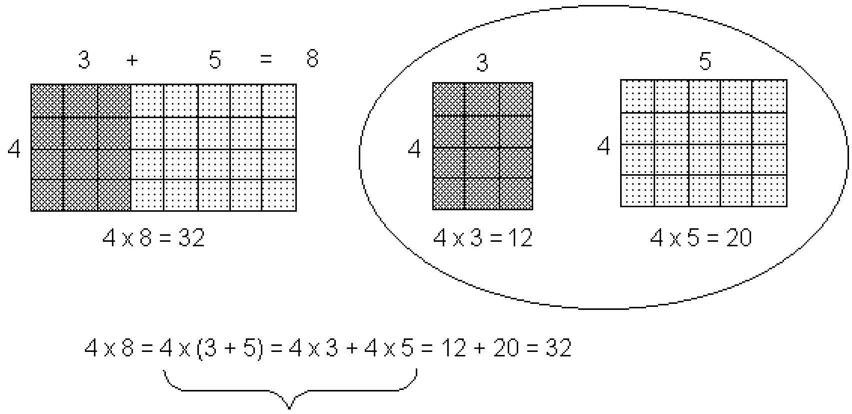
Em muitas oportunidades o ensino se deu através de regras, nas duas séries:

- P: “Para somar dois números decimais, colocamos vírgula embaixo de virgula”.
- P: “Lembra quando eu ensinei fração de um número? Divide pelo denominador e multiplica pelo numerador”.
- Ensino da “propriedade distributiva da multiplicação” – texto colocado na lousa:

> Candi resolveu guardar a sua coleção de revistas da Mônica e do Cascão em 6 caixas, colocando em cada uma 3 da Mônica e 5 do Cascão. Quantas revistas Candi tem?
>
> Podemos calcular de dois modos diferentes.
>
> Em cada caixa temos 3 revistas da Mônica e 5 revistas do Cascão = 8 revistas.
>
> São 6 caixas.
>
> Candi tem 6x8=48 revistas.
>
> Cada uma das caixas tem 3 revistas da Mônica. No total são 6x3 revistas da Mônica.
>
> Cada uma das 6 caixas tem 5 revistas do Cascão.
>
> Candi tem 18+30=48 revistas.
>
> Veja: 6x(3+5)=(6x3)+(6x5).
>
> Multiplicar um número pela soma de outros dois é o mesmo que multiplicar esse número pelos outros dois, um de cada vez e, depois somar os resultados.
>
> A multiplicação tem a propriedade distributiva.

Apesar da contextualização da aplicação da propriedade no texto escrito na lousa, a estratégia não foi eficiente para o entendimento dos alunos. Muitos tiveram dificuldade para aplicá-la, o que mostraram participando da correção de exercícios na lousa. No caderno do aluno de outra classe não aparece a estória: apenas a igualdade e sua *tradução* para nossa linguagem: “Veja: 6x(3+5)= ... Multiplicar um ...”.

A professora poderia usar uma forma alternativa para justificar o desenvolvimento da igualdade “6x(3+5)=(6x3)+(6x5)", como por exemplo, através de retângulos quadriculados mostrando o produto total relacionado aos produtos parciais, como a seguir:



A interpretação dos enunciados, em várias ocasiões, não foi discutida ou foi evitada através de exemplos:

- Exercício: “Veja os modelos e resolva”.
- Exercício: “Faça como o modelo”.
- Exercício: “Observe... Agora faça o mesmo”.
- Exercício: ”Decomponha em ordens. 7625=7UM+6C+2D+5U” a)...
- Exercício: “Decomponha os números”. [Entendimento de que a decomposição ocorre de uma única maneira].
- “Dê o valor do algarismo 6 em cada número”. [Subentendido valor relativo].

A compreensão da nossa língua no contexto da matemática pode favorecer a compreensão da matemática e vice-versa: a interpretação dos enunciados pode ser um dos elos para a integrabilidade dessas compreensões.

Os exercícios feitos em classe e as tarefas foram corrigidos na lousa. Nas terceiras séries, os alunos eram chamados pelos seus números, em seqüência. Nas quartas séries o mesmo procedimento foi alternado pela chamada de números aleatórios.

A correção dos exercícios feitos em classe se iniciava quando a maioria dos alunos havia terminado. Os outros continuavam resolvendo durante a correção.

Geralmente os alunos não levavam os cadernos quando iam à lousa, o que possibilitou, em muitos casos, a identificação precisa dos erros dos alunos e dos conteúdos a serem discutidos novamente. Algumas dessas indicações foram aproveitadas e outras não.

Enquanto os alunos estavam resolvendo exercícios, as professoras circulavam entre as carteiras ou permaneciam na mesa. Nas duas situações as professoras ajudavam quando solicitadas, mais no sentido de indicar a solução (ou dar pistas gerais) do que procurar esclarecer e discutir o entendimento do aluno.

As professoras aceitaram as diversas formas de resolução dos alunos, o que é interessante. Por outro lado, alguns ajustes necessários não foram discutidos, como nas indicações dos algoritmos de algumas operações.

Essas indicações pareciam confundir os alunos que estavam usando. A colocação do "1" nos algoritmos é um exemplo: o "1" colocado ao lado e não acima ou abaixo do "4" resultando "14" quando deveria ser "5".

Estudo em grupo praticamente não ocorreu nas duas séries, durante as aulas. Em uma aula os alunos juntaram carteiras para colar recortes em cartolinas – o espaço de uma carteira não era suficiente.

Os alunos fizeram alguns trabalhos em grupo, em casa, principalmente cartazes com colagens de recortes e embalagens. Em uma aula que assisti, um trabalho em grupo foi proposto aos alunos.

- Na lousa:

Pesquisa:

Pesquisar em casa embalagens e rótulos que apresentem alguma forma de medida.

Junte várias embalagens e observe-as, relacionando-as com as informações abaixo:

Existem várias possibilidades de medir os objetos que nos cercam. No comércio, em geral, as medidas mais utilizadas são aquelas em que se consideram o comprimento, a massa (que de maneira incorreta é conhecida como peso) ou a capacidade.

- Informações sobre medidas de comprimento, massa e capacidade estavam na lousa, além da proposta do trabalho:

Forme com seus colegas um grupo e juntem todas as embalagens e rótulos que conseguirem. Separem os rótulos e embalagens pelo tipo de medida utilizado.

Construam um cartaz com as embalagens e rótulos referentes a medidas de comprimento, outro com medidas de massa, e um outro com medidas de capacidade.

P: Boca fechada. Boca fechada, entenderam? Gente, presta atenção um pouquinho. O que vocês vão fazer? Bom, a mãe compra arroz?

Alunos: compra.

P: Então vocês sabem. Arroz, rótulo de refrigerante, embalagem. Massa não é massa de pastel.

A: Massa de tomate?

P: Não, é peso. Na balança, vê quando está pesando. Essa é sua massa corporal.

- A professora discutiu as diversas medidas e as possibilidades de representá-las através de rótulos nos cartazes.

P: Se não fizer vai ficar com “I”. Só vai por o nome de quem foi lá e levou alguma coisa. Se vocês vão fazer trabalho em grupo, cada um que leve alguma coisa. Nem que seja dois rótulos. Vai lá, não leva nada, não faz nada e ainda vai pedir pra por o nome?

- Os alunos procuravam estabelecer os grupos. Várias vezes já haviam tentado, mas foram impedidos pela professora.

P: Eu já falei que vocês vão decidir no intervalo. Se fosse pra fazer aqui, eu ia escolher. Como eu não sei quem mora perto, vocês vão escolher. Jordano, eu já falei que não é agora que vocês vão escolher. Carmem, vai marcar na lousa. Mário, Felipe, tá marcando. É surdo ou não entendeu? [*marcação* de quem está conversando].

A_1: Vai ficar um e um sozinho.

P: Não tem menino não?

A_1: Esses que não faz lição.

P: Não põe o nome dele.

A_2: Que dia é pra entregar?

P: Eu vou por na lousa.

A_3: Já marcou meu nome.

P: Essa explicação era pra durar no máximo meia hora. Faz uma hora que estou falando. Senta. Num abra a boca. Se a mãe não deixar, vai fazer sozinho. Se tiver um monte que mora perto, no máximo cinco. Que hora vamos formar o grupo?

Alunos: Na hora do recreio.

Os alunos tentaram, mas não conseguiram decidir na classe a composição de cada grupo. A professora não sabia onde os alunos moravam, mas eles sim. A formação dos grupos na classe e uma primeira discussão – em cada grupo – do encaminhamento do trabalho, poderia ser uma referência importante para os alunos de como trabalhar em grupo, orientados pela professora.

Em outra aula, na mesma classe e em data anterior, foram discutidas medidas de comprimento:

P: Presta atenção que eu vou explicar. O metro, o centímetro... Comprimento: altura de gente, comprimento de um terreno, rodovias, a gente vê plaquinha indicando a velocidade que podemos ir: 80 km/h, 40 km/h.

- 80 km /h e 40 km /h são medidas de velocidade. Outro tipo de placa indica a distância da placa a uma referência, por exemplo, nas rodovias paulistas, a distância até a Praça da Sé, em São Paulo.

P: Já expliquei que o centímetro é para pequenas coisas, o metro, maiores. O quilômetro para distâncias entre cidades.

- Alguns alunos moravam a quilômetros da escola; a precisão – e não o comprimento – determina a unidade a ser usada: uma enorme chapa metálica de um foguete provavelmente tem suas medidas mais precisas que o milímetro; a medida do tampo da carteira pode ser dada em centímetro ou, com precisão maior, centímetros e milímetros.

P: Um centímetro, quantos milímetros tem?

A_1: Mil.

A_2: Cem.

P: Do zero da régua... Todos estão com régua na mão? Quero dizer, a minoria tem régua. Faz favor de comprar uma régua, que era pra comprar desde o começo do ano.

- Um aluno colocou um transferidor sobre sua carteira.

P: Isso é transferidor. Do oito até o nove, quantos risquinhos tem? Conta.

A_1: Oito.

A_2: Nove.

A_3: Dez.

P: Nove. Tá errado, tem dez. Se tem dez risquinhos, um centímetro tem dez milímetros.

A pergunta foi imprecisa e as respostas dos alunos não foram discutidas. Entre dois números consecutivos que indicam centímetros na régua, são nove traços que determinam dez espaços de um milímetro cada um. Se forem computados os traços nos números que limitam a distância entre eles, são onze traços. A questão poderia ser relacionada à divisão de um segmento de reta: um traço no interior de um segmento divide-o em duas partes; dois traços, em três partes: 

Aparentemente, a professora não contou os “risquinhos” e, apesar de pedir para os alunos contarem, deduziu o número de “risquinhos” pelos milímetros equivalentes a um centímetro.

No ensino médio os alunos aprendem progressões aritméticas e geométricas e geralmente têm dificuldade para estabelecer algumas relações entre os termos em algumas dessas seqüências. A discussão dos nove traços que determinam dez espaços seria muito útil para as formar de pensar necessárias para a resolução de alguns problemas, inclusive nas progressões.

Quanto à resolução de problemas, não observei indicações de estratégias e, nas correções e dicas, as referências foram, geralmente, às operações e não às possíveis formas de pensar envolvidas.

Alguns problemas foram praticamente resolvidos, oralmente, antes que os alunos pensassem individualmente. Talvez a professora entendesse não estar prejudicando o desenvolvimento da autonomia dos alunos por não permitir anotações durante a *explicação.*

Alguns dos oito problemas propostos em uma aula:

2) Lúcio percorreu 195 metros numa pista. Pedro percorreu 14 metros a menos que Lúcio.

a) Quantos metros percorreu Pedro? R:

P: Vão só copiando e deixando espaço. Depois eu explico.

b) Quantos metros percorreram os dois juntos? R:

4) A distância entre São Paulo e Barra Bonita é de 320 quilômetros. Saindo de São Paulo já percorri 3/4 dessa distância. Quantos quilômetros já percorri? Quantos quilômetros faltam para chegar a Barra Bonita?

- Uma aluna aproximou-se da mesa da professora:

P: Espera que eu vou explicar um por um. Vai só copiando.

- A professora leu e discutiu cada problema. Discussão do segundo problema:

P: Se eu sei que o Lúcio percorreu 195 e o Pedro 14 a menos, fazer o que?

A_1: 195 mais 19

A_2: 195 menos 19

P: Menos 19?

Alunos: 14.

P: Pedro, 195 metros menos 14. Vou achar quanto percorreu o Pedro. Também quero saber os dois juntos.
Alunos: 195 mais 14.
P: Pra saber não fiz 195 menos 14?
A: O resultado que der...
P: Complementa... Do Pedro... Do Lúcio...

Alguns alunos vão *chutando*. A professora vai escolhendo as respostas mais próximas. Interpretações parciais: muitos alunos podem ter resolvido corretamente sem compreensão. Parece que a dificuldade maior estava na interpretação do texto.

Pensando na matemática envolvida no problema, seria interessante acrescentar, após sua correção, uma nova questão: como usar a multiplicação para saber quanto os dois percorreram juntos? Solução: se os dois tivessem percorrido 195 metros cada um, teriam andado (2 x 195) metros. Como um percorreu 14 metros menos que o outro, percorreram juntos (2 x 195 – 14) metros.

- Discussão do quarto problema:

P: Lembra quando eu ensinei fração de um número? Fração de um número: divide pelo denominador e multiplica pelo numerador. Quando vou achar 3/4 de 320, vou saber quanto já percorreu. Para achar o que falta? Fazer o que?
A_1: Menos.
A_2: O que deu menos 320.
A_3: O que deu menos 3/4.
P: O que fazer?
A: 320 menos o resultado.

A discussão, tendo como referência o processo mecânico para a determinação da fração de um número, pode ter causado as confusões e não foi suficiente para esclarecer as dúvidas. Muitos alunos acabam resolvendo corretamente esse tipo de problema, inclusive nas provas. Mas se o enunciado não pode ser *encaixado* no conjunto dos enunciados conhecidos, requerendo a compreensão dos conceitos envolvidos – frações e “frações de números” –, o índice de acertos pode diminuir drasticamente.

Em outras ocasiões os alunos iniciavam a resolução dos problemas e depois solicitavam ajuda à professora.

Em uma aula de uma classe “não E” foram propostos cinco problemas, sendo que os três últimos constaram da lista dos dez problemas da folha-tarefa da Diretoria de Ensino para os alunos resolverem na recuperação. Nessa data as professoras ainda não tinham solicitado que eu resolvesse essa lista.

3) Felipe já tem 143 figurinhas coladas no seu álbum. Em cada pacotinho vêm 2 figurinhas. Ele comprou 10 pacotinhos. Lembrando que podem sair figurinhas repetidas, quantas Felipe poderá ter coladas no álbum depois dessa compra?

4) O gavião chega ao pombal e diz:
   - Adeus, minhas cem pombas.

   As pombas responderam em coro:
   - Cem pombas não somos nós, mas com mais dois tantos de nós e com você, meu caro gavião, cem pássaros seremos nós. Quantas pombas estavam no pombal?

5) Um cientista apanhou aranhas e escaravelhos. Cada aranha tem 8 patas e cada escaravelho tem 6 patas. Ao todo há 8 animais e 54 patas. Quantas são as aranhas e os escaravelhos?

- Os alunos estavam fazendo e a professora circulando.

P: Não estou entendendo porque dividiu por três... [quarto problema].

Outro aluno: noventa e sete.

P: Pergunta pro Fernando como ele fez.

P: Ao todo há oito animais. Como são seis aranhas e nove escaravelhos? No total são oito.

- Alguns alunos estavam discutindo com colegas, sem muito alvoroço. Oportunidade interessante para resolução em grupo, o que não ocorreu de forma organizada.

A: Pode fazer desenho?

P: Pode, qualquer jeito que vocês quiserem.

- A aula estava terminando e os últimos problemas foram discutidos na lousa: corrigidos de forma não conclusiva. Interessantes resoluções possibilitadas pela não resolução prévia pela professora.

Problema 3:

A_1: [fez na lousa]

$$\begin{array}{r} 143 \\ +\ 20 \\ \hline 162 \end{array}$$

A_2: Como sabe que saiu uma repetida?

A_3: Coloca dezenove no lugar do vinte. Uma repetida.

P: Como sabe que saiu uma repetida?

Colocações extremamente conscientes e pertinentes dos três alunos.

O primeiro colocou a operação na lousa: percebeu a abertura do problema e montou a *conta* a partir do resultado que entendeu coerente e mais *real*: alguém já conseguiu comprar 20 figurinhas sem nenhuma repetida em 163? Muita sorte!

O segundo percebeu que o primeiro estava representando, com a conta *errada*, uma idéia interessante: uma figurinha repetida. Questionou como o colega podia saber.

O terceiro concordou com a possibilidade de uma repetida e apresentou solução para o acerto da conta, substituindo o 20 por 19.

A professora podia ter discutido o fato da questão ser aberta. No caderno de um aluno de outra classe a resposta, corrigida, foi *fechada* em 163 figurinhas.

Como o problema foi proposto, qualquer número natural entre 142 e 164 satisfaz suas condições – problema com mais de vinte e uma respostas corretas: 143, 144, 156, “155 ou 160”, “maior que 142 e menor que 164”, “maior que 158 e menor que 161” etc.

Apesar de ser um problema aberto, poderia exigir resposta fechada se “poderá ter” fosse substituído por “terá”. Nesse caso, Felipe terá em seu álbum *exatamente* de 143 a 163 figurinhas ou então, no mínimo 143 e no máximo 163 figurinhas. Diferentes formas para representar o mesmo conjunto de números.

> Com mais dois tantos de nós e com você, meu caro gavião, cem pássaros seremos nós. Quantas pombas estavam no pombal?

Problema 4:

A_1: Noventa e sete pombas.

P: Como chegou?

A_1: Tem cem pombas com o gavião. Eu fui contando...

A_2: Eram noventa e sete. Com mais dois tantos de nós mais o gavião, cem.

A_3:

$$\begin{array}{rl|l} 100 & \underline{|\ 3\quad} & \\ 10 & 33 & \\ 1 & 33 & \\ & \underline{33} & \\ & 99\ \ 1 & \end{array}$$

possível entendimento do aluno (A_3):
1 (tanto) + 2 (tantos) = 3 (tantos) → divisor

3 x 33 (3 tantos de pombas) + 1 (gavião) = 100 (pássaros)

O segundo aluno justificou o procedimento do primeiro: mostrou como devia ter pensado e parece que concordou com ele. O terceiro aluno resolveu corretamente.

A professora, enquanto andava pela sala, comentou com um aluno, talvez esse, que não estava entendendo porque havia dividido por três.

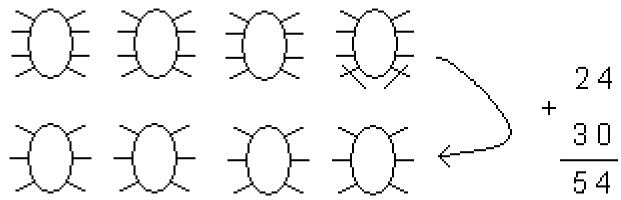
A correção desse exercício não se encerrou nessa aula, mas o mesmo problema – no caderno de um aluno de outra classe – teve como resposta, corrigida: “R: Estavam 99 pombos”. Nenhuma operação foi indicada e, aparentemente, um “7” foi substituído por “9”, indicando que “97”, resposta do aluno, foi corrigido para “99”.

Problema 5:

Aranha: 8 patas; escaravelho: 6 patas; ao todo 8 animais e 54 patas. Quantas são as aranhas e os escaravelhos?

A_1: $\begin{array}{r|l} 56 & 22 \\ \hline & 3 \end{array}$

A_2:



Difícil imaginar o que o primeiro aluno fez. O “22” seriam 8 (patas) + 6 (patas) + 8 (animais)? “56” foi uma cópia errada do “54”?

A resolução do segundo aluno, correta e muito criativa, merecia uma discussão com a classe que talvez não tenha ocorrido. No caderno do aluno de outra classe estão apenas os cálculos finais na correção:

$$5)\quad \begin{array}{r} 3 \\ \times 8 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \times 6 \\ \hline 30 \end{array} \quad + \begin{array}{r} 30 \\ 24 \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} A & E \\ & \\ 3 & 5 \end{array}$$

R: 3 aranhas e 5 escaravelhos.

Ainda em relação ao segundo aluno, sua solução foi tão simples quanto potente. Supôs dois grupos de quatro animais e pensou na alteração necessária. Realizou três *operações*: um *cancelamento* de pernas, um deslocamento de animal e uma multiplicação de números naturais. Toda sua compreensão está exposta em seu esquema.

Não resolver previamente os problemas permitiu a exposição de tantas compreensões (e incompreensões), inclusive da professora. Mas é preciso ir além: discutir os equívocos e socializar as boas idéias.

Admiro a coragem da professora na proposição desses problemas aos seus alunos, mesmo sem estar segura de que saberia resolvê-los.

Admiraria ainda mais se, após ter recebido de mim a correção discutida, tivesse retomado as correções, o que não deve ter ocorrido, tendo em vista o caderno – corrigido – do aluno da outra classe.

Os alunos não levavam seus cadernos na lousa para as correções e esse fato mostrou algumas interpretações *corretas* – dos alunos – de leituras de números decimais de forma incorreta – pela professora – em problemas.

> P: Um carro andou nove quilômetros e seis metros em três minutos. Quantos quilômetros ele percorreu em um minuto?

O aluno dividiu corretamente “9,6 ÷3”, na lousa. O dado do problema, “9,6 km” são “9 quilômetros e 600 metros” ou “9 quilômetros e 6 décimos de quilômetro”. O aluno entendeu que deveria usar “9,6”. “9 quilômetros e 6 metros” são “9,006 km”. Vários problemas semelhantes foram ditados e entendidos da mesma forma.

As professoras propuseram várias atividades interessantes, como preenchimento de cheques, análise de conta de luz, quebra-cabeças. Os programas das séries foram desenvolvidos plenamente. No anexo I podem ser observadas as atividades desenvolvidas, dia a dia. Não foram poucas.

A Escola foi privilegiada por contar com essas professoras: a Matemática é a disciplina que mais gostavam – uma delas tinha planos de fazer licenciatura em Matemática; têm se empenhado no crescimento de seus conhecimentos matemáticos, por exemplo, participando de orientações técnicas na Diretoria de Ensino. Certamente a classificação da Escola entre as cem melhores do Estado no SARESP contou com a colaboração das duas.

O conhecimento matemático das professoras pode melhorar? Certamente. E o de todos nós.

Descrições de algumas aulas, fragmentos de outras e registros transcritos de cadernos de alunos integram este trabalho. Nesses dados, estão descritos alguns procedimentos e entendimentos das professoras que podem ser melhorados.

Do que decorreram? Muitos foram reflexos dos livros usados. Outros poderiam ser de outra forma se a formação no Curso Normal tivesse avançado significativamente além do “nada contribuiu na matemática”. A compreensibilidade do próprio conhecimento matemático foi um fator de peso.

Muitas foram as contribuições das professoras: na viabilização de todos os dados, em vários procedimentos e nas interações com os alunos.

Espero que essas contribuições possam ser irradiadas, através deste trabalho, para muitos outros professores. E alunos.

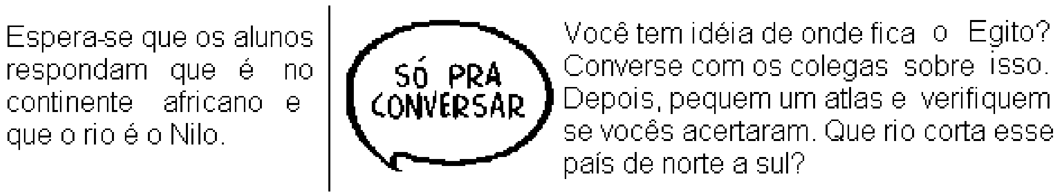
IV.1. Sistemas de Numeração

Sistemas de Numeração Egípcio e Maia

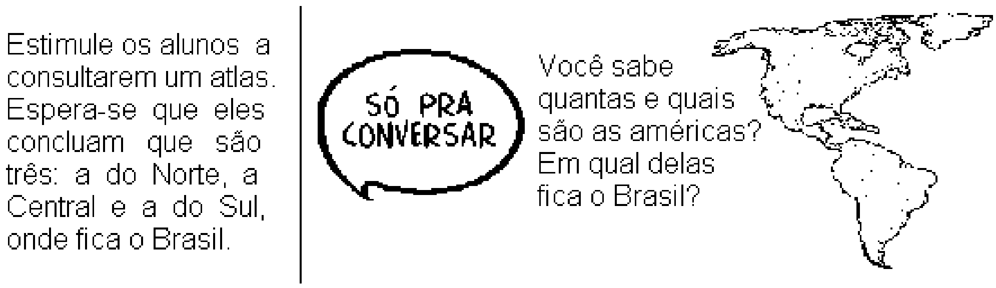
Os sistemas de numeração Egípcio e Maia foram explorados na terceira série, em parte como proposto por Dante (1997, v3). Os alunos poderiam usar os livros, disponíveis na escola, mas a professora preferiu colocar seus apontamentos na lousa.

Sugestões do autor – como o uso de atlas para a localização do Egito, de Roma, das Américas e do Brasil – não foram exploradas. Poderiam ter contribuído na integração da Matemática a outros conhecimentos, por exemplo, através de grupos de alunos coordenados pela professora, pesquisando na sala de aula.

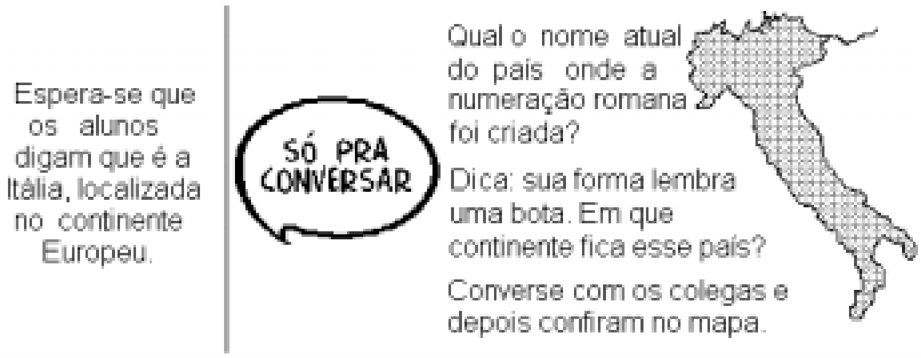
Sugestões no livro do professor Dante, apresentadas em conjunto com os sistemas de numeração correspondentes:



p.8



p.10



p.11

Questões colocadas pela professora, observadas no caderno de um aluno:

- *Pesquise: Em que país moravam os Egípcios?*

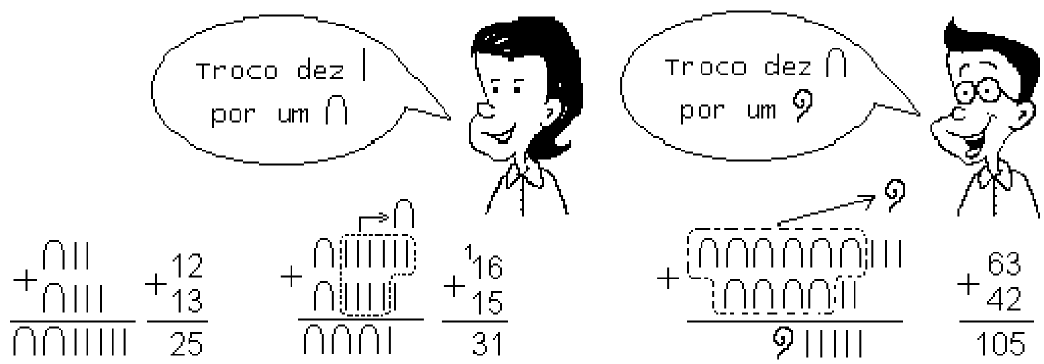
  Resposta: Moravam no Egito que fica no Continente Africano.

- *Pesquisa: Os Maias moravam na América. Você sabe quantas e quais são as Américas? Em qual delas fica o Brasil? Converse com seus pais e responda.*

  Resposta: São 3 Américas: América do Sul, América do Norte e América Central. O Brasil fica na América do Sul.

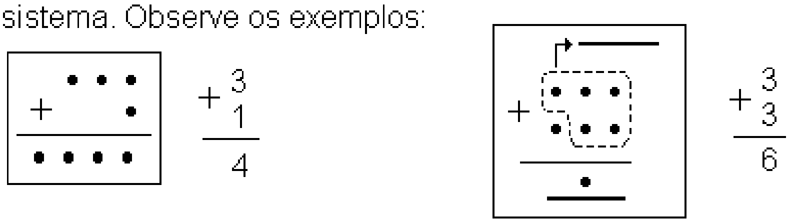
Os exemplos e exercícios propostos no livro, sobre a representação de alguns números nos sistemas de numeração Egípcio (base 10) e Maia (base 5), foram explorados. O mesmo não ocorreu com a adição nesses dois sistemas. Seguem os exemplos de adições nos dois sistemas no texto de Dante (1997, v3).

4. Faça as seguintes adições no sistema de numeração egípcio. Depois refaça as contas usando o nosso sistema para verificar se acertou. Observe os exemplos.



p.9

3. Faça as seguintes adições no sistema dos maias e confira usando o nosso sistema. Observe os exemplos:



p.10

Nesses sistemas, realizam-se *trocas* de acordo com as características de cada um: no Egípcio, 10 “|” por 1 “∩” e 10 “∩” por 1 “𓍢”; no Maia, 5 “•” por um “—”.

No Sistema Egípcio, de base 10, o aluno registra cada símbolo correspondente aos 10 substituídos, favorecendo a significação do “vai 1” no Sistema Decimal: troca de 10 unidades de uma ordem por uma unidade de ordem imediatamente superior. O sistema Maia, de base 5, oferece a mesma oportunidade de relacionamento, em uma base diferente. Efetuar adições nesses sistemas proporciona ao aluno oportunidades de significar (usar como ferrametas) as *trocas* nesses sistemas e, também, no Sistema Decimal.

Sistema de Numeração Romano

Na terceira série foram estudados números até XXXIX (39). O livro usado pela professora (Dante, 1997, v3, p.11) apresenta as letras (I a M) e os números correspondentes no sistema decimal:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Apresenta, também, as regras para o uso dos símbolos I, V e X para a obtenção dos números de 1 a 39:

- *Os símbolos I e X podem ser repetidos até três vezes:*

I	II	III	X	XX	XXX
1	2	3	10	20	30

- *Símbolos à direita de outro com maior valor indicam adição. À esquerda, indicam subtração:*

IV	VI	VII	VIII	IX
4	6	7	8	9
(5-1)	(5+1)	(5+2)	(5+3)	(10-1)

- *Nos demais números , usa-se a decomposição:*

$$14 \rightarrow 10 + 4 \rightarrow \underbrace{X}_{10}\,\underbrace{IV}_{4} \qquad 37 \rightarrow 30 + 7 \rightarrow \underbrace{XXX}_{30}\,\underbrace{VII}_{7}$$

Na terceira série, os alunos efetuaram mudanças de sistemas nos dois sentidos: do Romano para o Decimal e vice-versa.

Sobre as regras propostas no livro, a segunda poderia ser discutida com os alunos e, possivelmente, complementada: dentre as letras usadas para representar os números de 1 a 39, apenas a letra I (1) pode ser escrita à esquerda (uma única vez) e à direita (até três vezes).

A terceira regra, uso da decomposição, como regra ou nos exemplos, não foi apresentada pela professora e é importante sob vários aspectos:

- usando a decomposição não é necessário *decorar* toda a seqüência dos números Romanos;
- exercícios de decomposição (pela simples decomposição) podem ser substituídos por *conversões* nos sistemas Decimal e Romano. A decomposição, neste caso, passa a ser uma ferramenta do aluno;
- converter usando a decomposição possibilita ao aluno relacionar os sistemas Decimal e Romano, favorecendo a compreensão de ambos.

Na quarta série foram feitas conversões até $\overline{\text{M}}$ (1.000.000). Também nessa série não foi feita referência à decomposição, escrita ou através de exemplos, para as transformações nos dois sistemas. Foram apresentados os símbolos I, V, X, L, C, D, M e respectivas correspondências, o traço horizontal – que indica multiplicação por mil – e alguns exemplos. Todas as conversões solicitadas foram em um único sentido: Decimal para Romano. O livro usado pela professora como referência para o estudo do Sistema de Numeração Romano mostra a decomposição em exemplos de conversões.

Pode ser interessante, no estudo desse Sistema de Numeração, a partir da discussão de alguns exemplos e sugestões dos alunos, organizar regras gerais e permitir aos alunos a aplicação dessas regras para a representação de números romanos quaisquer. Segue um possível esquema para essas regras (a serem construídas).

Letras usadas:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

outro símbolo: —— (x 1000; $\overline{IV}$ → 4000)

podem ser repetidas até 3 vezes:

I X C M

I V X L C D M

← (I X C)

→ à esquerda (1 vez) de um dos dois seguintes ( ): subtrai-se seu valor;

à direita (até 3 vezes) de um dos dois segintes ( ): adiciona-se seu valor.

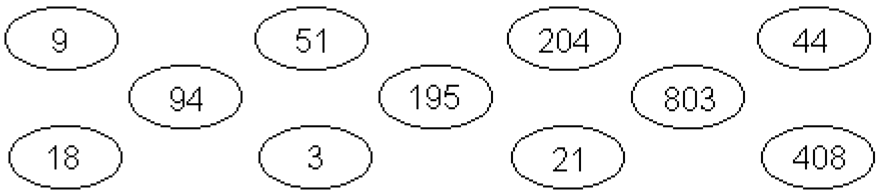
Números maiores que 3999, usa-se um traço horizontal sobre o número, multiplicando seu valor por 1000 (dois traços: 1000 x 1000...).

Usar a decomposição nos dois sistemas para a conversão.

Sistema de Numeração Decimal[6]

Na terceira série a professora iniciou o estudo do Sistema Decimal mostrando a origem da palavra algarismo, como proposto por Guelli (1996, v3). Usou texto e exercícios de Pires et al. (1996, v3) como, por exemplo:

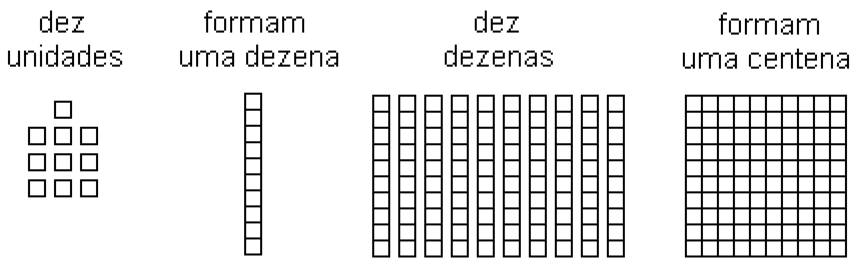
> Dos números que seguem, verifique qual é:
>
> - o maior número de duas ordens
> - o menor número par
> - o menor número ímpar de três ordens



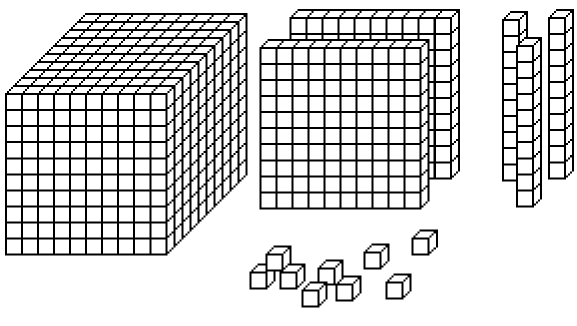
Desenhos do Material Dourado e do Ábaco foram usados para representar as seis ordens estudadas na terceira série.

Representação inicial do Material Dourado:

- No caderno



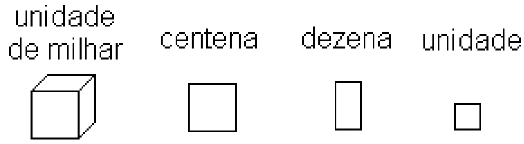
- No livro (Dante, 1997, v3)



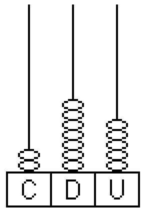
---

6 Nome usual do Sistema de Numeração Indo-arábico.

Representação nos exercícios (livro e cadernos):



Representação do Ábaco no livro (Guelli, 1996, v3) e nos cadernos:



O uso geral de números foi observado em jornais e revistas: recortes estão colados no caderno do aluno (atividade sugerida em Dante, 1997, v3).

Os alunos efetuaram, com números ou numerais: composições e decomposições, leitura, escrita, ordenação, representações diversas, identificação de ordens, correspondências das diversas ordens, atividades com dinheiro, preenchimento de cheques.

Seguem comentários sobre situações que ocorreram ou poderiam ter ocorrido.

Dante (1997, v3, p.16) apresenta uma atividade simples e interessante que não foi usada. Solicita a formação de grupos de dez, contornando os grupos em um conjunto de trinta e dois pássaros coloridos. Devem ser respondidas as questões:

a) Quantos grupos de 10?
b) Quantos sobraram?
c) Quantos passarinhos ao todo?
d) Complete: .... $\underset{\text{D}}{\_\_}$ $\underset{\text{U}}{\_\_}$

A formação de grupos com objetos concretos ou em desenhos, comum quando a teoria dos conjuntos era muito usada, não deve ser abandonada. O que é óbvio para nós, professores, pode não ser para os alunos. Contar, agrupar e relacionar apenas números pode ser muito subjetivo para eles.

Essas atividades, associadas a objetos conhecidos, têm maiores chances de relacionamentos importantes. Uma dezena é uma dezena, mas de quê? De números? Pode ser uma dezena de pássaros...

Os alunos devem ultrapassar a necessidade de referências concretas ou simbólicas para trabalharem com números, mas essa condição não será satisfeita por todos ao mesmo tempo. Cabe ao professor oferecer, eventualmente, oportunidade para aqueles que ainda necessitam dessas referências e, também, para ele – professor – poder avaliar como está o domínio do sistema de numeração por parte dos alunos.

Em outra atividade é informado que Dezembro tem 31 dias e são solicitados:

> a) Represente esse número de diversas maneiras: desenho do material dourado, símbolos numéricos, por extenso e na forma decomposta;
> b) Que data importante se comemora em dezembro? Em que dia?

Resposta do autor para o item (b):

> Por exemplo, o Natal, no dia 25 (Dante, 1997, v3, p. 16).

O autor coloca, de forma tímida, que outras datas podem ser apresentadas pelos alunos. Os professores poderiam ser incentivados a solicitar dos alunos, na correção do exercício, outras datas além do Natal. Sempre é interessante mostrar aos alunos que vale a pena pensar em várias possibilidades, que suas contribuições são importantes.

Uma curiosidade apresentada no livro e usada pela professora:

> Você sabia que...
> ... Existem cerca de 500 variedades de peixes capazes de gerar eletricidade? O peixe chamado torpedo pode gerar eletricidade suficiente para acender uma lâmpada de 60 Volts (op cit., p.18).

Devem ser 60 Watts. As voltagens usuais (Volts) são de 110, 220 (residências), 12 (baterias automobilísticas), 1,5 ; 3; 6; 7,5; 9 (aparelhos que usam pilhas). A potência da lâmpada mais comum é de 60 Watts, que parece ser a comparação pretendida.

Se os alunos usassem os livros (disponíveis), a professora poderia mostrar algum *engano* como esse ou texto com interpretação confusa e incentivar os alunos a observarem o livro e demais informações (inclusive da professora) não como verdades absolutas, mas passíveis de *enganos* que devem ser localizados, discutidos e *ajustados*.

Esse procedimento pode auxiliar na formação de um aluno mais crítico e, por que não, de um professor mais crítico.

Nessa direção, o enunciado de uma das questões de uma lição de casa:

> Escreva o maior e o menor número de quatro algarismos que podemos formar com: a) 8, 5, 3, 1   Resposta: 8531 e 1358

Os algarismos podem ser iguais? Nada foi comentado a respeito e é uma possibilidade, com resposta 8888 e 1111. Se o objetivo da questão é resposta com algarismos diferentes, essa condição deve, necessariamente, ser explicitada. Se fosse uma prova, o aluno poderia errar por pensar de forma diferente da professora, mas correta nessa outra perspectiva. Será que todos os professores aceitariam as duas possibilidades como corretas se questionados? Os alunos com a interpretação diferente questionariam a professora?

Outra questão proposta por Dante (1997, v3, p.25) e aproveitada pela professora:

> Escreva todos os números possíveis usando os algarismos 3, 6 e 8 com as condições:
>
> a) eles não podem ter algarismos repetidos;
>
> b) eles podem ter um, dois ou três algarismos.
>
> -

(a) e (b) são condições de uma única questão ou são dois itens diferentes da questão? Ou ainda, é uma ou são duas respostas?

A linha tracejada sugere resposta única. O aluno copiou a linha, mas poderia não ter copiado.

Evita-se a possível confusão, por exemplo, alterando-se o enunciado para “que satisfaçam as duas condições” (um exercício com duas condições) ou “para cada uma das condições, escreva todos...” (uma resposta para cada condição).

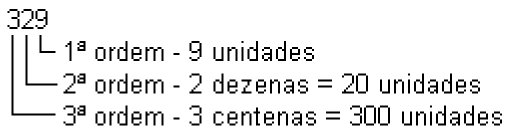
Em um exercício, foi solicitado:

Dê o valor absoluto e o valor relativo de cada algarismo:

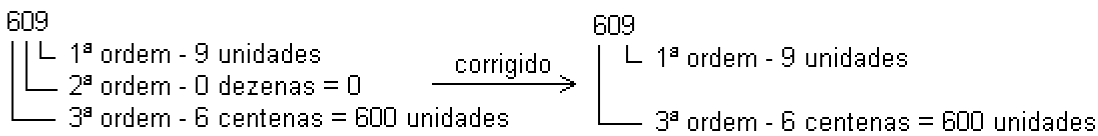
Resolução inicial do aluno após a correção

Curioso o que o aluno *corrigiu*. O algarismo da ordem das dezenas, 0 (zero), tem valores absoluto e relativo 0 (zero), como colocado inicialmente pelo aluno. No mesmo dia, na *lição de casa* a professora solicitou:

Faça como o modelo:



Os números propostos nesse exercício foram diferentes daqueles do exercício resolvido e corrigido em classe, com exceção do 609, colocado novamente na tarefa:



Resolução do mesmo aluno, em casa após a correção (apagou “2ª ordem...”)

O aluno insistiu na interpretação inicial, adaptada ao novo exercício, apesar da *correção* do exercício anterior. Seu exercício foi novamente *corrigido*.

Uma questão importante: como o algarismo 0 (zero) é entendido pelos alunos? Pelos professores? Até esse evento, o aluno atribuía ao algarismo 0 (zero), corretamente, um status semelhante aos outros. Afinal de contas, o zero “segura” uma posição, que garante as ordens corretas, ou ainda, se não fossem as zero dezenas, as seis não seriam centenas...

Interessante observar, no exemplo, que o número de unidades correspondente à 1ª ordem (9) é maior que o número de unidades correspondentes à 2ª ordem (0). Excluindo o zero, o número de unidades correspondentes a qualquer ordem maior que outra é sempre maior que o número de unidades dessa outra: 1 na 3ª ordem corresponde a 100 unidades e 9 na 2ª ordem, a 90 unidades.

Esse fato pode ter influído no procedimento da professora, a não inclusão das zero dezenas: zero dezenas são zero unidades, menor que nove unidades.

Outro exercício proposto pela professora e corrigido pelo aluno:

> Ana pediu uma segunda via de seu RG Escolar. Por distração, a secretária esqueceu-se de colocar o número. Ele é formado por sete centenas, cinco dezenas e duas unidades. Qual é o número do documento?

Resposta do aluno: 700502;   resposta corrigida: 752.

Outra questão: qual dos números acima tem mais a ver com números de RG? Certamente o da esquerda (o número do RG escolar é o mesmo do RG definitivo). Esse aluno sabe trabalhar com unidades, dezenas e centenas, mas deve ter usado o que entendeu mais lógico em relação à numeração do RG: ele tem o dele. Problema de contexto e de incentivo ao aluno para colocar suas importantes idéias.

O sinal “–” (traço) foi usado como separador de números, também pela professora, e pode ser entendido como subtração ou substituir símbolos matemáticos mais pertinentes. Por exemplo, no exercício (caderno do aluno):

> Escreva de 800 a 700, de 10 em 10 e em ordem decrescente.
> Resposta: 800 – 790 – 780 – 770 – 760 – 750 – 740 – 730 – 720 – 710 – 700

No exercício seguinte o aluno completou com um dos sinais “>” (maior) ou “<” (menor). Um desses sinais poderia ser solicitado como separador (usando > ou <):

800 > 790 > 780 > 770 > 760 > 750 > 740 > 730 > 720 > 710 > 700.

Esse uso do sinal “–” não é exclusividade dessa ou de professores das séries iniciais. Em Guelli (1996, v4, p.37), o sinal “–” é usado como separador de números:

> 4. Um número natural e o seu sucessor formam um par de números consecutivos. Escreva todos os pares de números consecutivos que você vê aqui:
>
> 24 – 25 – 32 – 35 – 48 – 49 – 54 – 63 –
> 64 – 74 – 75 – 89 – 91 – 95 – 96 – 99 – 100

Outros usos de *separadores*, corrigidos como corretos no caderno do aluno:

> Escreva o valor relativo do $\boxed{6}$ e do $\boxed{3}$ em cada número:
>
> a) 346.198 = 300.000 – 6000
>
> Dê o valor posicional do 4 em cada número:
>
> a) 432 = 400

Nos dois casos o aluno resolveu corretamente as questões e apresentou suas conclusões através de sentenças matemáticas falsas, pois $346.198 \neq 300.000 - 6000$ e $432 \neq 400$. O uso indiscriminado da igualdade como um separador compromete o conceito de igualdade do aluno (e do professor) e de suas aplicações, como na subtração apresentada.

Na quarta série, por ser um conteúdo já estudado, o Sistema de Numeração Decimal, especificamente, foi explorado de forma mais rápida que na terceira. Até a 15ª ordem foram exploradas, divididas em classes, o que não ocorreu na terceira série.

Quadro, registrado no caderno de um aluno, que apresentou classes e ordens:

5ª CLASSE Un. Trilhão			4ª CLASSE Un. Bilhão			3ª CLASSE Un. Milhão			2ª CLASSE Un. Milhar			1ª CLASSE Un. Simples		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
15ª ordem	14ª ordem	13ª ordem	12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem

Um pouco confuso o texto sobre ordens e classes, colocado na lousa:

> As **ordens** e **classes** vão da direita para a esquerda. Separamos os algarismos em classes das unidades, das dezenas e das centenas.
>
> Cada algarismo tem um valor relativo ou valor de lugar. A posição do algarismo no numeral determina seu valor.

Pretendeu-se informar que cada classe é composta por três ordens: ordem das unidades, das dezenas e das centenas (de acordo com a tabela apresentada).

O valor relativo dos algarismos (estudado na terceira série) foi apresentado e solicitado em exercícios. O valor absoluto, se complementasse a informação acima, teria evitado nova apresentação dos valores absoluto e relativo do algarismo no numeral, como ocorreu após o estudo da adição de números naturais.

Sobre a precisão de enunciados e os valores absoluto e relativo do algarismo no numeral,[7] Dante (1997, v3, p.24) traz o exercício a seguir, proposto pela professora:

> Qual é o valor dos algarismos destacados no número do quadro?
>
> **45** 26**0** 1**6**3

São esperados os valores relativos dos algarismos. E se o aluno coloca os valores absolutos? A condição pretendida deveria ser especificada: valor relativo...

Também na quarta série o sinal “–” (traço) foi usado pela professora como separador. Por exemplo, na “decomposição de numerais”: 2.509 – 2000 + 500 + 9, para indicar que 2.509 é decomposto através da adição 2000 + 500 + 9. A igualdade (=) ficaria muito bem: 2.509 = 2000 + 500 + 9.

Sobre a decomposição, muitos "faça como o modelo" poderiam ser evitados nas duas séries, incentivando os alunos a interpretarem os enunciados. Poderiam ser usados, por exemplo:

---

[7] Numeral é o signo que representa um número, que é a idéia de quantidade. É comum o uso do termo “número” em referência ao signo. Por exemplo, número de três algarismos.

decomponha indicando as ordens
para 5342 = 5UM+3C+4D+2U ou
decomponha usando adição das unidades correspondentes às ordens
para 5342 = 5000+300+40+2

Complicado? Se forem necessários vários esclarecimentos dos enunciados, cada discussão se dará na direção de um sentido maior dos termos e dos conceitos envolvidos e, também, da clareza do próprio enunciado.

Certamente é mais simples colocar, sempre, os modelos, o que não acrescenta muito além da dependência de modelos (e de outros...).

Ainda em relação à decomposição, ela deve ser entendida como um procedimento flexível, aplicável a outras situações e com outros objetivos.

A ampliação de seu conceito pode ser associada ao cálculo mental:

Use a adição para decompor um ou mais números de tal forma que o cálculo mental seja facilitado. Feita a decomposição, calcule mentalmente.

549 + 275 = (530 + 19) + (270 +5) = 824
738 – 125 = (725 +13) – 125 = 613

Muitas dificuldades dos alunos para efetuar operações ou resolver problemas podem ter suas origens no entendimento do nosso sistema de numeração. Para procurar aumentar as possibilidades de apreensão do nosso sistema de numeração, por parte dos alunos, pode-se, por exemplo:

- usar materiais de apoio, como o Material Dourado, Ábaco, contas, palitos etc (Piaget e Szeminska, 1971; Kamii, 1990);
- propor resoluções de operações em outros sistemas (Dante, 1997, v3 e v4);
- procurar formular enunciados claros, estimulando interpretações ao invés de usar modelos;
- evitar (e corrigir) o uso indevido de símbolos matemáticos;
- estar atento aos erros e às colocações dos alunos (Kamii, 1990);
- estimular questionamentos (próprios e dos alunos), em relação aos livros didáticos, conceitos, procedimentos, algoritmos (Kamii, 1990);
- estimular o cálculo mental (PCN - Brasil, 1997);
- estar seguro de que não propor atividade do livro indicado ou de referência não diminuirá as possibilidades de aprendizagem dos alunos.

IV.2. Operações com Números Naturais

Adição

Adição nas terceiras séries

Observação de aula na 3ª série E - 06/04.

- Início do estudo da adição de forma sistematizada – os alunos efetuaram várias adições nos exercícios de revisão propostos anteriormente pela professora.

P[8]: No supermercado, comprando alguns itens. No caixa, a moça faz o que?

A: Passa no computador.

P: O que tem que ser feito no computador ou máquina para ter um total?

A: Somando.

P: Quando a gente vai juntando, somando, adicionando, é que continha?

A: De mais.

P: Como chama?

A: Adição.

P: Adição: juntar, reunir, somar. Qual é o símbolo que eu uso?

A: Cifrão.

P: Símbolo.

A: Mais.

- Símbolo que indica a adição. O cifrão também é um símbolo. O aluno estava preocupado com o pagamento no caixa, o que, muitas vezes e infelizmente, envolve as relações necessárias no supermercado. O dinheiro que tenho é suficiente?

P: Um feirante tinha numa caixa 55 laranjas. No caminhão, mais uma caixa com 33 laranjas. Foi no caminhão e pôs junto na caixa da banca. O que ele fez?

A: Juntou.

- O feirante colocou as 33 laranjas da caixa que estava no caminhão na caixa que já tinha 55 laranjas e estava na banca.

P: Com quanto ficou?

A: 88; A_1: 99.

P: Vou mostrar a conta. $55+33 = \boxed{}$; o que é o 55 da conta? É uma...

A: Dezena, centena, unidade de milhar.

---

[8] Indicações: P: → professora; A: → aluno; A_1: → aluno 1, se outro interveio; • → meus comentários.

- Poderia esclarecer: que nome recebe o 55 por ser elemento de uma adição. Podem ser observados, nos diálogos, elementos do contrato didático estabelecido. A professora pergunta e os alunos respondem. Muitas respostas são *chutes* que não são discutidos e pouco interferem no prosseguimento da aula. Cabe aos alunos responderem prontamente, sem uma preocupação maior com as respostas. Eventualmente a professora retoma sua explicação.

P: Parcela. O 33 é outra...

A: Parcela.

P: Parcela, parte.

- A professora colocou na lousa:

55 → parcela
33 → parcela

P: Se ele juntou tudo na banca, o que ele fez?

A_1: Uma parcela; A_2: Uma divisão; A_3: Uma soma.

P: Presta atenção pra não falar que está vendendo pepino. Se eu vou juntar tudo é porque eu quero saber com quanto ficou.

A: Deitado é mais difícil.

P: Não é difícil em pé. Vamos montar a conta.

- Na lousa:

$$\begin{array}{rl} & 55 \quad 5+3=8 \\ + & 33 \quad 5+3=8 \\ \hline & 88 \end{array}$$

P: O resultado, aqui, como chama?

A: Soma ou total.

P: A soma deu 88 ou o total é de 88 laranjas. Falo um ou falo outro.

- A professora observou um aluno com algo na boca:

P: Joga o que tem na boca.

A: É papel. Caiu meu dente.

- A professora aceitou a justificativa e prosseguiu.

P: Outro probleminha. No armário, 46 livros em uma parte, em cima. Na segunda, mais 46 livros. Se quero saber o total de livros da primeira e segunda partes, o que eu faço?

A: Somo, 46+46.

- A professora usou a lousa:

$$\begin{array}{ccc} \text{D U} & \text{D U} & \\ 4\,6 & 4\,6 & 4\,6 \\ \underline{+\,4\,6} & \underline{+\ \ 4\,6} & \underline{+\,4\,6} \\ (1) & (2) & (3) \end{array}$$

- Comentários da professora:

  (1) Unidade em baixo de unidade, dezena embaixo de dezena.

  (2) Errado. Não são 4 unidades.

  (3) 6 + 6 = 12. Como faço?

A: Dá 2 e sobe 1.

P: Por que?

A: Não pode ficar embaixo.

P: Conta de 2 ordens não pode por 3 ordens. Na unidade, até 9.

- Pode ocorrer conta – adição com parcelas – de 2 ordens com resultado de 3 ordens: 50+51=101; pretendeu informar que, no algoritmo da adição, para cada ordem das parcelas deve ser registrado um único algarismo na soma, efetuando-se a troca, se necessário: 10 unidades de uma ordem trocada por 1 unidade da ordem imediatamente superior.
- Colocou na lousa:

$$12 = 10 + \overset{U}{2} \qquad 10 \longrightarrow \text{1 dezena}$$

P: Só posso deixar embaixo da unidade o 2. Por que ponho o 1 em cima e não embaixo?

A: Dá errado.

P: Tanto faz. Em cima facilita na hora de olhar para fazer a conta. E agora?

A: Multipli...

P: 1 mais 4.

A: 5.

P: 5+4.

A: 9.

P: 92 é igual a que?

A: Soma ou total.

- Poderia perguntar por outra forma de escrever 92 ou como decompor 92. A resposta do aluno é correta, mas não a pretendida pela professora. Situações como essa podem levar o aluno a pensar que errou e, também, deixar de responder. A professora colocou na lousa o algoritmo usual, mostrando as decomposições correspondentes.

$$\begin{array}{rcl} 46 & = & 40 + 6 \\ +\,46 & = & 40 + 6 \\ \hline 92 & = & 90 + 2 \end{array}$$

P: 90 mais 2. Se eu somar vai dar isso.

A_1: Não. A_2: Vai.

- Os alunos concordaram com o resultado. A professora retomou a decomposição das parcelas para discutir o que ocorre quando a soma dos algarismos de uma ordem é maior que dez.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 40 + 6 \\ +\,40 + 6 \\ \hline 2 \end{array}$$

P: Se eu subir o um...

A: O um tá valendo dez.

- A resposta do aluno mostrou sua compreensão “vai 1” no registro usual do algoritmo da adição: “O 1 tá valendo 10”.

P: Eu não subo um, subo dez.

- Momento interessante para aproveitar e socializar a compreensão do aluno, discutindo de forma integrada os dois algoritmos: usual e com as decomposições. “Subo 10” no registro que usa a decomposição e “subo 1” no algoritmo usual, onde “o 1 tá valendo 10”.

P: Se eu tivesse um número grande...

A_1: Seria grande. A_2: Um monte de algarismos.

- Respostas adequadas à pergunta.

P: Um monte de algarismos um em cima do outro? De vários algarismos ou de várias ordens.

A: 1405.

P: Pacote de amendoim com 1405. É só um exemplo. Vocês não vão contar ... Outro saquinho com 2700. Alguém que bancou o louco ficou contando. Quanto contou?

A: 3475.

P: 1405+2700. Lugar certo?

A:...

P: Unidade embaixo de unidade...

A: Professora, se fosse 150500?

Um	C	D	U
1	4	0	5
+ 2	7	0	0

P: Vamos resolver esse. Posso começar debaixo? Na adição posso. Não dá pra fazer da unidade de milhar pra lá. Por que?

A: Se algum número subir não dá.

- A professora vai adicionando nas diversas ordens:

  5 + 0 = 5

  0 + 0 = 0

  4 + 7 = 11

A: Empresta um lá em cima...

P: Empresta?

Alunos: Sobe 1.

- Confusão em relação aos algoritmos e ao sistema de numeração. Parte dessa confusão poderia ser evitada se o algoritmo para a subtração fosse o da invariância da diferença, que será discutido adiante. A posição do algarismo referido pelo aluno – o do “empresta” – na subtração por invariância da diferença difere da posição do algarismo – que “sobe” – na adição.

P: Nós estamos falando como se fosse unidade. Tá certo falar que tenho unidade?

- Colocou o esquema na lousa:

C	4 centenas → 400	7 centenas → 700	C
4			400
7			+ 700
			1100

P: Então deixo uma centena no lugar da centena e uma unidade na unidade de milhar.

Um C D U		
1 4 0 5	1000 + 400 + 0 + 5	
+ 2 7 0 0	+ 2000 + 700 + 0 + 0	
4 1 0 5	0 + 5	1100

- A professora escreveu o número 1100 à direita da segunda *conta*.

P: Vamos fazer essa conta agora.

A: Nossa!

P: Esse 1100, na realidade ele é o que?

A: 1000 + 100.

$$\begin{array}{rr} 1000 & \\ 1000 + 400 + 0 + 5 & 4000 \\ +\ 2000 + 700 + 0 + 0 & +\ 100 \\ \hline 4000 + 100 + 0 + 5 & 5 \\ & \overline{4105} \end{array}$$

- Não foi feita referência à decomposição do 1100: o aluno sabia o que era esperado.

P: Quem deixo onde?

A: 100 na centena

P: 4 centenas mais 7 centenas são 11 centenas ou 1 unidade de milhar e 1 centena. Agora não vamos mais fazer continhas fraquinhas.

A_1: Eu faço em casa, mas nunca acertei.

P: Com essa explicação, o que você acha?

A_1: Não sei.

- Algumas adições foram resolvidas por alunos na lousa (não por decomposição):

$$\begin{array}{r} 1 \\ 136 \\ +\ 145 \\ \hline 281 \end{array}$$ → aluno que disse que não acertava e acertou

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 3 \\ +\ 1\ 2\ 8 \\ \hline 3\ 5\ 11 \end{array}$$ → uma aluna

- Apontamentos registrados na lousa e copiados pelos alunos:

Adição

São freqüentes em nossas vidas situações em que usamos a adição. Adicionar significa juntar ou reunir.

Vamos usar a adição para resolver alguns problemas:

1º Exemplo: Em uma escola estão matriculados 1302 meninos e 1534 meninas. Quantos alunos tem a escola?

Para saber o total de alunos, devemos adicionar o número de meninos ao número de meninas.

Assim:

	Um	C	D	U		
	1	3	0	2	→	*Parcela*
+	1	5	3	4	→	*Parcela*
	2	8	3	6	→	*Soma ou total*

+ é o sinal da adição

$$\begin{array}{r} 1302 \\ +\ 1534 \\ \hline 2836 \end{array}$$

Lembre-se: Colocamos unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas, centenas debaixo de centenas, unidades de milhar debaixo de unidades de milhar. Em seguida adicionamos unidades com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas, unidades de milhar com unidades de milhar.

Resposta: A escola tem 2836 alunos.

2º Exemplo: De um depósito de material de construção saíram dois caminhões. Um transportava 2847 tijolos e o outro 9236 tijolos. Quantos tijolos os dois caminhões levaram?

Dm	Um	C	D	U
1	1		1	
	2	8	4	7
	9	2	3	6
1	1 2	1 0	8	1 3

$$
\begin{array}{r}
1\ \ \ \ 1\ \ \ \ \\
2\ 8\ 4\ 7 \\
+\ 9\ 2\ 3\ 6 \\
\hline
1\ 2\ 0\ 8\ 3
\end{array}
$$

Resposta: Os dois caminhões levaram 12083 tijolos.

A professora, em sua exposição, justificou as trocas que ocorreram e os registros correspondentes – o "vai 1" –, efetuando, inclusive, adição por decomposição. A necessidade desse procedimento pode ser observada na colocação de um aluno: "eu faço em casa, mas nunca acertei". Esse aluno acertou a adição que fez na lousa.

Por outro lado, uma aluna, após as explicações, adicionou 8 e 3 registrando 11 unidades sem *deslocar* a dezena (10 + 1) para a próxima ordem:

$$
\boxed{\begin{array}{r}
2\ 3\ 3 \\
+\ 1\ 2\ 8 \\
\hline
3\ 5\ 11
\end{array}}
$$

Esse fato mostra que, apesar de necessário, o procedimento da professora não foi suficiente para todos os alunos. Um aluno manifestou sua incompreensão anterior e outra, sem ter se manifestado, a demonstrou em sua resolução. Certamente outros continuaram com dúvidas.

O registro da aula nos cadernos dos alunos não apresenta a adição por decomposição. Nos exercícios posteriores, nos quais foram solicitadas adições por decomposição, a soma de todas as ordens foi sempre menor que 10, não requerendo *trocas*.

Se os alunos com dificuldade procuraram estudar em casa, não puderam retomar alguns elementos discutidos na aula que introduziu a adição.

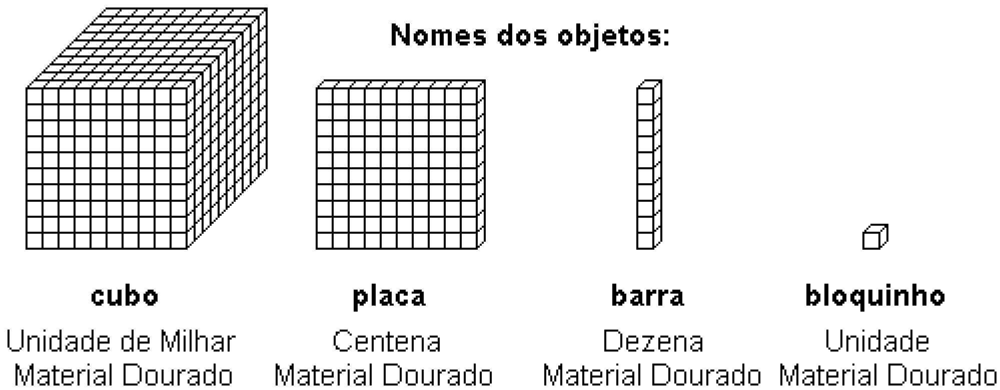
Observar a professora efetuar decomposições e trocas pode ser suficiente para alguns alunos, mas não para todos. As adições não efetuadas nos sistemas Egípcio e Maia poderiam ter contribuído na compreensão do mecanismo das trocas.

Através de esquemas e representações, o material dourado foi associado ao estudo do sistema decimal. Poderia ser utilizado, efetivamente, como forma de registro intermediário de contagens e operações, buscando a compreensão do nosso sistema de numeração e sua aplicação nas operações.

Uma atividade que pode ser interessante é a contagem de objetos *imaginados* pelos alunos: bois, pássaros ou outros, representados por feijões. Grupos de alunos com algumas funções podem ser organizados, por exemplo contando com:

- coordenador: supervisiona o processo e registra no papel a contagem final;
- *dono* dos objetos: separa-os à medida que a contagem/registro ocorre;
- contador: registra com o material dourado a contagem atual e
- conferente: registra no papel as fases intermediárias, de acordo com indicação do grupo.

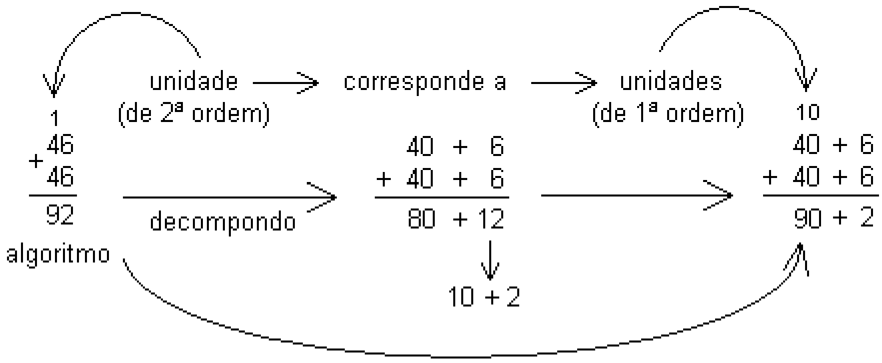
Pode parecer *chover no molhado*: por que não agrupar e contar diretamente feijões? O Material Dourado traz em si uma dualidade que também se faz presente no sistema decimal e deve ser trabalhada.



Quando alguns feijões são separados, digamos 5, 5 *bloquinhos* devem ser separados. Ao serem completados 10 feijões, os 10 *bloquinhos* serão trocadas por 1 *barra*. A unidade *barra* é uma peça única, correspondendo, no sistema decimal, a uma unidade de 2ª ordem: uma dezena. A peça do Material Dourado, *barra*, traz em si os *cortes* que indicam sua *composição*: 10 *bloquinhos* são necessários, justapostos, para *formar* 1 *barra*. Portanto, com o Material Dourado, unidades que trazem em si as referências (cortes) a outras unidades, nas quais podem ser *transformadas* (trocas) podem ser manipuladas: uma unidade que pode se desdobrar em várias (10) unidades. Trabalhar com essa dualidade, ou melhor, *manipular* essa dualidade pode ser fundamental para muitos alunos apreenderem o funcionamento do registro dos processos de contagem ou de operações, efetuando trocas concretas na busca da significação do nosso sistema de numeração.

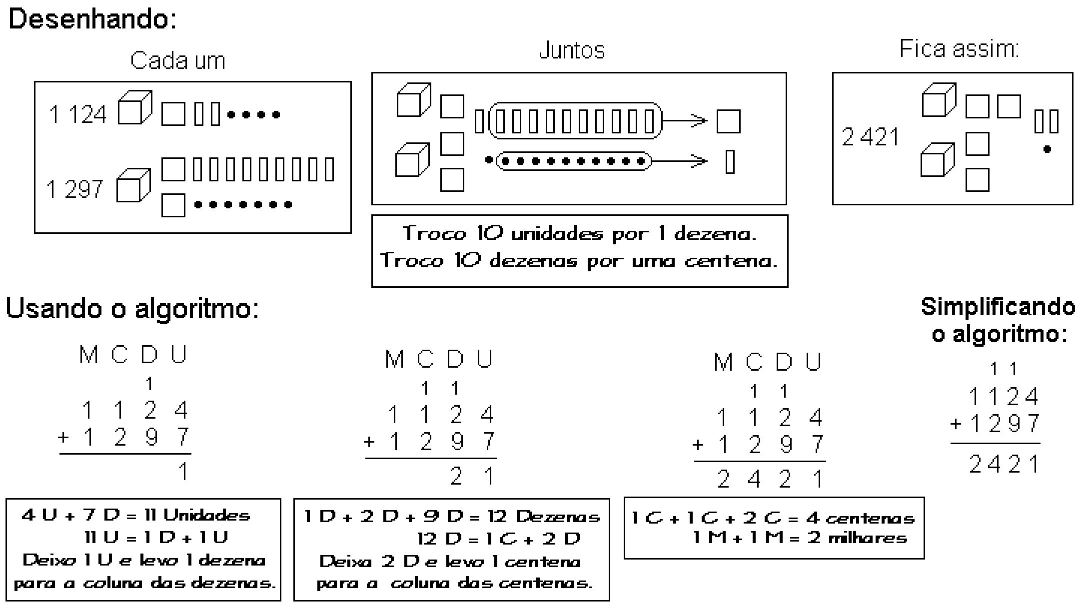
A professora destacou, várias vezes, que "vai 1", mas não uma unidade e sim uma dezena, uma centena. No registro (algoritmo), o que vai mesmo é 1, uma unidade, mas de uma determinada ordem que corresponde, também, a 1 dezena ou 1 centena, etc, que pode, também, ser expresso por unidades simples correspondentes ou ainda, através da correspondência: 10 unidades de determinada ordem correspondem a 1 unidade de ordem imediatamente superior. O entendimento desta descrição de unidades que se desdobram em *não unidades* pode não ser fácil. Muito mais difícil deve ser, para o aluno, compreender esses fatos e usá-los como ferramentas sem o apoio de materiais, como o Material Dourado, e atividades que evidenciem essas relações.

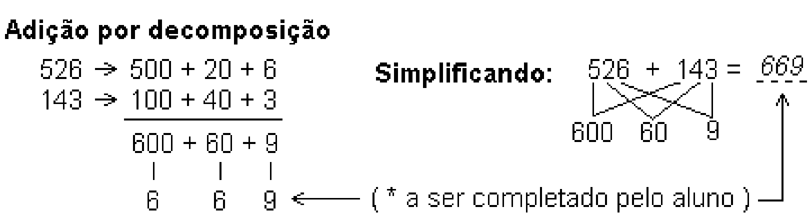
Essa dualidade pode ser explorada, preferencialmente apoiada pelo Material Dourado, em adições com vários registros: algoritmo usual, parcelas e soma decompostas e efetuando trocas nas ordens. Aproveitando e complementando um exemplo da professora:



O Material Dourado pode funcionar como um elo de ligação, uma base estrutural, para a significação de algoritmos.

No livro referência da professora para a adição, o autor sugere o uso do Material Dourado e apresenta adições através de representações gráficas desse material e, também, adições por decomposição (Dante, 1997, v3). Por exemplo, as adições 1124 + 1297 (Material Dourado, p.92) e 526 + 142 (por decomposição,[9] p.90):





[9] No exemplo e exercícios de adições por decomposição, no livro, todas as *somas parciais* – em qualquer ordem –, são sempre menores que 10. A professora discutiu dois exemplos que requereram trocas. Seria interessante a solicitação de adições por decomposição, no livro e pela professora, nas quais fossem necessárias *trocas* em algumas ordens: trocas a serem feitas, pelos alunos, no algoritmo.

Adição nas quartas séries

Os termos e o algoritmo da adição foram recordados nas quartas séries, através da resolução de um problema, proposto por Guelli (1996, v4, p.30-31):

> *Ana colheu 56 cachos de uvas e Marta, 42. Quantos cachos de uvas as duas colheram juntas?*
>
> *Para saber quantos cachos de uvas as duas colheram juntas, temos de efetuar uma adição.*

Até aqui, coincidem as anotações no caderno do aluno com o texto do livro. O autor representa a adição em um ábaco, estratégia suprimida pela professora. Essa *adaptação* tornou o texto confuso.

> *Representamos as parcelas, 56 e 42 que são os dois.*[10] *Recordamos então os termos da adição:*
>
> $$\begin{array}{r l} 56 & \rightarrow \text{parcela} \\ \underline{+\ 42} & \rightarrow \text{parcela} \\ 98 & \rightarrow \text{soma} \end{array}$$
>
> *Como fazer esta adição?*
>
> *Formamos uma parcela 256 e depois acrescentamos outra, 159.*
>
> *Para efetuar esta adição faremos o seguinte:*

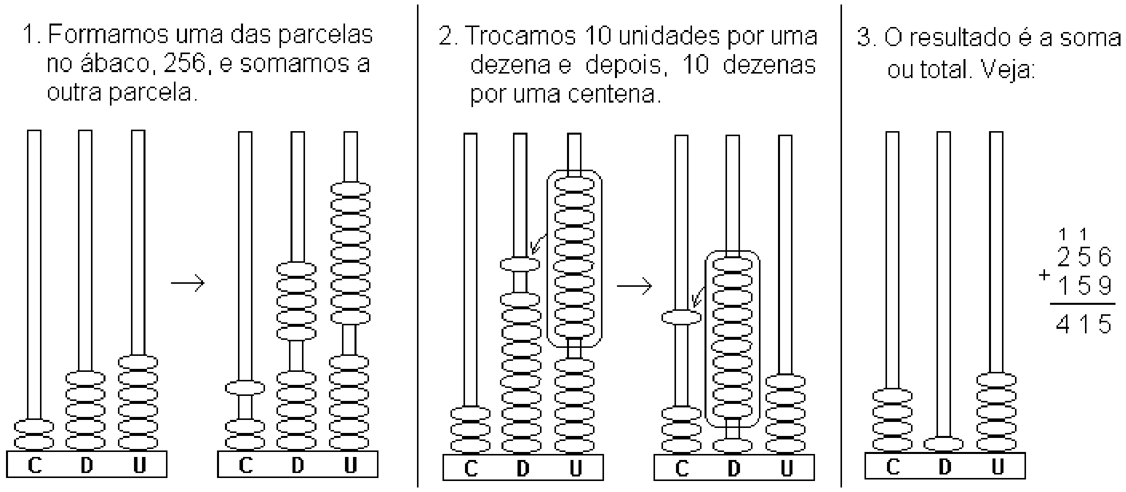
	C	D	U
	2	5	6
+	1	5	9
	4	1	5

A *formação* da parcela está relacionada ao ábaco que não foi usado. A indicação da adição na tabela, sem nenhum comentário, pouco esclarece quanto ao algoritmo.

O hábito de estudo através das anotações no caderno pode ter sido prejudicado pela confusão colocada por esse texto, nas quartas séries.

A adição 256 + 159, no livro:

[10] O texto não foi completado pelo aluno ou pela professora.



Guelli, 1996,v4, p.32.

A professora não usou esquemas do Ábaco e do Material Dourado na retomada da adição de números naturais. Muitos alunos das quartas séries, principalmente da 4ª E, tiveram dificuldade durante todo o ano letivo para trabalhar com números e operações. O uso real[11] desses ou de outros materiais como, por exemplo, palitos, poderia ter melhorado o relacionamento desses alunos com a matemática. Se o aluno não usou nas séries anteriores ou ainda tem dificuldade, vale a pena poder contar com esse apoio.

[11] O uso de representações do ábaco, sem manipulação anterior, pode exigir conhecimento do sistema de numeração e das operações envolvidas, no sentido contrário do desejável.

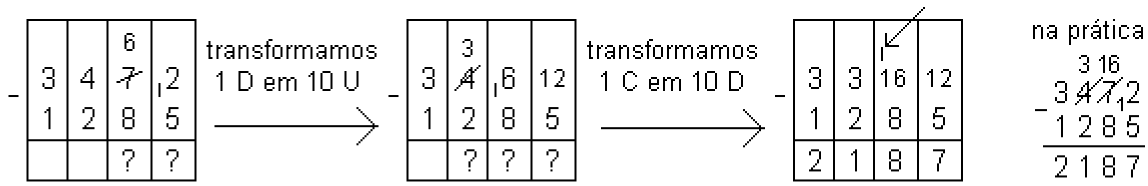
Subtração

Subtração nas terceiras séries

Nas terceiras séries, subtrações nas quais todos os algarismos do minuendo eram maiores que os do subtraendo foram efetuadas antes da formalização do estudo dessa operação, que ocorreu após o estudo da multiplicação.

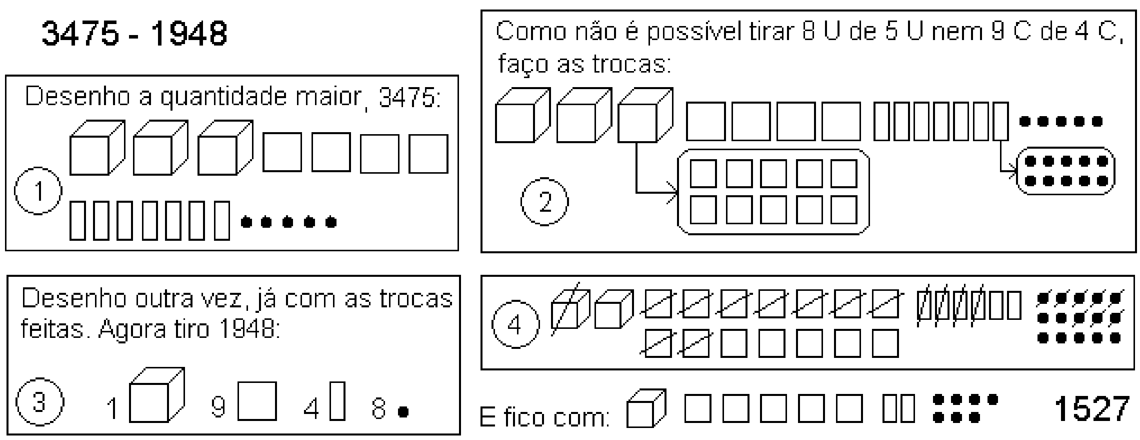
Apontamentos registrados no caderno do aluno:

> *Subtração*
> *Em matemática, subtrair significa tirar um número de outro.*
> *Vejamos 1954 – 612. ...* [12]
> *Outro exemplo. 3472 – 1285*



Na terceira tabela, a seta indica uma possível confusão de notação do aluno. Deve ter acrescentado o “1” de sua notação ao “16”, notação da professora.

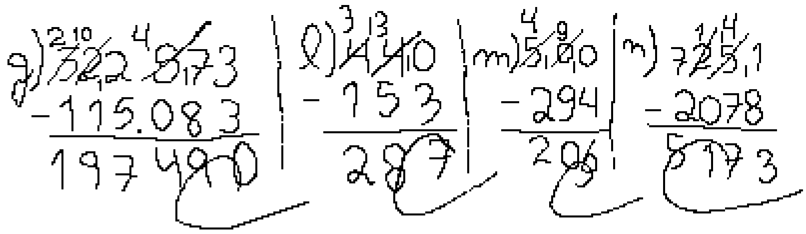
Dante (1997, v3, p. 101), usa figuras representando o Material Dourado para introduzir o algoritmo da subtração. Essa representação não foi apresentada aos alunos.



---

[12] Esse exemplo não foi discutido por apresentar, em todas as ordens, algarismos maiores no minuendo.

Algumas subtrações resolvidas por um bom aluno da 3ª D:



Observando cadernos de alunos e as correções de subtrações na lousa, nas terceiras e quartas séries, uma dúvida que sempre tive definitivamente foi resolvida.

O algoritmo da subtração que nós, professores, propostas pedagógicas, e quem mais possa ter influído, impomos aos nossos alunos, pode exigir transformações em várias ordens para a resolução em uma única ordem, ter sua *leitura* dificultada pelas trocas e vai na contramão do conhecimento matemático socialmente estabelecido.

Alunos com dificuldade não se atrevem a tentar entender as notações de colegas. Quem fez pode não entender seus próprios registros. E as subtrações nas divisões? Adiante apresentarei sugestão para o algoritmo da subtração.

Subtração nas quartas séries

Nas quartas séries, a subtração foi recordada rapidamente, através de dois exemplos: um deles necessitou *troca* de dezena por unidades. Nada foi discutido sobre *trocas* em outras ordens. Apontamentos no caderno de um aluno:

Recordando a subtração

$$\begin{array}{rl} 45 & \text{minuendo} \\ -\ 24 & \text{subtraendo} \\ \hline 21 & \text{resto ou diferença} \end{array}$$

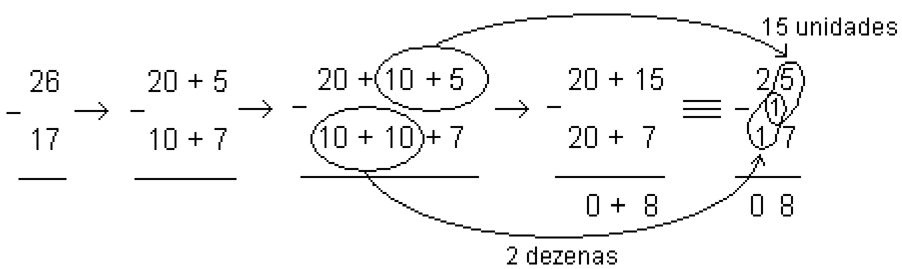
Para resolver um outro tipo de subtração, faremos o seguinte: na operação abaixo não podemos subtrair 8 unidades de 6. Então trocamos 1 dezena por 10 unidades.

Assim:

$$\begin{array}{rl} 6\ \overset{2}{\cancel{3}}\ {}^{1}6 & \\ -\ 3\ 1\ 8 & \text{Depois de efetuada a troca} \\ \hline 3\ 1\ 8 & \text{a operação poderá ser feita} \end{array}$$

A professora das quartas séries, observando a dificuldade dos alunos para efetuarem subtrações na lousa, comentou que ensina dessa forma porque não dá para justificar o outro algoritmo.

O *outro algoritmo*, referido pela professora, se apoia na *invariância da diferença*, que pode ser discutida com os alunos a partir de diferenças significativas e facilmente constatáveis. Apresentei à professora, durante a aula e nos meus apontamentos, o esquema:



Em uma subtração, a diferença não se altera se adicionamos ou subtraímos um mesmo número ao minuendo e ao subtraendo. Por exemplo, a diferença entre as idades de dois irmãos não se altera após 3 ou 12 anos e esse fato é facilmente verificado pelos alunos. Exemplo da invariância da diferença usando idades para a verificação:

idade em anos	hoje	daqui a 3 anos
aluno da 3ª	9	12
seu irmão	4	7
diferença	5	5

temos:

$9 - 4 = 5$

$(9+3) - (4+3) = 5$

A subtração 3472 – 1875, exemplo usado pela professora da 3ª série, através da invariância da diferença e decomposição em unidades das diversas ordens:

	preparando para subtrair unidades	*ajustando* ao algoritmo
minuendo	3000 + 400 + 70 + 2	3000 + 400 + 70 + 2
somando 10 unidades	- + 10 (10 unidades) + 10 (1 dezena)	- + 10
subtraendo	1000 + 200 + 80 + 5	1000 + 200 + 80 + 5

	preparando para subtrair dezenas	*ajustando* ao algoritmo
minuendo	3000 + 400 + 70 + 2	3000 + 400 + 70 + 2
somando 100 unidades	- +100 (10 dezenas) + 100 (1 centena)	- + 100
subtraendo	1000 + 200 + 80 + 5	1000 + 200 + 80 + 5

terminando a subtração	algoritmo justificado
3000 + 400 + 170 + 12 - 1000 + 300 + 90 + 5 2000 + 100 + 80 + 7 = 2187	3 4 7 2 +10 unidades de 2ª ordem; +10 unidades de 1ª ordem - 1 1 + 1 unidade de 3ª ordem; + 1 unidade de 2ª ordem 1 2 8 5 2 1 8 7

efetuando a subtração por decomposição		algoritmo simplificado
3000 + 400 + 70 + 2 +100 +10 - + 100 + 10 1000 + 200 + 80 + 5	3000 + 400 + 170 + 12 - 1000 + 300 + 90 + 5 2000 + 100 + 80 + 7 = 2187	3 4 7 2 - 1 1 1 2 8 5 2 1 8 7

O *valor* do algarismo “1”,[13] entre duas ordens, é 1 unidade da ordem à esquerda: soma-se “1” ao algarismo do subtraendo (à esquerda do “1”). Esse *valor* corresponde a 10 unidades da ordem à direita: somam-se “10” ao algarismo do minuendo (à direita do “1”), o que corresponde a justapor o algarismo “1” ao algarismo do minuendo.

Pode-se pensar no “1” como 10 unidades adicionadas ao minuendo e 1 dezena ao subtraendo; 10 dezenas ao minuendo e 1 centena ao subtraendo, o que corresponde a adicionar 10 unidades ao valor do algarismo em uma ordem no minuendo e 1 unidade ao algarismo da ordem imediatamente superior no subtraendo, o que nunca altera a diferença, pois 10 unidades de uma ordem sempre correspondem a 1 unidade da ordem imediatamente superior.

Dante (1997, v3, p.104) sugere uma estratégia interessante para evitar “trocas” na subtração: decomposição do minuendo *buscando noves*. Seguem dois exemplos desse procedimento e algoritmos correspondentes (o segundo não consta do livro) e as representações – usual e por invariância da diferença – correspondentes :

	buscando noves	usual	por invariância da diferença				
1º	7000 - 597 6999 + 1 -597 6402 + 1 = 6403	9 9 6 $\cancel{10}$ $\cancel{10}$ $\cancel{7}$ $\cancel{0}$ $\cancel{0}$ $_{1}0$ - 5 9 7 6 4 0 3	7 0 0 0 - 1 1 1 5 9 7 6 4 0 3	- 7 1 (0+1) 6	- 10 (10+0 ou 10) 6 (5+1) 4	- 10 10 (9+1) 0	- 10 7 3
2º	5032 - 1857 - 4999 + 33 1857 3142 + 33 = 3175	9 12 4 $\cancel{10}$ $\cancel{13}$ - $\cancel{5}$ $\cancel{0}$ $\cancel{3}$ $_{1}2$ 1 8 5 7 3 1 7 5	5 0 3 2 - 1 1 1 1 8 5 7 3 1 7 5	- 5 2 (1+1) 3	- 10 (10+0 ou 10) 9 (8+1) 1	13 (10+3) - 6 (5+1) 7	- 12 7 5

O procedimento *buscando noves* não foi proposto aos alunos das terceiras séries. É muito útil como estratégia para o cálculo mental.

O autor observa, no livro do professor, que “... buscando os 9, evitam-se as trocas, e a subtração torna-se bem mais fácil”(op cit., p.104). Certamente. Nessa observação, a dificuldade que o algoritmo usual apresenta, nas *trocas*, é destacada e pode ser observada nos exemplos anteriores.

---

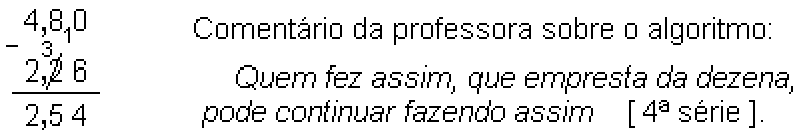
[13] Na verdade quem tem *valor* é o número representado pelo algarismo.

Nesses exemplos, usando o algoritmo *das trocas*, para subtrair unidades é necessário *trocar* dezenas, que, por sua vez, necessitam de *troca* nas centenas, que também precisam de *troca* nas unidades de milhar.

No algoritmo por invariância, a subtração é *local*, envolvendo sempre duas ordens. Se for necessária uma soma, a questão (não chega a ser problema) é resolvida na própria ordem e na imediatamente superior.

Sobre a notação, comparando os dois algoritmos, o da invariância é muito mais compacto, não compromete a divisão e evita confusão no próprio algoritmo ou com o da adição: o “1”, indicador das *somas de ajuste*, é colocado entre o minuendo e o subtraendo e, na adição, o algarismo “1” que corresponde a “10” da ordem imediatamente inferior (*reserva*) pode ser colocado acima das parcelas.

Alguns alunos usaram a invariância, alterando o algarismo do subtraendo:



Nas quartas séries, muitos alunos resolveram subtrações por invariância da diferença – como ensinado pelos pais –, principalmente nas divisões.

Por que não mudar? Não é fácil, para o professor, alterar a forma que ensina a subtração. Certamente não terá sucesso se tiver pressa, mas muito uso de material de apoio e muitas subtrações por decomposição, após o início do estudo dessa operação, podem mostrar que os alunos (e o professor) estão prontos para usar o algoritmo simplificado. Quem sabe, até, mudando o termo *empresta*, originalmente usado para o “1” do algoritmo da invariância, *emprestado* ao algoritmo das trocas ou da adição.[14] Algarismo compartilhado? Nada é *emprestado*: esse algarismo indica *somas de ajuste*.

Falar em unidades, dezenas e centenas sempre é bom. Melhor ainda é também relacionar o algarismo compartilhado às suas ordens, o que ajuda a trabalhar, significar e usar como ferramenta a correspondência *10 para 1* entre algarismos em ordens consecutivas, imprescindível na justificação da subtração por invariância da diferença.

[14] Nas correções de adições e subtrações, na lousa, surgiram indicações de alunos: empresta “1”...

Multiplicação nas terceiras séries

Combinando Possibilidades, exercício proposto por Dante (1997, v3, p.125), introduziu o estudo da multiplicação. Explorou-se a árvore de possibilidades obtida a partir de sucos das frutas: laranja, abacaxi, morango e melão, servidos em copos: pequeno, médio e grande. Resultaram 12 possibilidades para servir os sucos das frutas. Esse *componente* combinatório é uma das idéias presentes no conceito de multiplicação e é importante para a conceituar essa operação.

Estão no mesmo livro (Dante, 1997, v3) e não foram explorados na introdução da multiplicação:

- A disposição retangular: contagem de ladrilhos em uma parede ou pés de alface em um canteiro, através de exercícios preparatórios para a apresentação da multiplicação por decomposição (p.124);
- Uma tabela com multiplicações, que sugere informalmente a comutatividade da multiplicação. Produtos iguais, obtidos em multiplicações de fatores iguais e ordem diferente devem ser pintados com uma mesma cor (p.126):

Complete a tabela com os resultados das multiplicações

x	1	2	3	5
1	1			
2				
3	3		9	
5				2

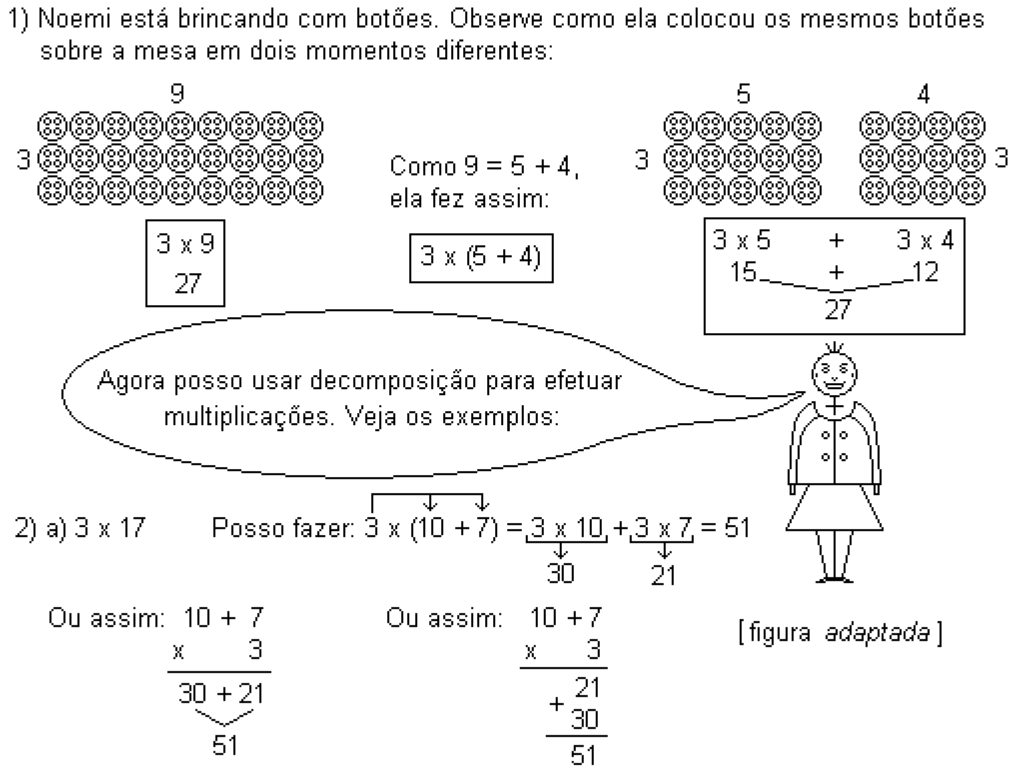
A multiplicação através da decomposição foi explorada pelos alunos segundo o mesmo autor. O livro apresenta uma disposição retangular de botões, separada ao lado em dois grupos.

Nessa disposição, os alunos trabalham informalmente com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição[15] – situação 1.

Na situação 2, a multiplicação por decomposição é estendida para a decomposição segundo as ordens do fator maior.

Esse procedimento é interessante na perspectiva de compreensão do algoritmo da multiplicação pelo aluno.[16]

Multiplicação usando a decomposição (Dante, 1997, v3, p.133)



Ainda em sintonia com Dante (1997, v3):

- Multiplicações por 1, 10, 100 e 1000 foram obtidas através de adições correspondentes: 2x10=10+10=20. A professora destacou que para multiplicar um número por 10, 100, 1000, acrescentam-se um, dois, três zeros à direita do número.
- Tabuadas do 2 ao 9 foram solicitadas: 2x1= ...; 2x2= ...; 2x3= ...

[15] O autor comenta, no livro do professor e ao lado da atividade proposta, a exploração dessa propriedade.
[16] O autor sugere que o professor estimule os alunos a efetuarem a multiplicação por decomposição, que muitos preferirão essa forma do que a usual. Caberia aqui um destaque do autor para a significação do algoritmo usual a partir da decomposição.

– O algoritmo foi apresentado em quadro com referência às ordens:[17]

2 x 226

C	D	U
	1	
2	2	6
	x	2
4	5	2

Na multiplicação por 2 algarismos a professora usou um quadro, sem referência às ordens, e iniciou com a multiplicação 20 x 31.

Observando o caderno de um aluno, com sinais de borracha – *corrigido* –, deduzi que a professora procurou *ajustar* duas notações: multiplicar por 20, colocando o zero *para fora* (sua notação) e usar o quadro (notação do autor), evitando a referência às ordens:

3	1		← apagado
x	2	0	
6	2	0	

O aluno pode ter organizado o quadro segundo as ordens e modificado de acordo com a professora.

O autor não apresentou, inicialmente, nenhum exemplo usando o *quadro* com um múltiplo de 10 como multiplicador. A indicação da professora ficou confusa, pois o “3” ficou na ordem das centenas e o “1”, das dezenas.

No livro (op cit., p.139), o autor indica a multiplicação por dezenas e a *simplificação* correspondente, sem deslocar o zero, como a seguir:

42	simplificando: → 42	outro exemplo: 157	
x 2 dezenas	x 20	x 50	5 dezenas
84 dezenas = 840 unidades	840	7850	

[17] No caderno do aluno, C, D e U estão minúsculas; o autor usa M para indicar unidades de milhar. Prefiro maiúsculas e “Um” – unidades de milhar – para evitar confusão com décimos (d), centésimos (c) e milésimos (m).

A multiplicação com multiplicador com dois algarismos não nulos foi apresentada, pela professora, diretamente através do algoritmo: no quadro de ordens e simplificado.

	2	5
×	1	3
	7	5
$\overset{1}{2}$	5	+
3	2	5

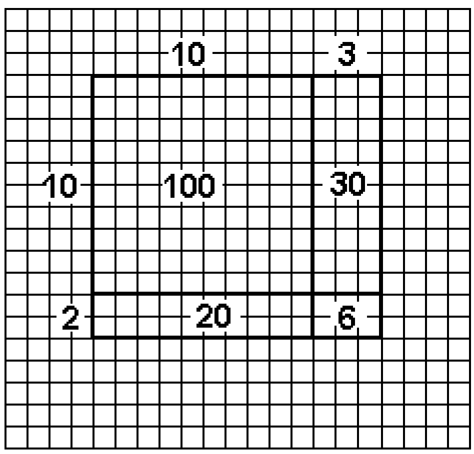
$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\ 1\ 3 \\ \hline \overset{1}{}\ 7\ 5 \\ 2\ 5\ + \\ \hline 3\ 2\ 5 \end{array}$$

Um procedimento interessante do aluno de quem observei o caderno, mas que não é padrão na 3ª série: as reservas dos produtos parciais de algumas multiplicações foram registradas e apagadas em seu caderno, evitando confusão entre as reservas correspondentes a cada algarismo do multiplicador. As reservas da adição foram mantidas.

No livro usado como referência (Dante, 1997, v3, p.140-141), a multiplicação por dois algarismos foi apresentada geometricamente, pela decomposição e usando o algoritmo, através da situação:

> *Um selo custa 13 centavos. Quanto custa uma dúzia desse selo? Basta multiplicar 12 (uma dúzia) por 13. Há várias maneiras de fazer essa multiplicação:*

1ª) Geometricamente, com papel quadriculado



$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ 20 \\ +\quad 6 \\ \hline 156 \text{ centavos} \end{array}$$

2ª) Pela decomposição

$$12 \times 13 = (10 + 2) \times (10 + 3) = 100 + 30 + 20 + 6 = 156$$

$$\begin{array}{r} 10\ +\ 3 \\ 10\ +\ 2 \\ \hline \underbrace{100 + 30 + 20 + 6}_{156} \end{array}$$

Ou assim:

$$\begin{array}{r} 10\ +\ 3 \\ 10\ +\ 2 \\ \hline 6 \\ 20 \\ 30 \\ +\ 100 \\ \hline 156 \end{array}$$

3ª) Usando o algoritmo

Como 12 = 2 + 10, para multiplicar 12 por 13, multiplico 2 por 13 e, depois, 10 por 13 ou 1 dezena por 13.

2 vezes 13	10 vezes 13 ou 1 dezena vezes 13	Somando	Simplificando
$\begin{array}{r\|l} D & U \\ \hline 1 & 3 \\ \times\ 1 & 2 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{r\|c\|l} C & D & U \\ \hline & 1 & 3 \\ \times & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r\|c\|l} C & D & U \\ \hline & 1 & 3 \\ \times & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 6 \\ +\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{rrr} & 1 & 3 \\ \times & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 6 \\ +\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 6 \end{array}$
$2 \times 13 = 26$	$10 \times 13 = 130$		

Uma dúzia de selos custa 156 centavos ou R$ 1,56.

Um pequeno detalhe no algoritmo que pode ser de grande valor para o aluno é a colocação do zero ao invés do sinal "+" (mais) na adição, indicando que o produto de 10 por 13 é 130 e não 13+ ou 13 (subentendidas as dezenas). É uma referência importante de que é uma dezena (ou unidade de 2ª ordem) multiplicada e não uma unidade simples. Pode parecer uma coisa banal, para nós, professores de matemática, mas não para o aluno, principalmente para aquele que tem dificuldade. O autor poderia destacar porque usou essa notação, incentivando esse procedimento.

Multiplicação nas quartas séries

O estudo da multiplicação, nas quartas séries, ocorreu após o da subtração. Antes disso, foram solicitadas tabuadas do 2 ao 5, o preenchimento de um quadro de multiplicações, como a seguir, e tabuadas com adições correspondentes, do 2 ao 4:

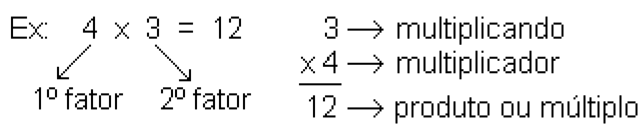
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Em relação ao quadro, os alunos poderiam ser incentivados a observar relações interessantes. Certamente a propriedade comutativa da multiplicação seria destacada. Que os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5 também. Podem surgir relações que não imaginamos...

Um destaque nas tabuadas das quartas séries: o zero apareceu como fator em todas elas. Um procedimento interessante da professora, sem referência nos livros que usou, que não sugerem tabuadas. Esse procedimento reforça o conhecimento de que é zero o produto que tem um fator zero e, também, valoriza o zero como número natural.

Apresentação da operação multiplicação pela professora, tendo como referência Meireles & Miranda (1993, v4, p.68):

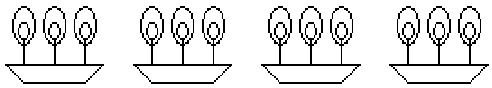
> *Recordando a multiplicação*
>
> *Quando são dados dois números naturais, numa certa ordem, ligados pelo sinal* ***x****, chamamos a operação de* ***multiplicação****.*
>
> *Esta operação associa a esses dois números um terceiro, denominado* ***produto*** *ou* ***múltiplo****.*



O 1º fator (multiplicando) – indica quantas vezes o multiplicador é repetido.

O 2º fator (multiplicador) – indica o número que é repetido

O 1º e o 2º números são fatores do 3º

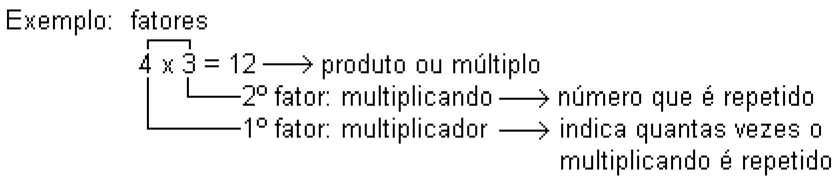


3 + 3 + 3 + 3 = 12

A multiplicação substitui a adição de parcelas iguais.

Um pouco estranho o termo *substitui* para a relação entre a multiplicação e a adição de parcelas iguais (também consta dessa forma no livro). Seria mais interessante e útil para os alunos o termo *corresponde*, onde a relação de igualdade se faz presente: 4 x 3 corresponde a 3 + 3 + 3 + 3. Também pode vir a causar confusão o uso do termo *múltiplo* como sinônimo de *produto*, por exemplo, em relação a números decimais.

A professora inverteu os nomes dos fatores "multiplicador" e "multiplicando". O termo multiplicador indica ação, o número de vezes que o multiplicando é usado como parcela na adição correspondente à multiplicação. Representação no livro (op cit., p.69):



O aluno escreveu, em seu caderno, multiplicador para o primeiro fator, corrigido pela professora (letra caprichada) para multiplicando.

As autoras do livro indicam o ponto (•) como sinal alternativo para indicar multiplicação, o que é interessante, pois nas séries posteriores é o mais usado.

Na apresentação dos termos da multiplicação na vertical (*em pé*), que não consta no livro, a indicação da professora é a usual, quando são diferenciados multiplicador e multiplicando: multiplicador abaixo do multiplicando.

Se minha calça tem dois bolsos com mesmo número de balas em cada um, posso ter nenhuma, uma, duas, três ou mais balas em cada bolso. Então, o número de balas que tenho pode ser determinado por uma multiplicação: 2 (bolsos) x número de balas em cada bolso.

Se as balas em cada bolso são 3, terei 2 (bolsos) x 3 (balas) = 6 (balas).

Quem *executa* a ação são os bolsos (multiplicador) e quem sofre a ação (adições repetidas) são as balas (multiplicando).

Sem um contexto, a multiplicação é comutativa e é interessante falar em fatores, mas não em situações como essa: não posso pensar em três bolsos com duas balas em cada um, pois minha calça só tem dois. *Diferenciar quem multiplica quem* pode facilitar o raciocínio multiplicativo do aluno ao resolver problemas e a construção do conceito matemático da multiplicação.

Onuchic & Botta (1998), Fischbein et al. (1985) e outros sugerem a diferenciação dos fatores multiplicador e multiplicando, organizados da forma multiplicador vezes multiplicando, para a compreensão da multiplicação como adição de parcelas repetidas – modelo *primitivo* da multiplicação – e, também, para a conceitualização da operação multiplicação.

Se o multiplicador tem mais ordens que o multiplicando, não há nenhum inconveniente no uso da propriedade comutativa para a aplicação do algoritmo. O multiplicador pode ser colocado acima do multiplicando, resultando em um número menor de linhas com parcelas correspondentes aos produtos parciais.

Por exemplo, calculamos o número de pernas de 253 bípedes através da multiplicação 253 x 2, onde o multiplicador é 253 (indica a ação: contar conjuntos de duas pernas) e o multiplicando é 2 (recebe a ação: número de pernas contadas para cada unidade do multiplicador).

$$\overset{\substack{\text{multiplicador}\\ \downarrow}}{253} \times \underset{\substack{\uparrow\\ \text{multiplicando}}}{2} = 506 \qquad \begin{array}{r} 2 \rightarrow \text{multiplicando} \\ \times\, 253 \rightarrow \text{multiplicador} \end{array} \xrightarrow[\text{comutativa}]{\text{propriedade}} \begin{array}{r} {}^{1} \\ 253 \\ \times\, 2 \\ \hline 506 \end{array}$$

A diferenciação dos termos da multiplicação é fundamental na construção da tabuada.

Diversas vezes realizei um experimento simples: solicitar a alguém que diga algumas multiplicações de uma tabuada, por exemplo, do cinco.

A maioria das pessoas recita: cinco vezes um, cinco; cinco vezes dois, dez; cinco vezes três, quinze. Se a tabuada recitada é a do cinco, o cinco é o primeiro fator.

Se solicitarmos à mesma pessoa que diga as adições que correspondem a uma das *linhas* da tabuada, por exemplo, cinco vezes três, essa pessoa dirá: três mais três, mais três, mais três, mais três: o entendimento *natural* de cinco vezes três é cinco vezes o número três. Mas não é a tabuada do cinco?

Incluem-se nessa maioria de pessoas que fazem essa *inversão* autores de livros e professores de matemática. Por exemplo, em Dante (1997, v3, p.123) a tabuada do 2 deve ser completada e está organizada como 2x1, 2x2, 2x3,... : é a tabuada do 2, mais 2 x 3 é entendido como 3 + 3, pelo autor, que usa essa segunda organização quando as adições correspondentes à multiplicação são solicitadas.

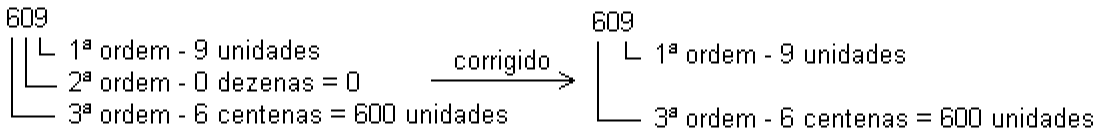
A diferenciação dos fatores como multiplicador e multiplicando, nesta ordem, e aproveitando também o zero como multiplicador (como colocado pela professora da 4ª série) resulta na tabuada do 3 como: 0 x 3, 1 x 3, 2 x 3,... Essa ordem é compatível com as adições correspondentes às multiplicações e, juntando tudo isso, obtemos a *tabuadona*:

0x3=0
1x3=3
2x3=3+3=6
3x3=3+3+3=9
4x3=3+3+3+3=12
5x3=3+3+3+3+3=15
6x3=3+3+3+3+3+3=18
7x3=3+3+3+3+3+3+3=21
8x3=3+3+3+3+3+3+3+3=24
9x3=3+3+3+3+3+3+3+3+3=27
10x3=3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30

A presença do multiplicador zero na tabuada não atrapalha e pode favorecer duas *compreensões*: do produto que tem um fator zero e do “status de número” do número zero.

Na história da matemática, segundo Boyer (1974, p.155), a primeira referência específica aos números hindus, que evoluíram para o nosso Sistema de Numeração Decimal, se encontra no ano 662 DC nos escritos de um bispo sírio, Severus Sebokt. Nessa época, na Síria, existiam centros de cultura grega e Sebokt, irritado com o desdém de alguns membros desses centros para com a cultura não-grega, chamou a atenção para os hindus por seus métodos de cálculo e sua computação “que ultrapassa descrições”. Escreveu que essa computação era feita por meio de nove sinais. Somente em 886 DC, ou seja, mais de dois séculos depois, consta “de forma indubitável” a ocorrência do zero na Índia, possivelmente originário do mundo grego.

A dificuldade do ser humano para, primeiramente pensar e, posteriormente representar o número zero merece atenção especial para esse número natural que não foi incorporado *naturalmente* no Sistema de Numeração Decimal. Sua presença na tabuada pode colaborar na sua compreensão. Não foi por acaso que uma das professoras insistiu em não especificar as zero dezenas do número 609, como mostrado anteriormente:



Resolução do aluno, em casa após a correção (apagou “2ª ordem ...”)

Retomando a *tabuadona*, a correspondência *multiplicação* ↔ *adição de parcelas iguais* é trabalhada, mas muitas vezes o aluno que não sabe a tabuada não consegue usar adições correspondentes para efetuar a multiplicação. Além de contribuir na formação do conceito primitivo da multiplicação – adição de parcelas iguais – por parte do aluno, a *tabuadona* também pode favorecer a discussão e o uso de relações entre as diversas multiplicações e produtos correspondentes.

Por exemplo, na tabuada do 3 → 8 x 3 = 7 x 3 + 3 = 21 + 3 = 24: uma unidade a mais no multiplicador (8 = 7 + 1) corresponde à adição de mais uma parcela 3 (mais uma vez o multiplicando), o que pode levar o aluno, mesmo o que não tem muita *intimidade* com a matemática, a apreender diversos mecanismos para a construção de tabuadas e, aí sim, **aprender** tabuada. Decorar passa a ser conseqüência...

Se não fica clara a relação "multiplicador x multiplicando", o aluno pode ter o que eu chamaria, se fosse médico ou quem de direito, de *síndrome da centopéia*: perguntaram para a centopéia como ela se organizava para andar e então, ela pensou, pensou e não andou mais. A incoerência da relação "multiplicador x multiplicando" pode *travar* o aluno.

Essa incoerência pode ter se estabelecido culturalmente decorrente de uma alteração "lingüística" não acompanhada pela adaptação correspondente na ordem da relação multiplicando x multiplicador.

Se a leitura de 3 x 5 é "três multiplicado por cinco", 3 é o multiplicando, recebe a ação e 5, o multiplicador, exerce a ação. Então, a adição correspondente a "três multiplicado por cinco" é 3+3+3+3+3. Portando, usando "multiplicado por" temos a relação multiplicando x multiplicador e a tabuada do 3 como 3x0=0; 3x1=1; 3x2=3+3=6; 3x3=3+3+3=9; 3x4=3+3+3+3=12...

Se a leitura de 3 x 5 é "três vezes cinco", geralmente entendida como "três vezes o número cinco", 3 é o multiplicador, exerce a ação e 5, o multiplicando, recebe a ação. Então a adição correspondente a "três vezes cinco" é 5+5+5 → tabuada do 5.

Se em uma região **os alunos** entendem 3 x 5 como "3 multiplicado por 5", é interessante usar a relação multiplicando x multiplicador e inverter a *tabuadona*. O importante é que a coerência dessa relação favoreça a compreensão.

Apresentação do algoritmo da multiplicação na quarta série:

Ex: 139 × 5 =

```
  14
 139
×  5
----
 695
```

139 + 139 + 139 + 139 + 139 = 695

```
|       1 |
|    1354 |
|  × 132  |
|---------|
|    2708 |
|   4062+ |
|  1354+  |
|---------|
| 178.728 |
```

```
|   246 |
| ×  24 |
|-------|
|   984 |
|  492+ |
|-------|
|  5904 |
```

O segundo e o terceiro exemplos estão dispostos, no caderno do aluno, abaixo do primeiro. Os traços verticais à direita e à esquerda de cada algoritmo estão nesses exemplos. Em alguns exercícios o traço vertical à direita está mantido no caderno do aluno. Esse não foi um procedimento padrão nas quartas séries.

Seria interessante justificar o algoritmo, por exemplo, através da decomposição do multiplicador e do multiplicando.

No livro Meireles & Miranda (1993), usado pela professora como referência para a multiplicação, a justificação ocorre após exercícios de aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e de multiplicações por potências de 10 (10, 100, 1000).

Título:

Multiplicador com Algarismos Significativos (p.80 – 81).

São considerados multiplicadores com *algarismos significativos* numerais sem algarismos *zero*, o que pode induzir o leitor a concluir, estranhamente, que algarismo zero não é algarismo significativo. Ficaria melhor a expressão “multiplicador com algarismos não-nulos”. Novamente o zero...

1. *Resolva pelas instruções:*
   1.1. *Observe:*
      1.1.1. *a decomposição do multiplicador através de uma adição*

```
 567
 x 23 → 20 + 3
```

1.1.2. a transformação do multiplicador[18]

567 → 23 x 567 = → (20 + 3) x 567 =
x 23

1.1.3. a aplicação da propriedade distributiva para encontrar o produto final

(20 + 3) x 567 = (20 x 567) + (3 x 567) = ✰
11.340 + 1.701 = 13.041

1.2. Leia:

> *Multiplicar por 23 é o mesmo que multiplicar por 20 e por 3 separadamente e adicionar os produtos.*

1.3. Observe a multiplicação feita, por etapas.

567 x 23	567 x 3 1.701	567 x 20 11.340	1.701 + 11.340 13.041
	multiplicando por unidades	multiplicando por dezenas	adição dos produtos parciais
	1º produto parcial	2º produto parcial	produto final

2. *Observe o processo comum de registrar os produtos e resolva as multiplicações.*[19]

3 2 6
x 2 4
1 3 0 4 → multiplicação por 4 → **primeiro produto parcial**
6 5 2 – → multiplicação por 2 **d** (não há necessidade do registro do zero) → **segundo produto parcial**
7 8 2 4 → **produto final** (adição dos produtos parciais)

3. *Resolva a multiplicação e descreva cada etapa do exemplo da atividade 1.*

	a)	b)	c)	d)
645 x 262	645 x 2 1.290	645 x ✰ ✰	645 x ✰ ✰	✰ ✰ + ✰ ✰

4. *Resolva as multiplicações pelo processo comum.*

5 8 6
x 1 2 3
1.7 5 8 → 3 x 586
1.1 7 2 – → 2 **d** x 586[20]
5 8 6 – → 1 **c** x 586
7 2.0 7 8

386 x 1.345 = 246 x 2.127 =
128 x 938 = 912 x 346 =
242 x 2.457 = 743 x 1.486 =

---

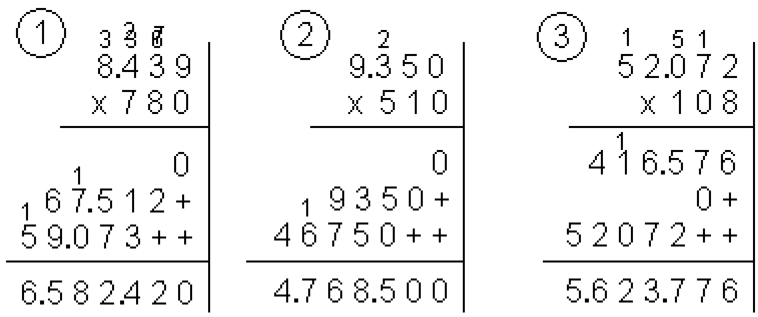
[18] Estranho o uso do termo *transformação* para indicar a multiplicação de 20 + 3, que é a decomposição de 23, por 567 e, também, a seta após a igualdade. O aluno pode se perder tentando achar a tal transformação.
[19] Grifos em negrito no original.
[20] Possível confusão no uso do ponto separador de classes em 1.172: ponto “desalinhado”.

Não sei se esse procedimento é usual em algumas paragens, mas é muito estranho o “processo comum de registrar os produtos” apresentado nesse livro. O único sinal gráfico que consta entre as barras horizontais do algoritmo é um – (traço), sendo que os produtos parciais são adicionados.

Manter os zeros, que indicam que os produtos parciais são dezenas, centenas etc, pode ser uma referência importante para o aluno que tem dificuldade para multiplicar. Substituir por “+” (mais) pode deixar de favorecer alguns, mas afinal de contas, o sinal “+” fica inserido em uma adição. Substituir pelo sinal “–” (traço) pode gerar confusão...

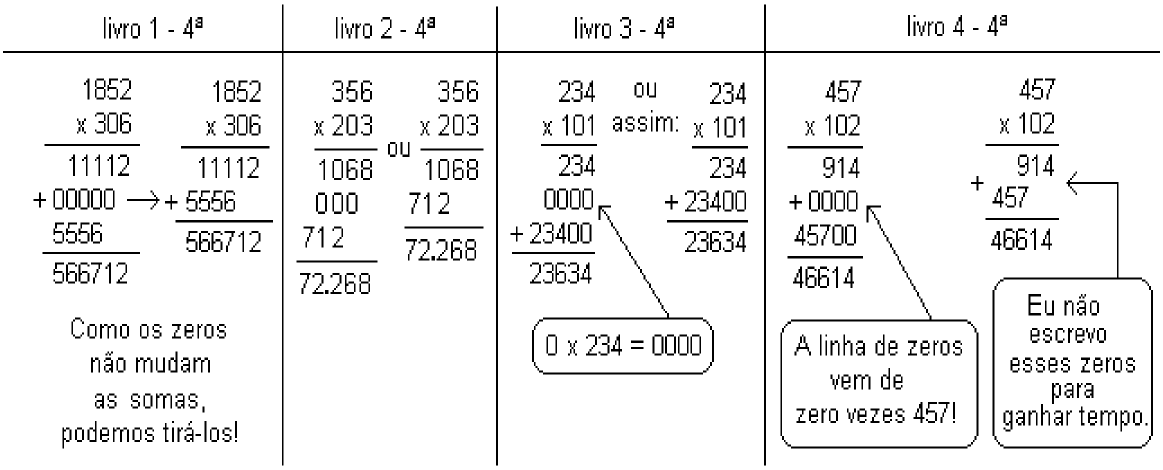
Felizmente a professora usou parcialmente esse livro. Não justificou o algoritmo através da decomposição, mas se o fizesse através do livro, talvez os danos teriam sido maiores que os benefícios.

Na quarta série foram usados multiplicadores com mais de dois algarismos. Interessante a notação, no caderno de um aluno, de multiplicações com multiplicadores múltiplos de 10 ou com a dezena nula (zero intercalado):



O algarismo zero no multiplicador, na ordem das unidades ou dezenas, é usado da mesma forma: é zero o produto se um dos fatores é zero, não importando o número de algarismos do outro. Em todas as multiplicações desse aluno essa referência está mantida. É um aluno que poucos erros cometeu em multiplicações.

Os zeros nos algoritmos dos livros de 4ª série usados pela professora:



- No livro 1 (Guelli, 1996, v4, p.64), a linha de zeros é eliminada e não há *referência* para o posicionamento do algarismo 6, no segundo produto parcial. São centenas, mas pode-se evitar confusão mantendo uma referência;
- No livro 2 (Meirelles & Miranda, 1993, p.82), não foi colocado o sinal "–" substituindo zero, como em exemplo anterior, nem o sinal "+", indicando a soma dos produtos parciais;
- No livro 3 (Dante, 1997, v4, p.57), os produtos parciais estão completos, com zeros correspondentes às multiplicações de dezenas e centenas. A eliminação da linha de zeros é mostrada como alternativa;
- No livro 4 (Imenes et al., v4, p.20), a eliminação da linha de zeros é indicada *para ganhar tempo.*

Quase todos os autores sugerem a eliminação da linha de zeros, instantaneamente.

A notação mais comum dos alunos das quartas séries, com um sinal "+" em cada linha da adição, não apareceu em nenhum livro.

Achei um pouco esquisito o produto apresentado no livro 3: 0 x 234 = 0000, nessa disposição (horizontal) e com quatro algarismos zero, sendo que o multiplicando tem três algarismos. Muito melhor 0 x 234 = 0, o que aponta para a indicação do aluno: manter o zero, como referência, mas não preencher uma linha toda com zeros.

A notação do aluno é simplificadora e mantêm a referência do produto parcial nulo, o que é interessante, também, para a significação do número zero. Conciliando as notações do livro 3, que mantêm completos os produtos parciais não nulos, com a do aluno, que mantém o produto nulo representado por um único zero, podemos ter o algoritmo como a seguir:

1 5 1		
5 2.0 7 2		
x 1 0 8		
1		
4 1 6.5 7 6	=	8 x 52.072
+ 0	=	0 x 52.072
5.2 0 7.2 0 0	=	100 x 52.072
5.6 2 3.7 7 6		108

1 2		
9.3 5 0		
x 5 1 0		
0	=	0 x 9.350
+ 1 9 3.5 0 0	=	10 x 9.350
4.6 7 5.0 0 0	=	500 x 9.350
4.7 6 8.5 0 0		510

Essa notação mantém as referências e o procedimento é o mesmo para o algarismo zero na ordem das unidades, das dezenas ou qualquer outra ordem do multiplicador. Nenhum problema se o aluno prefere iniciar multiplicando as centenas.

Não colocar zeros isolados nas linhas correspondentes deve ser opção do aluno, quando e se achar conveniente.

Os pontos separadores das classes, nos produtos parciais, aparecem no caderno do aluno em algumas multiplicações, mas não *ajustados* como nesses exemplos. O número 13.578+, no caderno, corresponde a 13578 dezenas ou 135.780 unidades.

Quando professor das séries finais do então primeiro grau (hoje ensino fundamental), achava que o ponto (.) separador de classes poderia causar confusão com o ponto (•) indicador de multiplicação e não estimulava seu uso. O ponto indicador de multiplicação, se maior e colocado um pouco acima da linha ou substituído pelo “x”, não causa confusão com o outro, principalmente para os alunos. Nós, professores, podemos contornar as possíveis confusões.

Observando a colocação desses pontos pelo aluno no algoritmo da multiplicação, questionei minha posição anterior. Incentivamos a colocação dos pontos que *mostram* as classes para a leitura do número, como se essa leitura somente ocorresse se comunicada a outro ou em voz alta.

Se o aluno observa um numeral, como o obtido no primeiro produto parcial do exemplo anterior, 416576, esse numeral deve ser entendido como uma seqüência de algarismos ou a representação de um número?

Se não é necessária *leitura em voz alta*, ainda assim a *interpretação* do numeral deve ocorrer mais facilmente com a colocação do ponto separador de classes: 416.576 é o número quatrocentos e dezesseis mil...

Para muitos de nós, professores de matemática, avaliar a ordem de grandeza de um número representado por um numeral de oito ou nove ordens pode dispensar a colocação dos pontos separadores, mas para alunos com dificuldade em matemática, não usar o separador pode comprometer a interpretação de um numeral de quatro ordens.

Na perspectiva de incentivar do uso do ponto separador de classes, ele pode ser colocado nos produtos parciais no algoritmo da multiplicação como proposto, o que pode favorecer a compreensão de números maiores que mil.

Tabuadas solicitadas nas terceiras e quartas séries

No quadro a seguir estão as tabuadas solicitadas nas terceiras e quartas séries, registradas nos cadernos de um aluno da terceira série D e um aluno da quarta série D. Multiplicando “2” indica a tabuada do “2”; *inversão* indica se houve ou não, na relação multiplicador x multiplicando = produto.

Classe	Dia	Multiplicandos	Característica	*Inversão*
3ª D	12/02	2 e 3	**1** x 2 = 2 → 2 ÷ 2 = **1; 2** x 2 = 4 → 4 ÷ 2 = **2**	Não
	12/05	2 ao 9	2x1=2; 2x2=4; 2x3=6; ...;2x10=20	Sim
	16/06	1 ao 10	1x1=1; 1x2=2; ...; 1x10=10	Sim
	06/07	2 ao 9	3x1=3; 3x2=6; ...; 3x10=30	Sim
4ª D	22/03	1 ao 5	1x0=0; 1x1=1; 1x2=2;... ; 1x10=10;	Sim
	24/03	2 ao 4	0x2=0; 1x2=2; 2x2=2+2=4; 3x2=2+2+2=6;...	Não
	05/04	1 ao 9	0x3=0; 1x3=3; 2x3=6;...; 10x3=30	Não
	12/04	2 ao 9	0x2=0; 1x2=2; 2x2=4;...;10x2=20	Não
	03/09	2, 4, 6, 8	0x8=0; 1x8=8; 2x8=16;...;10x8=80	Não

Na 4ª série, na primeira tabuada solicitada, a ordem "multiplicador x multiplicando" está invertida. Na segunda solicitação, foram pedidas as tabuadas do 2 ao 4 e as adições correspondentes, o que favoreceu a organização das tabuadas com a ordem multiplicador, multiplicando, parcelas correspondentes e produto:

0 x 2 = 0
1 x 2 = 2
2 x 2 = 2 + 2 = 4
3 x 2 = 2 + 2 + 2 = 6...

Em todas as outras tabuadas solicitadas, o aluno sempre usou a ordem multiplicador vezes multiplicando, sendo que os enunciados apenas solicitavam *faça as tabuadas*.

Tabuadas foram solicitadas poucas vezes: quatro nas terceiras séries e cinco nas quartas séries. Dos livros usados pelas duas professoras, um único livro (Dante, 1997, v3) solicita tabuada em um único exercício.

O autor sugere ao professor que “recorde as tabuadas já estudadas na 2ª série. Promova bingos e gincanas de tabuadas entre os alunos” (op cit., p.123).

Saber a tabuada ou saber usar relações – para, a partir de um produto conhecido determinar outro – são condições importantes para o aluno multiplicar, dividir e resolver problemas que envolvem essas operações. Se os alunos têm a tabuada escrita para ser consultada, mas não sabem, por exemplo, usar uma adição para calcular um produto, poderão ter dificuldade para resolver problemas nos quais o conceito da multiplicação é requerido.

Perguntei às duas professoras, em ocasiões diferentes, quais os conteúdos matemáticos mais difíceis de serem ensinados e aprendidos. A professora da quarta série, em um intervalo de aulas na sala dos professores, discutiu com uma terceira professora e concluíram que a divisão é o conteúdo matemático mais difícil de ser aprendido, mas a multiplicação é que é mais difícil de ser ensinada, ou seja, se o aluno tem dificuldade para compreender a multiplicação, com os recursos que utiliza e sua conceituação da operação, é muito difícil levar o aluno à superação dessas dificuldades.

Parte do que é sugerido por Dante (1997, v3) ocorreu nas duas séries: algumas tabuadas escritas foram solicitadas.

Outra componente da sugestão poderia ter ajudado os alunos a conceitualizar a multiplicação através da compreensão e uso da tabuada: a promoção de bingos ou gincanas de tabuadas. Seria interessante que constassem do livro do professor (ou do aluno) sugestões de procedimentos.

Uma atividade com tabuadas que, quando professor de quinta a oitava séries do então primeiro grau, costumava coordenar era uma *corrida de tabuadas* nas quintas e sextas séries, quando sobrava algum tempo e eu achava conveniente não iniciar um novo assunto. Vários alunos, nessas séries, tinham dificuldade para multiplicar.

Essa atividade era bem aceita e também solicitada pelos alunos, que às vezes participavam da *organização* da aula para que sobrasse o tempo necessário. Às vezes anunciavam: “hoje eu estudei, professor”; “hoje eu quero ver”; “não me pega mais”.

Competiam meninos *contra* meninas. Um menino e uma menina posicionavam-se ao lado da última carteira de cada uma de duas filas com mesmo número de carteiras. A cada erro de um menino, a menina da marcação andava para a próxima carteira e vice-versa, até que um deles saísse da primeira carteira da fila.

Para cada multiplicação solicitada, alternando menino e menina, um(a) aluno(a) marcava dez segundos em um relógio com ponteiros e outros, naturalmente, conferiam. Nesse tempo o aluno questionado deveria dizer o produto, decorado ou calculado.

Através dessa atividade, muitos alunos aprenderam a cronometrar dez segundos no relógio analógico, técnicas de construção da tabuada foram discutidas, alguns alunos aprenderam a *calcular* a tabuada, outros passaram a *calcular* mais rapidamente, muitos acabaram decorando.

Essa atividade talvez não estimule os alunos se o professor *tomar a tabuada* como se estivesse fazendo a chamada. Eu procurava fazer o papel de um animador, não permitindo o *sopro*, mas sim sugestões do tipo “inverte...” (propriedade comutativa), “5x8 ...” (associar um produto conhecido, 40, ao solicitado: 6x8), “conta nos dedos ...” (sugestão de estratégia: cada dedo correspondendo a uma parcela).

Segue o registro de um bloco de aulas de matemática da quarta série E, onde podem ser observados os procedimentos dos alunos e da professora em atividades que envolveram multiplicações e tabuadas. No ano anterior, as mesmas professoras lecionaram matemática nas terceiras e quartas séries, respectivamente.

Observação de aula na 4ª série E - 13/04

- Início da aula:[21] 13h; início da observação: 14h 20 min; 3 horas-aula.

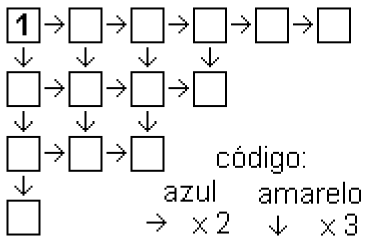
  Os alunos estavam resolvendo os exercícios que copiaram da lousa:

Recordando a tabuada do 2 e 3.

1) Complete

a) Em uma das mão há 5 dedos.
b) Em duas mãos há ____ dedos.
c) Uma mesa tem 4 pernas.
Duas mesas têm ____ pernas.
d) Uma semana tem 7 dias.
Três semanas têm ____ dias.
e) Em uma cartela há 10 botões.
Em 3 cartelas há ____ botões.

2) Complete a tabela de acordo com o código:



3) Descubra como começou e continue:

a) 0 - 2 - 4 - 6 - __-__-__-__-__-__-__
b) 0 - 3 - 6 - 9 - __-__-__-__-__-__-__

4) Complete a tabela:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2						10					
3				9							30

- O sinal "–" (traço) foi usado, pela professora, como separador.

5) Faça 2 vezes a tabuada do 2 e 3.

6) Arme as multiplicações e calcule o produto:

a) 24 x 2 =
b) 314 x 2 =
c) 41 x 3 =
d) 213 x 3 =
e) 241 x 2 =
f) 342 x 3 =
g) 53 x 2 =
h) 67 x 3 =
i) 244 x 2 =
j) 625 x 3 =
l) 133 x 2 =
m) 244 x 3 =

7) Desafio: "Sou maior do que 50. Sou 6 vezes um número. Quem sou eu? ___ Quem é o outro número? ___

- 14h 25 min: alguns alunos levaram os cadernos para a professora corrigir; 14h 30 min: correção na lousa. A professora leu o primeiro exercício e acrescentou:

P: Uma mão, 2 mãos. É uma soma, como ensinei.

- O *problema* pode ser resolvido com uma adição, mas a operação associada às tabuadas é a multiplicação, que poderia ser destacada e relacionada à adição. Dobro e triplo também poderiam ser discutidos; os exercícios 1 e 3 foram corrigidos oralmente (vários alunos responderam).

P: Número 11. Terminou? Não... Então número 21. Complete com o código... Olhe lá: flechinha para o lado da porta é vezes dois.

- Várias oportunidades de uso de *lado direito* foram perdidas para a porta, na quarta série; o aluno completou com 2 e depois 3.

P: Por que 3?

[21] Indicações: P: → professora; A: → aluno; A_1: → aluno 1, se outro interveio; • → meus comentários.

- O aluno corrigiu e continuou completando: 2, 4, 8, 16. Não conseguiu o seguinte, 32.

P: Pode fazer na lousa.

- O aluno *armou* a multiplicação 2 x 16 e calculou corretamente. Ocasião oportuna para discutir e estimular estratégias para o cálculo mental. Não conseguiu iniciar o preenchimento da segunda linha e a professora explicou:

P: Para baixo é multiplicado por três.

- Para multiplicar 8 (1ª linha) por 3, o aluno colocou 26, depois 23, depois 27.

P: Do 27, tira 3.

- Resoluções do aluno: $\begin{array}{r} 27 \\ -\ 3 \\ \hline 6 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 27 \\ -\ 3 \\ \hline 24 \end{array}$ (outro aluno assoprou)

- Questionar o aluno sobre sua *estratégia* poderia ajudar a professora em seus encaminhamentos e, o aluno, a direcionar seu esforço mental. Além disso, o aluno não resolveu a multiplicação 8x3. O mesmo aluno teve dificuldade para efetuar 4 x 3, no preenchimento da terceira linha.

P: Pode fazer na lousa, com pauzinhos, como aprendeu. Pode fazer. Pra mim não importa. A partir de amanhã, pode fazer a tabuada pra ter do ladinho de vocês.

- O aluno conseguiu resolver na lousa usando a disposição vertical.

P: Vê se está certo. Multiplicou por dois.

- Na primeira coluna, o aluno colocou 6 abaixo do 3 e corrigiu com o 9.

P: Nove vezes três, que você fez no outro.[22]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{1} & \rightarrow & \boxed{2} & \rightarrow & \boxed{4} & \rightarrow & \boxed{8} & \rightarrow & \boxed{16} & \rightarrow & \boxed{32} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\boxed{3} & \rightarrow & \boxed{6} & \rightarrow & \boxed{12} & \rightarrow & \boxed{24} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
\boxed{9} & \rightarrow & \boxed{18} & \rightarrow & \boxed{36} & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & \\
\boxed{27} & & & & & & & & & &
\end{array}$$

- A professora "falou" os números seguintes, 18 e 36, para terminar.

P: Quem é o número dois?

A: A Ariane.

P: Vem o número um.

- O aluno aguardou.

P: Aí é o resultado.

- Exercício a ser corrigido:

4) Descubra como começou e continue:

a) 0 - 2 - 4 - 6 - __-__-__-__-__-__-__
b) 0 - 3 - 6 - 9 - __-__-__-__-__-__-__

[22] O outro referido pela professora é o exercício 3, corrigido oralmente através das respostas de vários alunos.

- Parece que o aluno não conseguiu interpretar o enunciado. Nesse exercício, o mais interessante é essa interpretação, que deveria ser discutida: o que é descobrir como começou? A *dica* da professora, "Aí o resultado", resultou na resolução, mas não na compreensão da questão pelo aluno, que completou as seqüências: 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20

  12 - 15 - 18 - 21 - 24 - 27 - 30

P: Número 22. Não terminou. 32.

- O aluno foi até a lousa. Muitos alunos ainda estavam resolvendo e, dessa forma, suas dúvidas dificilmente foram esclarecidas.

P: Sabe que tabela é essa? É aquela que eu dei na tabuada.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	10	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
3	**0**	**3**	**6**	9	**15**			**22**			30

- Em negrito, alguns valores colocados pelo aluno. Ele *pulou* o 12, usou 22 como produto de 7 por 3. Alertado, corrigiu e completou corretamente o quadro. Para corrigir o exercício seguinte, a professora perguntou pelo aluno de número 3.

A: Faltou.

- As tabuadas do 2 e do 3, solicitadas no exercício 5, não foram corrigidas. Cada multiplicação do exercício seguinte foi corrigida por um aluno.

6)

a) 24 x 2 =	d) 213 x 3 =	g) 53 x 2 =	j) 625 x 3 =
b) 314 x 2 =	e) 241 x 2 =	h) 67 x 3 =	l) 133 x 2 =
c) 41 x 3 =	f) 342 x 3 =	i) 244 x 2 =	m) 244 x 3 =

Um deles teve dificuldade na letra (f): parece que procurou subtrair.

3~~4~~2
x 3

P: Não! Três vezes dois.

- Por sugestão da professora, outro aluno emprestou o caderno e precisou apontar a solução, que foi copiada. A professora parabenizou, ao que parece, a resolução do aluno que emprestou o caderno.

P: Muito bem. Quem vem?

- Ninguém se apresentou e os alunos seguintes na chamada foram convocados. Um dos alunos demorou para multiplicar 67 por 3. Outro teve dificuldade para encontrar o algarismo das dezenas ao multiplicar 625 por 3. Três alunos assopraram: "É sete"; "É seis"; "Subiu um".

  O que estava na lousa conseguiu terminar.

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 3 \\ \hline 65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 \\ \times\ 3 \\ \hline 1875 \end{array}$$

- Não registrei a correção do exercício 7: “Sou maior do que 50. Sou 6 vezes um número. Quem sou eu? Quem é o outro número?”. Não houve discussão e a questão é aberta: qualquer múltiplo de 6, maior que 50 é solução do *desafio*. Um número racional não inteiro, maior que 50, também é solução. Por exemplo, $\frac{301}{6}$. A questão poderia ser discutida, quanto às possíveis soluções e como reescrevê-la par haver uma única solução: sou o menor número inteiro maior que 50...

A professora colocou outros exercícios na lousa:

8) Continue armando as multiplicações:

a) 24 x 2= b) 53 x 3= c) 61 x 2 = d) 48 x 3 = e) 76 x 2 = f) 425 x 2 =

- A ação principal, *efetuando*, está subentendida. Enunciados imprecisos ou pouco claros podem induzir o aluno a não procurar interpretá-los e sim a tentar adivinhar o que a professora quer.

9) Numa multiplicação o multiplicando é 211 e o multiplicador é 2. Qual é o produto?

10) Marta disse: “Eu tenho 4 anos e minha irmã é 8 anos mais velha do que eu, e a idade de meu pai é o dobro da nossa idade”. Quantos anos tem Marta? Quantos anos tem a irmã de Marta? Quantos anos tem o pai de Marta?

A: Tia, nós já fizemos esse aqui.

P: Não faz mal.

- Certamente uma menina de quatro anos não faria as relações que Marta propôs; o “tia” para avisar a professora que já haviam resolvido um dos exercícios não foi freqüente – foi a única vez que ouvi; a professora manteve o exercício; os alunos iam terminando e levando o caderno para a professora (15h 20min).

P: Tenho 4, minha irmã 8 a mais... Minha irmã tem 12, e o pai, o dobro de nossa idade.

A: 12 vezes 2.

P: Ele é o dobro da nossa idade. Nossa idade.

A: 24 vezes 2.

P: Eu tenho 4. Você tem 12. Nós dois juntos...

A: 32.

- A tentativa de encaminhamento não deu muito resultado. A professora disse a idade da irmã, que na primeira resposta foi *dobrada* sem entendimento. A “nossa idade” poderia ser discutida. Na resposta seguinte, talvez a “nossa idade” tenha sido entendido como a soma de todas as idades menos a do pai: 4 + 8 +12, mas não são três crianças... O 32 será 4 x 8? Ou cálculo errado para 4 x 12?

- Correção dos exercícios na lousa. Uma aluna levou a tabuada.

P: Você precisa da tabuada? Você está na quarta série.

P: 2 vezes 6 é 6? Olha na tabuada.

$$\begin{array}{r} 61 \\ \underline{\times 2} \\ 62 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 61 \\ \underline{\times 2} \\ 122 \end{array}$$

- Contradições interessantes. O uso da tabuada *escrita* foi sugerida aos alunos pela professora: a aluna levou a tabuada. Resolveu sem a tabuada, errou, indicação da tabuada, acertou. Não usar a tabuada, na lousa, poderia ser um momento de discussão da multiplicação, por exemplo, 2 x 6 = 6 + 6.

  A correção dos exercícios 8(e), 8(f), 9 e 10 ficou para outro dia.

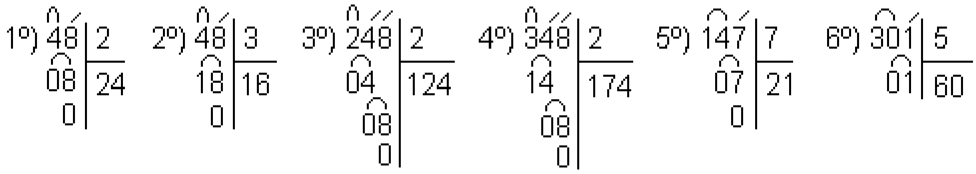
Nas resoluções de multiplicações observadas no registro da aula, podem ser constatadas dificuldades de vários alunos nas tabuadas e no algoritmo da multiplicação.

Esses alunos estudaram matemática na escola durante mais de três anos e alguns não sabiam multiplicar, por exemplo, 2x6, mostrando que necessitavam de oportunidades de aprendizagem diferenciadas em relação às recebidas até então.

Divisão

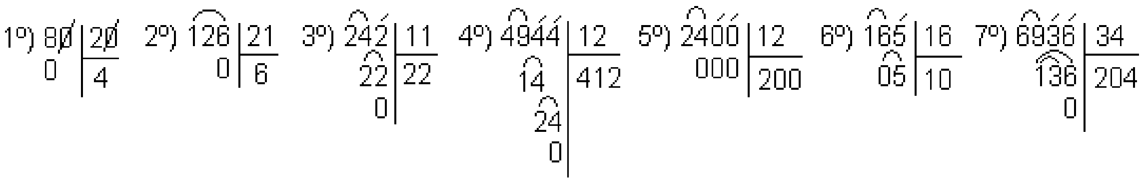
Divisão nas terceiras séries

Atividades de revisão, incluindo divisões, iniciaram o ano letivo. Após o estudo da multiplicação, iniciou-se o estudo da divisão com divisor de um algarismo através de seis exemplos. Para cada exemplo foram solicitadas, em classe, 12 divisões do mesmo *tipo*, além de tarefas. Exemplos resolvidos pela professora:



A única referência escrita quanto ao uso do algoritmo da divisão apareceu junto ao 6º exemplo: “Toda vez que abaixamos um número e, mesmo juntando ao resto, não der para dividir colocamos um zero no cociente”.

A divisão com divisor de dois algarismos foi apresentada através de sete exemplos. Para cada *tipo* foram solicitadas, em classe, 12 divisões, além das tarefas. Exemplos apresentados:



Os algarismos do cociente foram obtidos um a um, nos exemplos e no caderno do aluno. A professora ensinou a divisão *fazendo a tabuada*. Usando esse procedimento no 4º exemplo, algumas multiplicações da *tabuada* do 12 são necessárias:

$$\begin{array}{r}12\\ \times 1\\ \hline 12\end{array}\quad \begin{array}{r}12\\ \times 2\\ \hline 24\end{array}\quad \begin{array}{r}12\\ \times 3\\ \hline 36\end{array}\quad \begin{array}{r}12\\ \times 4\\ \hline 48\end{array}\quad \begin{array}{r}12\\ \times 5\\ \hline 60\end{array}$$

Com esses produtos, os três algarismos do cociente podem ser determinados. Não aparecem as *tabuadas* e as subtrações, nos exemplos e no caderno observado.

Não foram feitas referências escritas aos termos da divisão, aos significados da palavra divisão e o que é a operação matemática divisão.

No final do ano letivo a professora corrigiu uma tarefa na terceira série E, que constou, principalmente, de divisões. Segue o registro dessa aula.

Observação de aula na 3ª série E - 29/11 – uma hora aula.

P: Oh, terceira E.

- A professora aguardou silêncio da classe. A correção do exercício da 3ª D estava na lousa e a professora pediu aos alunos que corrigissem os cadernos observando a correção na lousa. A correção não foi comentada pela professora.

A: Cadê o seis?

P: Ao lado do cinco.

- Não foi colocado o número de ordem do exercício, o número seis.

P: Tinha mais continhas no caderno para corrigir?

Alunos: Não, tinha isso.

A: Tinha sim.

P: Então vamos corrigir.

- A professora estava apagando a lousa.

A: Não, professora.

P: Se vocês estão conversando é porque terminaram.

- A lousa foi apagada.

P: Quem foi o último a ir na lousa?

A: A Fernanda.

- A professora chamou a atenção de um aluno que estava escondendo um bilhete que o pai deveria ter assinado.

A: Pode usar a tabuada?

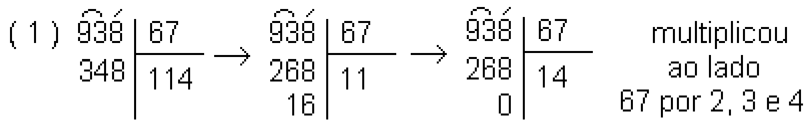
P: Sem a tabuada o senhor não é ninguém.

A: Sei a do cinco.

P: A do cinco ele sabe. Que lindo!

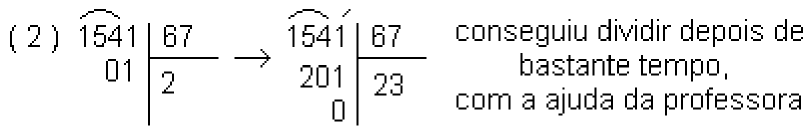
- A professora exigia, sempre, silêncio. Se essa regra era infringida ocorria alguma punição, como pode ser observado na situação acima: a lousa foi apagada antes do término da correção. Outra forma de punição que a professora usava regularmente era a ironia, não para exigir silêncio, mas, talvez, entendendo que dessa forma o aluno, constrangido, se esforçasse para aprender o que mostrou não saber, como no caso da tabuada acima.

  Alunos na lousa, cada um efetuando uma operação:



- Subtraiu 93 – 67, efetuando as subtrações nas ordens:

3 – 7 = 4 (incorreta) e 9 – 6 = 3 (correta). A seguir errou na multiplicação 4 x 67.



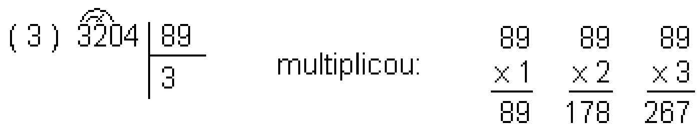
- Apresentou dificuldade para multiplicar, subtrair e no algoritmo da divisão.

P: Terceira série, fecha a boca ou não vou corrigir mais nada.

A: Pode ir?

P: O que você acha?

- A aluna foi até a lousa. Talvez o pedido de permissão tenha decorrido do “pito” na classe.



A_1: Professora, o que tem que fazer?

Alguns alunos: Soma.

Outros alunos: Divide.

Outros: Tem que ver quanto sobra.

P: O que? Trezentos e vinte...

Alunos: Vezes.

A_1: Dividendo [aluna que estava dividindo].

P: Eu vou ter um ataque cardíaco. Vai tentando...

- O procedimento de correção na lousa faz parte do contrato didático estabelecido. Se o que está na lousa erra, algumas vezes outros alunos participam e “vão tentando”, suas colocações geralmente não são discutidas, alguns palpites provocam novas questões da professora e o que está na lousa acaba fazendo. Outras vezes a professora orienta diretamente o aluno que está na lousa. Os alunos percebem quando devem dar palpites.

A_1: Trezentos e vinte mais três?

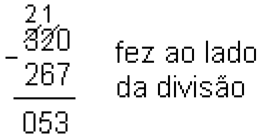
P: O que tem que fazer agora?

A_2: Menos [outro aluno].

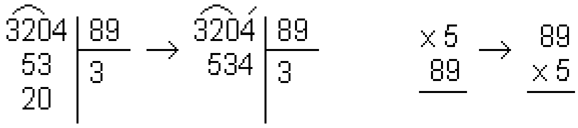
P: Por que?

A_2: Pra ver se tem sobra.

- A aluna que estava na lousa aproveitou a colocação do colega para continuar:



- Colocou o resto parcial e continuou:

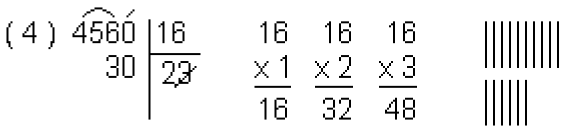


- A aluna iniciou usando o procedimento ensinado pela professora: construiu a tabuada do 89, obtendo 267, maior produto na tabuada, sem ultrapassar 320. Não multiplicou 4 x 89, que ultrapassaria 320, nem soube como prosseguir. Dois grupos de alunos sugeriram procedimentos inadequados: “soma” e “divide”. Um terceiro grupo indicou corretamente como prosseguir: “tem que ver quanto sobra”.

  Essa indicação não foi entendida pela aluna nem confirmada pela professora, que manteve a dúvida: “O que? 320...”. Outro grupo de alunos indicou nova multiplicação (“vezes”), talvez para obter o produto 356 (4 x 89) – maior que 320 –, que confirmaria o produto 267 como adequado.

  Quem estava dividindo tentou colocar sua dúvida: “dividendo”, procurando se organizar e entender o que fazer, o que não conseguiu através do comentário da professora: “Eu vou ter um ataque cardíaco. Vai tentando...”. Nova tentativa da aluna: “320 mais 3?”.

  O encaminhamento veio de outro aluno – respondendo à professora –, indicando uma subtração: “pra ver se tem sobra”. A aluna prosseguiu, sem conseguir terminar a divisão.
- Outros seis alunos foram até a lousa para corrigir os outros exercícios.



- Usou a tabuada do 16 com dificuldade, precisando contar traços para obter os produtos. Não soube o que tirar de quem: o que fazer com o primeiro produto parcial, 32, que deveria subtrair de 45.

  Interessante observar que o aluno verificou, corretamente, que o produto 48 ultrapassou 45, de quem deveria subtrair, pois usou 2 como primeiro algarismo do cociente. A resolução de forma mecânica pode emperrar em detalhes que, nós, professores de matemática, nem imaginamos, talvez por não procurarmos entender os erros dos alunos, o que nos levaria a questionar como ensinamos.

(5) 7128 | 27   7128 | 27
              | 35 | 2

- Colocou 35 no cociente, mas não deve ter sido uma estimativa, pois os alunos, geralmente, fizeram estimativas parciais – para cada algarismo do cociente. Não percebi o que o aluno não conseguiu: construir a tabuada do 27 ou relacionar e usar os produtos obtidos.

(6) 9048 | 29 → 9048 | 29 → P: Fez a tabuada do 29? → O aluno multiplicou:
44 | 311   44 | 31
158   158

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 1 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ \times 2 \\ \hline 58 \end{array}$$

- O primeiro resto parcial, 4, seria 3. Mesmo com a sugestão da tabuada, pela professora, o aluno não conseguiu completar o cociente. A multiplicação 3 x 29, necessária, não foi efetuada na tabuada ao lado e usada de forma incorreta no algoritmo da divisão.

(7) $\begin{array}{r} 1\,4 \\ 318 \\ \times 16 \\ \hline 318 \\ 08+ \\ \hline \end{array}$ → P: 6 vezes 3, quanto? → $\begin{array}{r} 1\,4 \\ 318 \\ \times 16 \\ \hline 1908 \\ 118+ \\ \hline \end{array}$ → $\begin{array}{r} 1\,4 \\ 318 \\ \times 16 \\ \hline 1908 \\ 318+ \\ \hline 5088 \end{array}$

- Após a pergunta da professora: “6 vezes 3, quanto?”, o aluno iniciou a multiplicação pelo algarismo 6, errou no produto parcial seguinte, mas conseguiu terminar a multiplicação.

  Iniciou multiplicando 1 por 318. Não haveria problema se o “1” fosse entendido como uma dezena, correspondendo à colocação dos zeros referentes às dezenas, centenas etc.

  Dessa forma, o primeiro produto parcial seria 3180 e a ordem de multiplicação dos algarismos das diversas ordens seria indiferente (outra conveniência de manter as referências):

$$\begin{array}{r} 318 \\ \times 16 \\ \hline 1908 \\ +\,3180 \\ \hline 5088 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 318 \\ \times 16 \\ \hline 3180 \\ +\,1908 \\ \hline 5088 \end{array}$$

(8) $\begin{array}{r} 259 \\ \times 20 \\ \hline 5180 \end{array}$ (9) $\begin{array}{r} 451 \\ \times 50 \\ \hline 25550 \end{array}$

- A oitava operação, uma multiplicação bem simples, foi a única resolvida corretamente. A última não foi corrigida: o produto correto é 22550 e não 25550.
- Enquanto os alunos estavam na lousa:

P: Tem algum aluno querendo explicar aqui?

Alunos: Não.

P: Pare de jogar jogo da velha.

A: Professora, a professora tinha corrigido a lição de lucro ou prejuízo?

P: Todo serviço que eu tive para explicar deu no que?

Alunos: Nada.

P: As mães reclamavam tanto que eu dava muita lição de casa, olha no que deu. Pelo amor de Deus, senta. Chega.

- Os alunos sentaram sem terminar.

P: Desde quando a senhora pode tirar uma melancia de dentro de uma pirulinha deste tamanho? Então a conta está errada.

- Comentário sobre 3204 dividido por 89: a aluna tentou dividir 32 por 89. Suponho que a estória da pirulinha não foi *remédio* para a aluna...

P: Quem foi que aprendeu o que eu falei?

- Ninguém se manifestou.

P: Vai ter um monte de zero. Trata de estudar que eu vou dar uma prova de divisão segunda. É de propósito? É.

O autor mais usado pela professora como referência para outras operações, Dante (1997, v3), introduz a divisão através de exemplos nos quais algumas idéias relacionadas à operação divisão são abordadas:

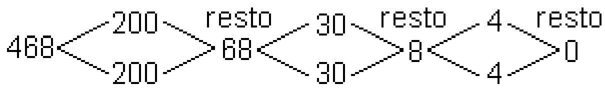
- Repartir em partes iguais;
- A idéia de medida:
  - Quantos cabem?
  - Quantos grupos podem ser formados?

Os termos da operação divisão são destacados.

Vários procedimentos para dividir são apresentados:

Divisão pela distribuição de centenas, dezenas e unidades

468 ÷ 2 (op cit p.163)

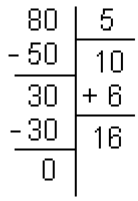


468 ÷ 2 = 234 e o resto é 0.

Divisão por estimativas (op cit p.165)

1. Veja alguns exemplos

a) 80÷5

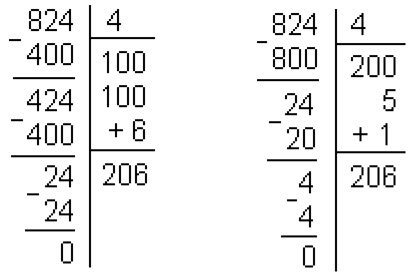


- Quantos 5 cabem no 80?
  Estimamos que cabem 10.
  10 × 5 = 50. Para 80, faltam 30.
- Quantos 5 cabem nos 30 que sobraram?
  Estimamos que cabem 6.
  6 × 5 = 30. Para 30, zero.

Somamos 10 + 6 = 16 80÷ 5 = 16

...

c) Veja de formas diferentes: 824÷4



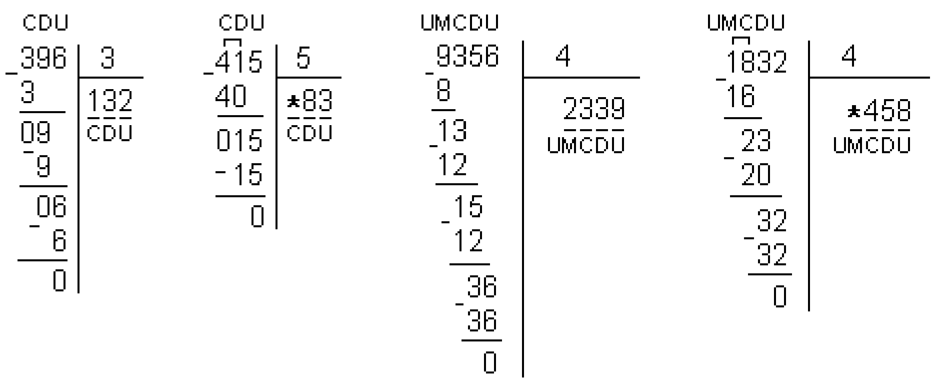
824÷ 4 = 206

O algoritmo da divisão é apresentado, por Dante, para divisor com um ou dois algarismos. No livro do professor, o autor sugere o uso do Material Dourado para "fazer concretamente a divisão e, paralelamente, registrar no algoritmo" (p.167). Seguem alguns dos exemplos do livro.

ALGORITMO DA DIVISÃO

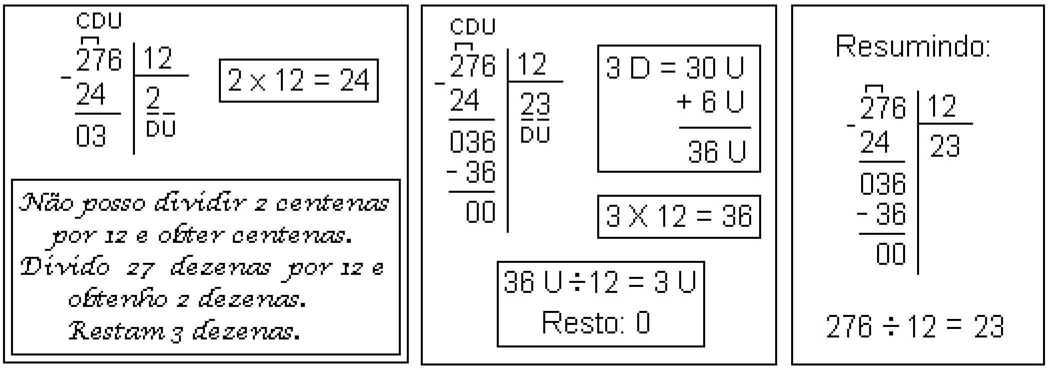
O divisor tem um só algarismo (op cit, p.167)

1. Você já estudou o algoritmo da divisão de números naturais até 999 por um número natural de 1 algarismo. Observe os exemplos e veja que ocorre o mesmo quando o número é maior que 999:



O divisor é formado por 2 algarismos (op cit p.168)

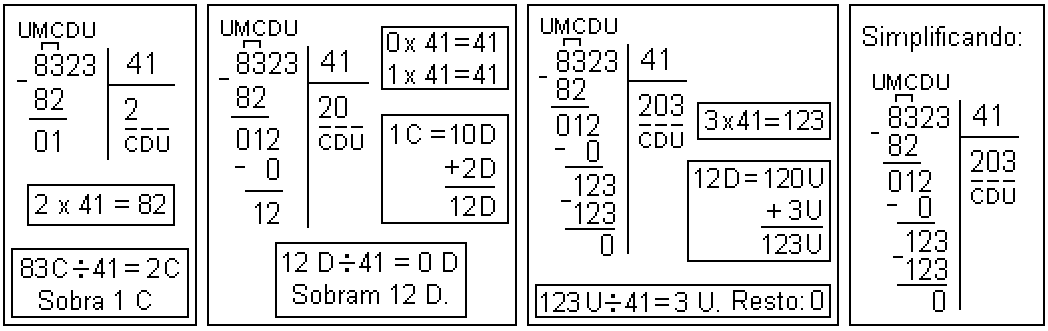
1. O quitandeiro vai colocar 276 laranjas em saquinhos. Cada um deles conterá uma dúzia de laranjas. Quantos saquinhos serão usados? Para responder, você deve fazer 276 ÷ 12. Veja o algoritmo:



Serão usados 23 saquinhos.

...

2. Mais um exemplo. Acompanhe com atenção: (op cit, p.169)



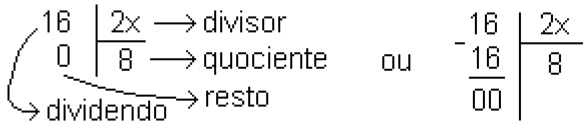
Apesar de ser considerado conteúdo conhecido, a divisão por um algarismo é apresentada, no livro, destacando as ordens do dividendo e do cociente e, também, o que ocorre com a ordem do cociente se o algarismo de uma ordem do dividendo, a ser dividido, é menor que o divisor. Dessa forma o aluno pode recordar esses fatos e, se tem o livro para consultar ou se o professor discutiu e possibilitou o registro de divisões com essas referências, pode revê-las se tiver alguma dúvida. Bons registros, que explicitam *referências*, incentivam o ato de estudar e podem evitar dúvidas acumuladas e o desprazer em relação à matemática. O autor estende a aplicação do algoritmo – justificado – às divisões com divisor de dois algarismos.

Divisão nas quartas séries

Divisões com divisor de um ou dois algarismos foram recordadas nas quartas séries, conforme registradas no caderno de um aluno:

Recordando a divisão

Lívio vai dividir 16 balas em 2 caixas. Quantas balas para cada caixa?

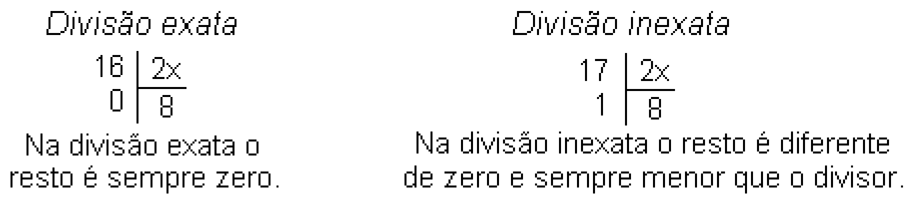


Esta operação chama-se divisão. Indicaremos a divisão com o sinal ÷ ou :

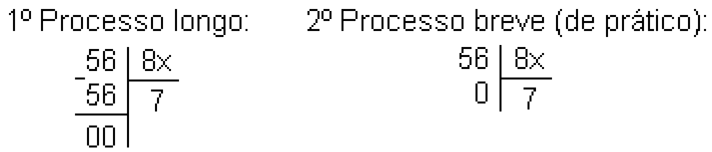
O dividendo e o divisor são termos da divisão.

O quociente é o resultado da divisão.

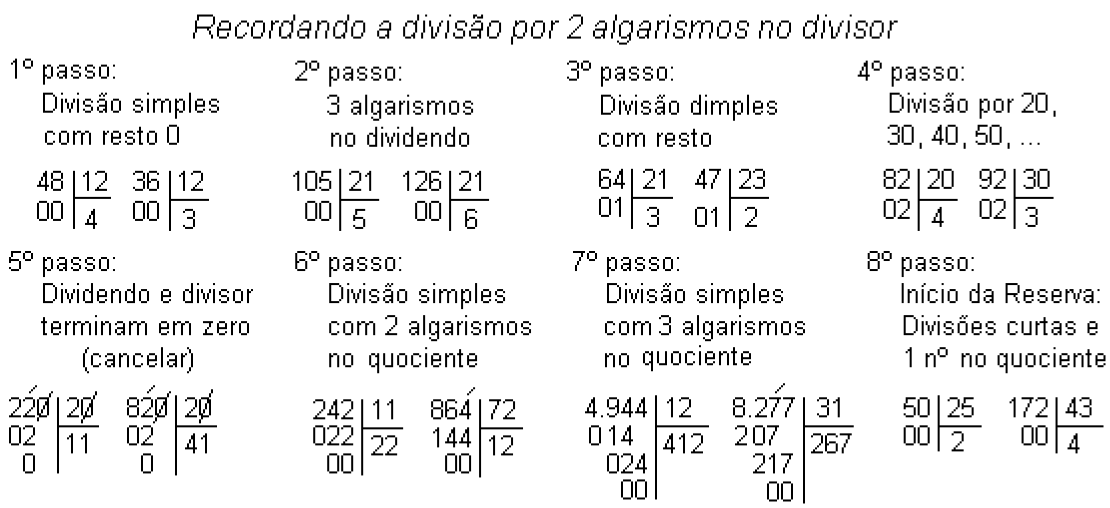
Na divisão, separamos uma quantidade em conjuntos iguais.



Podemos realizar a divisão usando um dos processos:



Os alunos efetuaram cento e quatro divisões com divisor de um algarismo, incluindo exercícios em classe e tarefas.

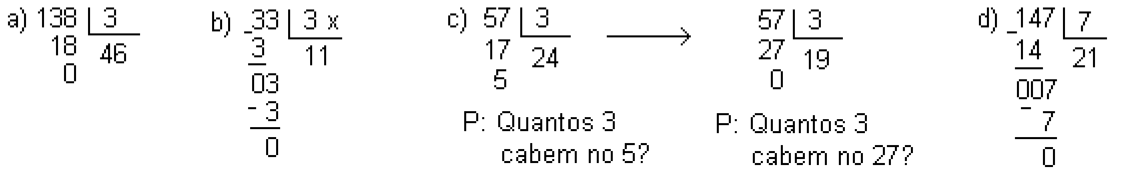


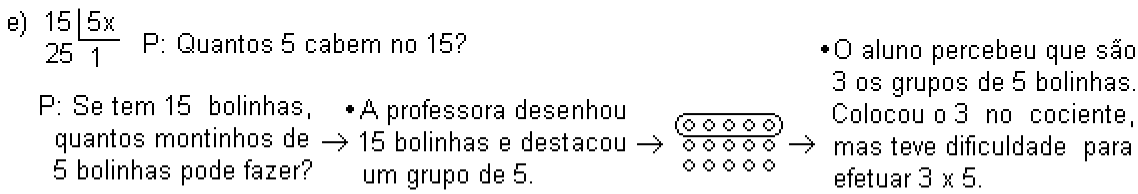
Os alunos efetuaram setenta e duas divisões com divisor de dois algarismos, incluindo exercícios em classe e tarefas. A professora não usou nenhum dos livros que vinha consultando como referência para o estudo da divisão.

No final do ano letivo a professora corrigiu uma tarefa na quarta série E que constou, principalmente, de divisões. Segue o registro da aula.

Observação de aula na 4ª série E - 19/11

- A professora ditou os exercícios; os alunos não levaram seus cadernos na lousa; cada divisão foi efetuada por um aluno; ordem decrescente na lista de chamada.

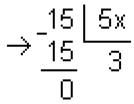




P: Cinco vezes um? A: Cinco.

P: Cinco vezes dois? A: Dez.

P: Cinco vezes três? A: Quinze. [Completou a divisão]



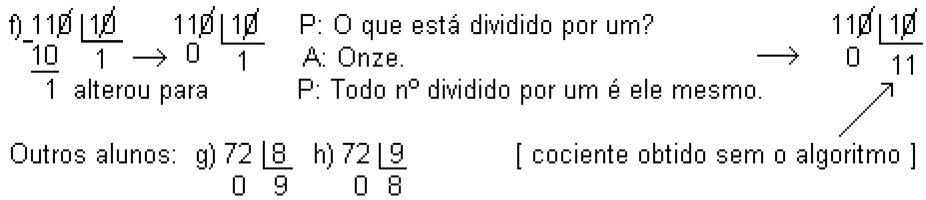
P: Você fez a lição, Marcos?

Marcos: Não deu tempo.

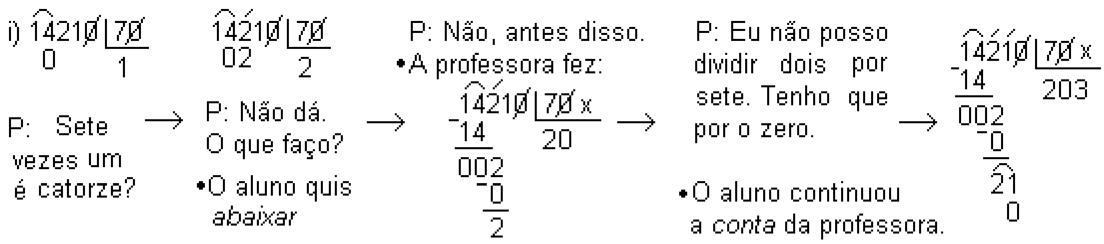
P: Que dia eu dei?

Vários alunos: quarta.

- A correção ocorreu na sexta-feira; Marcos na lousa:



P: E agora Carlinhos? O Carlinhos vai sofrer na lousa.



- O “sofrer na lousa” foi dito de forma carinhosa, incentivando o aluno. O problema é que, após o cancelamento dos zeros, o aluno precisou ser auxiliado para efetuar uma divisão com um algarismo no divisor.

j) 352 |8
3 4

• O aluno levou a tabuada. A professora perguntou o que pegou para dividir.

A: Umas aqui. [colocou arco] → P: Se você dividiu 35 por 8 e deu 4, acabou isso aqui. Divido agora 32 por 8. → 352 |8
32 44
0

- O aluno seguinte quis levar a tabuada e a professora não deixou, tendo consentido o uso ao aluno anterior. Dividiu corretamente 72 por 6. Outro aluno dividiu 3000 por 60, com dificuldade para cancelar zeros e dividir zero por 6:

P: Zero dividido por seis? A: Seis... A: Zero.

- O próximo aluno dividiu 844 por 4, com ajuda da professora. Obteve 210 e alterou para 211. Outro aluno resolveu um problema:

P: A diferença o que é?

A: Menos.

P: Calcule a diferença entre o triplo de 9...

A: 21.

P: O que fez?

A: 9...

P: O triplo, você sabe que é 3.

- O aluno efetuou a multiplicação: $\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 3 \\ \hline 27 \end{array}$

P: O cociente de 20 por 4... O que é cociente? O cociente é o resultado de que conta? 20 por 4.

- O aluno fez na lousa: $\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$

P: Se falou que é cociente é o resultado de uma divisão.

- Indicação do aluno: $20 \,\underline{|\ 4\ }$
  4

P: 4 x 4 é 20?

Alunos: Pega a tabuada.

- O aluno dividiu corretamente (20 ÷ 4 = 5).

P: Agora você vai dar a diferença entre o triplo de 9... Qual é o triplo de 9?

Alunos: 27.

P: Agora a diferença do triplo de 9 e o cociente de 20 por 4.

- O aluno terminou o problema com a subtração: $\begin{array}{r} 27 \\ -\ 5 \\ \hline 22 \end{array}$

Foram corrigidos treze divisões e um problema que envolveu uma divisão. Em algumas, o processo breve (sem indicação das subtrações) foi usado, em outras, o longo (indicação das subtrações) e em outras, com interferência da professora, o aluno iniciou com o processo breve e terminou com o longo.

Os alunos dividiram corretamente em seis das catorze divisões. Todas divisões com divisor de um único algarismo, a princípio ou após cancelamento de zeros, sendo que, em algumas, o cociente pode ser obtido diretamente na tabuada. Divisões corretas: a)138 : 3; b)33 : 3; d)147 : 7; g)72 : 8; h)72 : 9; l)72 : 6.

Na questão (c), 57 ÷ 3, parece que o aluno multiplicou 2 x 3 = 6 (deveria ser o subtraendo) e tirou 5 (que deveria ser o minuendo), invertendo a ordem dos termos da subtração. Talvez o aluno não procedesse dessa forma se usasse o processo longo, onde a subtração é explicitada. A professora precisou encaminhar as duas divisões parciais, 5 ÷ 3 e 27 ÷ 3, perguntando quantos 3 cabem no 5 e quantos 3 cabem no 27. O aluno não conseguia prosseguir.

Na questão (d), a divisão 15 ÷ 5 poderia ser associada à tabuada do 5, pelo aluno. A professora procurou encaminhar como havia feito, perguntando quantos 5 cabem no 15. Como o aluno não conseguiu dividir a partir do encaminhamento, a professora usou o desenho de 15 bolinhas agrupadas em 3 linhas e 5 colunas, destacando uma linha com 5 bolinhas. Apesar de ter relacionado um de três grupos de 5 bolinhas à divisão de 15 por 3, não conseguiu observar no esquema proposto a operação inversa: os três grupos de 5 bolinhas resultam no total, 15 bolinhas, correspondendo à multiplicação 3 x 5.

Esse evento mostrou a necessidade de uso de um esquema (desenho) que se mostrou parcialmente satisfatório. Esse e muitos outros alunos dessa classe seriam favorecidos pelo uso de material concreto, para ser manipulado.

Mostrar rapidamente, na lousa, pode não ser suficiente para o entendimento do aluno que tem dificuldade em matemática. A idade do aluno ou a sua escolaridade não deveriam ser fatores decisivos para o não uso de material ou procedimentos supostamente indicados para alunos que estão se iniciando nos caminhos da matemática, e sim, as dificuldades que apresentam.

Na questão (f), para dividir 110 por 10, o aluno perdeu-se no procedimento “cortar zeros”, ensinado e não entendido. O dividendo, inicialmente 110, foi entendido como 11, após o cancelamento do zero, mas o divisor, 10, mesmo com o zero cancelado, parece ainda ter sido entendido como 10. O aluno terminou a divisão usando a indicação da professora: “todo número dividido por 1 é ele mesmo”, mas sem entender o algoritmo quando são cancelados zeros.

Na questão (i), 14210 : 70, o aluno cancelou os zeros sem problema, mas encontrou 1 para o cociente de 14 por 7. Não soube como proceder no caso do dividendo menor que o divisor (2 : 7) e a professora refez a divisão, usando o processo longo (o aluno iniciou pelo processo breve), até dividir 2 por 7.

A colocação da professora: “Eu não posso dividir 2 por 7. Tenho que por o zero.”, poderia ser esclarecida, mostrando que é possível dividir 2 por 7 e que o cociente é menor que 1, pois 1 x 7 = 7 e 7 (subtraendo) é maior que 2 (minuendo). Como é uma divisão de números naturais, o número natural usado é o antecessor de 1, zero.

Na questão (j), 352 : 8, o aluno dividiu corretamente 35 por 8 e precisou apoio da professora para prosseguir.

Na questão (m), 3000 : 60, o aluno também teve dificuldade para usar o procedimento “cancelar zeros” e para dividir zero por 6.

Na questão (n), 844 : 4, a professora precisou ajudar o aluno.

Na questão seguinte, um problema envolvendo divisão, as operações necessárias foram colocadas pela professora, restando ao aluno efetuar essas operações, o que fez com dificuldade.

Para indicar “o cociente de 20 por 4”, o aluno usou a multiplicação 4 x 20, alterada para 20 : 4 após a colocação da professora: “Se falou que é cociente é o resultado de uma divisão”. O cociente obtido foi “4”, corrigido para “5” com o auxílio de uma tabuada escrita (sugestão de outros alunos).

As dúvidas apresentadas pelos alunos nessas divisões, no final do ano letivo da última série do segundo ciclo do ensino fundamental (4ª série), sugerem que, para a aprendizagem, os procedimentos de ensino e o algoritmo precisam ser revistos.

As duas professoras destacaram a divisão como o conteúdo matemático mais difícil de ser aprendido pelos alunos, mas tanto na terceira quanto na quarta série, os conceitos e os algoritmos das operações adição, subtração e multiplicação foram mais discutidos e exemplificados que os da divisão.

Para usar o algoritmo da divisão o aluno deve saber adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. A tabuada deve ser compreendida.

A palavra divisão envolve diversos significados, incluindo a operação matemática divisão, a divisão mais geral (partes diferentes) e outros não necessariamente matemáticos.

As professoras, geralmente, indicaram as subtrações nas divisões. Os alunos também foram orientados pelos pais que parecem preferir o processo breve para a divisão e a subtração por invariância da diferença. Envolvidos nessa dualidade de informações e procedimentos, no final da quarta série, esses alunos apresentaram desempenho aquém do esperado, tanto na aplicação do algoritmo quanto à compreensão do conceito de divisão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) enfatizam a compreensão dos conceitos matemáticos como fator essencial para a aprendizagem, o que, certamente, é um fato aceito por todos os professores de matemática. Cálculos por estimativa também são referidos nos PCN, como um procedimento importante e que “nem sempre são levados em conta no trabalho escolar” (op cit., p.118).

A escolha do algoritmo para a divisão pode favorecer sua compreensão, o uso de estimativas e o desempenho dos alunos na determinação de cocientes.

Uma possibilidade é o uso do algoritmo da divisão por estimativas, com liberdade para a determinação das parcelas do cociente:

```
 346 |23            346 |23           346 |23
-115   5          -  46    2         -345  15
 ----              ----                ----
 231   7 +   ou     300   10 +   ou       1          ou...
-161   3         -  230    3
 ----  --           ----  --
  70  15             70   15
- 69              -  69
  --                 --
   1                  1
```

Tive oportunidade de discutir esse algoritmo com professoras das quartas séries de uma escola pública em que lecionávamos em 1988. Nessa época eu lecionava matemática em quatro quintas séries do então primeiro grau e, no início do ano letivo, os professores de matemática de séries consecutivas reuniam-se para discutir programas, conteúdos e procedimentos relacionados à disciplina.

As professoras solicitaram que eu *explicasse* o processo americano para a divisão, apresentado na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau (São Paulo, 1988a).

Meu primeiro contato com esse algoritmo para a divisão se deu no momento que eu deveria *explicá-lo* para minhas colegas e tive certa dificuldade para entender o que não era entendido por elas – os exemplos e os comentários pareciam suficientes para o entendimento até mesmo dos alunos. O que as professoras não entendiam?

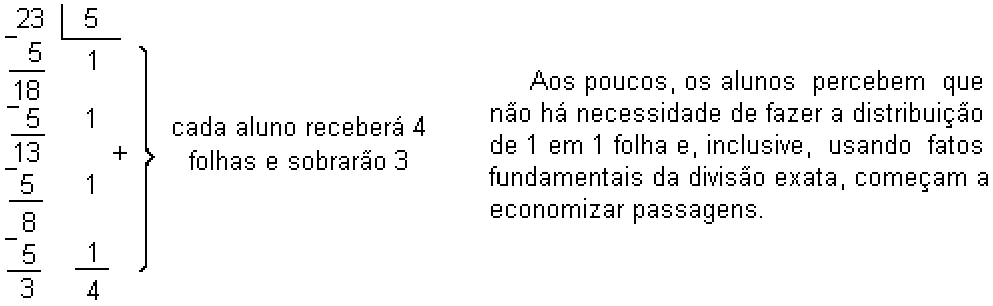
Apresentação do *processo americano* na Proposta Curricular (1988a, p.39):

Técnica operatória

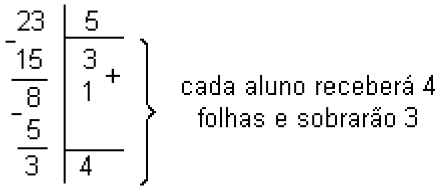
O processo americano (que associa a divisão a subtrações sucessivas), permite que o aluno determine o cociente e o resto de uma divisão com total compreensão do processo realizado, embora, no início, o faça de maneira mais demorada.

Exemplo: Repartir 23 folhas de sulfite entre 5 alunos.

a) Dando uma folha a cada aluno, em cada rodada, serão gastas 5 folhas.



b) "Dando 3 folhas a cada aluno, serão gastas 15 folhas (porque 3 x 5 = 15)":



Alguns *detalhes* dessa apresentação podem ter gerado a confusão das minhas colegas e de outros professores.

Quando minha filha cursou a segunda série, um certo dia, voltou da escola nervosa. Perguntei o motivo e disse que não tinha entendido nada da divisão que a professora ensinou. Chorou ao comentar.

Pedi que mostrasse o que a preocupava e lá estava a divisão pelo *processo americano*. Sua professora ensinara como dividir 30 por 6, de forma semelhante ao primeiro exemplo da proposta: cociente obtido através da soma de 5 parcelas iguais a 1. O não entendimento de minha filha: "porque eu tenho que colocar 1 e 1 e 1 e 1..., se eu sei que 30 dividido por 6 é 5?". Foi a primeira e última vez que a professora mostrou essa forma de dividir.

Essa mesma questão pode ter ocorrido a muitos professores, inclusive às minhas colegas que pediram *explicações*. A frase "aos poucos, os alunos percebem que não há necessidade de fazer a distribuição de 1 em 1 folha" (op cit., p.39) pode ser entendida como um primeiro *passo* para dividir pelo processo americano, *amarrando* um procedimento para dividir que tem, como uma de suas virtudes, a possibilidade do aluno ajustar as parcelas segundo suas próprias ponderações.

Ainda em relação à apresentação do processo americano na proposta curricular:

- O termo "gastas", na apresentação do item (b): "Dando 3 folhas a cada aluno, serão **gastas** 15 folhas", não reclamaria se substituído por distribuídas...
- No primeiro exemplo, cada parcela "1" está na mesma linha de cada produto "5" correspondente, o que facilita o uso de um produto na determinação de uma nova parcela. Essa referência não foi discutida nem mantida no segundo exemplo.

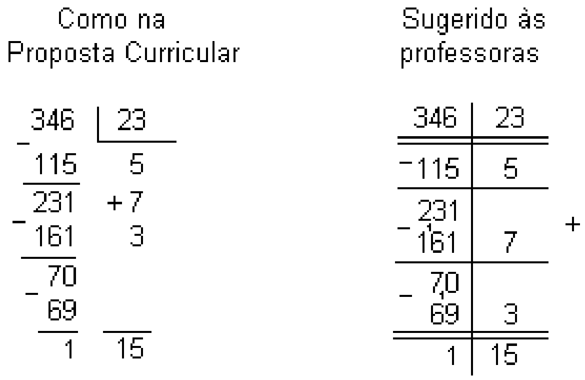
A forma que o *processo americano* para dividir foi apresentado na proposta curricular para o ensino de matemática certamente teve influência nas dúvidas das minhas colegas que solicitaram esclarecimentos, mas foram outras considerações que usei na discussão do algoritmo.

Pensei na mudança de procedimentos, necessária para o ensino da divisão de uma forma diferente da usual. Os tais *passos*, que na verdade são *casos*, que apresentam exemplos de situações particulares, sem maiores referências ao algoritmo em si, eram usados na época.[23] O que fazer com os tais passos?

Entendi que o problema do não entendimento do algoritmo poderia estar relacionado à proximidade da notação dos dois algoritmos – usual e americano – e à diferença de procedimentos para o ensino de cada um.

Dessa forma, pensei em uma notação diferente da(s) usual(is), procurando evitar as referências dos processos usados nas *outras* divisões: uma nova forma de ensinar *uma mesma coisa*, a divisão *na chave*, procurando uma representação que sugerisse uma *nova divisão* (Gregolin & Tancredi, 1996).

[23] A professora das quartas séries, participante desta pesquisa, usou o sistema de *passos* para ensinar a divisão: 1º passo – divisão simples com resto zero...; exemplo...



Usando essa notação, discutimos a conveniência de cada parcela estar diretamente relacionada com o produto correspondente, facilitando a obtenção de novas parcelas. Além disso, as questões que o aluno poderia fazer para obter cada parcela (cociente parcial) e o destaque para os termos da divisão foram discutidos:

- Quantas vezes o 23 *cabe* no 346? Cabe 5 vezes (idéia de medida), mas cabe mais vezes nos 231 restantes... No total, o 23 cabe 15 vezes no 346 e sobra 1 unidade;
- Para distribuir 346 (objetos etc) para 23 (pessoas etc), posso destinar a cada um 5 na primeira distribuição, distribuindo 115. O que sobra pode ser novamente distribuído... , cabendo a cada um o total que recebeu em todas as distribuições, 15;
- O dividendo, o divisor, o cociente e o resto ficam destacados pelas barras duplas.

A partir dessas considerações, as professoras declararam ter *entendido* a divisão pelo processo americano. Hoje penso que as professoras constataram que havia sentido em dividir pelo processo americano e se situaram *ensinando* esse processo. Apesar desse *entendimento*, declararam que dessa forma seria mais difícil para o aluno aprender.

Após essa discussão, que se deu nas atividades de planejamento da escola, a primeira atividade que propus aos meus alunos de matemática de quatro quintas séries foi a resolução de algumas divisões (por volta de dez). Poucos alunos acertaram todas e muitos erraram a maioria.

Mostrei aos alunos, da mesma forma que para as professoras, como dividir por estimativas (processo americano). Nenhum dos alunos das quatro classes teve dificuldade de entendimento do processo. Um dos alunos, que tinha extrema dificuldade para dividir da forma tradicional, foi o aluno mais rápido em todas as divisões que propus, uma a uma, em classe. Suas estimativas eram precisas: se o cociente era, por exemplo, 53, sua estimativa inicial, geralmente, era um número entre 50 e 56. Na escola, esse aluno tinha dificuldade em matemática, mas na rua (onde era facilmente encontrado) nenhum colega de sua idade conseguia ser mais esperto (trocas, situações que exigiam cálculo mental e estimativas).

As professoras que participaram desta pesquisa, uma, das terceiras séries e outra, das quartas séries, ensinaram o algoritmo da divisão usando a tabuada do divisor (terceira série) e através de passos (exemplos de casos – quarta série). Nas duas séries, o conceito de divisão praticamente não foi associado ao algoritmo.

O uso do algoritmo da divisão por estimativas pode estimular o aluno a associar o conceito de divisão ao algoritmo: cada parcela (cociente parcial) pode ser obtida através de questões que o próprio aluno se coloca: quantas vezes cabe ou quanto será cada parte a cada distribuição.

A estimativa que se faz, usando o algoritmo por estimativas, é *global* – em relação ao dividendo como um todo –, o que induz a um refinamento crescente da capacidade de estimar e controlar os resultados de quem divide. A representação sugerida para o algoritmo (parcelas do cociente na mesma linha que os produtos) favorece o estabelecimento de relações entre as parcelas determinadas do cociente e as que ainda o serão: dez vezes mais, o triplo, não mais que o dobro etc.

Talvez não seja muito fácil para o professor abandonar os tais passos ou outras formas de ensinar o algoritmo da divisão, mas os alunos certamente terão mais facilidade para efetuar divisões, conceituar divisão e estimar, usando o algoritmo por estimativas para a divisão, como proposto às professoras.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – 1ª a 4ª série (Brasil, 1997), destacam os procedimentos de cálculo através de aproximações e estimativas:

> uma das finalidades atuais do ensino do cálculo consiste em fazer com que os alunos desenvolvam e sistematizem procedimentos de cálculo por estimativas e estratégias de verificação e controle de resultados (p.118).

Comentam o desenvolvimento da estimativa:

> A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e aperfeiçoamento depende de um trabalho contínuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos (p.118).

Apresentam exemplos de atividades que exploram estimativas:

> - estimar um produto arredondando um dos fatores (3x29 é um resultado próximo de 3x30) (p.119).

Para que o aluno desenvolva e sistematize procedimentos de cálculo por estimativas e estratégias de verificação e controle, podem não ser suficientes exercícios que solicitam estimativas ou arredondamentos sem um objetivo claro de aplicação, sem que essas estratégias sejam assumidas pelo aluno como ferramentas. Além disso, saber efetuar as quatro operações básicas é um requisito para o desenvolvimento de estratégias para arredondamentos e estimativas.

Na divisão por estimativas o aluno pode aprender a dividir através da exploração do conceito de divisão e do desenvolvimento de suas estimativas, estimativas que certamente serão consideradas ferramentas pelo aluno. O arredondamento pode ser incentivado e se tornar mais uma ferramenta para o *ajuste* das estimativas no processo de dividir.

O registro do algoritmo da divisão em uma *tabela*[24] pode ser precedido por outras tabelas, mostrando as partes em que o todo é dividido, facilitando a compreensão do algoritmo.

[24] Apesar de não empregarem dados estatísticos, acho mais interessante chamar de “tabelas” os quadros associados à divisão por estimativas.

Problema proposto: Repartir 41 balas para três crianças. Uma possível solução: distribuir 5 balas para cada criança, depois 6 e depois 2 balas para cada uma. Sobram 2 balas. A tabela a seguir mostra uma forma de representar as distribuições:

	a distribuir	1ª criança	2ª criança	3ª criança	distribuído
1ª distribuição	41	5	5	5	15
2ª distribuição	26	6	6	6	18
3ª distribuição	8	2	2	2	6
Totais	2	13	13	13	39

A tabela seguinte *aproxima* a distribuição ao algoritmo correspondente:

	a ser dividido	1ª criança	2ª criança	3ª criança	distribuições
A distribuir	41	por quanto será dividido: 3 crianças			
Distribuído	15	5	5	5	1ª dist.
A distribuir	26				
Distribuído	18	6	6	6	2ª dist.
A distribuir	8				
Distribuído	6	2	2	2	3ª dist.
A distribuir	2				-
Totais	2	13	13	13	39
	não distribuídas	Recebidas pelas crianças			distribuídas

Cada criança recebeu 13 balas, do total distribuído, 39. Sobraram 2 balas.

O algoritmo da divisão por estimativas:

DIVIDENDO →	41	3	← DIVISOR
	- 15	5	⇒1ª dist.: 5 para cada
	26		
	- 18	6	⇒2ª dist.: 6 para cada
	8		
	- 6	2	⇒3ª dist.: 2 para cada
RESTO →	2	13	← COCIENTE

Números racionais também podem ser explorados em divisões através de estimativas, de forma mais compreensiva da que ocorre no algoritmo tradicional.

A divisão (operação matemática), efetuada a princípio, poderia prever a divisão completa das balas. O resto, 2 balas, poderia ser distribuído como fração: 2/3 de bala para cada uma das crianças: 2 (resto) ÷ 3 (divisor) corresponde a 2/3 de bala. Cada bala dividida em 3 partes (6 partes de 1/3 de bala cada uma), cabendo 2 partes a cada criança.

Cada criança receberia $13 \frac{2}{3}$ balas.

O problema poderia solicitar o resultado com casas decimais, por exemplo, décimos (não é muito fácil obter um centésimo de bala). Nesse caso, haveria uma sobra. Usando outra solução para as distribuições: 10 balas para cada criança na 1ª distribuição, 3 na 2ª e a divisão das partes decimais (bala *mole*):

DIVIDENDO →	41	3	← DIVISOR
	- 30	10	⇒ 1ª distribuição: 10 para cada
	11		
	- 9	3	⇒ 2ª distribuição: 3 para cada
	2,0		
	- 0,3	0,1	⇒ 3ª distribuição: 0,1 para cada
	1,7		
	- 1,5	0,5	⇒ 4ª distribuição: 0,5 para cada
RESTO →	0,2	13,6	← COCIENTE

Cada criança recebe 13,6 balas e sobram 2 décimos de bala.

Verifica-se que o resto é o menor possível, considerado até décimos, pois seria necessária uma parte de bala igual a 0,3 para ser dividida em três partes de 0,1. Portanto, prosseguindo a divisão, a distribuição seguinte se daria com centésimos de bala.

O critério para a verificação da pertinência do resto não é o mesmo que o da divisão de números naturais – resto menor que o divisor.

É interessante que as parcelas decimais do cociente sejam obtidas a partir de um resto menor que o divisor e, a partir daí, o resto será sempre menor que o divisor.

No exemplo anterior, verificou-se que o resto (0,2) é o menor possível obtendo-se décimos no cociente: uma nova parcela de (0,1) no cociente ultrapassaria o resto.

Através de tabelas podem ser representadas “divisões” em que as partes não são iguais. Essas “divisões” não têm as características necessárias para o uso do algoritmo: partes iguais e resto menor possível. Dessa forma, o conceito de divisão pode ser explorado de forma mais ampla da que (geralmente) ocorre na escola.

No exemplo a seguir, 41 balas foram distribuídas para 3 crianças sendo que a terceira criança não tem irmãos. Cada uma das duas primeiras crianças recebeu o dobro de balas que a terceira (darão algumas aos irmãos).

	a distribuir	1ª criança	2ª criança	3ª criança	distribuído
1ª distribuição	41	8	8	4	8+8+4=20
2ª distribuição	21	6	6	3	6+6+3=15
3ª distribuição	6	2	2	1	2+2+1=5
resto	1				
totais	1	8+6+2=16	8+6+2=16	4+3+1=8	20+15+5=40

As duas primeiras crianças receberam 16 balas cada uma e a terceira, 8. Sobrou 1 bala para quem distribuiu...

Esse é um exemplo de uma divisão geral, na qual os critérios não são os da operação matemática divisão: as partes não são iguais e o algoritmo não pode ser usado. A tabela facilita a determinação das partes e a resolução de “divisões” desse tipo contribui para a conceituação da operação matemática divisão.

Retomando a divisão de números naturais, duas condições a caracterizam:

1. Quanto ao resto: o resto deve ser menor que o divisor;
2. Quanto à relação entre os termos da divisão, a igualdade deve ocorrer:

   Dividendo = Cociente x Divisor + Resto

Pode haver confusão na verificação dessas condições em algumas divisões. Por exemplo, quando zeros são cancelados, como na divisão 320 ÷ 90. O cociente nessa divisão é 3 e o resto, 40.

Se os zeros são cancelados (dividendo e divisor divididos por 10), o resto passa a ser 4. Esse é o resto de uma nova divisão, com o mesmo cociente que a primeira mas cujo resto também foi dividido por 10, em decorrência do cancelamento dos zeros.

As duas professoras participantes desta pesquisa não fizeram nenhum comentário quanto ao resto das divisões nas quais foram cancelados zeros.

O resultado exato de qualquer divisão de números naturais é um número racional, que corresponde à fração: dividendo *sobre* divisor, que também corresponde a um número misto: cociente + resto/divisor.

No exemplo apresentado, o resultado exato da divisão 320 ÷ 90 é $3\frac{40}{90}$, sendo que a parte fracionária corresponde ao resto que não foi dividido pelo divisor. Havendo o cancelamento de zeros no dividendo e no divisor, o resultado exato é $3\frac{4}{9}$, que é exatamente o mesmo número obtido sem o cancelamento dos zeros: simplificando a fração 40/90 obtemos a fração equivalente 4/9. Esse procedimento mostra que ao divisor 9 (após cancelamento dos zeros) corresponde o resto 4.

A apresentação do resultado da divisão de números naturais através de um número misto pode ser discutida após ou durante o estudo dos números racionais: números decimais, frações e números mistos.

O conhecimento dessa relação por parte dos professores das séries iniciais do ensino fundamental, além de evitar confusões quanto aos restos de algumas divisões, pode auxiliar na compreensão dos números racionais: divisões de números naturais (que também são números racionais) resultam sempre números racionais:

- naturais, nas divisões nas quais os restos são nulos ou desprezados ou *isolados*;
- números mistos, se as divisões têm restos não nulos (divisões não exatas) e desejam-se resultados exatos ou indicações *ajustadas* dos restos.

IV.3. Complementos sobre as Operações

Expressões com Números Naturais

Apresentação de expressões nas terceiras séries, obtidas no caderno de um aluno:

Expressões numéricas

Expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números. A expressão numérica representa uma única idéia de quantidade, isto é, tem um único resultado e, para obtê-lo, devemos proceder da seguinte forma:

- *Primeiramente, efetuamos as multiplicações e divisões, obedecendo à ordem em que aparecem.*
- *A seguir, efetuamos as adições e subtrações, também obedecendo à ordem em que aparecem.*

Nas terceiras séries não foram apresentadas expressões envolvendo, também, sinais de associação: ( ), [ ], { }. Parênteses foram usados como meio auxiliar para a resolução, um procedimento interessante sugerido pela professora, destacando a operação a ser resolvida. Por exemplo:

$12 \div 6 + 3 \text{ x } 5 – 4 = (12 \div 6) + 3 \text{ x } 5 – 4 = 2 + (3 \text{ x } 5) – 4 = (2 + 15) – 4 = 13$ [25]

Nas quartas séries, foram estudadas expressões envolvendo adições e subtrações, posteriormente expressões com adições, subtrações e multiplicações e, num terceiro momento, expressões com as quatro operações. Seguem registros obtidos no caderno de um aluno:

Expressões numéricas

Simplificando expressões numéricas

Simplificar uma expressão numérica significa representá-la através de um único numeral.

[25] Nesse exemplo, a resolução da multiplicação “3 x 5” poderia ter ocorrido na *passagem* anterior.

Exemplo: $\underline{36 + 12} + \underline{4 + 20}$

$\underline{48 \quad + \quad 24}$

72

E como simplificar esta expressão?

$\underline{36 + 24} - \underline{9 + 10}$

$\underline{60 \quad - \quad 19}$

41

Em uma expressão numérica que tem uma série de numerais ligados pelos sinais + e –, efetuamos as adições e as subtrações na ordem em que aparecem: da esquerda para a direita.

Quando aparecem nas expressões (parênteses), [colchetes] e { chaves }, efetua-se primeiro o que está dentro dos parênteses, depois o colchete e por último o que está na chave, na ordem que aparecem na expressão.

Exemplo: $12 + \{ 35 - (\underline{24 - 3}) + [4 + 8 - (\underline{16 - 10})] + 9 \} =$

$12 + \{ 35 - 21 + [\underline{4 + 8 - 6}] + 9 \} =$

$12 + \{ \underline{35 - 21} + \underline{6 + 9} \} =$

$12 + \{ \underline{14 + 15} \} =$

$12 + 29 =$

41

O procedimento para a resolução de expressões, envolvendo adições e subtrações, foi apresentado de forma confusa nas quartas séries.

O uso da expressão: simplificar uma expressão numérica, para indicar o resultado da expressão – representá-la através de um único numeral – sugere que o termo “simplificar” indica resolução completa. A professora usou a expressão da mesma forma que Guelli (1996, v4, p.42).

Em muitos procedimentos matemáticos a ação de “simplificar” pode não corresponder à obtenção de um resultado: a adição 4 + 5 + 3 corresponde à adição 9 + 3, simplificada em relação à anterior por apresentar menos parcelas; no conjunto de operações: $\frac{5 \times 6 \times 4}{7 \times 5 \times 3} = \frac{\cancel{5} \times 6 \times 4}{7 \times \cancel{5} \times 3} = \frac{6 \times 4}{7 \times 3}$, a simplificação facilita a resolução. Confusões seriam evitadas pela substituição de “simplificar” por “resolver”.

A matemática não trata apenas de exatidões, mas prima por ser precisa e essa precisão deve transparecer e ser incentivada, também, pelo uso adequado de termos que envolvem conceitos e procedimentos matemáticos.

Os exemplos não deixaram claros os procedimentos para a resolução de expressões. Nos dois primeiros exemplos, a ordem de resolução contraria a regra: são três operações, e a segunda (à esquerda da seguinte) é a última a ser resolvida, o que produz resultado incorreto no segundo exemplo:

$$1)\ \underline{36 + 12} + \underline{4 + 20} \qquad\qquad 2)\ \underline{36 + 24} - \underline{9 + 10}$$
$$\underline{48 \quad + \quad 24} \qquad\qquad\qquad \underline{60 \quad - \quad 19}$$
$$72 \qquad\qquad\qquad\qquad 41$$

Apesar do exemplo incorreto no caderno, o aluno observado resolveu corretamente as expressões, de acordo com a regra, o que corresponde à resolução do exemplo (2) da forma: 36 + 24 – 9 + 10 = 60 – 9 + 10 = 51 + 10 = 61.

Observando as provas de uma aluna, constatei que ela *aprendeu* a simplificação proposta no exemplo (2), resolvendo várias expressões de forma incorreta.

Por exemplo, resoluções da aluna no exercício proposto em uma prova:

Calcule o valor das expressões numéricas:

$$\underbrace{\underbrace{7 + 8}_{15} - \underbrace{3 + 5}_{8}}_{7} = \qquad\qquad e)\ \underbrace{\underbrace{65 + 15}_{80} - \underbrace{20 - 40}_{20}}_{60} =$$

No exercício (e) a referência da simplificação se sobrepôs ao fato de que o minuendo da segunda subtração é maior que o subtraendo.

Apesar dos exemplos com resolução em desacordo com a regra proposta, muitos alunos conseguiram resolver corretamente expressões envolvendo adições e subtrações por uma de duas razões: conhecimento anterior ou atenção maior às regras que aos exemplos.

Nenhum aluno das três quartas séries deve ter questionado a resolução do segundo exemplo, com resultado incorreto. A professora sabe resolver expressões, mas tem usando esse exemplo de forma mecânica, pois nas correções das provas, resoluções semelhantes foram consideradas erradas.

Se os alunos fossem incentivados a se colocarem, questionando o professor ou os livros quanto às suas dúvidas, esse fato não ocorreria.

As regras propostas, quanto à ordem das operações e ao uso dos sinais de associação, poderiam evitar confusões como as que ocorreram.

Em uma expressão com várias adições e subtrações, quem não fica tentado em resolver se adiantando à regra da esquerda para a direita?

Por exemplo, a expressão $14 + 8 – 5 + 3 + 9 – 3 + 4 – 5$.

Se todas as operações fossem adições, a ordem de resolução seria indiferente, pois a adição tem as propriedades comutativa e associativa. A subtração não tem essas propriedades, mas toda subtração pode ser escrita como adição, onde o oposto do subtraendo é somado ao minuendo: $5 – 3 = 5 + (-3)$. Números negativos não são estudados até a quarta série, mas pode ser um bom momento para a introdução da idéia para ser usada como uma ferramenta.

Podem ser levantadas algumas situações onde são usados números negativos, como por exemplo, temperaturas abaixo de zero, registros de dívidas ou localização.

Um exemplo de uso de número negativo como ferramenta para a resolução de uma subtração pode ser observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1997).

São mostradas as estratégias de crianças em resoluções de operações:

32 - 18 = 14
Eu pensei assim:
30 - 10 = 20
2 - 8 = -6
20 - -6 = 14 e foi assim

27 + 38 = 65
Eu pensei assim:
20 + 30 = 50
7 + 8 = 15
15 + 50 = 65

> O foco do trabalho de construção de um repertório básico para o desenvolvimento do cálculo consiste em identificar as estratégias pessoais utilizadas pelos alunos e fazer com que eles evidenciem suas compreensões por meio de análises e comparações, explicitando-as oralmente. Já a organização desse repertório dá-se por meio da exploração das escritas numéricas e apóia-se na contagem, no uso de materiais didáticos e da reta numérica (PCN – Brasil, 1997, p.115).

Não foi destacado o procedimento da primeira criança que, provavelmente de forma intuitiva, usou brilhantemente o conceito de número negativo.

Efetuou: 32 – 18 = (30 – 10) + (2 – 8) = 20 + (- 6) = 14

A criança usou 20 - - 6 para indicar a soma 20 + (-6), talvez por ter obtido a soma através de uma subtração. Questão de notação e não de compreensão.

Retomando a expressão: $14 + \underbrace{8 - 5} + 3 + \underbrace{9 - 3} + 4 - 5$,

as subtrações podem ser resolvidas num primeiro momento (por poderem ser consideradas adições de opostos): 14 + 3 + 3 + 6 + 4 – 5 = 30 – 5 = 25.

A subtração 4 – 5 não foi resolvida, pois o minuendo é menor que o subtraendo e a diferença é um número negativo (-1).

Em subtrações consecutivas, a ordem de resolução deve ser obedecida: da esquerda para a direita (para não se trabalhar com números negativos).

A regra para resolução de expressões com adições e subtrações pode ser ampliada, visando organizar as possibilidades de resolução, o que evitaria os problemas verificados na quarta série:

1. Sempre é válida a ordem de resolução da esquerda para a direita;
2. Pode-se iniciar resolvendo as subtrações isoladas, com minuendo maior que o subtraendo (subtrações podem ser entendidas como adições de opostos);
3. Subtrações consecutivas devem ser resolvidas da esquerda para a direita (para não se trabalhar com números negativos);
4. Nenhum subtraendo pode ser adicionado (a subtração será efetuada antes).

Resoluções de expressões com sinais de associação – parênteses, colchetes e chaves – ocorreram nas quartas séries segundo a regra observada no caderno de um aluno:

> *Quando aparecem nas expressões (parênteses), [colchetes] e { chaves }, efetua-se primeiro o que está dentro dos parênteses, depois o colchete e por último o que está na chave, na ordem que aparecem na expressão.*

Essa regra pode limitar a proposição de expressões ou confundir quem resolve. Por exemplo, na expressão 5 + (13 – [7 – 3]) as operações entre os colchetes devem ser resolvidas antes das que estão entre os parênteses, pois se não for obtido o resultado da subtração 7 – 3 não há condição de prosseguimento.

A *regra* para a resolução de expressões com os sinais de associação (), [] e {} é uma convenção que, para ser aplicada, depende da organização das expressões.

Em programação de computadores e em calculadoras científicas apenas os parênteses são usados para indicar ordem de resolução. Dessa forma a convenção, em relação aos sinais de associação, passa a ser: resolver primeiro os mais internos.

Tive a oportunidade de propor expressões dessa forma a alunos de quintas e sextas séries do então primeiro grau. Os alunos preferiram resolver essas expressões, com vários níveis de parênteses, substituindo expressões com parênteses, colchetes e chaves.

Além de evitar a proposição de expressões confusas, o uso de um único sinal parece facilitar a estratégia de resolução do aluno e a conferência em calculadoras reais ou na calculadora do Windows (computador).

Expressões com os três sinais de associação podem ser convertidas através da substituição de colchetes e chaves por parênteses.

Expressões com as quatro operações foram ensinadas nas quartas séries, conforme observado no caderno de um aluno:

> *Expressões numéricas envolvendo as quatro operações:*
>
> *Resolve-se primeiro as divisões e as multiplicações na ordem em que aparecem, depois as adições e subtrações na ordem em que aparecem.*

Essa regra, proposta pela professora, aparece de forma semelhante nos livros de referência, mas alguns dos autores propõem a resolução de algumas expressões em calculadoras, como por exemplo: $2 \times 5 + 10 = 20$; $3 + 4 \times 2 = 11$.

Pode-se perceber, usando a calculadora, que a ordem de resolução das operações nem sempre é da esquerda para a direita: na segunda expressão a multiplicação é resolvida primeiro. É uma forma interessante constatar a aplicação da regra na máquina.

A regra, resolver primeiro as multiplicações e as divisões, não é justificada pelos autores consultados pela professora. Justificar a ordem de resolução, mesmo que de forma intuitiva, pode favorecer alunos com dificuldade em matemática, propiciando uma referência além da regra.

As operações multiplicação e divisão podem ser relacionadas às operações adição e subtração:

Uma multiplicação pode corresponder a várias adições: $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$;

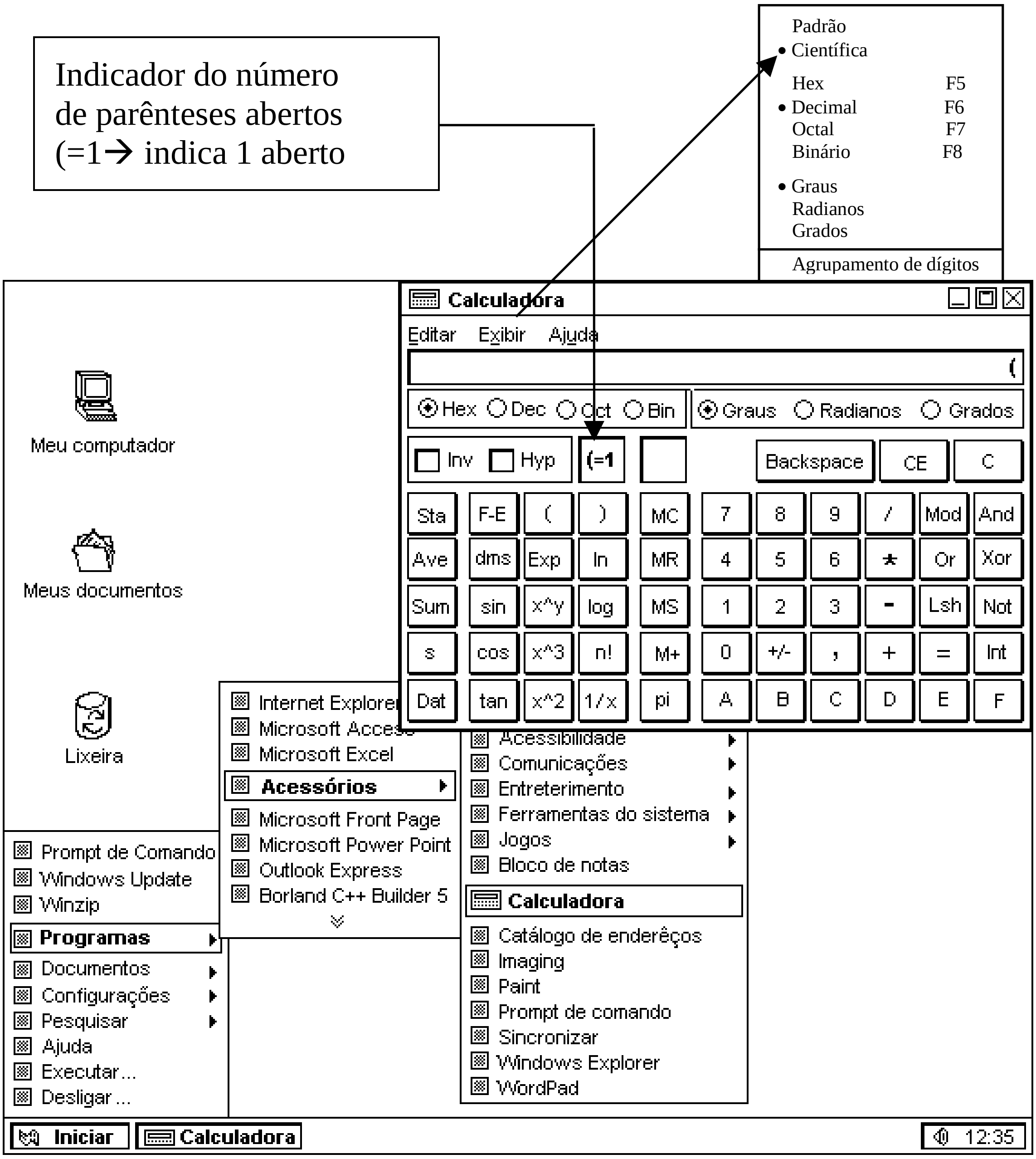
Uma divisão pode corresponder a várias subtrações:

$20 \div 5 = 4$

$$\left.\begin{array}{r} 20 \\ \underline{-\ 5} \\ 15 \\ \underline{-\ 5} \\ 10 \\ \underline{-\ 5} \\ 5 \\ \underline{-\ 5} \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{c}\text{posso tirar} \\ \text{4 vezes}\end{array}$$

Podemos entender as operações multiplicação e divisão como mais fortes (uma pode corresponder a várias) que as operações adição e subtração: as mais fortes são resolvidas primeiro. Por exemplo, a resolução da expressão 30 – 3 x 4 pode ser entendida como 30 – (4 + 4 + 4) = 30 – 12 = 18. Resolver a subtração antes da multiplicação corresponde a ignorar uma *ligação mais forte* entre o 3 e o 4 (pela multiplicação).

Uso da calculadora do Microsoft Windows (computador PC), no modo de exibição *científica*, para explorar expressões numéricas:



Um exercício interessante, para alunos e professores, é a resolução de expressões na calculadora, descrevendo as operações que vão sendo resolvidas a partir dos resultados parciais apresentados, justificando o procedimento da máquina.

Resolução da expressão: 4 * 3 + 2 * (9 – 4) + (20 / 2 – (8 – 2 * 3)) =

* e /: operadores para a multiplicação (x) e divisão (÷) na calculadora

Dig.: digitado; na calculadora: **Most.** → mostrador (display); **P.(** → status de parênteses

Dig.	Most.	P. (	Comentários
4	4		Número digitado exibido no mostrador (4)
*****	4		Sinal de operação não é mostrado; permanece o 4
3	3		Número digitado exibido no mostrador (3)
+	12		Multiplicou (4 x 3) e exibiu o produto (12); (multiplicação mais *forte* que a adição)
2	2		Número digitado exibido no mostrador (2)
*****	2		Sinal de operação não é mostrado; permanece o 2
(	(	(=1	“(“ exibido no mostrador; (=1: indicação de que há um “(“ aberto
9	9	(=1	Número digitado exibido no mostrador (9)
–	9	(=1	Sinal de operação não é mostrado; permanece o 9
4	4	(=1	Número digitado exibido no mostrador (4)
)	5		Resolveu os parênteses fechados (9 – 4) e exibiu a diferença (5)
+	22		Como a próxima operação é uma adição (operação mais *fraca*), o resultado parcial foi calculado e exibido, 22
(	(	(=1	“(“ exibido no mostrador; (=1: indicação de que há um “(“ aberto
20	20	(=1	Número digitado exibido no mostrador (20)
/	20	(=1	Sinal de operação não é mostrado; permanece o 20
2	2	(=1	Número digitado exibido no mostrador (2)
–	10	(=1	Dividiu (20 ÷ 2) e exibiu o cociente (10); (divisão mais *forte* que a subtração)
(	((	(=2	“((“ exibido no mostrador; (=2: indicação de que há 2 “(“ abertos
8	8	(=2	Número digitado exibido no mostrador (8)
–	8	(=2	Sinal de operação não é mostrado; permanece o 8
2	2	(=2	Número digitado exibido no mostrador (2)
*****	2	(=2	Sinal de operação não é mostrado; permanece o 2
3	3	(=2	Número digitado exibido no mostrador (3)
)	2	(=1	Resolveu os parênteses fechados (8 – 2 x 3); exibiu resultado (2)
)	8		Resolveu os parênteses fechados (10 – 2) e exibiu resultado (8)
=	30		Terminou a resolução e exibiu o resultado final 30 [= 22 + 8]

4 x 3 + 2 x (9 – 4) + (20 ÷ 2 – (8 – 2 x 3)) = 12 + 2 x 5 + (10 – 2) = 22 + 8 = 30

Sentenças Matemáticas

Foram estudadas nas quartas séries. Anotações no caderno de um aluno:

Para descobrir o valor das sentenças matemáticas, aplicamos a operação inversa da que está sendo usada. O número desconhecido será representado por um $\square$.

Observe alguns exemplos:

$\square + 2 = 8$	$\square - 5 = 15$	$\square \div 2 = 8$	$\square \times 5 = 30$
$\square = 8 - 2$	$\square = 15 + 5$	$\square = 8 \times 2$	$\square = 30 \div 5$
$\square = 6$	$\square = 20$	$\square = 16$	$\square = 6$

A regra proposta, resolução através da operação inversa, limita a proposição de sentenças ou não é aplicável em alguns casos. Por exemplo, nas sentenças matemáticas: $5 - \square = 3$ e $20 \div \square = 5$, as operações que devem ser usadas não são as inversas e sim elas mesmas: $\square = 5 - 3$ e $\square = 20 \div 5$.

A resolução dessas expressões poderia ocorrer de forma intuitiva – testando valores –, o que permitiria a resolução de expressões como os últimos exemplos.

Dois exemplos de problemas resolvidos através de sentenças matemáticas foram mostrados, sendo que no segundo, duas operações – multiplicação e adição – estavam associadas ao "$\square$":

Problemas envolvendo sentenças matemáticas

Observe o exemplo:

2) O quíntuplo de um número mais 3 unidades é igual a 33. Qual é o número?

$5 \times \square + 3 = 33$
$5 \times \square = 33 - 3$
$5 \times \square = 30$
$\square = 30 \div 5 = 6$ *R: O número é 6.*

Resolvendo expressões semelhantes ao exemplo, o aluno – do qual observei o caderno – obteve resultado correto em todas. No entanto, suas indicações foram sempre incorretas, como nos exercícios:

i) □ ÷ 5 + 3 = 7
□ = 7 – 3 x 5
□ = 4 x 5
□ = 20

m) 4 x □ + 10 = 38
□ = 38 – 10 ÷ 4
□ = 28 ÷ 4
□ = 7

Na segunda linha dessas resoluções, a expressão à direita da igualdade deveria ser resolvida conforme a regra estudada: multiplicações e divisões antes de adições e subtrações. De acordo com a regra para a resolução de expressões, em (i) seria obtido um número negativo (7 – 15) e em (m) um número racional não natural (38 – 2,5).

Essas resoluções foram aceitas como corretas e uma possível conseqüência é o entendimento, por parte do aluno, de que as regras são restritas a determinados contextos: para resolver expressões, uso as regras para expressões; para resolver sentenças matemáticas, uso as regras (implícitas nos exemplos) para sentenças matemáticas e que, como são contextos *diferentes*, essas regras podem se contradizer.

Sentenças matemáticas como as dos exercícios (i) e (m) são estudadas nas séries posteriores à quarta série, mas se o professor entende que é oportuno apresentá-las nessa série, poderia justificar sua resolução de forma intuitiva e *ajustar* as resoluções dos alunos, de tal forma que não houvesse incompatibilidade de *regras*.

Por exemplo, no exercício (i), a resolução da sentença matemática:

□ ÷ 5 + 3 = 7 poderia ser associada à resolução da expressão: 20÷ 5 + 3 = 7

Na expressão, resolve-se primeiro a divisão (ligação mais *forte)* e depois, a adição: 20÷ 5 + 3 = 4 + 3 = 7.

Na sentença matemática, ocorre algo semelhante a um empilhamento: ao desempilhar, o último a entrar em uma pilha é o primeiro a sair:

□ ÷ 5 + 3 = 7 (a adição seria a última operação efetuada à esquerda da igualdade, se o "□" fosse conhecido)
□ ÷ 5 = 7 – 3 (desfazendo a adição)
□ = 4 x 5 (desfazendo a divisão: *ligação mais forte* que a adição)
□ = 20

Procedendo dessa forma, é possível justificar a determinação do "□" sem um maior aprofundamento na resolução de equações.

Permanece um problema: *desfazer* uma operação nem sempre corresponde ao uso da operação inversa. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 20 \div \square + 4 &= 14 \\ 20 \div \square &= 14 - 4 \\ 20 \div \square &= 10 \\ \square &= 20 \div 10 \\ \square &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50 - 3 \times \square &= 35 \\ 3 \times \square &= 50 - 35 \\ 3 \times \square &= 15 \\ \square &= 15 \div 3 \\ \square &= 5 \end{aligned}$$

No segundo exemplo, devo determinar quanto subtrair de 50 para obter 35, que corresponde à subtração 50 – 35. A *ligação* dada pela multiplicação (operação *mais forte*) é a última a ser desfeita. O uso ou não de operação inversa pode ser discutido a partir de expressões equivalentes:

$$5 + 4 = 9 \iff \begin{cases} 5 = 9 - 4 \\ 4 = 9 - 5 \end{cases} \quad \text{(a subtração é a operação inversa da adição)}$$

$$12 - 8 = 4 \iff \begin{cases} 12 = 4 + 8 & \text{(a adição é a operação inversa da subtração)} \\ 8 = 12 - 4 & \text{(a subtração não é inversa dela mesma)} \end{cases}$$

$$3 \times 5 = 15 \iff \begin{cases} 3 = 15 \div 5 \\ 5 = 15 \div 3 \end{cases} \quad \text{(a divisão é a operação inversa da multiplicação)}$$

$$18 \div 6 = 3 \iff \begin{cases} 18 = 3 \times 6 & \text{(a multiplicação é a operação inversa da divisão)} \\ 6 = 18 \div 3 & \text{(a divisão não é inversa dela mesma)} \end{cases}$$

Quanto à resolução do aluno, o *ajuste* pode ocorrer com a colocação de parênteses indicando a ordem das operações:

i) $\square \div 5 + 3 = 7$

$$\begin{aligned} \square &= (7 - 3) \times 5 \\ \square &= 4 \times 5 \\ \square &= 20 \end{aligned}$$

m) $4 \times \square + 10 = 38$

$$\begin{aligned} \square &= (38 - 10) \div 4 \\ \square &= 28 \div 4 \\ \square &= 7 \end{aligned}$$

Dessa forma, o procedimento do aluno: indicação das duas operações que *desfazem* as iniciais em uma mesma linha, passa a ser compatível com as *regras* estudadas para a resolução de expressões.

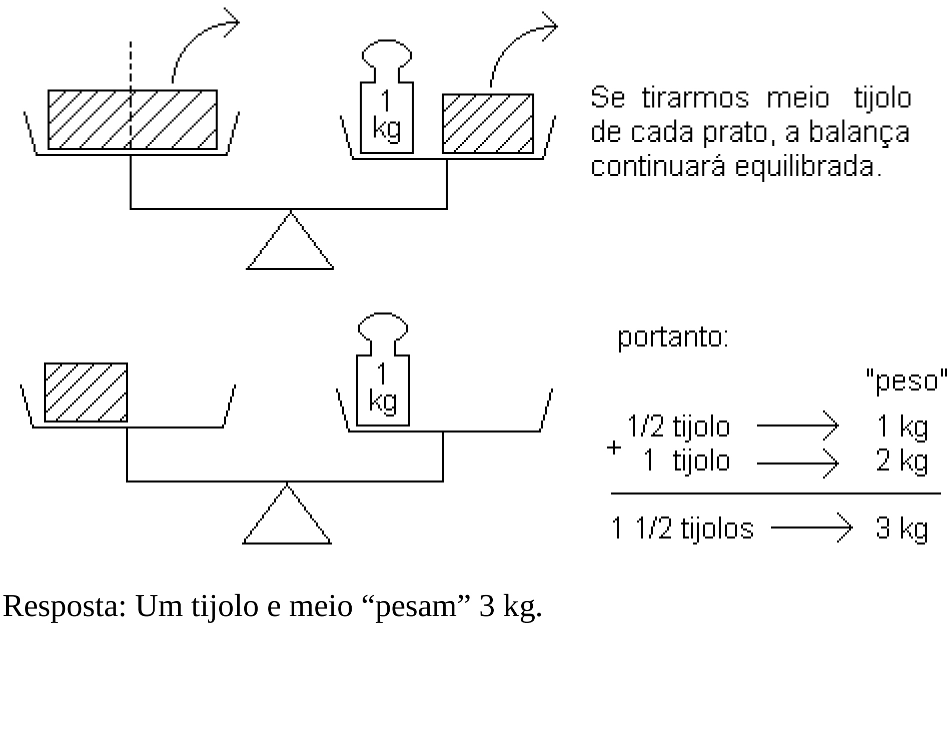
Ainda que sentenças matemáticas (equações) como as dos exercícios (i) e (m) não sejam estudadas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, é interessante que os professores dessas séries saibam representar problemas através de equações, resolvendo ambos. Equações como essas e com maior grau de dificuldade são estudadas nas séries finais do ensino fundamental.

Essa consideração se apoia em um fato que ocorreu na escola investigada.

Os responsáveis pela área de matemática da Diretoria de Ensino elaboraram uma lista de dez problemas para serem propostos aos alunos com desempenho insatisfatório em matemática, nas atividades de recuperação (no período inverso ao das aulas normais), pelos professores designados para essas atividades.

As duas professoras participantes desta pesquisa solicitaram que eu resolvesse alguns deles. Resolvi os dez e entreguei a elas, em um intervalo de aulas, a resolução da lista com esquemas e alguns comentários. Entendia que não era necessário *explicar* os problemas um a um. O primeiro deles foi resolvido como a seguir:

"Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?"



Resposta: Um tijolo e meio "pesam" 3 kg.

Devo ter feito, pessoalmente, alguma observação, mas me enganei quanto ao entendimento de minhas indicações ou do problema a partir das indicações.

Na resolução do problema do tijolo, procurei mostrar que, retirando-se meio tijolo de cada prato da balança, esta continua equilibrada e, portanto, os pesos dos elementos que permanecem em cada prato são iguais. Dessa forma, determina-se o peso de meio tijolo e, a partir daí, o peso de um tijolo e meio.

A professora das quartas séries, a pedido da coordenadora da escola, discutiu a resolução desse problema com as outras professoras do mesmo período, em um HTP.

Em um outro intervalo, a mesma professora comentou que discutiu o problema com as colegas e que "elas não entenderam o problema". Perguntei a uma dessas colegas, mostrando a resolução, qual era a dúvida em relação ao problema e ela respondeu que não concordava com a resposta. Talvez eu devesse aprofundar a questão, mas preferi parar por ali.

O conhecimento de forma mais aprofundada de equações e da resolução de problemas através de equações, estudados nas séries finais do Ensino Fundamental, pode prover os professores de uma ferramenta importante para a resolução de problemas. Por exemplo, no problema do tijolo:

"Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?"

a) Peso de um tijolo (T); equação: $T = 1 + T/2$

resolução da equação: $T - T/2 = 1 + T/2 - T/2$

$T/2 = 1$

$T = 2$ → o peso de 1 tijolo é 2 kg

b) Peso de $1{,}5\ T = 1{,}5 \times 2$ kg $= 3$ kg

Na resolução da equação são obtidos os *pesos* de meio tijolo e de um tijolo. O conhecimento dessas relações facilita a visualização de formas alternativas para a representação do problema e respectivas soluções.

Certamente a resolução através de uma equação como a apresentada não deve ser discutida com os alunos das terceiras e quartas séries, mas esse conhecimento pode garantir a resolução de problemas não entendidos a princípio pelos professores, como ocorreu com o problema do tijolo. Mais que isso, a resolução algébrica pode inspirar esquemas compreensíveis para serem discutidos com os alunos.

Talvez a incompreensão do esquema, no problema do tijolo, estivesse relacionada à pouca familiaridade com esquemas para facilitar resoluções de problemas. Pouca familiaridade, talvez, por não serem necessários na maioria dos problemas que resolviam usualmente.

Será que uma *lógica* diferente foi mais forte que a própria lógica matemática? O meio tijolo, mesmo representado no esquema, não teria conseguido evitar a associação da fração ½ e não de metade de um tijolo? Não sei.

Uma outra questão para reflexões: as correções de exercícios.

O meu procedimento, considerando que minha *correção dos exercícios* seria suficiente para a *propagação da compreensão*, se mostrou equivocado. A probabilidade da compreensibilidade certamente é maior se a *correção* é correta, clara e coerente, mas quem compreende ou não, é o indivíduo e somente ele poderá garantir sua compreensão, revelando-a.

Essa situação pode ser relacionada às correções de exercícios nas salas de aulas. Muitas vezes os professores supõem compreensão por parte dos alunos quando não compreenderam. Essas não compreensões podem iniciar ou encorpar "bolas de neve". As avalanches, nem tentamos pará-las, quanto mais revertê-las. Fugimos das avalanches reais, mas quanto às "bolas de neve" de incompreensões, não podemos permitir, em nenhuma hipótese, que se transformem em "avalanches".

Identificar e *derreter* essas "bolas de neve" é tarefa do professor. Tarefa difícil, mas necessária.

As correções de exercícios são momentos nos quais o professor pode avaliar seus alunos e o desenvolvimento de suas aulas, discutindo diferentes procedimentos, não impondo sua "melhor solução", mantendo-se atento às colocações e às dúvidas.

As contribuições dos alunos podem nos surpreender e nos superar. Por exemplo, a resolução de um aluno para o problema das aranhas e escaravelhos, um dos dez da "lista", foi muito mais interessante que a minha:

> Aranha: 8 patas; escaravelho: 6 patas; ao todo 8 animais e 54 patas.
> Quantas são as aranhas e os escaravelhos?

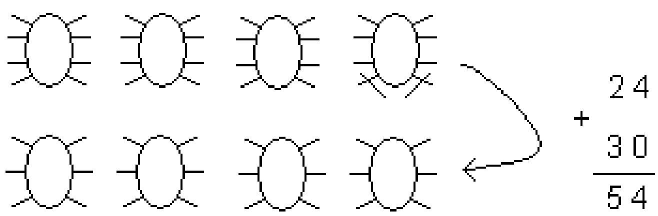
Minha resolução apresentada às professoras:

8 animais   aranhas (8 patas cada) e escaravelhos (6 patas cada)

	8 animais		nºs de patas (54)		
	aranhas	escaravelhos	aranhas (8 cada)	escaravelhos (6)	Total
supondo mesmo nº de animais	4	4	$8 \times 4 = 32$	$6 \times 4 = 24$	$32 + 24 = \cancel{56}$
preciso menos patas (menos aranhas)	3	5	$8 \times 3 = 24$	$6 \times 5 = 30$	$24 + 30 = 54$

Resposta: São 3 aranhas e 5 escaravelhos

Resolução do aluno – a resposta foi colocada oralmente:



Basicamente, a idéia é a mesma: suposição inicial do mesmo número de aranhas e escaravelhos. Mas o esquema *fala* por si, é muito mais sintético e esclarecedor. Pelo menos foi, para esse aluno e também deve ser, para muitos outros alunos.

Se nós, professores, temos problemas com os esquemas nos problemas, sempre podemos e devemos procurar compreendê-los, inclusive nas resoluções dos alunos.

IV.4. Algumas Sementes

> O desafio de uma reforma do sistema educacional só será maior se ela beneficiar, prioritariamente, os alunos que fracassam na escola. Pode-se visar a uma modernização, a uma descentralização ou a uma profissionalização maior do ofício de docente, sem, necessariamente, situar as dificuldades de aprendizagem no centro do projeto. Não obstante, o principal problema da escola, que resiste às sucessivas reformas há décadas, é a dificuldade de instruir os jovens, senão em igualdade, ao menos de maneira tal que cada um alcance, ao chegar à idade adulta, um nível aceitável de cultura e de competência, tanto no mundo do trabalho como na vida (Perrenoud, 1999b, p.71).

Perrenoud discute nessa obra a "construção de competências desde a escola" como uma possibilidade para melhorar o sistema educacional.

De forma provisória, define competência com sendo "*uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles"* (p.7).[26]

Comenta que uma transformação considerável da relação do professor com o saber se faz necessária para

> formar em verdadeiras competências durante a escolaridade geral ... estamos no caminho de um *ofício novo*, cuja meta é antes fazer aprender do que ensinar. A abordagem por competências junta-se às exigências da focalização sobre o aluno, da pedagogia diferenciada e dos métodos ativos, pois convida, firmemente os professores a:
>
> - considerar os conhecimentos como recursos a serem mobilizados;
> - trabalhar regularmente por problemas;
> - criar ou utilizar outros meios de ensino;
> - negociar e conduzir projetos com seus alunos;
> - adotar um planejamento flexível e indicativo e improvisar;
> - implementar e explicitar um novo contrato didático;
> - praticar uma avaliação formadora em situação de trabalho;
> - dirigir-se para uma menor compartimentação disciplinar (p.53).

O autor alerta que outras dimensões do sistema educacional precisam mudar, "além dos programas ou da linguagem na qual se fala das finalidades da escola", para que a renovação dos programas escolares através da abordagem por competências não passe de "fogo de palha" (p.72):

[26] Grifo em itálico no original.

> É fútil, no meu entender, creditar grandes esperanças em uma abordagem por competências se, ao mesmo tempo:
>
> a. A transposição didática não for reconstruída.
> b. As disciplinas e as planilhas de horários não forem revisadas.
> c. Um ciclo de estudos conformar-se às expectativas do seguinte.
> d. Novas maneiras de avaliar não forem criadas.
> e. O fracasso de construir sobre a areia for negado.
> f. O ensino não for diferenciado.
> g. A formação dos docentes não for reorientada.

Em relação à reconstrução da transposição didática, Perrenoud comenta que "Querendo-se trabalhar por competências, deve-se, provavelmente, remontar à origem dessa cadeia e começar perguntando com que condições os alunos irão confrontar-se realmente na sociedade que os espera" (p.73).

O autor contextualiza a competência nos domínios da matemática:

> Na escola, os alunos aprendem ... , por exemplo, efetuar uma divisão por escrito ou resolver uma equação do segundo grau. Mesmo de posse desses conhecimentos, eles saberão em que circunstâncias e em que momento aplicá-los? É na possibilidade de relacionar, pertinentemente, os conhecimentos prévios e os problemas que se reconhece uma competência. As observações didáticas mostram que a maioria dos alunos extrai da forma e do conteúdo das instruções recebidas índices suficientes para saber o que fazer, ou seja, parecem competentes. E eles o são, se considerarmos, imediatamente, que essa competência limita-se a situações bastante estereotipadas de exercício e de avaliação escolares e que a escolha, por exemplo, de uma operação aritmética decorre, com freqüência, mais de uma transposição analógica a partir de problemas com a mesma forma, do que de uma compreensão intrínseca do problema (Perrenoud, 1999b, p.32).

Em termos da matemática, novas transposições didáticas que levem em conta as condições que os alunos irão confrontar-se na sociedade que os espera são desejadas, mas talvez não sejam suficientes.

Como Perrenoud bem colocou, as reformas deveriam "beneficiar, prioritariamente, os alunos que fracassam na escola". No exemplo envolvendo a matemática, como ficam os que não sabem dividir? Não saber dividir também pode inviabilizar a resolução de problemas – mesmo os mais esteriotipados.

Tendo em vista que é "na possibilidade de relacionar, pertinentemente, os conhecimentos prévios e os problemas que se reconhece uma competência", como fica a competência se os problemas estão nos "conhecimentos prévios"?

Existe um oceano entre os alunos suíços e os que colaboraram com seus dados neste trabalho, mas na *realidade* investigada, abordagens por competências podem ser frustradas pela não consideração de que muitos dos problemas relacionados à aprendizagem da matemática podem estar, também, no próprio conhecimento matemático escolar.

Onuchic & Botta (1998) propõem, apoiadas por outros autores, a reconceitualização das quatro operações fundamentais. Destacam um princípio importante:

> Em qualquer domínio de pesquisa, é muito útil parar e voltar, periodicamente, para observar nosso campo de trabalho. É preciso analisar "o que sabemos" e "o que deveríamos saber, mas não sabemos" e em que direção deveríamos nos mover, para achar respostas aos questionamentos que vão surgindo.

Nessa perspectiva, discutem novas idéias relacionadas às quatro operações:

> A adição pode estar relacionada às idéias de "mudar adicionando", de "combinar fisicamente" e de "combinar conceitualmente". Os problemas de subtração podem se apresentar com três espíritos distintos: o "mudar subtraindo", o "igualar" e o "comparar" (Fuson, 1992). Os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de "grupos iguais", de "comparação multiplicativa", de "produto cartesiano" e de "área". Finalmente, os problemas de divisão modelam tipos diferentes de divisão: a "divisão partitiva", a "divisão quotitiva" e a "divisão cartesiana" (Greer, 1992). Toda essa complexidade de idéias dificulta a compreensão, na criança, dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, pois a ela são colocadas situações–problema com "espíritos operatórios diferentes" mas que são resolvidas por um mesmo algoritmo (p.20).

A variedade de situações que envolvem adições e subtrações é mostrada em um quadro (op cit. p.21-22) extraído de Fuson (1992). Nesse quadro são apresentadas sete situações ligadas à adição e quinze, à subtração. São vinte e duas situações diferentes envolvendo as duas operações. Seguem alguns desses exemplos (disposição adaptada):

SITUAÇÕES ADITIVAS	Mudar Adicionando		
	Fim Oculto	Mudança Oculta	Começo Oculto
	Pedro tinha 3 maçãs. Ana deu a ele mais 5 maçãs. Quantas Pedro tem agora?	Kátia tem 5 canetas. Quantas canetas a mais ela tem que juntar a essas para ficar com 7 canetas?	Bruno ganhou 2 bolachas. Agora ele tem 5 bolachas. Quantas bolachas Bruno tinha no início?

SITUAÇÕES SUBTRATIVAS	Mudar Subtraindo		
	Fim Oculto	Mudança Oculta	Começo Oculto
	João tinha 8 bolinhas de gude. Ele deu 5 bolinhas para Toni. Quantas bolinhas de gude João tem agora?	Fred tinha 11 doces. Ele perdeu alguns deles e ficou com 4 doces. Quantos doces Fred perdeu?	Karen tinha alguns problemas com enunciado. Ela fez 22 deles e ainda tem 79 para resolver. Quantos problemas ela tinha no início?

Em relação à multiplicação, são apresentadas dezoito situações diferentes e, à divisão, seis, extraídas do trabalho de Greer (1992). Sobre esse trabalho, as autoras comentam que

> uma certa complexidade se manifesta quando as operações são consideradas não somente do ponto de vista do cálculo, mas em termos de como elas modelam situações. No trabalho com a matemática, em sala de aula, sente-se que a maior dificuldade encontrada por muitas crianças está no ato de decidir se um problema dado será modelado pela operação multiplicação ou divisão. A complexidade maior reside primeiro em tal percepção e, posteriormente, na resolução do algoritmo (Onuchic & Botta, 1998, p.22).

Essas complexidades relacionadas aos problemas, mesmo aos *simples*, devem ser conhecidas ou trabalhadas por todos os professores de matemática, mas, retomando a colocação de Perrenoud, sobre o desafio de uma reforma do sistema educacional "beneficiar prioritariamente, os alunos que fracassam na escola", retorno à questão dos algoritmos das quatro operações.

Muitas dificuldades dos alunos em relação aos algoritmos, relatadas nesta pesquisa, não são problemas localizados de alguns alunos de uma escola. Há alguns dias, uma colega que sabe do meu interesse nos algoritmos e que orienta uma pesquisa sobre resolução de problemas, comentou que nos dados do trabalho de sua orientanda constam várias ocorrências de alunos que conseguiram indicar as operações necessárias para a resolução dos problemas propostos, mas freqüentemente erraram nas operações.

Esses erros freqüentes, persistentes e certamente geradores de outros, focaram minha atenção nas quatro operações como ponto de partida desta investigação, objetivando sementes de transmigrações didáticas. Mais especificamente, com a atenção voltada para os algoritmos ou envolvida por eles. Especificando ainda mais, com a atenção nos detalhes dos algoritmos, na tentativa de não subjugar as influências desses detalhes na compreensibilidade dos algoritmos. Essa preocupação com os algoritmos e em seus detalhes tem sua origem.

Para preparar e testar os dispositivos para a coleta dos dados para minha dissertação de mestrado (Gregolin, 1994) – computador, videocassete e microfone pré-amplificado –, convidei três alunos para participarem nesses encontros preparatórios para algumas explorações da matemática através da linguagem computacional Logo.[27]

Jaanay freqüentava a 6ª série do ensino fundamental (então primeiro grau), era minha aluna de matemática e participou dessa fase da pesquisa. Tinha dificuldade em matemática e sua idade era catorze anos. Naquele ano, foi aprovada, mas já havia sido reprovada anteriormente.

Na fase de preparação em que a aluna participou, o procedimento de registro dessas interações – gravações em fitas de vídeo das imagens obtidas no computador e nossas conversas – estava sendo construído. Dessa forma, os parâmetros usados a seguir são valores estimados.

No primeiro contato da aluna com a tartaruga Logo, pedi à Jaanay que desenhasse um quadrado. Informei que a tartaruga podia andar para frente (pf) ou para traz (pt) um número de passos, para a direita (pd) ou para a esquerda (pe) um certo ângulo em graus, sem maiores explicações quanto aos passos ou aos ângulos.

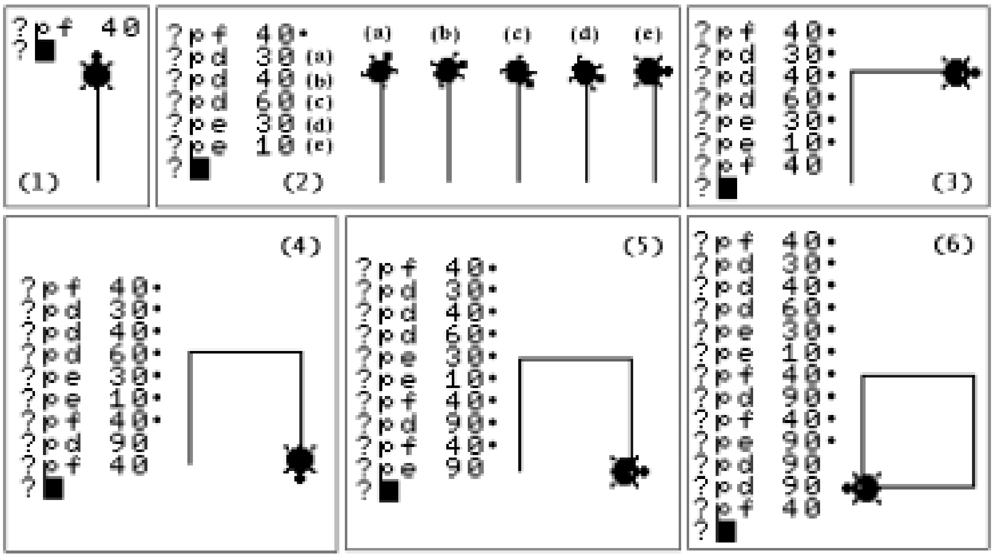
[27] A linguagem Logo teve como um dos seus criadores o matemático Seymour Papert e tem como um de seus princípios que, no processo educativo, deve-se privilegiar a aprendizagem do aluno.

Os números entre parênteses referem-se às posições da tartaruga após o último comando e o sinal "•" indica que o comando foi executado anteriormente.

Testou alguns valores para o número de passos e verificou que "40 passos" seria uma boa medida para o lado do quadrado pretendido e, com a tartaruga no centro da tela e olhando para cima iniciou seu deslocamento com o comando "pf 40"(1).

Comandou vários giros que determinaram sucessivas direções à tartaruga, através de tateios nas relações "direção obtida" x "direção pretendida" e na sua forma própria forma de pensar (2). Quando a tartaruga estava olhando para a direita, percebeu que a direção era a pretendida e comandou "pf 40" (3). Solicitei alguns cálculos mentais para que o giro necessário fosse obtido diretamente em outra oportunidade. Dessa forma a aluna *construiu* um ângulo reto.

Teve dificuldade para coordenar o referencial da tartaruga com o seu, quando a tartaruga estava olhando para baixo(4), após ter *andado* o terceiro lado do quadrado: a tartaruga deveria girar para a direita (dela) e a aluna comandou o giro para a esquerda (direita da aluna) (5).



> Imediatamente após ter desenhado um quadrado, Jaanay procurou desenhar um retângulo. Precisou vários ajustes para o ângulo de giro da tartaruga no vértice do retângulo. Quando concluiu que o ângulo era de 90 graus, se espantou por ser o mesmo giro do quadrado. Quem de nós, professores de matemática, poderia saber dessas coisas sem a tartaruga? (Gregolin, 1994, p.240).

Solicitei um retângulo, como um "exercício de reforço". Entendia que, se houvesse problema, seria no giro para a direita ou esquerda, após o traçado do terceiro lado, correspondendo à passagem de (4) para (5) na construção do quadrado.

Para minha surpresa, após o traçado do primeiro lado do retângulo, empreendeu novos tateios até que direcionou a tartaruga "olhando para a direita" e, então, surpresa da aluna: constatou que o giro, 90 graus, era o mesmo dado no quadrado.

Retomei a construção do quadrado empreendida pelo Igor, um dos três alunos de 6ª série que participou da pesquisa do mestrado. Nova surpresa.

> O Igor fez um retângulo no terceiro encontro:
> V: Você consegue fazer um retângulo?
> I: Não sei.
> V: O que é um retângulo?
> I: Figura de quatro pontas, duas iguais e duas diferentes.
> V: Tenta fazer. Tem lados paralelos dois a dois.
> Referiu os vértices como pontas. Disse que as pontas são duas iguais e duas diferentes, mas deve ter pensado em lados iguais dois a dois (Gregolin, 1994, p.99).

As "quatro pontas, duas iguais e duas diferentes" se originaram de uma confusão "pontas" x "lados" como pensei na época? Talvez não. Provavelmente não. Disse "pontas diferentes" referindo-se a "ângulos diferentes", como pude constatar na interação da Jaanay com a tartaruga.

Esses alunos parecem ter associado o *aumento* de dois lados de um quadrado resultando em um retângulo, a uma alteração nos ângulos do retângulo em relação ao quadrado. Puderam mudar suas concepções com a tartaruga, pois desenhar essas figuras no papel não requer as relações que fizeram nessas construções.

Minha forma de pensar nas possíveis dificuldades em relação à matemática modificou-se a partir do evento "retângulo com tartaruga". Ou melhor, o princípio de evitar suposições, minhas, de compreensões de outros se instalou definitivamente. A própria tartaruga tem me acompanhado, em espírito. Percebo, agora, que minha concepção sobre a linguagem Logo me é mais clara.

Hoje entendo o Logo como uma academia de ginástica mental ou um micromundo de problemas complexamente simples ou um campo de batalhas de concepções.

Retomo alguns dos elementos do conhecimento matemático escolar discutidos, que entendo como sementes de transmigrações didáticas.

Sobre a transmigração didática:

- desabrocha quando um conhecimento escolar que está posto, na perspectiva de ensino é adaptado na perspectiva de aprendizagem, havendo uma ruptura ou transformação significativa na forma de apreensão ou compreensão desse conhecimento, aumentando a probabilidade de sua aprendizagem ou da aprendizagem de outros conhecimentos a partir desse.
- se estabelece se a nova forma de apreensão ou compreensão do conhecimento é aceita e socializada, aumentando a probabilidade de aprendizagem do – ou através do – conhecimento.

As sementes...

Compreender o entendimento[28]

A sabedoria popular nos coloca a máxima: "entendi tudo, mas não compreendi nada". Entender e compreender são sinônimos, mas admitem significados distintos: "manter entendimento" e "conter em si", respectivamente (Ferreira, 1993).

A palavra "entendimento" pode significar "acordo", "contrato", por outro lado, em "compreender" é mais forte a idéia de abrangência.

Diferenciando "entender" e "compreender", a máxima popular pode passar de um "trocadilho" a uma *filosofia de ensino*, com possíveis benefícios para a educação. De forma consciente ou intuitiva, essa máxima pode ter se inspirado na diferenciação.

Quando um professor de matemática "explica a matéria" e pergunta aos alunos se entenderam tudo, geralmente os alunos concordam e, na perspectiva dessa diferenciação, até podem ter entendido: entenderam todas as palavras.

[28] *Semente* geral: não limitada ao conhecimento matemático escolar

Quanto à compreensão, o professor não perguntará, mas saberá se houve, quando cada aluno demonstrá-la nas relações que indiquem que a aprendizagem ocorreu.

Entender passa a ser um dos meios para se chegar à compreensão. Quanto ao professor, assumir essa diferenciação pode abrir alguns horizontes a ele, educador.

Democracia sem caos

- um algoritmo específico deve ser tomado como meta;
- deve ser compreensível e favorecer novas compreensões;
- os algoritmos informais que os alunos usam devem ser incentivados, discutidos e usados na (re)construção do algoritmo formal;
- as propriedades matemáticas envolvidas devem ser discutidas e compreendidas na construção do algoritmo formal a partir dos algoritmos provisórios dos alunos;
- devem ser evitadas “máscaras” para as propriedades como por exemplo: “empresta um”, “desce um”, “cai um”, “tiro o zero porque não vale nada” etc (páginas 13 e 14).

A *invariância* que se fortalece no retorno

Algoritmo da subtração por invariância da diferença, construído através da propriedade que o define e sem o uso de “máscaras” (páginas 57, 67 a 70 e 109).

Propagação de abrangências

Algoritmo para a multiplicação: abrangendo o ponto separador de classes e significações do zero, para então, haver maior abrangência na sua compreensão (páginas 72 a 75 e 84, 86, 87).

Estimativas tabeladas

Algoritmo para a divisão por estimativas: registrado em uma tabela, construída a partir de outras mais explícitas. Cálculo mental, estimativas, compreensão, democracia, acertos, conceitualização... valem a pena? (páginas 109 a 118).

Decifra-me, devora-me

A *tabuadona*: diferenciando multiplicador e multiplicando, auxiliando na significação do zero e explicitando as adições correspondentes aos produtos (páginas 79 a 81).

Lupa conceitual

O ponto separador de classes: aumentando a *visibilidade* e a compreensão de números maiores que mil (páginas 86, 87 e 145).

Pingos nos "is"

Diferenciar multiplicador e multiplicando, facilitando a construção da tabuada e o pensamento multiplicativo (páginas 76 a 78, 81, 88).

Muito além do nada

Significar o número zero, não discriminando-o e aproveitando as oportunidades para mostrar que ele também merece o status de número (páginas 49, 50, 75, 76, 80, 82 a 85, 109, 118, 119, 123, 145).

Sintaxe do objeto indireto

Ensinar (após ter aprendido) a usar uma calculadora científica, real ou virtual,[29] para o auto-aprendizado de expressões com números naturais (páginas 125 a 128).

[29] No computador: a calculadora científica do Windows.

Complementos

Não são sementes de transmigrações didáticas, mas estão aqui por merecerem um destaque especial.

Raios e trovões

Sinais perigosos. Todo cuidado é pouco no uso de sinais como separadores: “=”, “–“, “>”, “<” etc (páginas 50 a 52, 84, 91 a 93).

Dimensionar o enquadramento

As equações – sentenças dos “quadradinhos” – geralmente são estudadas nas séries finais do ensino fundamental, com variáveis literais. Se o professor das séries inicias entende que é interessante explorar esse conteúdo, aproveite-o como meio para explorar estimativas e o cálculo mental: obtenção do resultado sem aplicação de regras (páginas 128 a 132).

Endereço para corresponder*

O conhecimento sobre materiais instrucionais deve se dar através do uso, também e principalmente, na formação – inicial e continuada – do professor. O incentivo e exemplos de uso são importantes, mas não suficientes (páginas 26, 45 a 47, 53, 60 a 65).

Meias palavras*

Para além do bom entendedor: atenção aos enunciados, textos e termos (páginas 47 a 50, 52 a 54, 56, 63, 82, 83, 94, 121, 122).

Levantar o véu

Sistemas de Numeração: decomposições, conversões, operações em diversos, material instrucional, na busca de significações (páginas 41 a 46, 49, 51, 52, 56 a 65, 69).

---

* *Complemento* geral: não limitado ao conhecimento matemático escolar.

V. Considerações Finais

Possíveis transmigrações didáticas podem ser associadas ao círculo vicioso identificado pela Professora Regina – quem não sabe ensina; quem precisa aprender decora; quem decora se torna professor e ensina.

Procurando *visualizar* um *círculo vicioso* observo uma circunferência[30] (não é *preenchida*...). *Concretizando* o círculo vicioso, vejo um anel metálico.

Rompendo o anel e *abrindo* um pouco uma das extremidades, *observo* que a figura geométrica pode tender a uma espiral.

Para pensar na transformação de um *círculo* em uma espiral, recorro ao auxílio da tartaruga Logo, animalzinho cibernético observável nas telas dos computadores quando se usa a linguagem computacional Logo.

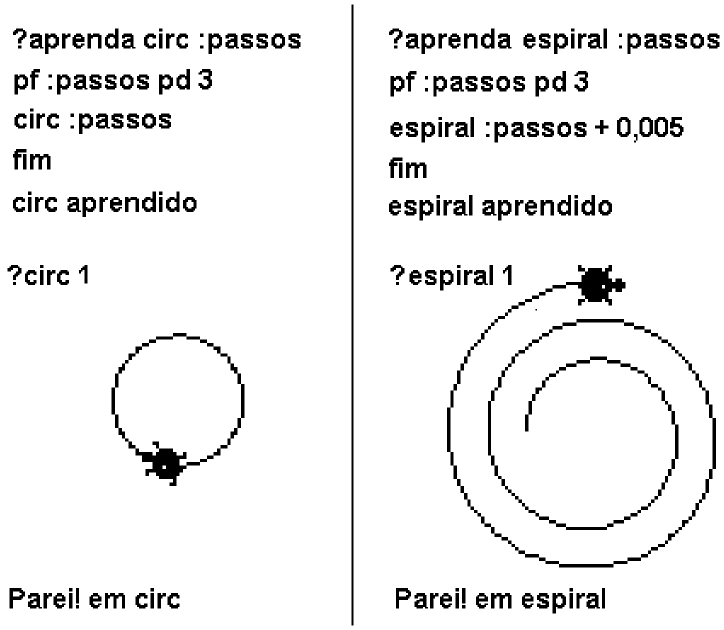
Para *andarmos em círculo*, ou seja, descrevermos uma circunferência ao andar – nós ou a tartaruga – devemos caminhar para frente ou para trás e girar para a direita ou para a esquerda um pouco a cada vez. Quanto menores o número de passos e o giro dado a cada *passada*, mais próximo de uma circunferência é o polígono percorrido.

Através do procedimento CIRC[31] – apresentado adiante – a tartaruga anda para frente (PF) o número de passos indicado no momento da execução – neste caso 1 passo – e gira 3 graus para a direita (PD). Ao completar 120 passos, terá girado 120 x 3 = 360 graus, *percorrendo* uma circunferência. O procedimento é recursivo – se auto-executa indefinidamente – e não tem nenhuma instrução para parar. Foi finalizado através das teclas [CTRL] + [F8].[32]

---

[30] Uma das expressões “andar em círculo” e “círculo vicioso” deve derivar da outra. Geometricamente teríamos as estranhas expressões: “andar em circunferência” e “circunferência viciosa”.
[31] Conjunto de instruções que ensinamos à tartaruga. Digitando o nome do procedimento, essas instruções são executadas.
[32] Teclas para interromper a execução do MSX-Logo no emulador RuMSX. Através desse emulador, os programas do computador MSX são executados no computador PC.

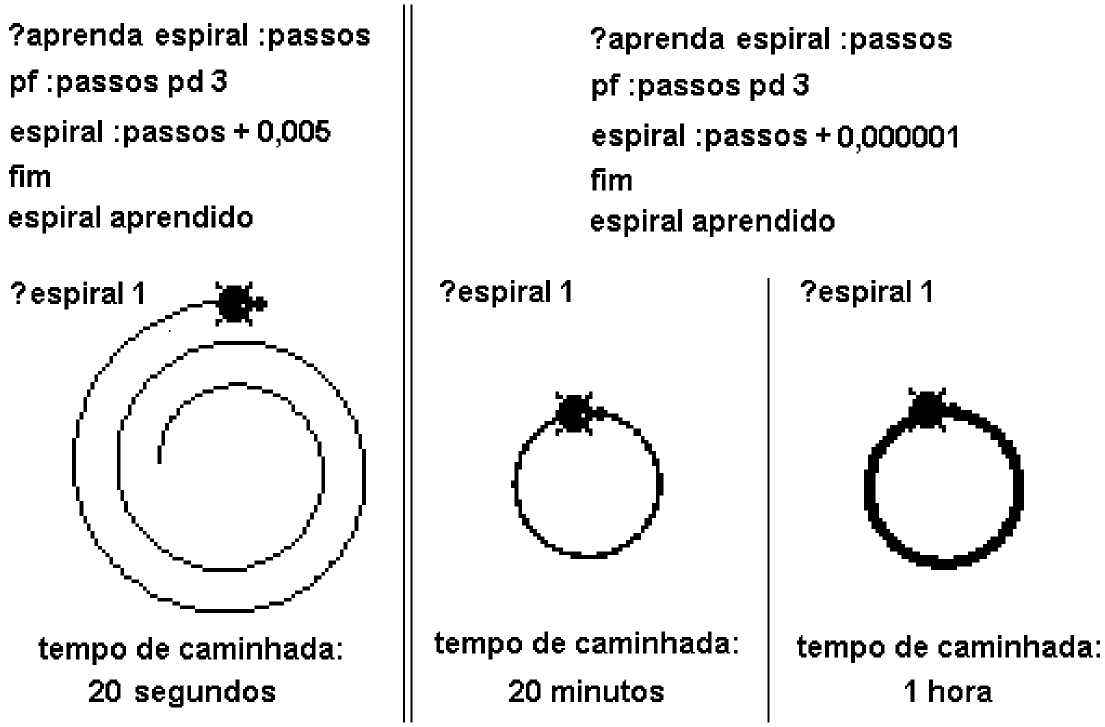
Para obter uma espiral a partir da circunferência é necessário que a tartaruga ande mais a cada vez, o que foi obtido, no procedimento ESPIRAL, acrescentando 0,005 de passo na chamada recursiva, ou seja, o comprimento de cada *passada* da tartaruga é 5 milésimos de passo maior que o comprimento da *passada* anterior. Nos dois procedimentos, a variável **:passos** requer um valor no momento da execução: CIRC 1 ou ESPIRAL 1 indicam ao interpretador Logo que o valor da variável :passos é 1 (inicia dando 1 passo).



Só para refletir: cinco milésimos de passo. É uma distância muito pequena, se pensarmos nos passos da tartaruga. Por exemplo, para um giro completo executando CIRC 1, a tartaruga dá 120 passos. Por outro lado, mesmo se o acréscimo na ESPIRAL for de 0,000001 (um milionésimo de passo de tartaruga), ainda assim temos uma espiral. A danadinha consegue controlar precisamente essas *frações* de passos...

Esse novo incremento, um milionésimo de passo de tartaruga, aparentemente extremamente insignificante, e que, ainda assim resulta numa espiral, inspira uma nova reflexão. É necessário o rompimento do círculo?

Recorro novamente à tartaruga Logo, para analisar as espirais desenhadas com incrementos de 0,005 de passo e 0,000001 de passo.



Com o incremento de um milionésimo de passo, a figura desenhada parece um anel. Continua sendo uma espiral, mas construída a partir de um anel que não foi rompido e sim *encorpado* a cada volta, se fortalecendo lenta e consistentemente.

A cada volta a tartaruga não passa exatamente no mesmo ponto, mas há uma fusão desse ponto com o da volta anterior. Fusão e crescimento.

Continuando sua caminhada, a própria tartaruga vai se fundindo no anel.

Em relação ao conhecimento matemático escolar, a idéia do anel é mais interessante que a da espiral simples ou anel rompido, mas como promover o fortalecimento do anel? Como incrementar o *círculo* vicioso para que se consolide num anel virtuoso?

Procurando relacionar o anel que se fortalece ao conhecimento matemático escolar, não consigo *equacioná-lo* unitariamente: observo, além desse primeiro anel, uma rede de anéis.

O primeiro anel que se expande: **quem sabe ensina; quem precisa aprender compreende; quem compreende se torna professor e ensina**.

A expansão do primeiro anel pode ser observada em outra perspectiva: **quem compreende aprende; quem aprende se torna professor e ensina**.

O incremento nesse primeiro anel é *tão somente* a compreensão. Certamente muitos outros incrementos podem e devem ser procurados, mas talvez o efeito de todos os outros se anule se a compreensão for subestimada.

A compreensão depende de múltiplos fatores, mas um deles é ao mesmo tempo fundamental e independente do professor e do aluno, uma vez determinado: a compreensibilidade do próprio conhecimento matemático, que deve ser insistentemente buscada e questionada.

O objetivo da transmigração didática é exatamente a (re)significação do conhecimento matemático estabelecido visando sua compreensibilidade. Ela pode ser útil no anel em expansão, inclusive iniciando o processo.

Mas como a compreensão deve ser compreendida?

Saiz (1996) se apóia em Charnay (1988) para discutir a significação do conteúdo matemático pelo aluno:

> A construção da significação de um conhecimento deve ser pensada a dois níveis: no nível externo, qual é o campo de utilização desse conhecimento, e quais são os limites desse campo ... e no nível interno, como funciona tal recurso e porque funciona ... (p.160)

Relaciona esses dois níveis da significação do conhecimento matemático aos dois componentes da compreensão propostos por Brousseau (1987):

> – um se expressa melhor em termos da semântica. “Compreender” é ser capaz de reconhecer as ocasiões de utilizar o conhecimento e de aplicá-lo em novos domínios;
>
> – o outro se expressa em termos de necessidades lógicas ou matemáticas ou, de maneira geral, sintáticas. O aluno que pode compreender, pode “raciocinar” a respeito de seu saber, analisá-lo ou combiná-lo com outros (Saiz, 1996, p.160).

Para haver compreensão de um objeto de conhecimento, outros conhecimentos e relações possibilitadas por esses conhecimentos devem ser ativados.

Esse *movimento* pode resultar em uma apreensão do conhecimento com compreensão. Havendo compreensão do objeto de conhecimento, a compreensão dos conhecimentos e relações envolvidos na busca da compreensão tende a aumentar, bem como futuras compreensões a partir dessa. A compreensibilidade do conhecimento matemático escolar pode ser decisiva nesse *movimento.*

O termo *nível*, relacionado à compreensão, pode dar idéia de intensidade.

O funcionamento de um automóvel envolve complexidades que, mesmo sem uma compreensão *profunda* ou em *nível elevado*, não impedem sua condução de maneira eficiente. Por exemplo, muitos excelentes motoristas não fazem idéia das transformações de energia que ocorrem enquanto o carro está sendo conduzido.

Essa compreensão parcial limita, mas não é decisiva em relação ao movimento do automóvel. Os mecânicos resolvem os problemas, se puderem ser acionados. Como recurso extremo, substitui-se o veículo.

O aluno que tem dificuldade com a matemática sempre tem um esquema para resolver seu problema? Pode trocar sua mente? Não.

Retomando o texto de Saiz (1996):

> Na prática escolar, em geral os professores realizam uma distinção entre (Brousseau, 1987):
>
> – aquelas atividades que apontam à aquisição dos saberes institucionalizados, tais como os algoritmos de cálculo, as definições canônicas ou as propriedades fundamentais, e
>
> – aquelas que apontam à compreensão e ao uso desses saberes (p.162).

É esse o ponto! Os professores referidos, provavelmente, são aqueles que ensinam os “saberes institucionalizados”. Mas essa distinção ocorre de forma muito mais ampla e, de certa forma, a compreensão pode estar subestimada, em muitos casos, na “aquisição dos saberes institucionalizados”, como por exemplo, na aprendizagem dos algoritmos.

A autora continua sua colocação:

> O ensino de conhecimentos tais como algoritmos, propriedades ou definições são facilmente organizáveis na sala de aula; são identificáveis, podem ser descritos e sua aquisição é verificável de maneira simples. Assim, para avaliar se os alunos “sabem dividir” é suficiente formular-lhes várias contas e verificar seus resultados. Ademais, trata-se de técnicas conhecidas pela sociedade. Os pais podem saber se seus filhos aprenderam a dividir ou não.
>
> No entanto, ao falar de reconhecimento de situações de divisão, de significados de conceitos, se entra em um terreno muito mais ambíguo e difícil de identificar. Tanto os professores como os pais desejariam que o ensino conseguisse nos alunos não só o conhecimento dos saberes institucionais, como também a compreensão, porém, diante da falta de uma solução evidente, a aprendizagem dos algoritmos acaba eliminando a busca da compreensão (Saiz, 1996, p.162).

Saiz se apóia em Brousseau para apresentar questões e entendimentos que foram socialmente estabelecidos.

O problema é que o ensino dos “conhecimento dos saberes institucionais” nem sempre se pauta na compreensão.

Saber dividir – em muitos contextos – é entendido como saber efetuar corretamente divisões através de um algoritmo.

Entendo que saber dividir é, prioritariamente, saber o conceito de divisão. A compreensão do conceito certamente se insere no contexto da resolução dos problemas que envolvem divisões.

Os alunos, geralmente, aprendem com pouca compreensão – ou não aprendem – o algoritmo e o próprio conceito da divisão. E espera-se que o conhecimento da divisão *brote* na resolução de problemas.

O algoritmo da divisão pode – e deve – ser aprendido de forma compreensiva e essa compreensão aumenta a probabilidade de outra, a do o conceito de divisão. Essas duas compreensões certamente aumentam a competência do aluno na resolução de problemas que envolvem divisões. O algoritmo para a divisão proposto neste trabalho é um exemplo de algoritmo que pode ser aprendido com compreensão.

Entretanto, não podemos deixar que a ilusão de que o aluno aprenda, a princípio e sempre, com a compreensão que esperamos (ou deveríamos esperar) ofusque nossa compreensão da compreensão. Ela pode vir de mansinho, etérea, desconfiada... Nós, professores, devemos insistir na busca da compreensão em profundidade, ou ainda, na construção da compreensão em profundidade, inclusive nas bases mais elementares do conhecimento matemático escolar.

Duas variáveis são decisivas na busca da compreensão. A compreensibilidade do próprio conhecimento e o conhecimento do professor.

A expansão do primeiro anel que se fortalece através da compreensão – **quem sabe ensina; quem precisa aprender compreende; quem compreende se torna professor e ensina** – pode ocorrer através de transmigrações didáticas.

Cada transmigração didática resulta na (re)significação de elementos do conhecimento matemático escolar por uma comunidade, com maior probabilidade de apreensão do conhecimento matemático relacionado.

Em relação ao conhecimento do professor, a formação continuada é necessária para a ampliação dos horizontes do seu conhecimento. As políticas educacionais poderiam valorizar mais essa formação, ampliando os espaços já existentes e prevendo parte da carga horária do professor para essa finalidade.

Por outro lado, a formação continuada do professor não pode se consubstanciar em uma remediação. Conhecimentos fundamentais para o ensino, relacionados a uma disciplina específica a ser ensinada, têm o momento e o endereço certos para serem discutidos com profundidade e compreendidos: no curso de formação do professor.

A destinação de um espaço significativo – no curso de formação do professor das séries iniciais do ensino fundamental – para o estudo da matemática a ser ensinada, é necessária, mas não suficiente. A compreensibilidade do conhecimento matemático escolar, em muitos de seus componentes, pode não estar satisfatória.

Certamente estão ocorrendo, aqui e ali, (re)significações de conhecimentos matemáticos escolares de forma brilhante. Essas conquistas precisam ser socializadas.

Equacionando as duas variáveis – a compreensibilidade do próprio conhecimento matemático e o conhecimento do professor – na busca da compreensão, transmigrações didáticas são necessárias, mas podem não ser suficientes.

Embriões de transmigrações didáticas podem não evoluir; a comunidade que incorporou uma transmigração didática pode não ser tão ampla quanto desejável; além do conhecimento matemático escolar, outros conhecimentos podem contribuir para o *encorpamento* do anel, como por exemplo, os conhecimentos sobre didática.

Procurando solução para a equação acima, proponho uma tríade de conhecimentos: comunhão-reflexão-socialização, em dois níveis, relacionados aos anéis em expansão.

A comunhão de conhecimentos se faz necessária, reunindo diversas *esferas* de conhecimentos matemáticos para ultrapassar teorizações vazias, desprovidas do conhecimento contextualizado de cada ator. Neste momento da história dos conhecimentos matemáticos escolares, o especialista em educação matemática, o professor das séries iniciais e o aluno desse professor devem socializar seus conhecimentos na sala de aula.

Nessa interação de conhecimentos podem ser identificados *incrementos* – infinitesimais ou não – para iniciar processos de transmigrações didáticas.

Esses *incrementos* dificilmente podem ser identificados se os *problemas* relacionados aos conhecimentos matemáticos escolares forem investigados apenas de forma indireta – através de entrevistas ou suposições.

O segundo elemento da tríade, a reflexão de conhecimentos, refere-se ao fenômeno ótico da reflexão.

Havendo uma comunhão de conhecimentos na sala de aula, esses conhecimentos podem – e devem – ser refletidos de e para os diversos atores: aluno, professor, professor com formação em educação matemática. De certa forma, a reflexão reitera a comunhão de conhecimentos e *ajusta o foco*: a participação e as contribuições de todos e de cada um são importantes.

De que forma? Cada ator expõe e permite a exposição dos conhecimentos e respectivas compreensões de cada um. Na comunhão de conhecimentos a observação é necessária, mas não suficiente. Além de observar, colocar-se. Inclusive o aluno.

A comunhão e a reflexão de conhecimentos, na sala de aula do primeiro ciclo do ensino fundamental, socializam conhecimentos de forma localizada, no interior de um anel em expansão.

O terceiro elemento da tríade, a socialização de conhecimentos, possibilita o desdobramento do anel em uma rede de anéis.

Em cada sala de aula, em cada nível de ensino – fundamental, médio ou superior – pode-se pensar no anel em expansão. Outros atores, mas que podem ter em comum, além de muitas outras coisas, a busca do conhecimento matemático escolar através da compreensão.

Ocorrendo os dois primeiros elementos da tríade de conhecimentos em cada sala de aula, o conhecimento matemático escolar pode ser refletido para outras salas de aula e delas receber reflexões.

A socialização de conhecimentos de forma ampla ocorre através da comunhão-reflexão inter anéis.

No desenvolvimento deste trabalho tive a oportunidade e o prazer de mudar algumas concepções a partir de procedimentos das professoras e dos alunos. O ponto separador de classes e o zero como multiplicador em tabuadas são exemplos.

O procedimento de pesquisa não me permitiu uma maior interação com as professoras e com os alunos, o que pode ser superado pela reflexão dos conhecimentos *incrementados* nessa ou em outras escolas, nesse ou em outros níveis, socializando propostas de (re)significação de conceitos e procedimentos matemáticos que, discutidas em outras *comunhões* de conhecimentos matemáticos, novamente refletidas, podem incrementar/socializar anéis em expansão.

Ativando a tríade de conhecimentos, o conhecimento matemático de cada indivíduo pode ser incrementado a tal ponto que a tríade proposta seja obtida naturalmente: a contribuição de qualquer dos atores pode ser refletida para todos os atores. Dessa forma, os professores que têm a matemática como objeto fundamental de ensino, poderão fortalecer competências para a proposição de transmigrações didáticas, questionando procedimentos e entendimentos consagrados, gerando germes de *reformas* induzidas na sala de aula.

Encerro este trabalho com a esperança de que algumas sugestões apresentadas sejam pensadas, testadas e incentivem novas investigações na busca da compreensibilidade crescente do conhecimento matemático escolar.

> Dois homens que se cruzam numa estrada podem trocar seus pães ou suas idéias. Se trocarem os pães, cada um seguirá a caminhada com apenas um pão. Se trocarem idéias, cada um prosseguirá na marcha com duas idéias, a própria e a do parceiro. O importante, pois, é trocar idéias.
>
> Maurice Stans

Referências bibliográficas[33]

BARRETO, E. S. S. Professores de periferia: soluções simples para problemas complexos. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, n.14, p.14-27, set. 1975.

BERNARDES, N. M.G. **Avaliação de habilidades de alunas concluintes do curso de 2º grau de formação de professores no estado de São Paulo.** São Paulo: PUC, 1976. Dissertação (mestrado).

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora LDA, v12, 1994 (Ciências da Educação).

BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). **Dificuldades do professor primário recém-formado em classes de 1º ano.** Rio de Janeiro, 1976.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). **Métodos, atitudes e recursos de ensino de professores primários da Guanabara.** Rio de Janeiro, 1971.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** (PCN – 1ª a 4ª série, v3). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v9, n.3, p.309-336,1988.

______ Representations et didactique du sens de la division. En **Didactique et Acsitions des connaissances scientifiques**, Paris, Actes du Colloque de Sévres, 1987.

CALDEIRA, E. O problema da formação de professores primários. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos.** Rio de Janeiro, v.26, n.64, p.28-43, out/dez. 1956.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica.** Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1991.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.) **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.36-47.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 1997. v3 (Vivência & construção).

______ São Paulo: Ática, 1997. v4 (Vivência & construção).

DEVELAY, M. **Savoirs scolaires et didactique des disciplines: Une encyclopédie pour aujourd'hui.** Paris: ESF Editor, 1995.

[33] Conforme Normas para Publicação da UNESP (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, 1994).

FERREIRA, A. B. H. **Mini dicionário da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M.; MARINO, M. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education**, 16, p.3-17, 1985.

FIORENTINI, D.; SOUZA JR, A. J.; MELO, G. F. A.. Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). **Cartografias do trabalho docente:** Professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, ALB, 1998.

FUSON, K. C. Research on whole number addition and subtraction. In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992. p.243-275.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992. p.276-295.

GREGOLIN, V.R. **Conceitos Matemáticos em ambiente Logo**. São Carlos: UFSCar, 1994. Dissertação (Mestrado).

GREGOLIN, V. R.; TANCREDI, R. M. S. P. Aproveitando o conhecimento cotidiano para ensinar a divisão. In: **Encontro Paulista de Educação Matemática**, 4, 1996, São Paulo. **Anais**. São Paulo: CROMOSET, 1996. p.47-53.

GUELLI, O. **Matemática**. São Paulo: Ática, 1996. v3 (Quero aprender).

______ Matemática. São Paulo: Ática, 1996. v4 (Quero aprender).

IMENES, L. M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Matemática, 1º grau.** São Paulo: Scipione, 1997. v3 (Novo caminho).

______ Matemática, 1º grau. São Paulo: Scipione, 1997. v4 (Novo caminho).

______ Matemática ao vivo. São Paulo: Scipione, 1995. v4.

KAMII, C. **A criança e o número:** implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 11ª ed., Campinas: Papirus, 1990.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna.** São Paulo: Ibrasa, 1976.

LELIS, I. A. Do ensino de conteúdos aos Saberes do Professor: mudança de Idioma Pedagógico? **Educação & Sociedade**, ano XXII, n.74, p.43-58, abr. 2001. Disponível em <http://cedes-gw.unicamp.br/revista/index.html>. Acesso em 21 fev. 2002.

LIMA, L. O. **O treinamento do professor primário:** formação profissional por unidades de treinamento. Belo Horizonte: Ed. do professor, 1966.

LOPES, A R C. **Conhecimento escolar: Ciência e cotidiano.** Rio de Janeiro: UERJ, 1999.

LÜDKE, M. O Professor, seu saber e sua pesquisa. **Educação & Sociedade** n.74, p.77-96, abr. 2001. Disponível em <http://cedes-gw.unicamp.br/revista/index.html>. Acesso em 21 fev. 2002.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986 (Temas básicos de educação e ensino).

MARIN, A. J. Propondo um novo paradigma para formar professores a partir das dificuldades e necessidades históricas nessa área. In: REALI, A. M. M. R; MIZUKAMI, M. G. N. (Org.). **Formação de professores:** tendências atuais. São Carlos: UFSCar, 1996. p.153-165.

MEIRELLES, M. L.; MIRANDA, M. L. **Construindo a Matemática.** Belo Horizonte: Dimensão, 1993. v4.

MELLO, G. N. Profissão docente. **Revista Ibero Americana de Educação**, n.25, p.147-174, abr. 2001. Disponível em <http://www.campus-oei.org/revista/rie25f.htm>. Acesso em 21 fev. 2002.

MELLO, L. G. (Coord.) **Desempenho do professor em situação de estágio de Prática de Ensino.** Porto Alegre: Centro Regional de Pesquisas Educacionais, 1971.

MONTEIRO, A. M. F. C. Professores: entre Saberes e Práticas. **Educação & Sociedade**, ano XXII, n.74, p.121-142, abr. 2001. Disponível em <http://cedes-gw.unicamp.br/revista/index.html>. Acesso em 21 fev. 2002.

MOREIRA, A. F. B.; LOPES, A.C.; MACEDO, E. **Socialização profissional de professores:** As instituições formadoras. Relatório de pesquisa. Rio de Janeiro, UFRJ, 1998.

MOYSÉS, M. A. A.; COLLARES, C. A. L. O buraco negro entre o conhecimento científico e o mundo real: um objeto essencial de pesquisa. In: REALI, A. M. de M. R.; MIZUKAMI, M. G. N. (Org.). **Formação de professores:** tendências atuais. São Carlos: UFSCar, 1996. p.107-114.

NAZARETH, H. R. de S.; SANCHEZ, L. B. Avaliação matemática nas séries iniciais. **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, n.3, p.51-54, 2º sem. 1994.

NORONHA, O. M. Educação de primeiro grau: do saber fazer ao fazer saber. **Revista Ande**, São Paulo, v.1, n.5, p.37-38, 1982.

NUNES, C M F. Saberes Docentes e Formação de Professores: Um breve panorama da Pesquisa Brasileira. **Educação & Sociedade**, ano XXII, n.74, p.27-42, abr. 2001. Disponível em <http://cedes-gw.unicamp.br/revista/index.html>. Acesso em 21 fev. 2002.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L.S. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática. São Paulo,** ano 6, n.4, p.19-26, 1998.

PAIS, L. C. Transposição didática. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p.13-42 (Série Trilhas).

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1999a.

______ **Construir as competências desde a escola.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999b.

______ **Práticas pedagógicas, profissão docente e formação.** Perspectivas sociológicas. Lisboa: Dom Quixote, 1993.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A Gênese do Número na Criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

PINHEIRO, L. M.; PINHEIRO, M. C. **Prática na formação e no aperfeiçoamento do magistério primário.** São Paulo: Nacional, 1969.

PIRES, C.; NUNES, M.; TOLEDO, M. **Matemática no planeta azul.** São Paulo: Contexto, v3, 1996.

PIRES, N. **Formação do professor primário em oito estados brasileiros.** São Paulo: Centro Regional de Pesquisas Educacionais, 1969.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.) **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.156-185.

São Paulo (Estado). Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática**; 1º grau. 3.ed. São Paulo, SE/CENP, 1988a.

______ **Atividades matemáticas** (AM)**.** 3ª série do 1º grau. São Paulo, SE/CENP, 1988.

______ **Atividades matemáticas** (AM). 4ª série do 1º grau. São Paulo, SE/CENP, 1988.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (Org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. p.77-92.

SOUZA, M. C. R. **Uma nova perspectiva para a formação de regentes do ensino médio.** Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 1970. Dissertação (Mestrado).

TARDIF, M. **Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários.** Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 1999. (mimeografado).

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: Esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria & Educação** n.4, Porto Alegre: Panorâmica, 1991.

TEIXEIRA, M. H. P. B. Formação de professores de grau médio. **Educação Hoje**, São Paulo, v3, p.13-18, mai/jun.1969.

THERRIEN, J. **Uma abordagem para o estudo do saber de experiência das práticas educativas.** ANPED, 1996. Comunicação.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Coordenadoria Geral de Bibliotecas, Editora UNESP. **Normas para Publicações da UNESP.** São Paulo: Editora UNESP, 1994. v.4, parte1.

Anexo I - Atividades desenvolvidas

Atividades de Matemática desenvolvidas nas terceiras e quartas séries, período da tarde, discriminadas por dia.

Extraído dos cadernos de uma aluna da 3ª série D e de um aluno da 4ª série D.

3ª série – conteúdo observado nos cadernos

09/02 → Revisão – exercícios: adições, subtrações (sem reserva), multiplicações.
10/02 → Revisão: escreva como se lê; > ou <; seqüências; decomposição; operações.
12/02 → Revisão: escrita de números; seqüências; tabuadas e divisões correspondentes; completar: 3C+4D+5U=___; problema; Sistema de Numeração Egípcio.
19/02 → Sistemas de Numeração Maia, Romano e Decimal.
23/02 → Escrita de números; ordens (até 3ª); exercícios.
24/02 → Exercícios: sistema de numeração; ordens; sucessor e antecessor; ordem crescente e decrescente; "<", ">"; decomposição; escrever por extenso; problema.
02/03 → Atividades: escrita de números; ordem crescente; formar números (CDU).
03/03 → Exercícios envolvendo dinheiro; decomposição; unidades, dezenas e centenas.
05/03 → Atividade mimeografada: preenchimento de 2 cheques.
09/03 → Números e suas ordens; exercícios.
10/03 → Valor absoluto e valor relativo; exercícios; problema; tarefa mimeografada.
12/03 → Problemas; operações consecutivas com número dado (multiplique por 2...).
16/03 → Números ordinais; exercícios; tarefa mimeografada.
17/03 → Mimeografado: números até unidades de milhar; exercícios; tarefa.
19/03 → Exercícios com números até unidades de milhar; tarefa mimeografada.
23/03 → Ordens; exercícios; dezenas de milhar; exercícios; tarefa mimeografada.
24/03 → Exercício mimeografado: escrita e decomposição de nºs, resolvido e corrigido.
26/03 → Exercícios: ordens, leitura, decomposição (até 6ª ordem).
30/03 → Revisão: decomposição; valor relativo; escrever com algarismos; sucessor e antecessor; composição (7UM+5C+ 8D+2U= __); completar seqüências.
31/03 → Exercícios: composição; decomposição; valor relativo; escrita com algarismos.
07/04 → Adição; atividades: cálculo mental (70+10; 399+100...); adições (14).
09/04 → Arredondamento, aproximações (= e não ≅); tarefa: problemas com adições.
10/04 → Adição por decomposição; cálculo mental; estimativas; tarefa: problemas.
14/04 → Exercícios: adições; ordem crescente; nomes dos termos; propriedades (comutativa e elemento neutro); tarefa mimeografada: adições e problemas.
16/04 → Exercícios: adições; decomposição; leitura de números; multiplicações; problemas; propriedade associativa; quadrados mágicos; tarefa: problemas.
20/04 → Exercícios: escrita/leitura de nºs; adições: quadro de valores (UM, C, D, U).
28/04 → Exercícios: adições; problemas.
04/05 → Multiplicação combinatória; exercícios (professora substituta).
05/05 → Multiplicação por 10, 100 e 1000; exercícios.
12/05 → Exercícios: multiplicação; através de adições; problemas; tabuadas; tarefa.
14/05 → Problemas: multiplicação; tabelas com multiplicações; pintura de produtos.
18/05 → Exercícios: propriedade associativa da multiplicação; tarefa: problemas (x).
19/05 → Multiplicação por 2 algarismos; exercícios.
21/05 → Exercícios: multiplicações.
25/05 → Subtração: termos, algoritmo, exercícios; multiplicações; pintura de produtos.
26/05 → Exercícios: multiplicações; subtrações; adições; problemas ("x"→6; "–"→ 1).
28/05 → (2º caderno) Exercícios: subtrações, multiplicações, adições, divisões.
01/06 → Problemas: subtrações; pintura de resultados e caça palavras: multiplicações.
08/06 → Exercícios: divisões (1 algarismo); subtrações; adições; multiplicações.
09/06 → Exercícios: divisões por 1 algarismo e cociente com 3.
11/06 → Exercícios: divisões; algarismo zero no cociente; pintura de cocientes; tarefa.
15/06 → Exercícios: divisões; multiplicações; subtrações; pintura de produtos; tarefa.
16/06 → Problemas (não subtração); tabuada.

17/06 → Exercícios: divisão; “x” 10, 100 e 1000; dobro, triplo, quádruplo; tarefa.
22/06 → Prova; tarefa mimeografada.
23/06 → Sentenças matemáticas (□); exercícios; problemas com □ (“+” e “–”).
25/06 → Expressões numéricas; exercícios.
29/06 → Prova real: adição, subtração; multiplicação; divisão exata e não; exercícios.
30/06 → Exercícios: operações; sentenças matemáticas; expressões (prof. substituta).
02/07 → Exercícios: operações; sentenças matemáticas; expressões.
06/07 → Ex: Operações; sentenças matemáticas; expressões; tabuada; divisão por 2 alg.
27/07 → Problemas: adição e subtração; operações; divisões por 2 algarismos.
28/07 → Exercícios: divisões por 2 algarismos; tarefa: divisões e multiplicações.
30/07 → Problemas (sem divisão); pintura de produtos (professora substituta).
03/08 → Divisão por 2 algarismos; exercícios; tarefa mimeografada: “÷”, “x” e “–”.
05/08 → Exercícios: divisões; dinheiro.
06/08 → Exercícios: operações (menos adição).
10/08 → Pintar metade (figuras); Atividades Matemáticas (AM3ª_28): repartir; frações.
12/08 → AM_3ª_30: dividir inteiro em partes iguais, recortar e pintar.
13/08 →Frações: termos, leitura, exercícios (xerox).
17/08 → Exercícios: frações; tarefa: problemas: divisão e multiplicação; operações.
18/08 → Fração de um número; exercícios; problemas; tarefa: problemas e operações.
24/08 → Frações: adição, subtração, leitura, de um nº; tarefa: problemas e operações.
29/08 → Problemas com frações.
31/08 → Revisão: operações; sentenças; expressões; frações de n^os^; dobro, (x3, x4).
01/09 → Revisão: leitura de n^os^; frações; operações com naturais; tarefa com naturais.
08/09 → Frações: leitura, problemas; problemas com naturais; com dinheiro.
14/09 → (3º caderno) Frações decimais x n^os^ decimais; leitura, pintar partes; a / b > 1; ordenar.
15/09 → Centésimos: pintar; frações x n^os^ decimais; udc (quadro); correspondências.
17/09 → Centímetros; centavos; milésimos; exercícios. (↑d→décimos; c→centésimos)
22/09 → Revendo: multiplicações e divisões de naturais.
24/09 → m, cm, mm, kg, g, mg, l, ml; medir; problemas; exercícios: naturais e romanos.
29/09 → Polegada, pé, palmo, cúbito e outras (apenas referência; xerox).
01/10 → Medidas: g, kg, mg, t; exercícios; problemas.
08/10 → Metro, cm, mm, km; relações; exercícios.
13/10 → Medidas: litro, ml; exercícios; problemas; leitura de gráfico de barras.
19/10 → Ano, meses, dias, semestre, trimestre, semana, h, min, s, biênio, qüinqüênio, década, século; formas espaciais (xerox): elementos; formas poligonais.
20/10 → Polígonos; elementos; classificação; segmento, reta, semi-reta; exercícios.
22/10 → Paralelas, concorrentes, perpendiculares; horizontais, verticais, inclinadas.
26/10 → Exercícios: unidades de tempo.
27/10 → Simetria com dobras e recortes (folha pintada, dobrada e recortada).
29/10 → Perímetro; exercícios; problemas; mosaico com figuras geométricas planas.
09/11 → Problemas: naturais, medidas.
10/11 → Problemas: naturais; medidas.
11/11 → Tangram: pintar, recortar, colar.
16/11 → Recordando: operações: termos; exercícios: naturais, frações, medidas.
17/11 → Lucro e prejuízo: problemas.
19/11 → Exercícios: operações com naturais; problemas.
26/11 → Problemas: medidas; possibilidades (combinatória): exercícios.
30/11 → Problemas: naturais e medidas.
03/12 → Cálculo mental: operações com naturais.
07/12 → Adições e subtrações; parcelas que faltam em adições.

4ª série – conteúdo observado nos cadernos

10/02 → Numerais ordinais.
11/02 → Numeração romana.
19/02 → Sistema de numeração decimal.
25/02 → Números naturais (<, >, reta).
01/03 → Recordando a adição.
08/03 → Problemas: adição e subtração.
10/03 → Formas geométricas: espaciais, planas; cubo: elementos, planificação.
11/03 → Planificação de um cubo.
12/03 →Tabela de multiplicação → 0 a 10 por 0 a 10.
15/03 → Prova real da adição.
17/03 → Problemas: adição e subtração; valor absoluto e valor relativo.
22/03 → Propriedades da adição: comutativa, associativa, elemento neutro; tabuada.
24/03 → Tabuada e adição; subtração: troca de 1 dezena por 10 unidades.
25/03 → Prova real da subtração.
29/03 → Expressões numéricas: + , – , ( ) , [ ] , { }.
31/03 → Exercícios: expressões; desafio: pirâmide – adições ou subtrações.
05/04 → Revisão: adição e subtração; problemas; tabuada do 1 ao 9.
12/04 → Recordando a multiplicação: termos; correspondência com adições.
14/03 → Atividades de fixação: multiplicações e divisões.
19/04 → Propriedade comutativa da multiplicação.
23/04 → Preenchimento de cheques.
26/04 → Exercícios de fixação: adições, subtrações e multiplicações; problemas.
28/04 → Sólidos geométricos: cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, pirâmide.
29/04 → Atividades: sólidos geométricos.
03/05 → Classificação dos sólidos geométricos: poliedros, corpos redondos.
05/05 → Exercício mimeografado: sólidos geométricos.
10/05 → Exercícios: dobro, metade, triplo, sucessor, antecessor, escrita de números.
12/05 → Propriedade distributiva da multiplicação (fator à esquerda).
13/05 → Atividades: completar algarismos em adições e subtrações; multiplicações.
17/05 → Expressões envolvendo multiplicações: ( ) , [ ] , { }.
20/05 → Exercícios de fixação: expressões.
24/05 → Atividades de fixação: expressões.
26/05 → Divisão: termos, exata e inexata; processos longo e breve; exercícios.
31/05 → Atividades de divisão: divisões e problemas.
02/06 → Exercícios: divisões e problemas.
07/06 → Prova real da divisão.
08/06 → (2º caderno) Exercícios: divisões e problemas.
10/06 → Expressões com as quatro operações (sem sinais de associação).
14/06 → Expressões com sinais de associação.
16/06 → Recordando: divisão por 2 algarismos no divisor. 8 passos: simples e resto 0...
17/06 → Exercícios: divisões e problemas.
21/06 → Geometria: formas planas, planificação. Exercícios: expressões, mosaicos, problemas, escrita de números por extenso.
30/06 → Problemas.
01/07 → Problemas.
26/07 → Sentenças matemáticas: uso de □.
28/07 → Exercícios de fixação: expressões e problemas com □.
29/07 → Atividades: com □ e expressões.

02/08 → Múltiplos de um número.
04/08 → Exercícios: múltiplos.
06/08 → Exercícios de fixação: múltiplos; divisões (mimeografado).
09/08 → Divisores de um número.
11/08 → Mínimo múltiplo comum (mmc): intersecção de conjuntos; fatoração conjunta.
12/08 → Exercícios: mmc.
13/08 → Estudando para a prova (mmc, por fatoração).
18/08 → Números fracionários.
20/08 → Recortar e colar: inteiros divididos em partes:1,1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8.
23/08 → Como ler as frações; exercícios.
25/08 → Frações própria, imprópria e aparente; divisões como frações; exercícios.
26/08 → Recordando a divisão: divisões por 2 algarismos.
30/08 → Números mistos.
01/09 → Exercícios: números mistos, frações impróprias e mmc (use a tabela...).
02/09 → Somando frações; exercícios.
03/09 → Algarismos romanos, leitura de numerais, subtração de frações, tabuada.
08/09 → Adições de frações com denominadores diferentes.
13/09 → Subtração de frações: regra; exercícios.
15/09 → Multiplicação de frações; exercícios; divisão de frações; problema.
17/09 → Exercícios de fixação: operações com frações; problemas.
20/09 → Fração decimal; correspondência com nº decimal. Exercícios.
22/09 → Adição de números decimais; problemas.
23/09 → Subtração de números decimais; problemas.
27/09 → Multiplicação de números decimais; problemas.
29/09 → Exercícios: operações e problemas com números decimais.
01/10 → Problemas com números naturais.
04/10 → Divisão de números decimais: passos; exercícios; problemas.
06/10 → Resolva com atenção: 5 problemas.
13/10 → Adições de números decimais (mimeografado).
14/10 → Subtrações e multiplicações de decimais (mimeografado);
19/10 → Porcentagem; exercícios: fração → %; % → fração.
20/10 → (3º caderno) Atividades: exercícios % de R$.
25/10 → Desafio: problemas.
27/10 → Divisões: de decimais; exatas por 2 algarismos (mimeografado).
28/10 → Atividades com figuras geométricas: pintar, recortar.
29/10 → Atividades com palitos; dobrar e recortar: dizer como ficará a folha recortada.
08/11 → Geometria: pontos, retas; representações; semi-retas; posições de 1 ou 2 retas.
10/11 → Atividades: quebra-cabeça (mimeografado).
11/11 → Quebra-cabeça.
17/11 → Correção de exercícios.
18/11 → Ângulos: definição, elementos; ângulos reto, agudo e obtuso; exercícios.
22/11 → Polígonos; linha poligonal; elementos de um polígono; exercícios.
24/11 → O triângulo; eqüilátero, isósceles; escaleno; exercícios.
25/11 → O perímetro de um triângulo; exercícios.
26/11 → Recordando. 20 operações com números naturais, incluindo divisões exatas.
29/11 → Exercícios: multiplicações e divisões (mimeografado).
01/12 → O quadrilátero: definição, alguns tipos; exercícios: perímetros; pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono; exercícios.
03/12 → Construções geométricas: exercícios (ex: triângulo que tenha um ângulo reto).
06/12 → Área do retângulo; cm^2; exercícios: cálculo de áreas de retângulos.

Anexo II – Conteúdos desenvolvidos

Conteúdos de Matemática desenvolvidos nas terceiras e quartas séries, período da tarde.

Extraídos dos cadernos de uma aluna da 3ª série D e de um aluno da 4ª série D.

<table>
<tr><th colspan="4"></th><th>3ª série</th><th>4ª série</th></tr>
<tr><td>NÚMEROS</td><td>SISTEMAS DE NUMERAÇÃO</td><td></td><td>Egípcio</td><td>menores que 1000</td><td>-</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Maia</td><td>menores que 31</td><td>-</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Romano</td><td>até 30</td><td>até 1.000.000</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Decimal</td><td>até 6ª ordem</td><td>até 15ª ordem (5ª classe)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">quadro de valores (Um, C, D, U)
leitura/escrita; decomposição pelas ordens
comparar; ordenar; valores absoluto e relativo</td></tr>
<tr><td></td><td>ORDINAIS</td><td></td><td></td><td>até 101º</td><td>até 1999º</td></tr>
<tr><td></td><td>NATURAIS</td><td>operações</td><td>adição</td><td>por decomposição</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">nomes dos termos
propriedades elemento neutro, comutativa, associativa
cálculos mental e aproximado; prova real
sentenças matemáticas (□)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>expressões</td><td>expressões: ( ), [ ] e { }</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">problemas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>subtração</td><td colspan="2">nomes dos termos; prova real
sentenças matemáticas (□)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>expressões</td><td>expressões: ( ), [ ] e { }</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">problemas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>multiplicação</td><td colspan="2">nomes dos termos; tabuada
correspondência com adições
propriedades comutativa e associativa</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>combinatória</td><td>múltiplos
propriedade distributiva
expressões: ( ), [ ] e { }
sentenças matemáticas (□)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">problemas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>divisão</td><td colspan="2">nomes dos termos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>por até 2 algarismos</td><td>por até 3 algarismos
divisores
expressões: ( ), [ ] e { }
sentenças matemáticas (□)
prova real</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">problemas</td></tr>
<tr><td></td><td>RACIONAIS</td><td>frações</td><td></td><td colspan="2">termos; leitura; representação gráfica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>de um número (regra)</td><td>própria, imprópria, aparente
mínimo múltiplo comum</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>operações</td><td>adição, sub</td><td>mesmo denominador</td><td>denominadores quaisquer</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>mult, divisão</td><td>-</td><td>regra</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">problemas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>decimais</td><td></td><td colspan="2">leitura; representação gráfica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>fr. /10 /100 /1000 x nºs dec.</td><td>frações x nºs decimais</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">dinheiro</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>operações</td><td>-</td><td>adic., sub., mult., divisão</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-</td><td>problemas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>números mistos</td><td></td><td>-</td><td>número misto x fração</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>porcentagem</td><td></td><td>-</td><td>fração /100 x %</td></tr>
<tr><td>MEDIDAS</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">m, cm, kg, ano, semana, h, min</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>mm, km, g, mg, t, l, ml, s, semestre, trimestre
dia, mês, biênio, qüinquênio, década, século</td><td>dm
(m, cm, km) quadrados</td></tr>
<tr><td>GEOMETRIA</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">cubo, paralelepípedo, esfera, cilindro, cone, pirâmide
polígonos; elementos; classificação; perímetro
pontos, retas, semi-reta, posições de 1 ou 2 retas
simetria</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>ângulos: def., elementos
reto, agudo, obtuso
formas planas: planificação
triângulo: definição, tipos
quadrilátero: definição, tipos
construções geométricas
(ex: triângulo com âng. reto)
área de retângulo</td></tr>
<tr><td>TABELAS e GRÁFICOS</td><td></td><td></td><td></td><td>calendário; multiplicação
barras: sucos; leite</td><td>multiplicação</td></tr>
</table>

Conteúdo estudado nas terceiras e quartas séries